

Grupa Lorentza

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

$SU(2)$ i grupa obrotów

Dowolny obrót przestrzenny w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ma postać

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{lub} \quad \vec{r}' = R\vec{r},$$

gdzie R jest macierzą obrotu, a (x, y, z) są współrzędnymi kartezjańskimi dowolnego punktu $P \in \mathbb{R}^3$.

Ponieważ przy obrotach odległość punktu P od początku układu współrzędnych nie ulega zmianie, to

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{lub} \quad \vec{r}'^T \vec{r}' = \vec{r}^T \vec{r},$$

gdzie T oznacza transpozycję.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Dowolny obrót przestrzenny w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ma postać

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{lub} \quad \vec{r}' = R\vec{r},$$

gdzie R jest macierzą obrotu, a (x, y, z) są współrzędnymi kartezjańskimi dowolnego punktu $P \in \mathbb{R}^3$.

Ponieważ przy obrotach odległość punktu P od początku układu współrzędnych nie ulega zmianie, to

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{lub} \quad \vec{r}'^T \vec{r}' = \vec{r}^T \vec{r},$$

gdzie T oznacza transpozycję. Zatem

$$\vec{r}'^T R^T R \vec{r} = \vec{r}'^T \vec{r} \Leftrightarrow R^T R = \mathbb{I},$$

tzn. R jest macierzą ortogonalną 3×3 .

$SU(2)$ i grupa obrotów

Dowolny obrót przestrzenny w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ma postać

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{lub} \quad \vec{r}' = R\vec{r},$$

gdzie R jest macierzą obrotu, a (x, y, z) są współrzędnymi kartezjańskimi dowolnego punktu $P \in \mathbb{R}^3$.

Ponieważ przy obrotach odległość punktu P od początku układu współrzędnych nie ulega zmianie, to

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{lub} \quad \vec{r}'^T \vec{r}' = \vec{r}^T \vec{r},$$

gdzie T oznacza transpozycję. Zatem

$$\vec{r}'^T R^T R \vec{r} = \vec{r}'^T \vec{r} \Leftrightarrow R^T R = \mathbb{I},$$

tzn. R jest macierzą ortogonalną 3×3 .

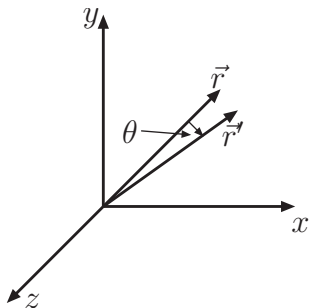
$SU(2)$ i grupa obrotów

Macierze ortogonalne tworzą grupę. Jeżeli R_1 i R_2 są macierzami ortogonalnymi, to $R_1 R_2$ jest macierzą ortogonalną:

$$(R_1 R_2)^T R_1 R_2 = R_2^T R_1^T R_1 R_2 = \mathbb{I}.$$

Tę grupę oznaczamy przez $O(3)$.

Zadanie. Pokazać spełnienie wszystkich postulatów grupowych.



Przykład. Aktywny obrót, tzn. obracamy wektor $\vec{r}$ a osie układu współrzędnych pozostają niezmiennicze, o kąt θ względem osi Oz .

Macierze obrotów w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ tworzą grupę $O(n)$.

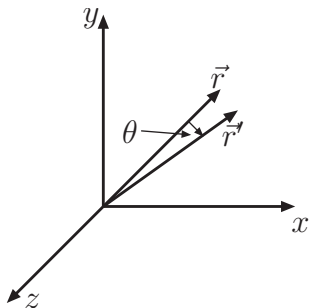
$SU(2)$ i grupa obrotów

Macierze ortogonalne tworzą grupę. Jeżeli R_1 i R_2 są macierzami ortogonalnymi, to $R_1 R_2$ jest macierzą ortogonalną:

$$(R_1 R_2)^T R_1 R_2 = R_2^T R_1^T R_1 R_2 = \mathbb{I}.$$

Tę grupę oznaczamy przez $O(3)$.

Zadanie. Pokazać spełnienie wszystkich postulatów grupowych.



Przykład. Aktywny obrót, tzn. obracamy wektor $\vec{r}$ a osie układu współrzędnych pozostają niezmiennicze, o kąt θ względem osi Oz .

Macierze obrotów w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ tworzą grupę $O(n)$.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Przy aktywnym obrocie o kąt θ względem osi Oz zachodzi związek

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

gdzie macierz obrotu ma postać

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analogicznie macierze obrotu wokół osi Ox i Oy mają postać

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad R_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Przy aktywnym obrocie o kąt θ względem osi Oz zachodzi związek

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

gdzie macierz obrotu ma postać

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analogicznie macierze obrotu wokół osi Ox i Oy mają postać

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad R_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Zauważmy, że te macierze nie komutują ze sobą, np.

$$R_x(\varphi)R_z(\theta) \neq R_z(\theta)R_x(\varphi),$$

co oznacza, że grupa obrotów $O(3)$ jest grupą nieabelową.

$O(3)$ jest grupą Liego, tzn. grupą ciągłą z nieskończoną liczbą elementów, w której wartości parametrów, w tym przypadku kątów obrotu, tworzą zbiór kontinuum.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Zauważmy, że te macierze nie komutują ze sobą, np.

$$R_x(\varphi)R_z(\theta) \neq R_z(\theta)R_x(\varphi),$$

co oznacza, że grupa obrotów $O(3)$ jest grupą nieabelową.

$O(3)$ jest grupą Liego, tzn. grupą ciągłą z nieskończoną liczbą elementów, w której wartości parametrów, w tym przypadku kątów obrotu, tworzą zbiór kontinuum.

Łatwo się przekonać, że dowolny obrót w $\mathbb{R}^3$ jest zadany przez 3 kąty, gdyż macierz R ma 9 elementów, a warunek $R^T R = \mathbb{I}$ nakłada na nie 6 niezależnych warunków. Jako te parametry można wybrać np. kąty Eulera.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Zauważmy, że te macierze nie komutują ze sobą, np.

$$R_x(\varphi)R_z(\theta) \neq R_z(\theta)R_x(\varphi),$$

co oznacza, że grupa obrotów $O(3)$ jest grupą nieabelową.

$O(3)$ jest grupą Liego, tzn. grupą ciągłą z nieskończoną liczbą elementów, w której wartości parametrów, w tym przypadku kątów obrotu, tworzą zbiór kontinuum.

Łatwo się przekonać, że dowolny obrót w $\mathbb{R}^3$ jest zadany przez 3 kąty, gdyż macierz R ma 9 elementów, a warunek $R^T R = \mathbb{I}$ nakłada na nie 6 niezależnych warunków. Jako te parametry można wybrać np. kąty Eulera.

3 parametrom odpowiadają 3 **generatory** określone równaniami

$$J_z = \frac{1}{i} \frac{dR_z(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{1}{i} \frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Zauważmy, że te macierze nie komutują ze sobą, np.

$$R_x(\varphi)R_z(\theta) \neq R_z(\theta)R_x(\varphi),$$

co oznacza, że grupa obrotów $O(3)$ jest grupą nieabelową.

$O(3)$ jest grupą Liego, tzn. grupą ciągłą z nieskończoną liczbą elementów, w której wartości parametrów, w tym przypadku kątów obrotu, tworzą zbiór kontinuum.

Łatwo się przekonać, że dowolny obrót w $\mathbb{R}^3$ jest zadany przez 3 kąty, gdyż macierz R ma 9 elementów, a warunek $R^T R = \mathbb{I}$ nakłada na nie 6 niezależnych warunków. Jako te parametry można wybrać np. kąty Eulera.

3 parametrom odpowiadają 3 **generatory** określone równaniami

$$J_z = \frac{1}{i} \frac{dR_z(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{1}{i} \frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

$$J_x = \frac{1}{i} \frac{dR_x(\varphi)}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{1}{i} \frac{d}{d\varphi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \Big|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$
$$J_y = \frac{1}{i} \frac{dR_y(\psi)}{d\psi} \Big|_{\psi=0} = \frac{1}{i} \frac{d}{d\psi} \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \Big|_{\psi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Generatory J_x , J_y , i J_z są hermitowskie, a obroty infinitezymalne zadane są przez związki

$$R_z(\delta\theta) = 1 + iJ_z\delta\theta, \quad R_x(\delta\varphi) = 1 + iJ_x\delta\varphi, \quad R_y(\delta\psi) = 1 + iJ_y\delta\psi.$$

Obliczmy komutator

$$[J_x, J_y] = J_x J_y - J_y J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

$$J_x = \frac{1}{i} \frac{dR_x(\varphi)}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{1}{i} \frac{d}{d\varphi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \Big|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$
$$J_y = \frac{1}{i} \frac{dR_y(\psi)}{d\psi} \Big|_{\psi=0} = \frac{1}{i} \frac{d}{d\psi} \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \Big|_{\psi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Generatory J_x, J_y , i J_z są hermitowskie, a obroty infinitezymalne zadane są przez związki

$$R_z(\delta\theta) = 1 + iJ_z\delta\theta, \quad R_x(\delta\varphi) = 1 + iJ_x\delta\varphi, \quad R_y(\delta\psi) = 1 + iJ_y\delta\psi.$$

Obliczmy komutator

$$[J_x, J_y] = J_x J_y - J_y J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Zatem

$$[J_x, J_y] = J_x J_y - J_y J_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iJ_z.$$

Zadanie. Pokazać, że związki komutacyjne dla generatorów obrotów mają postać

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k,$$

gdzie utożsamiliśmy $J_1 = J_x$, $J_2 = J_y$ i $J_3 = J_z$.

