

Symetria Lorentza

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

Z równań Maxwella wynika, że fale elektromagnetyczne w próżni rozchodzą się we wszystkich kierunkach z taką samą prędkością c .

Zastosowanie wzorów transformacyjnych

$$\vec{v}' = \vec{c} - \vec{V}.$$

zmienia postać równań Maxwella.

Z równań Maxwella wynika, że fale elektromagnetyczne w próżni rozchodzą się we wszystkich kierunkach z taką samą prędkością c .

Zastosowanie wzorów transformacyjnych

$$\vec{v}' = \vec{c} - \vec{V}.$$

zmienia postać równań Maxwella.

W 1880 r. Albert Michelson i Edward Morley skonstruowali interferometr, który umożliwił pomiar zmiany prędkości światła w zależności od kierunku w układzie związanym z Ziemią.

Z równań Maxwella wynika, że fale elektromagnetyczne w próżni rozchodzą się we wszystkich kierunkach z taką samą prędkością c .

Zastosowanie wzorów transformacyjnych

$$\vec{v}' = \vec{c} - \vec{V}.$$

zmienia postać równań Maxwella.

W 1880 r. Albert Michelson i Edward Morley skonstruowali interferometr, który umożliwił pomiar zmiany prędkości światła w zależności od kierunku w układzie związanym z Ziemią.

Niezależnie od kierunku propagacji światła otrzymali taki sam wynik c .

Z równań Maxwella wynika, że fale elektromagnetyczne w próżni rozchodzą się we wszystkich kierunkach z taką samą prędkością c .

Zastosowanie wzorów transformacyjnych

$$\vec{v}' = \vec{c} - \vec{V}.$$

zmienia postać równań Maxwella.

W 1880 r. Albert Michelson i Edward Morley skonstruowali interferometr, który umożliwił pomiar zmiany prędkości światła w zależności od kierunku w układzie związanym z Ziemią.

Niezależnie od kierunku propagacji światła otrzymali taki sam wynik c .

Mimo, że Ziemia ciągle zmienia kierunek swojej prędkości w ruchu dookoła Słońca, to wynik nie zależał od pory roku.

Z równań Maxwella wynika, że fale elektromagnetyczne w próżni rozchodzą się we wszystkich kierunkach z taką samą prędkością c .

Zastosowanie wzorów transformacyjnych

$$\vec{v}' = \vec{c} - \vec{V}.$$

zmienia postać równań Maxwella.

W 1880 r. Albert Michelson i Edward Morley skonstruowali interferometr, który umożliwił pomiar zmiany prędkości światła w zależności od kierunku w układzie związanym z Ziemią.

Niezależnie od kierunku propagacji światła otrzymali taki sam wynik c .

Mimo, że Ziemia ciągle zmienia kierunek swojej prędkości w ruchu dookoła Słońca, to wynik nie zależał od pory roku.

Przypomnijmy, że inercjalny układ odniesienia, to układ, w którym obowiązuje I zasada dynamiki Newtona.

I postulat. Jeśli S jest układem inercjalnym, a S' porusza się względem S ruchem jednostajnym prostoliniowym, to S' również jest układem inercjalnym.

Przypomnijmy, że inercjalny układ odniesienia, to układ, w którym obowiązuje I zasada dynamiki Newtona.

I postulat. Jeśli S jest układem inercjalnym, a S' porusza się względem S ruchem jednostajnym prostoliniowym, to S' również jest układem inercjalnym.

II postulat. Prędkość światła w próżni ma tę samą wartość c we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, niezależnie od kierunku propagacji.

Przypomnijmy, że inercjalny układ odniesienia, to układ, w którym obowiązuje I zasada dynamiki Newtona.

I postulat. Jeśli S jest układem inercjalnym, a S' porusza się względem S ruchem jednostajnym prostoliniowym, to S' również jest układem inercjalnym.

II postulat. Prędkość światła w próżni ma tę samą wartość c we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, niezależnie od kierunku propagacji.

Postulat ten, chociaż wydaje się nielogiczny w zestawieniu z naszym codziennym doświadczeniem, to jest bardzo dobrze *potwierdzony* doświadczalnie.

Przypomnijmy, że inercjalny układ odniesienia, to układ, w którym obowiązuje I zasada dynamiki Newtona.

I postulat. Jeśli S jest układem inercjalnym, a S' porusza się względem S ruchem jednostajnym prostoliniowym, to S' również jest układem inercjalnym.

