

Wybrane elementy matematyki wyższej

Karol Kołodziej

Zestaw 1

1. Funkcja Lagrange'a punktu materialnego dana jest wzorem:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x^2 + y^2, z).$$

Pokazać, że jest ona niezmiennicza przy obrotach względem osi Oz i korzystając z twierdzenia Nöther skonstruować odpowiednią wielkość zachowaną. Zadanie rozwiązać w układzie:

- (a) kartezjańskim,
- (b) cylindrycznym.

Co można powiedzieć o współrzędnej kątowej φ w układzie cylindrycznym?

2. Pokazać, że wektor Lenza

$$\vec{\Lambda} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m\alpha} - \frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem położenia ciała względem centrum, tzn. źródła siły centralnej, $\vec{p} = m\vec{v}$ jego pędem, a $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ momentem pędu, jest wielkością zachowaną w potencjale Keplera $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$.

Wskazówka. Skorzystać z faktu, że siła wiąże się z potencjałem wzorem $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r)$, a następnie pokazać, że $\dot{\vec{\Lambda}} = 0$.