Zatem

$$[J_x, J_y] = J_x J_y - J_y J_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iJ_z.$$

Zadanie. Pokazać, że związki komutacyjne dla generatorów obrotów mają postać

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k,$$

gdzie utożsamiliśmy $J_1 = J_x$, $J_2 = J_y$ i $J_3 = J_z$.

Zauważmy, że gdyby w definicji generatorów J_x , J_y i J_z wprowadzić czynnik $\hbar$, to otrzymalibyśmy reguły komutacji dla operatorów momentu pędu

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k.$$

Tak więc operatory momentu pędu są generatorami obrotów w $\mathbb{R}^3$.

Zatem

$$[J_x, J_y] = J_x J_y - J_y J_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iJ_z.$$

Zadanie. Pokazać, że związki komutacyjne dla generatorów obrotów mają postać

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k,$$

gdzie utożsamiliśmy $J_1 = J_x$, $J_2 = J_y$ i $J_3 = J_z$.
Zauważmy, że gdyby w definicji generatorów J_x , J_y i J_z wprowadzić czynnik $\hbar$, to otrzymalibyśmy reguły komutacji dla operatorów momentu pędu

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k.$$

Tak więc operatory momentu pędu są generatorami obrotów w $\mathbb{R}^3$.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Powyższe związki komutacyjne pozwalają wyznaczyć komutator dowolnych dwóch operatorów obrotów infinitezymalnych.

Macierze obrotów skończonych otrzymamy składając obroty infinitezymalne, np. obrót wokół osi Oz o kąt $\theta = N\delta\theta$, gdzie $N \rightarrow \infty$ otrzymamy w następujący sposób.

$$R_z(\theta) = [R_z(\delta\theta)]^N = \left(\mathbb{I} + iJ_z \frac{\theta}{N} \right)^N \rightarrow e^{iJ_z\theta}.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Powyższe związki komutacyjne pozwalają wyznaczyć komutator dowolnych dwóch operatorów obrotów infinitezymalnych.

Macierze obrotów skończonych otrzymamy składając obroty infinitezymalne, np. obrót wokół osi Oz o kąt $\theta = N\delta\theta$, gdzie $N \rightarrow \infty$ otrzymamy w następujący sposób.

$$R_z(\theta) = [R_z(\delta\theta)]^N = \left(\mathbb{I} + iJ_z \frac{\theta}{N} \right)^N \rightarrow e^{iJ_z\theta}.$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$\begin{aligned} e^{iJ_z\theta} &= \mathbb{I} + iJ_z\theta - J_z^2 \frac{\theta^2}{2!} - iJ_z^3 \frac{\theta^3}{3!} + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &+ \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta^2}{2!} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Powyższe związki komutacyjne pozwalają wyznaczyć komutator dowolnych dwóch operatorów obrotów infinitezymalnych.

Macierze obrotów skończonych otrzymamy składając obroty infinitezymalne, np. obrót wokół osi Oz o kąt $\theta = N\delta\theta$, gdzie $N \rightarrow \infty$ otrzymamy w następujący sposób.

$$R_z(\theta) = [R_z(\delta\theta)]^N = \left(\mathbb{I} + iJ_z \frac{\theta}{N} \right)^N \rightarrow e^{iJ_z\theta}.$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$\begin{aligned} e^{iJ_z\theta} &= \mathbb{I} + iJ_z\theta - J_z^2 \frac{\theta^2}{2!} - iJ_z^3 \frac{\theta^3}{3!} + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &+ \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta^2}{2!} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

Zadanie. Pokazać, że po dodaniu wszystkich powyższych macierzy otrzymamy wzór

$$e^{iJ_z\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_z(\theta).$$

Macierz obrotu skończonego wokół osi $\vec{n}$ o kąt θ ma oczywiście postać

$$R_{\vec{n}}(\theta) = e^{i\vec{J}\cdot\vec{\theta}} = e^{i\vec{J}\cdot\vec{n}\theta},$$

gdzie $\vec{\theta} = \vec{n}\theta$, $|\vec{n}| = 1$.

Zadanie. Pokazać, że po dodaniu wszystkich powyższych macierzy otrzymamy wzór

$$e^{iJ_z\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_z(\theta).$$

Macierz obrotu skończonego wokół osi $\vec{n}$ o kąt θ ma oczywiście postać

$$R_{\vec{n}}(\theta) = e^{i\vec{J}\cdot\vec{\theta}} = e^{i\vec{J}\cdot\vec{n}\theta},$$

gdzie $\vec{\theta} = \vec{n}\theta$, $|\vec{n}| = 1$.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Rozważmy teraz grupę $SU(2)$, czyli grupę macierzy unitarnych 2×2 z jednostkowym wyznacznikiem

$$UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}, \quad \det U = 1.$$

Założmy, że

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Zadanie. Pokazać, że warunki $U^\dagger = U^{-1}$ i $\det U = 1$ będą spełnione jeśli

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

skąd otrzymujemy dwa niezależne warunki $a^* = d$, $b^* = -c$.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Rozważmy teraz grupę $SU(2)$, czyli grupę macierzy unitarnych 2×2 z jednostkowym wyznacznikiem

$$UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}, \quad \det U = 1.$$

Założmy, że

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Zadanie. Pokazać, że warunki $U^\dagger = U^{-1}$ i $\det U = 1$ będą spełnione jeśli

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

skąd otrzymujemy dwa niezależne warunki $a^* = d$, $b^* = -c$.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Wtedy

$$\det U = ad - bc = aa^* + bb^* = |a|^2 + |b|^2,$$

gdzie uwzględniliśmy związki $d = a^*$ i $c = -b^*$, a macierz U przyjmuje postać

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Macierz U traktujemy jako macierz odwzorowania w przestrzeni spinorów

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C},$$

zdefiniowanego następująco

$$\xi \rightarrow U\xi, \quad \xi^\dagger \rightarrow \xi^\dagger U^\dagger, \quad \text{gdzie} \quad \xi^\dagger = (\xi_1^*, \xi_2^*).$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Wtedy

$$\det U = ad - bc = aa^* + bb^* = |a|^2 + |b|^2,$$

gdzie uwzględniliśmy związki $d = a^*$ i $c = -b^*$, a macierz U przyjmuje postać

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Macierz U traktujemy jako macierz odwzorowania w przestrzeni spinorów

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C},$$

zdefiniowanego następująco

$$\xi \rightarrow U\xi, \quad \xi^\dagger \rightarrow \xi^\dagger U^\dagger, \quad \text{gdzie} \quad \xi^\dagger = (\xi_1^*, \xi_2^*).$$

$$\text{Oczywiście } \xi^\dagger \xi \rightarrow \xi^\dagger U^\dagger U \xi = \xi^\dagger \xi = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2,$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Wtedy

$$\det U = ad - bc = aa^* + bb^* = |a|^2 + |b|^2,$$

gdzie uwzględniliśmy związki $d = a^*$ i $c = -b^*$, a macierz U przyjmuje postać

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Macierz U traktujemy jako macierz odwzorowania w przestrzeni spinorów

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C},$$

zdefiniowanego następująco

$$\xi \rightarrow U\xi, \quad \xi^\dagger \rightarrow \xi^\dagger U^\dagger, \quad \text{gdzie} \quad \xi^\dagger = (\xi_1^*, \xi_2^*).$$

Oczywiście $\xi^\dagger \xi \rightarrow \xi^\dagger U^\dagger U \xi = \xi^\dagger \xi = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2$,

$SU(2)$ i grupa obrotów

a więc wyrażenie $\xi^\dagger \xi$ jest niezmiennikiem tak zdefiniowanego odwzorowania.

Jednocześnie dla iloczynu zewnętrznego mamy

$$\xi \otimes \xi^\dagger = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \otimes (\xi_1^*, \xi_2^*) = \begin{pmatrix} |\xi_1|^2 & \xi_1 \xi_2^* \\ \xi_2 \xi_1^* & |\xi_2|^2 \end{pmatrix} \rightarrow U \xi \otimes \xi^\dagger U^\dagger.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

a więc wyrażenie $\xi^\dagger \xi$ jest niezmiennikiem tak zdefiniowanego odwzorowania.

Jednocześnie dla iloczynu zewnętrznego mamy

$$\xi \otimes \xi^\dagger = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \otimes (\xi_1^*, \xi_2^*) = \begin{pmatrix} |\xi_1|^2 & \xi_1 \xi_2^* \\ \xi_2 \xi_1^* & |\xi_2|^2 \end{pmatrix} \rightarrow U \xi \otimes \xi^\dagger U^\dagger.$$

Zauważmy, że macierz $\xi \otimes \xi^\dagger$ jest hermitowska.

$SU(2)$ i grupa obrotów

a więc wyrażenie $\xi^\dagger \xi$ jest niezmiennikiem tak zdefiniowanego odwzorowania.

Jednocześnie dla iloczynu zewnętrznego mamy

$$\xi \otimes \xi^\dagger = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \otimes (\xi_1^*, \xi_2^*) = \begin{pmatrix} |\xi_1|^2 & \xi_1 \xi_2^* \\ \xi_2 \xi_1^* & |\xi_2|^2 \end{pmatrix} \rightarrow U \xi \otimes \xi^\dagger U^\dagger.$$

Zauważmy, że macierz $\xi \otimes \xi^\dagger$ jest hermitowska.