II postulat. Prędkość światła w próżni ma tę samą wartość c we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, niezależnie od kierunku propagacji.

Postulat ten, chociaż wydaje się nielogiczny w zestawieniu z naszym codziennym doświadczeniem, to jest bardzo dobrze *potwierdzony* doświadczalnie.

Ma on daleko idące konsekwencje.

Przypomnijmy, że inercjalny układ odniesienia, to układ, w którym obowiązuje I zasada dynamiki Newtona.

I postulat. Jeśli S jest układem inercjalnym, a S' porusza się względem S ruchem jednostajnym prostoliniowym, to S' również jest układem inercjalnym.

II postulat. Prędkość światła w próżni ma tę samą wartość c we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, niezależnie od kierunku propagacji.

Postulat ten, chociaż wydaje się nielogiczny w zestawieniu z naszym codziennym doświadczeniem, to jest bardzo dobrze *potwierdzony* doświadczalnie.

Ma on daleko idące konsekwencje.

W każdym inercyjnym układzie odniesienia wybieramy układ kartezjański i rozmieszczamy obserwatorów, na tyle gęsto, żeby mogli bez opóźnienia mierzyć czas zajścia dowolnego zdarzenia. Zakładamy, że zegary obserwatorów są zsynchronizowane.

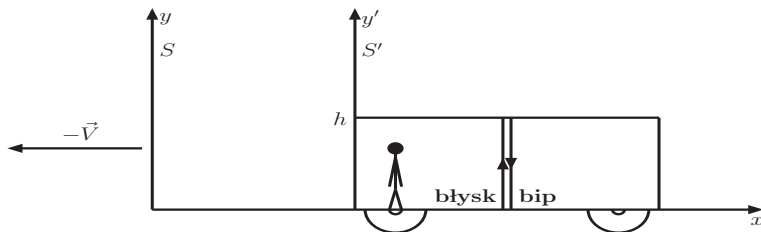
W każdym inercyjnym układzie odniesienia wybieramy układ kartezjański i rozmieszczamy obserwatorów, na tyle gęsto, żeby mogli bez opóźnienia mierzyć czas zajścia dowolnego zdarzenia. Zakładamy, że zegary obserwatorów są zsynchronizowane.

Eksperyment myślowy. Na podłodze wagonu roz**bły**skuje światło, odbija się od sufitu i dociera do podłogi powodując *bip*.

Dylatacja czasu

W każdym inercyjnym układzie odniesienia wybieramy układ kartezjański i rozmieszczamy obserwatorów, na tyle gęsto, żeby mogli bez opóźnienia mierzyć czas zajścia dowolnego zdarzenia. Zakładamy, że zegary obserwatorów są zsynchronizowane.

Eksperyment myślowy. Na podłodze wagonu roz**bły**skuje światło, odbija się od sufitu i dociera do podłogi powodując **bip**.

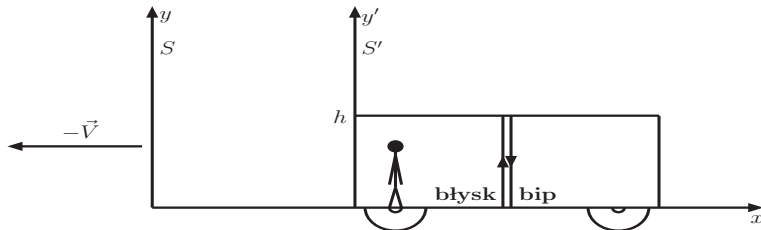


W układzie S' związanym z wagonem **błysek** i **bip** pojawiają się w tym samym miejscu po czasie $\Delta t' = 2h/c$.

Dylatacja czasu

W każdym inercyjnym układzie odniesienia wybieramy układ kartezjański i rozmieszczamy obserwatorów, na tyle gęsto, żeby mogli bez opóźnienia mierzyć czas zajścia dowolnego zdarzenia. Zakładamy, że zegary obserwatorów są zsynchronizowane.

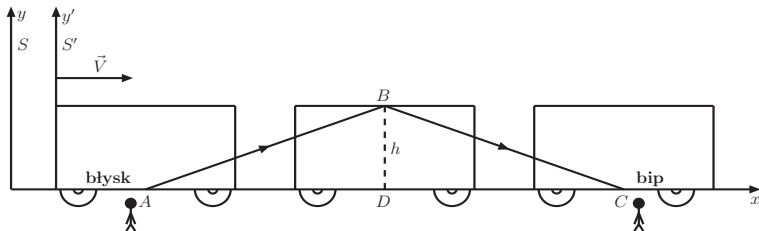
Eksperyment myślowy. Na podłodze wagonu roz**ł**yskuje światło, odbija się od sufitu i dociera do podłogi powodując **i**p.



W układzie S' związanym z wagonem **ł**ysk i **i**p pojawiają się w tym samym miejscu po czasie $\Delta t' = 2h/c$.

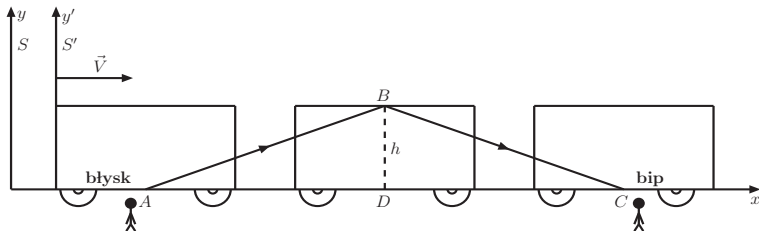
Dylatacja czasu

W układzie S związanym z Ziemią *błysk* i *bip* pojawią się w różnych miejscach.



Dylatacja czasu

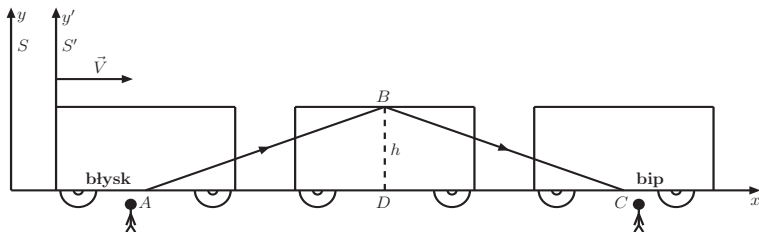
W układzie S związanym z Ziemią *błysk* i *bip* pojawią się w różnych miejscach.



Rozważmy $\triangle ADB$: $(c\Delta t/2)^2 = h^2 + (V\Delta t/2)^2 \Rightarrow$

Dylatacja czasu

W układzie S związanym z Ziemią *błysk* i *bip* pojawią się w różnych miejscach.

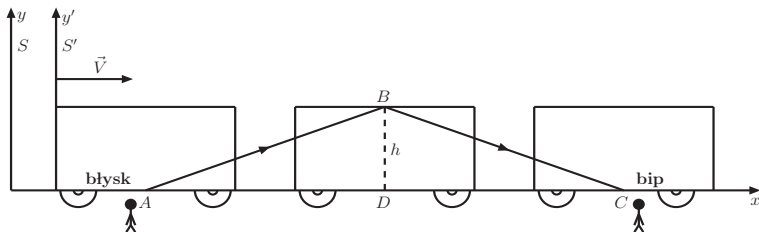


Rozważmy $\triangle ADB$: $(c\Delta t/2)^2 = h^2 + (V\Delta t/2)^2 \Rightarrow$

$$(c^2 - V^2) \frac{(\Delta t)^2}{4} = h^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \underbrace{\frac{2h}{c}}_{\Delta t'} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Dylatacja czasu

W układzie S związanym z Ziemią *błysk* i *bip* pojawią się w różnych miejscach.



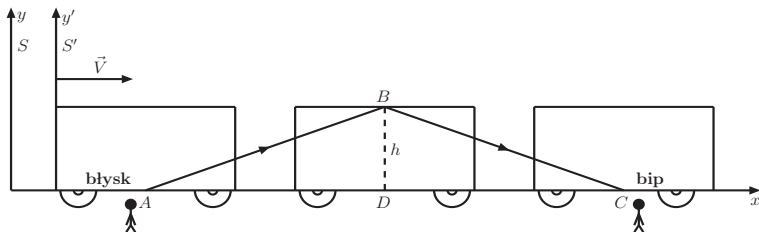
Rozważmy $\triangle ADB$: $(c\Delta t/2)^2 = h^2 + (V\Delta t/2)^2 \Rightarrow$

$$(c^2 - V^2) \frac{(\Delta t)^2}{4} = h^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \underbrace{\frac{2h}{c}}_{\Delta t'} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \Delta t' \gamma, \quad \text{gdzie} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = V/c.$$

Dylatacja czasu

W układzie S związanym z Ziemią *błysk* i *bip* pojawią się w różnych miejscach.