Ze związków

$$\xi \rightarrow U \xi, \quad \xi^\dagger \rightarrow \xi^\dagger U^\dagger$$

wynika, że spinory ξ i $\xi^\dagger$ przekształcają się inaczej przy odwzorowaniu U . Jednak z warunku unitarności macierzy U wynika, że spinory

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} -\xi_2^* \\ \xi_1^* \end{pmatrix}$$

przekształcają się tak samo przy $U \in SU(2)$.

$SU(2)$ i grupa obrotów

a więc wyrażenie $\xi^\dagger \xi$ jest niezmiennikiem tak zdefiniowanego odwzorowania.

Jednocześnie dla iloczynu zewnętrznego mamy

$$\xi \otimes \xi^\dagger = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \otimes (\xi_1^*, \xi_2^*) = \begin{pmatrix} |\xi_1|^2 & \xi_1 \xi_2^* \\ \xi_2 \xi_1^* & |\xi_2|^2 \end{pmatrix} \rightarrow U \xi \otimes \xi^\dagger U^\dagger.$$

Zauważmy, że macierz $\xi \otimes \xi^\dagger$ jest hermitowska.

Ze związków

$$\xi \rightarrow U \xi, \quad \xi^\dagger \rightarrow \xi^\dagger U^\dagger$$

wynika, że spinory ξ i $\xi^\dagger$ przekształcają się inaczej przy odwzorowaniu U . Jednak z warunku unitarności macierzy U wynika, że spinory

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} -\xi_2^* \\ \xi_1^* \end{pmatrix}$$

przekształcają się tak samo przy $U \in SU(2)$.

Rzeczywiście, dokonajmy transformacji obu spinorów

$$\begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\xi_1 + b\xi_2 \\ -b^*\xi_1 + a^*\xi_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -\xi_2^{*'} \\ \xi_1^{*'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\xi_2^* \\ \xi_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\xi_2^* + b\xi_1^* \\ b^*\xi_2^* + a^*\xi_1^* \end{pmatrix}.$$

Z drugiego równania macierzowego wynikają związki transformacyjne

$$\begin{aligned} -\xi_2^{*'} &= -a\xi_2^* + b\xi_1^* &\Rightarrow \xi_2' &= -b^*\xi_1 + a^*\xi_2 \\ \xi_1^{*'} &= b^*\xi_2^* + a^*\xi_1^* &\Rightarrow \xi_1' &= a\xi_1 + b\xi_2, \end{aligned}$$

które po sprzężeniu zespolonym obu równań i podzieleniu pierwszego równania przez (-1) są takie same jak związki transformacyjne wynikające z pierwszego równania macierzowego.

Zauważmy, że zachodzi związek

$$\begin{pmatrix} -\xi_2^* \\ \xi_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{pmatrix} = \zeta \xi^*,$$

gdzie

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

W ten sposób pokazaliśmy, że spinory ξ i $\zeta \xi^*$ transformują się tak samo przy przekształceniach z grupy $SU(2)$, co symbolicznie zapisujemy w następujący sposób

$$\xi \sim \zeta \xi^*.$$

Zauważmy, że zachodzi związek

$$\begin{pmatrix} -\xi_2^* \\ \xi_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{pmatrix} = \zeta \xi^*,$$

gdzie

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

W ten sposób pokazaliśmy, że spinory ξ i $\zeta \xi^*$ transformują się tak samo przy przekształceniach z grupy $SU(2)$, co symbolicznie zapisujemy w następujący sposób

$$\xi \sim \zeta \xi^*.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Stąd wynika, że zachodzą związki

$$\xi^\dagger \sim (\zeta \xi)^T = \begin{pmatrix} -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix},$$

$$\xi \otimes \xi^\dagger \sim \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_1 \xi_2 & \xi_1^2 \\ -\xi_2^2 & \xi_1 \xi_2 \end{pmatrix} \equiv -H.$$

Zauważmy, że macierz H jest bezśladowa, a przy przekształceniach z grupy $SU(2)$ transformuje się następująco

$$H = -\xi \otimes \xi^\dagger \rightarrow -U\xi \otimes \xi^\dagger U^\dagger = U H U^\dagger.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Stąd wynika, że zachodzą związki

$$\xi^\dagger \sim (\zeta \xi)^T = \begin{pmatrix} -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix},$$

$$\xi \otimes \xi^\dagger \sim \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_1 \xi_2 & \xi_1^2 \\ -\xi_2^2 & \xi_1 \xi_2 \end{pmatrix} \equiv -H.$$

Zauważmy, że macierz H jest bezśladowa, a przy przekształceniach z grupy $SU(2)$ transformuje się następująco

$$H = -\xi \otimes \xi^\dagger \rightarrow -U\xi \otimes \xi^\dagger U^\dagger = U H U^\dagger.$$

Z wektora położenia $\vec{r} = (x, y, z)$ możemy utworzyć macierz 2×2

$$h = \vec{r} \cdot \vec{\sigma} = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix},$$

gdzie $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ są macierzami Pauliego

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Stąd wynika, że zachodzą związki

$$\xi^\dagger \sim (\zeta \xi)^T = \begin{pmatrix} -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix},$$

$$\xi \otimes \xi^\dagger \sim \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_1 \xi_2 & \xi_1^2 \\ -\xi_2^2 & \xi_1 \xi_2 \end{pmatrix} \equiv -H.$$

Zauważmy, że macierz H jest bezśladowa, a przy przekształceniach z grupy $SU(2)$ transformuje się następująco

$$H = -\xi \otimes \xi^\dagger \rightarrow -U\xi \otimes \xi^\dagger U^\dagger = U H U^\dagger.$$

Z wektora położenia $\vec{r} = (x, y, z)$ możemy utworzyć macierz 2×2

$$h = \vec{r} \cdot \vec{\sigma} = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix},$$

gdzie $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ są macierzami Pauliego

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Oczywiście macierz h jest hermitowska, a przekształcenie

$$h \rightarrow h' = UhU^\dagger$$

zachowuje hermitowskość, gdyż

$$h'^\dagger = (UhU^\dagger)^\dagger = U^\dagger h^\dagger U = UhU^\dagger = h'.$$

Ponieważ macierze $U \in SU(2)$, to $\det U = 1$, a zatem

$$\det(h') = \det(U)\det(h)\det(U^\dagger) = \det(h) = -z^2 - x^2 - y^2,$$

a więc jeśli uwzględnimy, że

$$h' = \vec{r}' \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} \Rightarrow \det(h') = -z'^2 - x'^2 - y'^2$$

to otrzymamy

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Oczywiście macierz h jest hermitowska, a przekształcenie

$$h \rightarrow h' = UhU^\dagger$$

zachowuje hermitowskość, gdyż

$$h'^\dagger = (UhU^\dagger)^\dagger = U^{\dagger\dagger} h^\dagger U^\dagger = UhU^\dagger = h'.$$

Ponieważ macierze $U \in SU(2)$, to $\det U = 1$, a zatem

$$\det(h') = \det(U)\det(h)\det(U^\dagger) = \det(h) = -z^2 - x^2 - y^2,$$

a więc jeśli uwzględnimy, że

$$h' = \vec{r}' \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} \Rightarrow \det(h') = -z'^2 - x'^2 - y'^2$$

to otrzymamy

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Widzimy, że rozważane przekształcenie unitarne $U \in SU(2)$ macierzy h indukuje obrót wektora położenia $\vec{r}$.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Oczywiście macierz h jest hermitowska, a przekształcenie

$$h \rightarrow h' = UhU^\dagger$$

zachowuje hermitowskość, gdyż

$$h'^\dagger = (UhU^\dagger)^\dagger = U^{\dagger\dagger} h^\dagger U^\dagger = UhU^\dagger = h'.$$

Ponieważ macierze $U \in SU(2)$, to $\det U = 1$, a zatem

$$\det(h') = \det(U)\det(h)\det(U^\dagger) = \det(h) = -z^2 - x^2 - y^2,$$

a więc jeśli uwzględnimy, że

$$h' = \vec{r}' \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} \Rightarrow \det(h') = -z'^2 - x'^2 - y'^2$$

to otrzymamy

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Widzimy, że rozważane przekształcenie unitarne $U \in SU(2)$ macierzy h indukuje obrót wektora położenia $\vec{r}$.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Utożsamiając macierze H i h zauważamy, że przekształcenie z grupy $SU(2)$ nad spinorem

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

jest równoważne przekształceniu z grupy $O(3)$ nad wektorem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ponieważ

$$H = \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_2 & -\xi_1^2 \\ \xi_2^2 & -\xi_1 \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \text{a} \quad h = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}$$

to

$$x = \frac{1}{2}(\xi_2^2 - \xi_1^2), \quad y = \frac{1}{2i}(\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad z = \xi_1 \xi_2.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Utożsamiając macierze H i h zauważamy, że przekształcenie z grupy $SU(2)$ nad spinorem

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

jest równoważne przekształceniu z grupy $O(3)$ nad wektorem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ponieważ

$$H = \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_2 & -\xi_1^2 \\ \xi_2^2 & -\xi_1 \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \text{a} \quad h = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}$$

to

$$x = \frac{1}{2}(\xi_2^2 - \xi_1^2), \quad y = \frac{1}{2i}(\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad z = \xi_1 \xi_2.$$

Przekształcenie $U \in SU(2)$ ma postać ogólną

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

a jego parametry a i b są liczbami zespolonymi, dla których $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

W takim razie macierz U ma 3 niezależne parametry rzeczywiste, dokładnie tyle ile kątów ma przekształcenie z grupy $O(3)$.