Rozważmy $\triangle ADB$: $(c\Delta t/2)^2 = h^2 + (V\Delta t/2)^2 \Rightarrow$

$$(c^2 - V^2) \frac{(\Delta t)^2}{4} = h^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \underbrace{\frac{2h}{c}}_{\Delta t'} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \Delta t' \gamma, \quad \text{gdzie} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = V/c.$$

Ponieważ $\beta < 1 \Rightarrow \gamma > 1 \Rightarrow$ czas przebiegu zjawiska fizycznego mierzony w układzie poruszającym się (Δt) ulega wydłużeniu w stosunku do czasu przebiegu tego zjawiska w układzie spoczynkowym ($\Delta t_0 \equiv \Delta t'$), tzw. **czasu własnego**

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \geq \Delta t_0.$$

Przykład 1. Czas życia mionu mierzony w układzie, w którym mion spoczywa, wynosi

$$\tau_\mu = (2.1969811 \pm 0.000022) \times 10^{-6} \text{s} \approx 2.2 \times 10^{-6} \text{s}.$$

Ponieważ $\beta < 1 \Rightarrow \gamma > 1 \Rightarrow$ czas przebiegu zjawiska fizycznego mierzony w układzie poruszającym się (Δt) ulega wydłużeniu w stosunku do czasu przebiegu tego zjawiska w układzie spoczynkowym ($\Delta t_0 \equiv \Delta t'$), tzw. **czasu własnego**

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \geq \Delta t_0.$$

Przykład 1. Czas życia mionu mierzony w układzie, w którym mion spoczywa, wynosi

$\tau_\mu = (2.1969811 \pm 0.000022) \times 10^{-6} \text{s} \approx 2.2 \times 10^{-6} \text{s}$. Miony powstające w górnych warstwach atmosfery mają prędkość $v \approx 0.9c$

Ponieważ $\beta < 1 \Rightarrow \gamma > 1 \Rightarrow$ czas przebiegu zjawiska fizycznego mierzony w układzie poruszającym się (Δt) ulega wydłużeniu w stosunku do czasu przebiegu tego zjawiska w układzie spoczynkowym ($\Delta t_0 \equiv \Delta t'$), tzw. **czasu własnego**

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \geq \Delta t_0.$$

Przykład 1. Czas życia mionu mierzony w układzie, w którym mion spoczywa, wynosi

$\tau_\mu = (2.1969811 \pm 0.000022) \times 10^{-6} \text{s} \approx 2.2 \times 10^{-6} \text{s}$. Miony powstające w górnych warstwach atmosfery mają prędkość $v \approx 0.9c \Rightarrow$ czas życia w układzie związanym z Ziemią

$$\tau \approx 1/\sqrt{1 - 0.9^2} \tau_\mu \approx 2.3 \tau_\mu \approx 5.1 \times 10^{-6} \text{s}.$$

Ponieważ $\beta < 1 \Rightarrow \gamma > 1 \Rightarrow$ czas przebiegu zjawiska fizycznego mierzony w układzie poruszającym się (Δt) ulega wydłużeniu w stosunku do czasu przebiegu tego zjawiska w układzie spoczynkowym ($\Delta t_0 \equiv \Delta t'$), tzw. **czasu własnego**

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \geq \Delta t_0.$$

Przykład 1. Czas życia mionu mierzony w układzie, w którym mion spoczywa, wynosi

$\tau_\mu = (2.1969811 \pm 0.000022) \times 10^{-6} \text{s} \approx 2.2 \times 10^{-6} \text{s}$. Miony powstające w górnych warstwach atmosfery mają prędkość $v \approx 0.9c \Rightarrow$ czas życia w układzie związanym z Ziemią

$$\tau \approx 1/\sqrt{1 - 0.9^2} \tau_\mu \approx 2.3 \tau_\mu \approx 5.1 \times 10^{-6} \text{s}.$$

Ten efekt jest doskonale potwierdzony doświadczalnie. Gdyby go nie było, do powierzchni Ziemi docierałoby znacznie mniej mionów niż się ich obserwuje.

Dylatacja czasu jest rzeczywistym zjawiskiem,

Ten efekt jest doskonale potwierdzony doświadczalnie. Gdyby go nie było, do powierzchni Ziemi docierałoby znacznie mniej mionów niż się ich obserwuje.

Dylatacja czasu jest rzeczywistym zjawiskiem, potwierdzanym na co dzień, np. w urządzeniu zwanym GPS (Global Positioning System).

Ten efekt jest doskonale potwierdzony doświadczalnie. Gdyby go nie było, do powierzchni Ziemi docierałoby znacznie mniej mionów niż się ich obserwuje.

Dylatacja czasu jest rzeczywistym zjawiskiem, potwierdzanym na co dzień, np. w urządzeniu zwanym GPS (Global Positioning System).

Aby określić położenie ciała na Ziemi z dokładnością do kilku metrów, trzeba zmierzyć czas z dokładnością do kilku nanosekund (10^{-9}s), co wymaga uwzględnienia różnicy czasu mierzonego w układzie satelity i układzie Ziemi.

Ten efekt jest doskonale potwierdzony doświadczalnie. Gdyby go nie było, do powierzchni Ziemi docierałoby znacznie mniej mionów niż się ich obserwuje.

Dylatacja czasu jest rzeczywistym zjawiskiem, potwierdzanym na co dzień, np. w urządzeniu zwanym GPS (Global Positioning System).

Aby określić położenie ciała na Ziemi z dokładnością do kilku metrów, trzeba zmierzyć czas z dokładnością do kilku nanosekund (10^{-9}s), co wymaga uwzględnienia różnicy czasu mierzonego w układzie satelity i układzie Ziemi.

Skrócenie podłużnych rozmiarów ciał

Wyprowadzając wzór opisujący dylatację czasu założyliśmy, że poprzeczne rozmiary ciał w ruchu (wysokość wagonu h) nie ulegają zmianie. Inaczej jest z podłużnymi rozmiarami ciał.

Skrócenie podłużnych rozmiarów ciał

Wyprowadzając wzór opisujący dylatację czasu założyliśmy, że poprzeczne rozmiary ciał w ruchu (wysokość wagonu h) nie ulegają zmianie. Inaczej jest z podłużnymi rozmiarami ciał.

Rozważmy wagon poruszający się z prędkością $\vec{V}$ w kierunku osi Ox .

Skrócenie podłużnych rozmiarów ciał

Wyprowadzając wzór opisujący dylatację czasu założyliśmy, że poprzeczne rozmiary ciał w ruchu (wysokość wagonu h) nie ulegają zmianie. Inaczej jest z podłużnymi rozmiarami ciał.

Rozważmy wagon poruszający się z prędkością $\vec{V}$ w kierunku osi Ox .

W układzie S związanym z Ziemią umieszczamy obserwatora mierzącego czas, w którym mija go początek i koniec wagonu.

Otrzymuje on różnicę Δt , a następnie oblicza długość wagonu ze wzoru

$$L = V\Delta t.$$

Skrócenie podłużnych rozmiarów ciał

Wyprowadzając wzór opisujący dylatację czasu założyliśmy, że poprzeczne rozmiary ciał w ruchu (wysokość wagonu h) nie ulegają zmianie. Inaczej jest z podłużnymi rozmiarami ciał.

Rozważmy wagon poruszający się z prędkością $\vec{V}$ w kierunku osi Ox .

W układzie S związanym z Ziemią umieszczamy obserwatora mierzącego czas, w którym mija go początek i koniec wagonu.

Otrzymuje on różnicę Δt , a następnie oblicza długość wagonu ze wzoru

$$L = V\Delta t.$$

Obserwator w wagonie (układ S') może zmierzyć jego długość L_0 , tzw. **długość własną**, np. taśmą mierniczą,

Skrócenie podłużnych rozmiarów ciał

Wyprowadzając wzór opisujący dylatację czasu założyliśmy, że poprzeczne rozmiary ciał w ruchu (wysokość wagonu h) nie ulegają zmianie. Inaczej jest z podłużnymi rozmiarami ciał.

Rozważmy wagon poruszający się z prędkością $\vec{V}$ w kierunku osi Ox .

W układzie S związanym z Ziemią umieszczamy obserwatora mierzącego czas, w którym mija go początek i koniec wagonu.

Otrzymuje on różnicę Δt , a następnie oblicza długość wagonu ze wzoru

$$L = V\Delta t.$$

Obserwator w wagonie (układ S') może zmierzyć jego długość L_0 , tzw. **długość własną**, np. taśmą mierniczą,

Skrócenie podłużnych rozmiarów ciał

ale możemy postąpić inaczej.