Przekształcenie $U \in SU(2)$ ma postać ogólną

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

a jego parametry a i b są liczbami zespolonymi, dla których $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

W takim razie macierz U ma 3 niezależne parametry rzeczywiste, dokładnie tyle ile kątów ma przekształcenie z grupy $O(3)$.

Znajdźmy związki pomiędzy tymi parametrami. W tym celu wykorzystajmy związki pomiędzy składowymi spinora ξ i wektora $\vec{r}$ po transformacji

$$x' = \frac{1}{2}(\xi_2'^2 - \xi_1'^2), \quad y' = \frac{1}{2i}(\xi_1'^2 + \xi_2'^2), \quad z' = \xi_1'\xi_2'$$

Przekształcenie $U \in SU(2)$ ma postać ogólną

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

a jego parametry a i b są liczbami zespolonymi, dla których $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

W takim razie macierz U ma 3 niezależne parametry rzeczywiste, dokładnie tyle ile kątów ma przekształcenie z grupy $O(3)$.

Znajdźmy związki pomiędzy tymi parametrami. W tym celu wykorzystajmy związki pomiędzy składowymi spinora ξ i wektora $\vec{r}$ po transformacji

$$x' = \frac{1}{2}(\xi_2'^2 - \xi_1'^2), \quad y' = \frac{1}{2i}(\xi_1'^2 + \xi_2'^2), \quad z' = \xi_1'\xi_2'$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

oraz związki transformacyjne

$$\xi'_1 = a\xi_1 + b\xi_2 \Rightarrow \xi_1'^2 = a^2\xi_1^2 + b^2\xi_2^2 + 2ab\xi_1\xi_2,$$

$$\xi'_2 = -b^*\xi_1 + a^*\xi_2 \Rightarrow \xi_2'^2 = b^{*2}\xi_1^2 + a^{*2}\xi_2^2 - 2a^*b^*\xi_1\xi_2.$$

Ponadto pamiętając, że z porównania macierzy H i h wynikają związki

$$\xi_1^2 = -x + iy, \quad \xi_2^2 = x + iy, \quad \xi_1\xi_2 = z,$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}(\xi_2'^2 - \xi_1'^2) = \frac{1}{2}(b^{*2} - a^2)\xi_1^2 + \frac{1}{2}(a^{*2} - b^2)\xi_2^2 - (a^*b^* + ab)\xi_1\xi_2 \\ &= \frac{1}{2}(b^{*2} - a^2)(-x + iy) + \frac{1}{2}(a^{*2} - b^2)(x + iy) - (a^*b^* + ab)z \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} - b^2 - b^{*2})x - \frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} + b^2 - b^{*2})y - (a^*b^* + ab)z. \end{aligned}$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Zadanie. Postępując analogicznie pokazać, że

$$y' = \frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} - b^2 + b^{*2})x + \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} + b^2 + b^{*2})y - i(ab - a^*b^*)z,$$
$$z' = (ab^* + ba^*)x + i(ba^* - ab^*)y + (|a|^2 - |b|^2)z.$$

Przyjmijmy, że $a = e^{i\frac{\alpha}{2}}$, $b = 0$, co oczywiście spełnia warunek $|a|^2 + |b|^2 = 1$, wtedy nasze związki przyjmują postać

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha,$$

$$z' = z,$$

co odpowiada związkom transformacyjnym dla obrotu o kąt α wokół osi Oz

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Zadanie. Postępując analogicznie pokazać, że

$$\begin{aligned}y' &= \frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} - b^2 + b^{*2})x + \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} + b^2 + b^{*2})y - i(ab - a^*b^*)z, \\z' &= (ab^* + ba^*)x + i(ba^* - ab^*)y + (|a|^2 - |b|^2)z.\end{aligned}$$

Przyjmijmy, że $a = e^{i\frac{\alpha}{2}}$, $b = 0$, co oczywiście spełnia warunek $|a|^2 + |b|^2 = 1$, wtedy nasze związki przyjmują postać

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \\z' &= z,\end{aligned}$$

co odpowiada związkom transformacyjnym dla obrotu o kąt α wokół osi Oz

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Widzimy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy macierzami $U \in SU(2)$ i $R \in O(3)$

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \leftrightarrow R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wykorzystując generatory

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

możemy napisać

$$U = e^{i\sigma_z \frac{\alpha}{2}}, \quad R = e^{iJ_z \alpha},$$

gdzie jak zwykle funkcję od macierzy rozumiemy jako jej rozwinięcie w szereg potęgowy.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Widzimy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy macierzami $U \in SU(2)$ i $R \in O(3)$

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \leftrightarrow R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wykorzystując generatory

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

możemy napisać

$$U = e^{i\sigma_z \frac{\alpha}{2}}, \quad R = e^{iJ_z \alpha},$$

gdzie jak zwykle funkcję od macierzy rozumiemy jako jej rozwinięcie w szereg potęgowy.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Zadanie. Pokazać, że przyjmując $a = \cos \frac{\beta}{2}$ i $b = \sin \frac{\beta}{2}$ w związkach transformacyjnych

$$x' = \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} - b^2 - b^{*2})x - \frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} + b^2 - b^{*2})y - (a^*b^* + ab)z,$$

$$y' = \frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} - b^2 + b^{*2})x + \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} + b^2 + b^{*2})y - i(ab - a^*b^*)z,$$

$$z' = (ab^* + ba^*)x + i(ba^* - ab^*)y + (|a|^2 - |b|^2)z$$

otrzymamy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość

$$U = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & \sin \frac{\beta}{2} \\ -\sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \leftrightarrow R = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix},$$

co wykorzystując generatory

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

możemy napisać

$$U = e^{i\sigma_y \frac{\beta}{2}}, \quad R = e^{iJ_y \beta},$$

a podstawiając w powyższych związkach transformacyjnych $a = \cos \frac{\gamma}{2}$ i $b = i \sin \frac{\gamma}{2}$ otrzymamy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość

$$U = \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & i \sin \frac{\gamma}{2} \\ i \sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \leftrightarrow R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix},$$

co wykorzystując generatory

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

możemy napisać

$$U = e^{i\sigma_x \frac{\gamma}{2}}, \quad R = e^{iJ_x \gamma}.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Podsumowując widzimy, że ogólny związek pomiędzy przekształceniem U z grupy $SU(2)$ nad spinorem

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

i przekształceniem R z grupy $O(3)$ nad wektorem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ma postać

$$U = e^{i\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{\theta}}{2}} = \cos \frac{\theta}{2} + i\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sin \frac{\theta}{2} \quad \leftrightarrow \quad R = e^{i\vec{J} \cdot \vec{\theta}},$$

gdzie $\vec{\theta} = \theta \vec{n}$.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Ten wzajemnie jednoznaczny związek pomiędzy grupami $SU(2)$ i $O(3)$ oznacza, że grupy te powinny mieć analogiczną strukturę, a więc ich generatory powinny spełniać takie same związki komutacyjne.

Pamiętamy, że dla macierzy Pauliego zachodzą relacje komutacji

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2},$$

takie same jak dla generatorów obrotów J_i , $i = 1, 2, 3$,

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Ten wzajemnie jednoznaczny związek pomiędzy grupami $SU(2)$ i $O(3)$ oznacza, że grupy te powinny mieć analogiczną strukturę, a więc ich generatory powinny spełniać takie same związki komutacyjne.

Pamiętamy, że dla macierzy Pauliego zachodzą relacje komutacji

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2},$$

takie same jak dla generatorów obrotów J_i , $i = 1, 2, 3$,

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k.$$

Zauważmy jednak pewną różnicę. Otóż każdy wektor z $\mathbb{R}^3$ przejdzie w siebie przy obrocie o kąt $\theta = 2\pi$, natomiast spinor ξ zmieni się wtedy w $-\xi$, gdyż

$$U(2\pi)\xi = \left(\cos \frac{2\pi}{2} + i\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sin \frac{2\pi}{2} \right) \xi = (\cos(\pi) + i\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sin(\pi))\xi = -\xi,$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Ten wzajemnie jednoznaczny związek pomiędzy grupami $SU(2)$ i $O(3)$ oznacza, że grupy te powinny mieć analogiczną strukturę, a więc ich generatory powinny spełniać takie same związki komutacyjne.

Pamiętamy, że dla macierzy Pauliego zachodzą relacje komutacji

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2},$$

takie same jak dla generatorów obrotów J_i , $i = 1, 2, 3$,

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k.$$

Zauważmy jednak pewną różnicę. Otóż każdy wektor z $\mathbb{R}^3$ przejdzie w siebie przy obrocie o kąt $\theta = 2\pi$, natomiast spinor ξ zmieni się wtedy w $-\xi$, gdyż

$$U(2\pi)\xi = \left(\cos \frac{2\pi}{2} + i\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sin \frac{2\pi}{2} \right) \xi = (\cos(\pi) + i\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sin(\pi))\xi = -\xi,$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

a w siebie samego przejdzie dopiero przy obrocie o kąt $\theta = 4\pi$

$$U(4\pi)\xi = (\cos(2\pi) + i\vec{\sigma} \cdot \vec{n}\sin(2\pi))\xi = \xi.$$

Tak więc dwóm elementom U i $-U$ grupy $SU(2)$ odpowiada jeden element R grupy $O(3)$. W szczególności

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \searrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \nearrow & \\ SU(2) & & O(3) \end{array}$$

To sprawia, że grupy $SU(2)$ i $O(3)$ nie są topologicznie równoważne. $SU(2)$ nazywa się grupą nakrywającą grupy $O(3)$.

$SU(2)$ i grupa obrotów

a w siebie samego przejdzie dopiero przy obrocie o kąt $\theta = 4\pi$

$$U(4\pi)\xi = (\cos(2\pi) + i\vec{\sigma} \cdot \vec{n}\sin(2\pi))\xi = \xi.$$

Tak więc dwóm elementom U i $-U$ grupy $SU(2)$ odpowiada jeden element R grupy $O(3)$. W szczególności

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \searrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \nearrow & \end{array}$$

$SU(2)$

$O(3)$

To sprawia, że grupy $SU(2)$ i $O(3)$ nie są topologicznie równoważne. $SU(2)$ nazywa się grupą nakrywającą grupy $O(3)$.

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Analogiczna odpowiedniość istnieje pomiędzy grupą $SL(2, \mathbb{C})$ zespolonych macierzy 2×2 o wyznaczniku 1 a grupą Lorentza.

Czyste przekształcenia Lorentza, czyli tzw. *pchnięcia* wiążą współrzędne czasoprzestrzenne w dwóch inercjalnych układach odniesienia poruszających się ze względną prędkością $\vec{v}$. Jeżeli ruch odbywa się wzdłuż osi Ox , to $\vec{v} = (v, 0, 0)$ i zachodzą związki

$$x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t + \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Analogiczna odpowiedniość istnieje pomiędzy grupą $SL(2, \mathbb{C})$ zespolonych macierzy 2×2 o wyznaczniku 1 a grupą Lorentza.

Czyste przekształcenia Lorentza, czyli tzw. *pchnięcia* wiążą współrzędne czasoprzestrzenne w dwóch inercjalnych układach odniesienia poruszających się ze względną prędkością $\vec{v}$. Jeżeli ruch odbywa się wzdłuż osi Ox , to $\vec{v} = (v, 0, 0)$ i zachodzą związki

$$x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t + \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad \text{itd.}$$

powyższe związki transformacyjne możemy zapisać następująco

$$x^{0'} = \gamma(x^0 + \beta x^1), \quad x^{1'} = \gamma(\beta x^0 + x^1), \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3,$$

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Analogiczna odpowiedniość istnieje pomiędzy grupą $SL(2, \mathbb{C})$ zespolonych macierzy 2×2 o wyznaczniku 1 a grupą Lorentza.

Czyste przekształcenia Lorentza, czyli tzw. *pchnięcia* wiążą współrzędne czasoprzestrzenne w dwóch inercjalnych układach odniesienia poruszających się ze względną prędkością $\vec{v}$. Jeżeli ruch odbywa się wzdłuż osi Ox , to $\vec{v} = (v, 0, 0)$ i zachodzą związki

$$x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t + \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad \text{itd.}$$

powyższe związki transformacyjne możemy zapisać następująco

$$x^{0'} = \gamma(x^0 + \beta x^1), \quad x^{1'} = \gamma(\beta x^0 + x^1), \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3,$$

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

albo w formie macierzowej

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$ dlatego możemy przyjąć

$$\gamma = \text{ch}\varphi, \quad \gamma\beta = \text{sh}\varphi \quad \Rightarrow \quad \text{th}\varphi = \beta$$

i zapisać powyższe związki transformacyjne następująco

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}\varphi & \text{sh}\varphi & 0 & 0 \\ \text{sh}\varphi & \text{ch}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Powyższą macierz 4×4 oznaczmy B_x i będziemy nazywać macierzą pchnięcia lorentzowskiego w kierunku osi Ox .

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

albo w formie macierzowej

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$ dlatego możemy przyjąć

$$\gamma = \operatorname{ch}\varphi, \quad \gamma\beta = \operatorname{sh}\varphi \quad \Rightarrow \quad \operatorname{th}\varphi = \beta$$

i zapisać powyższe związki transformacyjne następująco

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Powyższą macierz 4×4 oznaczmy B_x i będziemy nazywać macierzą pchnięcia lorentzowskiego w kierunku osi Ox .

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Tak jak w przypadku obrotów możemy zdefiniować generatory K_x , K_y i K_z pchnięć w kierunku osi Ox , Oy i Oz :

$$K_x = \left. \frac{1}{i} \frac{dB_x}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = \frac{1}{i} \frac{d}{d\varphi} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bigg|_{\varphi=0} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_y = \left. \frac{1}{i} \frac{dB_y}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = \frac{1}{i} \frac{d}{d\varphi} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & 0 & \operatorname{sh}\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\varphi & 0 & \operatorname{ch}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bigg|_{\varphi=0} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_z = \left. \frac{1}{i} \frac{dB_z}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = \frac{1}{i} \frac{d}{d\varphi} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & 0 & 0 & \operatorname{sh}\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh}\varphi & 0 & 0 & \operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix} \bigg|_{\varphi=0} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie parametr pchnięcia w kierunku każdej z osi oznaczyliśmy φ .

Natomiast generatory obrotów w czasoprzestrzeni Minkowskiego mają postać macierzy 4×4

$$J_x = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$J_z = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Przekształcenie Lorentza w najogólniejszej postaci składa się z pchnięcia w trzech niezależnych kierunkach i obrotów względem trzech osi, którym odpowiadają powyższe generatory.

Natomiast generatory obrotów w czasoprzestrzeni Minkowskiego mają postać macierzy 4×4

$$J_x = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$J_z = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Przekształcenie Lorentza w najogólniejszej postaci składa się z pchnięcia w trzech niezależnych kierunkach i obrotów względem trzech osi, którym odpowiadają powyższe generatory.

Zadanie. Pokazać, że komutatory generatorów K_i i J_j , gdzie indeksy $i, j = 1, 2, 3$ numerują osie układu kartezjańskiego x, y, z mają postać

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \quad [J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k.$$

Z powyższych relacji wynika, że pchnięcia nie tworzą podgrupy grupy Lorentza, gdyż np. złożenie infinitezymalnych pchnięć w dwóch różnych kierunkach może zawierać obrót.

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Rzeczywiście, obliczmy

$$\begin{aligned} e^{iK_x \delta\varphi} e^{iK_y \delta\psi} e^{-iK_x \delta\varphi} e^{-iK_y \delta\psi} = \\ \left(1 + iK_x \delta\varphi - \frac{1}{2} K_x^2 (\delta\varphi)^2 + \dots\right) \left(1 + iK_y \delta\psi - \frac{1}{2} K_y^2 (\delta\psi)^2 + \dots\right) \\ \left(1 - iK_x \delta\varphi - \frac{1}{2} K_x^2 (\delta\varphi)^2 + \dots\right) \left(1 - iK_y \delta\psi - \frac{1}{2} K_y^2 (\delta\psi)^2 + \dots\right) = \\ \left(1 + iK_y \delta\psi - \frac{1}{2} K_y^2 (\delta\psi)^2 + iK_x \delta\varphi - K_x K_y \delta\varphi \delta\psi - \frac{1}{2} K_x^2 (\delta\varphi)^2 + \dots\right) \\ \left(1 - iK_y \delta\psi - \frac{1}{2} K_y^2 (\delta\psi)^2 - iK_x \delta\varphi - K_x K_y \delta\varphi \delta\psi - \frac{1}{2} K_x^2 (\delta\varphi)^2 + \dots\right) = \\ 1 - iK_y \delta\psi - \frac{1}{2} K_y^2 (\delta\psi)^2 - iK_x \delta\varphi - K_x K_y \delta\varphi \delta\psi - \frac{1}{2} K_x^2 (\delta\varphi)^2 + iK_y \delta\psi \\ + K_y^2 (\delta\psi)^2 + K_y K_x \delta\psi \delta\varphi - \frac{1}{2} K_y^2 (\delta\psi)^2 + iK_x \delta\varphi + K_x K_y \delta\varphi \delta\psi \\ + K_x^2 (\delta\varphi)^2 - K_x K_y \delta\varphi \delta\psi - \frac{1}{2} K_x^2 (\delta\varphi)^2 + \dots = 1 - [K_x, K_y] \delta\varphi \delta\psi + \dots, \end{aligned}$$

gdzie pominęliśmy wyrazy rzędu wyższego niż drugi w nieskończenie małych parametrach $\delta\varphi, \delta\psi$.

Na podstawie udowodnionej wcześniej relacji komutacji

$$[K_x, K_y] = -iJ_z,$$

a więc złożenie pchnięć wzdłuż osi Ox i Oy

$$\begin{aligned} e^{iK_x\delta\varphi} e^{iK_y\delta\psi} e^{-iK_x\delta\varphi} e^{-iK_y\delta\psi} &= 1 - [K_x, K_y]\delta\varphi\delta\psi + \dots \\ &= 1 + iJ_z\delta\varphi\delta\psi + \dots \end{aligned}$$

zawiera obrót wokół osi Oz . Oczywiście w wyższych rzędach rozwinięcia pojawią się również pchnięcia.

gdzie pominęliśmy wyrazy rzędu wyższego niż drugi w nieskończenie małych parametrach $\delta\varphi, \delta\psi$.

Na podstawie udowodnionej wcześniej relacji komutacji

$$[K_x, K_y] = -iJ_z,$$

a więc złożenie pchnięć wzdłuż osi Ox i Oy

$$\begin{aligned} e^{iK_x\delta\varphi} e^{iK_y\delta\psi} e^{-iK_x\delta\varphi} e^{-iK_y\delta\psi} &= 1 - [K_x, K_y]\delta\varphi\delta\psi + \dots \\ &= 1 + iJ_z\delta\varphi\delta\psi + \dots \end{aligned}$$

zawiera obrót wokół osi Oz . Oczywiście w wyższych rzędach rozwinięcia pojawią się również pchnięcia.

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Wiemy już jak przekształca się spinor Pauliego

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

przy transformacjach z grupy $SU(2)$, a jak przekształca się on przy pchnięciach lorentzowskich?

Zauważmy, że operatory

$$K_i = \pm i \frac{\sigma_i}{2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

spełniają znalezione wcześniej relacje komutacji dla generatorów grupy Lorentza.

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Wiemy już jak przekształca się spinor Pauliego

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

przy transformacjach z grupy $SU(2)$, a jak przekształca się on przy pchnięciach lorentzowskich?

Zauważmy, że operatory

$$K_i = \pm i \frac{\sigma_i}{2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

spełniają znalezione wcześniej relacje komutacji dla generatorów grupy Lorentza. Rzeczywiście, obliczmy

$$[K_i, K_j] = \left[\pm i \frac{\sigma_i}{2}, \pm i \frac{\sigma_j}{2} \right] = - \left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = -i \varepsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2} = -i \varepsilon_{ijk} J_k,$$

$$\begin{aligned} [J_i, K_j] &= \left[\frac{\sigma_i}{2}, \pm i \frac{\sigma_j}{2} \right] = \pm i \left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = \pm i i \varepsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2} = i \varepsilon_{ijk} \left(\pm i \frac{\sigma_k}{2} \right) \\ &= i \varepsilon_{ijk} K_k. \end{aligned}$$

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Wiemy już jak przekształca się spinor Pauliego

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

przy transformacjach z grupy $SU(2)$, a jak przekształca się on przy pchnięciach lorentzowskich?

Zauważmy, że operatory

$$K_i = \pm i \frac{\sigma_i}{2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

spełniają znalezione wcześniej relacje komutacji dla generatorów grupy Lorentza. Rzeczywiście, obliczmy

$$[K_i, K_j] = \left[\pm i \frac{\sigma_i}{2}, \pm i \frac{\sigma_j}{2} \right] = - \left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = -i \varepsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2} = -i \varepsilon_{ijk} J_k,$$

$$\begin{aligned} [J_i, K_j] &= \left[\frac{\sigma_i}{2}, \pm i \frac{\sigma_j}{2} \right] = \pm i \left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = \pm i i \varepsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2} = i \varepsilon_{ijk} \left(\pm i \frac{\sigma_k}{2} \right) \\ &= i \varepsilon_{ijk} K_k. \end{aligned}$$

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Operatory $K_i = +i\frac{\sigma_i}{2}$ i $K_i = -i\frac{\sigma_i}{2}$ określają reguły transformacyjne dla dwóch różnych typów spinorów Pauliego.

Aby to przybliżyć, zamiast generatorów J_i i K_i , $i = 1, 2, 3$, spełniających reguły komutacji

$$[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k, \quad [J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k,$$

zdefiniujemy nowe generatory grupa Lorentza

$$A_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i), \quad B_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Operatory $K_i = +i\frac{\sigma_i}{2}$ i $K_i = -i\frac{\sigma_i}{2}$ określają reguły transformacyjne dla dwóch różnych typów spinorów Pauliego.

Aby to przybliżyć, zamiast generatorów J_i i K_i , $i = 1, 2, 3$, spełniających reguły komutacji

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \quad [J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k,$$

zdefiniujemy nowe generatory grupa Lorentza

$$A_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i), \quad B_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

i obliczmy ich komutatory

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= \left[\frac{1}{2}(J_i + iK_i), \frac{1}{2}(J_j + iK_j) \right] \\ &= \frac{1}{4} ([J_i, J_j] + i[J_i, K_j] + i[K_i, J_j] - [K_i, K_j]) \\ &= \frac{1}{4} (i\epsilon_{ijk}J_k + i^2\epsilon_{ijk}K_k - i^2\epsilon_{jik}K_k + i\epsilon_{ijk}J_k) = i\epsilon_{ijk}\frac{1}{2}(J_k + iK_k) = i\epsilon_{ijk}A_k. \end{aligned}$$

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Operatory $K_i = +i\frac{\sigma_i}{2}$ i $K_i = -i\frac{\sigma_i}{2}$ określają reguły transformacyjne dla dwóch różnych typów spinorów Pauliego.

Aby to przybliżyć, zamiast generatorów J_i i K_i , $i = 1, 2, 3$, spełniających reguły komutacji

$$[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k, \quad [J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k,$$

zdefiniujemy nowe generatory grupa Lorentza

$$A_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i), \quad B_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

i obliczmy ich komutatory

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= \left[\frac{1}{2}(J_i + iK_i), \frac{1}{2}(J_j + iK_j) \right] \\ &= \frac{1}{4} ([J_i, J_j] + i[J_i, K_j] + i[K_i, J_j] - [K_i, K_j]) \\ &= \frac{1}{4} (i\varepsilon_{ijk}J_k + i^2\varepsilon_{ijk}K_k - i^2\varepsilon_{jik}K_k + i\varepsilon_{ijk}J_k) = i\varepsilon_{ijk}\frac{1}{2}(J_k + iK_k) = i\varepsilon_{ijk}A_k. \end{aligned}$$

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Podobnie

$$\begin{aligned}[B_i, B_j] &= \left[\frac{1}{2}(J_i - iK_i), \frac{1}{2}(J_j - iK_j) \right] \\&= \frac{1}{4} ([J_i, J_j] - i[J_i, K_j] - i[K_i, J_j] - [K_i, K_j]) \\&= \frac{1}{4} (i\varepsilon_{ijk}J_k - i^2\varepsilon_{ijk}K_k + i^2\varepsilon_{jik}K_k + i\varepsilon_{ijk}J_k) = i\varepsilon_{ijk}\frac{1}{2}(J_k - iK_k) = i\varepsilon_{ijk}B_k, \\[A_i, B_j] &= \left[\frac{1}{2}(J_i + iK_i), \frac{1}{2}(J_j - iK_j) \right] \\&= \frac{1}{4} ([J_i, J_j] - i[J_i, K_j] + i[K_i, J_j] + [K_i, K_j]) \\&= \frac{1}{4} (i\varepsilon_{ijk}J_k - i^2\varepsilon_{ijk}K_k - i^2\varepsilon_{jik}K_k - i\varepsilon_{ijk}J_k) = 0.\end{aligned}$$

To oznacza, że każdy z generatorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ generuje grupę $SU(2)$ i te dwie grupy ze sobą komutują.

Podobnie

$$\begin{aligned}[B_i, B_j] &= \left[\frac{1}{2}(J_i - iK_i), \frac{1}{2}(J_j - iK_j) \right] \\&= \frac{1}{4} ([J_i, J_j] - i[J_i, K_j] - i[K_i, J_j] - [K_i, K_j]) \\&= \frac{1}{4} (i\varepsilon_{ijk}J_k - i^2\varepsilon_{ijk}K_k + i^2\varepsilon_{jik}K_k + i\varepsilon_{ijk}J_k) = i\varepsilon_{ijk}\frac{1}{2}(J_k - iK_k) = i\varepsilon_{ijk}B_k, \\[A_i, B_j] &= \left[\frac{1}{2}(J_i + iK_i), \frac{1}{2}(J_j - iK_j) \right] \\&= \frac{1}{4} ([J_i, J_j] - i[J_i, K_j] + i[K_i, J_j] + [K_i, K_j]) \\&= \frac{1}{4} (i\varepsilon_{ijk}J_k - i^2\varepsilon_{ijk}K_k - i^2\varepsilon_{jik}K_k - i\varepsilon_{ijk}J_k) = 0.\end{aligned}$$

To oznacza, że każdy z generatorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ generuje grupę $SU(2)$ i te dwie grupy ze sobą komutują.

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

W takim razie grupa Lorentza jest tożsama z grupą $SU(2) \otimes SU(2)$, a to oznacza, że reprezentacje grupy Lorentza powinny być numerowane wartościami dwóch momentów pędu (j, j') , gdzie j odpowiada generatorom $\vec{A}$, a j' odpowiada generatorom $\vec{B}$.

W szczególnym przypadku jeden z tych momentów pędu może być równy 0:

$$\begin{aligned}\vec{B} = \frac{1}{2}(\vec{J} - i\vec{K}) = 0 &\Rightarrow (j, 0) \rightarrow \vec{J}^{(j)} = i\vec{K}^{(j)}, \\ \vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{J} + i\vec{K}) = 0 &\Rightarrow (0, j) \rightarrow \vec{J}^{(j)} = -i\vec{K}^{(j)},\end{aligned}$$

co rzeczywiście odpowiada dwóm znakom we wzorze $\vec{K} = \pm i\vec{\sigma}/2$.

W takim razie grupa Lorentza jest tożsama z grupą $SU(2) \otimes SU(2)$, a to oznacza, że reprezentacje grupy Lorentza powinny być numerowane wartościami dwóch momentów pędu (j, j') , gdzie j odpowiada generatorom $\vec{A}$, a j' odpowiada generatorom $\vec{B}$.

W szczególnym przypadku jeden z tych momentów pędu może być równy 0:

$$\begin{aligned}\vec{B} = \frac{1}{2}(\vec{J} - i\vec{K}) = 0 &\Rightarrow (j, 0) \rightarrow \vec{J}^{(j)} = i\vec{K}^{(j)}, \\ \vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{J} + i\vec{K}) = 0 &\Rightarrow (0, j) \rightarrow \vec{J}^{(j)} = -i\vec{K}^{(j)},\end{aligned}$$

co rzeczywiście odpowiada dwóm znakom we wzorze $\vec{K} = \pm i\vec{\sigma}$.

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

W związku z tym możemy zdefiniować dwa typy spinorów

$$\text{Typ I:} \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right) : \quad \vec{J}^{(1/2)} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K}^{(1/2)} = -i\frac{\vec{\sigma}}{2},$$

$$\text{Typ II:} \quad \left(0, \frac{1}{2}\right) : \quad \vec{J}^{(1/2)} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K}^{(1/2)} = i\frac{\vec{\sigma}}{2}.$$

Oznaczmy parametry obrotu i pchnięcia lorentzowskiego przez $(\vec{\theta}, \vec{\varphi})$.

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

W związku z tym możemy zdefiniować dwa typy spinorów

$$\text{Typ I:} \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right) : \quad \vec{J}^{(1/2)} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K}^{(1/2)} = -i\frac{\vec{\sigma}}{2},$$

$$\text{Typ II:} \quad \left(0, \frac{1}{2}\right) : \quad \vec{J}^{(1/2)} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K}^{(1/2)} = i\frac{\vec{\sigma}}{2}.$$

Oznaczmy parametry obrotu i pchnięcia lorentzowskiego przez $(\vec{\theta}, \vec{\varphi})$.

Wówczas spinor typu I ξ transformuje się następująco

$$\xi \rightarrow e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\theta} + \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\varphi}} \xi = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\varphi})} \xi \equiv M\xi,$$

a spinor typu II η transformuje się następująco

$$\eta \rightarrow e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\theta} - \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\varphi}} \eta = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\varphi})} \eta \equiv N\eta.$$

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

W związku z tym możemy zdefiniować dwa typy spinorów

$$\text{Typ I:} \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right) : \quad \vec{J}^{(1/2)} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K}^{(1/2)} = -i\frac{\vec{\sigma}}{2},$$

$$\text{Typ II:} \quad \left(0, \frac{1}{2}\right) : \quad \vec{J}^{(1/2)} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K}^{(1/2)} = i\frac{\vec{\sigma}}{2}.$$

Oznaczmy parametry obrotu i pchnięcia lorentzowskiego przez $(\vec{\theta}, \vec{\varphi})$.

Wówczas spinor typu I ξ transformuje się następująco

$$\xi \rightarrow e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\theta} + \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\varphi}} \xi = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\varphi})} \xi \equiv M\xi,$$

a spinor typu II η transformuje się następująco

$$\eta \rightarrow e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\theta} - \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\varphi}} \eta = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\varphi})} \eta \equiv N\eta.$$

Są to dwie nierównoważne reprezentacje grupy Lorentza, tzn. że nie istnieje nieosobliwa macierz S , dla której $N = SMS^{-1}$.

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

W związku z tym możemy zdefiniować dwa typy spinorów

$$\text{Typ I:} \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right) : \quad \vec{J}^{(1/2)} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K}^{(1/2)} = -i\frac{\vec{\sigma}}{2},$$

$$\text{Typ II:} \quad \left(0, \frac{1}{2}\right) : \quad \vec{J}^{(1/2)} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K}^{(1/2)} = i\frac{\vec{\sigma}}{2}.$$

Oznaczmy parametry obrotu i pchnięcia lorentzowskiego przez $(\vec{\theta}, \vec{\varphi})$.

Wówczas spinor typu I ξ transformuje się następująco

$$\xi \rightarrow e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\theta} + \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\varphi}} \xi = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\varphi})} \xi \equiv M\xi,$$

a spinor typu II η transformuje się następująco

$$\eta \rightarrow e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\theta} - \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\varphi}} \eta = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\varphi})} \eta \equiv N\eta.$$

Są to dwie nierównoważne reprezentacje grupy Lorentza, tzn. że nie istnieje nieosobliwa macierz S , dla której $N = SMS^{-1}$.

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Macierze M i N są jednak powiązane równaniem

$$N = \zeta M^* \zeta^{-1}, \quad \text{gdzie} \quad \zeta = -i\sigma_2,$$

co łatwo sprawdzić, jeśli zauważymy, że $\sigma_2^2 = 1 \Rightarrow \sigma_2^{-1} = \sigma_2$ i

$$\begin{aligned}\sigma_2 \sigma_i^* \sigma_2 &= \sigma_2 \sigma_i \sigma_2 = -\sigma_2^2 \sigma_i = -\sigma_i, & i = 1, 3, \\ \sigma_2 \sigma_2^* \sigma_2 &= -\sigma_2 \sigma_2 \sigma_2 = -\sigma_2,\end{aligned}$$

gdyż macierze σ_1 i σ_3 są rzeczywiste i antykomutują z σ_2 , a macierz σ_2 jest czysto urojona. Zauważmy, że $\zeta^{-1} = i\sigma_2$.

Macierz ζ zdefiniowaliśmy już wcześniej w równaniu

$$\begin{pmatrix} -\xi_2^* \\ \xi_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{pmatrix} = \zeta \xi^*, \quad \text{gdzie} \quad \zeta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Widać, że jest to dokładnie ta sama macierz.

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Macierze M i N są jednak powiązane równaniem

$$N = \zeta M^* \zeta^{-1}, \quad \text{gdzie} \quad \zeta = -i\sigma_2,$$

co łatwo sprawdzić, jeśli zauważymy, że $\sigma_2^2 = 1 \Rightarrow \sigma_2^{-1} = \sigma_2$ i

$$\sigma_2 \sigma_i^* \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_i \sigma_2 = -\sigma_2^2 \sigma_i = -\sigma_i, \quad i = 1, 3,$$

$$\sigma_2 \sigma_2^* \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_2 \sigma_2 = -\sigma_2,$$

gdyż macierze σ_1 i σ_3 są rzeczywiste i antykomutują z σ_2 , a macierz σ_2 jest czysto urojona. Zauważmy, że $\zeta^{-1} = i\sigma_2$.

Macierz ζ zdefiniowaliśmy już wcześniej w równaniu

$$\begin{pmatrix} -\xi_2^* \\ \xi_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{pmatrix} = \zeta \xi^*, \quad \text{gdzie} \quad \zeta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Widać, że jest to dokładnie ta sama macierz.

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Dla macierzy

$$M = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\varphi})}$$

otrzymamy

$$\zeta M^* \zeta^{-1} = \sigma_2 e^{-\frac{i}{2}\vec{\sigma}^* \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\varphi})} \sigma_2 = e^{-\frac{i}{2}\sigma_2 \vec{\sigma}^* \sigma_2 \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\varphi})} = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\varphi})} = N,$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodniony wcześniej związek

$$\sigma_2 \vec{\sigma}^* \sigma_2 = -\vec{\sigma}.$$

Obliczmy wyznacznik macierzy M i N

$$\det M = \det e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\varphi})} = e^{\text{Tr}[\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\varphi})]} = e^{\frac{i}{2}\text{Tr}[\vec{\sigma}] \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\varphi})} = e^0 = 1,$$

$$\det N = \det e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\varphi})} = e^{\text{Tr}[\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\varphi})]} = e^{\frac{i}{2}\text{Tr}[\vec{\sigma}] \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\varphi})} = e^0 = 1,$$

gdzie wykorzystaliśmy własność $\det e^A = e^{\text{Tr}A}$, która zachodzi dla dowolnej zespolonej lub rzeczywistej macierzy kwadratowej i bezśladowość macierzy Pauliego.

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Dla macierzy

$$M = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\varphi})}$$

otrzymamy

$$\zeta M^* \zeta^{-1} = \sigma_2 e^{-\frac{i}{2}\vec{\sigma}^* \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\varphi})} \sigma_2 = e^{-\frac{i}{2}\sigma_2 \vec{\sigma}^* \sigma_2 \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\varphi})} = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\varphi})} = N,$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodniony wcześniej związek

$$\sigma_2 \vec{\sigma}^* \sigma_2 = -\vec{\sigma}.$$

Obliczmy wyznacznik macierzy M i N

$$\det M = \det e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\varphi})} = e^{\text{Tr}[\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\varphi})]} = e^{\frac{i}{2}\text{Tr}[\vec{\sigma}] \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\varphi})} = e^0 = 1,$$

$$\det N = \det e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\varphi})} = e^{\text{Tr}[\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\varphi})]} = e^{\frac{i}{2}\text{Tr}[\vec{\sigma}] \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\varphi})} = e^0 = 1,$$

gdzie wykorzystaliśmy własność $\det e^A = e^{\text{Tr}A}$, która zachodzi dla dowolnej zespolonej lub rzeczywistej macierzy kwadratowej i bezśladowość macierzy Pauliego.

Widzimy, że M i N są macierzami zespolonymi 2×2 o wyznaczniku 1, tak więc $M, N \in SL(2, \mathbb{C})$.

Grupa $SL(2, \mathbb{C})$ jest sześcioparametrowa, gdyż tworzące ją macierze mają postać

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad ad - bc = 1,$$

a więc zawiera $8 - 2 = 6$ parametrów rzeczywistych. Te 6 parametrów wiąże się z kątami obrotów i składowymi prędkości względnej inercjalnych układów odniesienia.

Widzimy, że M i N są macierzami zespolonymi 2×2 o wyznaczniku 1, tak więc $M, N \in SL(2, \mathbb{C})$.

Grupa $SL(2, \mathbb{C})$ jest sześcioparametrowa, gdyż tworzące ją macierze mają postać

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad ad - bc = 1,$$

a więc zawiera $8 - 2 = 6$ parametrów rzeczywistych. Te 6 parametrów wiąże się z kątami obrotów i składowymi prędkości względnej inercjalnych układów odniesienia.

Podsumowując, spinory Pauliego

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

transformują się przy obrotach w następujący sposób

$$\xi \rightarrow U\xi,$$

gdzie macierz $U \in SU(2)$ dana jest wzorem

$$U = e^{i\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{\theta}}{2}} = \cos \frac{\theta}{2} + i\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sin \frac{\theta}{2}.$$

Macierz U można jednoznacznie powiązać z macierzą obrotu wektora w $\mathbb{R}^3$, która dana jest wzorem $R = e^{i\vec{J} \cdot \vec{\theta}}$.

Jednak przy dowolnych transformacjach Lorentza spinory Pauliego rozdzielają się na dwa różne typy ξ i η , transformujące się zgodnie z wzorami

$$\begin{aligned}\xi &\rightarrow e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\varphi})} \xi, \\ \eta &\rightarrow e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\varphi})} \eta,\end{aligned}$$

które odpowiadają reprezentacjom $(\frac{1}{2}, 0)$ i $(0, \frac{1}{2})$ grupy Lorentza. W starszej literaturze te spinory nazywano *spinorami z kropką i bez kropki*.

Aby powiązać dwuskładnikowe spinory Pauliego z czteroskładnikowymi spinorami Diraca wprowadźmy operację odbicia przestrzennego, przy którym

$$\vec{r} \rightarrow -\vec{r} \Rightarrow \vec{v} \rightarrow -\vec{v}.$$

Parametr pchnięcia lorentzowskiego φ_i dany równaniem $\tanh \varphi_i = v_i/c$ przejdzie w $-\varphi_i$, $i = 1, 2, 3$, dlatego odpowiedni generator pchnięcia zmieni się następująco

$$K_i = \left. \frac{1}{i} \frac{dB}{d\varphi_i} \right|_{\varphi_i=0} \rightarrow -K_i.$$

Natomiast kąt obrotu θ_i względem i -tej osi nie zmieni znaku, co można zauważyć, analizując rysunek na stronie 3. Dlatego odpowiedni generator obrotu

$$J_i = \left. \frac{1}{i} \frac{dR(\theta_i)}{d\theta_i} \right|_{\theta_i=0} \rightarrow J_i.$$

Orbitalny moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ transformuje się przy odbiciu tak samo

$$\vec{L} \rightarrow (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) = \vec{L}.$$

Z tego względu $\vec{J}$ i $\vec{L}$ nazywa się pseudo wektorami.
Zauważmy, że przy transformacji odbicia przestrzennego

$$\vec{K} \rightarrow -\vec{K} \quad \Rightarrow \quad (j, 0) \rightarrow (0, j)$$

w związku z czym spinory ξ i η zamieniają się rolami

$$\xi \leftrightarrow \eta.$$

Orbitalny moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ transformuje się przy odbiciu tak samo

$$\vec{L} \rightarrow (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) = \vec{L}.$$

Z tego względu $\vec{J}$ i $\vec{L}$ nazywa się pseudo wektorami.
Zauważmy, że przy transformacji odbicia przestrzennego

$$\vec{K} \rightarrow -\vec{K} \quad \Rightarrow \quad (j, 0) \rightarrow (0, j)$$

w związku z czym spinory ξ i η zamieniają się rolami

$$\xi \leftrightarrow \eta.$$

W takim razie dwuskładnikowe spinory ξ i η możemy potraktować jak składowe bispinora Diraca

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

Orbitalny moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ transformuje się przy odbiciu tak samo

$$\vec{L} \rightarrow (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) = \vec{L}.$$

Z tego względu $\vec{J}$ i $\vec{L}$ nazywa się pseudo wektorami.
Zauważmy, że przy transformacji odbicia przestrzennego

$$\vec{K} \rightarrow -\vec{K} \quad \Rightarrow \quad (j, 0) \rightarrow (0, j)$$

w związku z czym spinory ξ i η zamieniają się rolami

$$\xi \leftrightarrow \eta.$$

W takim razie dwuskładnikowe spinory ξ i η możemy potraktować jak składowe bispinora Diraca

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

Spinor Diraca

który przy transformacji Lorentza

$$x \rightarrow \Lambda x \quad \Rightarrow \quad x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu},$$

będzie transformował się następująco

$$\begin{aligned} \psi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix} &\rightarrow \psi'(x') = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\varphi})} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\varphi})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D(\Lambda) & 0 \\ 0 & \bar{D}(\Lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\bar{D}(\Lambda) = \zeta D^*(\Lambda) \zeta^{-1}.$$

To jest dokładnie takie samo prawo transformacyjne, jakie otrzymaliśmy dla spinorów Diraca dowodząc lorentzowskiej współzmienniczości równania Diraca.

Spinor Diraca

który przy transformacji Lorentza

$$x \rightarrow \Lambda x \quad \Rightarrow \quad x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu},$$

będzie transformował się następująco

$$\begin{aligned} \psi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix} \rightarrow \psi'(x') &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\varphi})} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\varphi})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D(\Lambda) & 0 \\ 0 & \bar{D}(\Lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\bar{D}(\Lambda) = \zeta D^*(\Lambda) \zeta^{-1}.$$

To jest dokładnie takie samo prawo transformacyjne, jakie otrzymaliśmy dla spinorów Diraca dowodząc lorentzowskiej współzmienniczości równania Diraca.

Przy odbiciu przestrzennym bispinor ψ transformuje się następująco

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \rightarrow \psi' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}.$$

Rozszerzenie ciągłej grupy Lorentza o odbicia przestrzenne sprawia, że czteroskładnikowe spinory Diraca ψ , nazywane też bispinorami, transformują się zgodnie z nieprzywiedlną reprezentację tej rozszerzonej grupy:

Przy odbiciu przestrzennym bispinor ψ transformuje się następująco

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \rightarrow \psi' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}.$$

Rozszerzenie ciągłej grupy Lorentza o odbicia przestrzenne sprawia, że czteroskładnikowe spinory Diraca ψ , nazywane też bispinorami, transformują się zgodnie z nieprzywiedlną reprezentacją tej rozszerzonej grupy:

$$\begin{pmatrix} D(\Lambda) & 0 \\ 0 & \bar{D}(\Lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\varphi})} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\varphi})} \end{pmatrix}$$

Zauważmy jednak, że **jest to reprezentacja nieunitarna**, gdyż tworzące ją macierze nie są unitarne, gdyż macierz $e^{\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi}}$ jest nieunitarna.

Przy odbiciu przestrzennym bispinor ψ transformuje się następująco

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \rightarrow \psi' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}.$$

Rozszerzenie ciągłej grupy Lorentza o odbicia przestrzenne sprawia, że czteroskładnikowe spinory Diraca ψ , nazywane też bispinorami, transformują się zgodnie z nieprzywiedlną reprezentacją tej rozszerzonej grupy:

$$\begin{pmatrix} D(\Lambda) & 0 \\ 0 & \bar{D}(\Lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\varphi})} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\varphi})} \end{pmatrix}$$

Zauważmy jednak, że **jest to reprezentacja nieunitarna**, gdyż tworzące ją macierze nie są unitarne, gdyż macierz $e^{\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi}}$ jest nieunitarna.

W mechanice kwantowej zasadniczo interesują nas unitarne reprezentacje grup symetrii, gdyż tylko dla transformacji unitarnych gęstość prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy dwoma stanami kwantowymi nie zależy od wyboru układu odniesienia, w którym prowadzimy pomiary.

W takim razie dla grupy Lorentza otrzymaliśmy wynik, który nie spełnia naszych oczekiwań.

W mechanice kwantowej zasadniczo interesują nas unitarne reprezentacje grup symetrii, gdyż tylko dla transformacji unitarnych gęstość prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy dwoma stanami kwantowymi nie zależy od wyboru układu odniesienia, w którym prowadzimy pomiary.

W takim razie dla grupy Lorentza otrzymaliśmy wynik, który nie spełnia naszych oczekiwań.

Nieistnienie skończenie wymiarowych unitarnych reprezentacji grupy Lorentza wiąże się z tym, że nie jest ona grupą zwartą. Fakt ten wiąże się z tym, że prędkości względne, będące parametrami pchnięć lorentzowskich, przyjmują wartości w przedziale lewostronnie otwartym

$$v \in [0, c) \Rightarrow \beta \in [0, 1),$$

gdyż v nigdy nie może osiągnąć wartości c , podczas gdy kąty obrotu θ można zmieniać w przedziale domkniętym $[0, 2\pi]$, jeśli utożsamimy wartości $\theta = 0$ i $\theta = 2\pi$, zamykając odcinek w okrąg.

W mechanice kwantowej zasadniczo interesują nas unitarne reprezentacje grup symetrii, gdyż tylko dla transformacji unitarnych gęstość prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy dwoma stanami kwantowymi nie zależy od wyboru układu odniesienia, w którym prowadzimy pomiary.

W takim razie dla grupy Lorentza otrzymaliśmy wynik, który nie spełnia naszych oczekiwań.

Nieistnienie skończenie wymiarowych unitarnych reprezentacji grupy Lorentza wiąże się z tym, że nie jest ona grupą zwartą. Fakt ten wiąże się z tym, że prędkości względne, będące parametrami pchnięć lorentzowskich, przyjmują wartości w przedziale lewostronnie otwartym

$$v \in [0, c) \Rightarrow \beta \in [0, 1),$$

gdyż v nigdy nie może osiągnąć wartości c , podczas gdy kąty obrotu θ można zmieniać w przedziale domkniętym $[0, 2\pi]$, jeśli utożsamimy wartości $\theta = 0$ i $\theta = 2\pi$, zamykając odcinek w okrąg.