Na początku i na końcu wagonu umieszczamy obserwatorów, którzy mierzą czas w momencie, gdy mijają obserwatora O znajdującego się w układzie S i otrzymują różnicę $\Delta t'$.

Skrócenie podłużnych rozmiarów ciał

ale możemy postąpić inaczej.

Na początku i na końcu wagonu umieszczamy obserwatorów, którzy mierzą czas w momencie, gdy mijają obserwatora O znajdującego się w układzie S i otrzymują różnicę $\Delta t'$.

Długość wagonu w jego układzie spoczynkowym dana jest wzorem

$$L_0 = V\Delta t'.$$

Skrócenie podłużnych rozmiarów ciał

ale możemy postąpić inaczej.

Na początku i na końcu wagonu umieszczamy obserwatorów, którzy mierzą czas w momencie, gdy mijają obserwatora O znajdującego się w układzie S i otrzymują różnicę $\Delta t'$.

Długość wagonu w jego układzie spoczynkowym dana jest wzorem

$$L_0 = V \Delta t'.$$

Korzystając ze związku $\Delta t' = \gamma \Delta t$ (Δt jest mierzone w tym samym miejscu, dlatego jest czasem własnym) dostajemy

$$L_0 = V \Delta t' = V \gamma \Delta t = \gamma L \Rightarrow L = \frac{L_0}{\gamma}.$$

Skrócenie podłużnych rozmiarów ciał

ale możemy postąpić inaczej.

Na początku i na końcu wagonu umieszczamy obserwatorów, którzy mierzą czas w momencie, gdy mijają obserwatora O znajdującego się w układzie S i otrzymują różnicę $\Delta t'$.

Długość wagonu w jego układzie spoczynkowym dana jest wzorem

$$L_0 = V\Delta t'.$$

Korzystając ze związku $\Delta t' = \gamma \Delta t$ (Δt jest mierzone w tym samym miejscu, dlatego jest czasem własnym) dostajemy

$$L_0 = V\Delta t' = V\gamma \Delta t = \gamma L \Rightarrow L = \frac{L_0}{\gamma}.$$

Skrócenie podłużnych rozmiarów ciał

Zatem podłużne rozmiary ciał – w kierunku równoległym do wektora prędkości względnej – ulegają skróceniu wg wzoru

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \leq L_0.$$

Jest to tzw. **skrócenie Fitzgeralda–Lorentza**.

Skróceniu nie ulegają natomiast rozmiary poprzeczne.

Skrócenie podłużnych rozmiarów ciał

Zatem podłużne rozmiary ciał – w kierunku równoległym do wektora prędkości względnej – ulegają skróceniu wg wzoru

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \leq L_0.$$

Jest to tzw. **skrócenie Fitzgeralda–Lorentza**.

Skróceniu nie ulegają natomiast rozmiary poprzeczne.

Ich pomiar w obu układach, S i S' , można wykonać w symetryczny sposób, różniący się jedynie zwrotem prędkości ($\vec{V}$ zamieniamy na $-\vec{V}$).

Skrócenie podłużnych rozmiarów ciał

Zatem podłużne rozmiary ciał – w kierunku równoległym do wektora prędkości względnej – ulegają skróceniu wg wzoru

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \leq L_0.$$

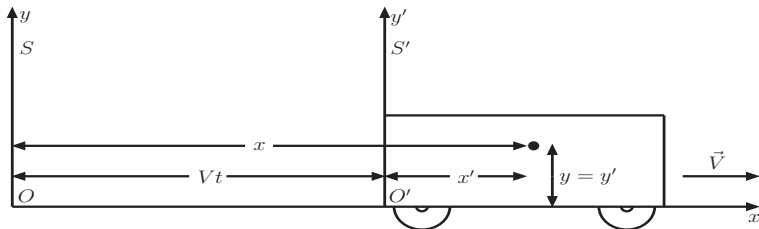
Jest to tzw. **skrócenie Fitzgeralda–Lorentza**.

Skróceniu nie ulegają natomiast rozmiary poprzeczne.

Ich pomiar w obu układach, S i S' , można wykonać w symetryczny sposób, różniący się jedynie zwrotem prędkości ($\vec{V}$ zamieniamy na $-\vec{V}$).

Transformacja Lorentza

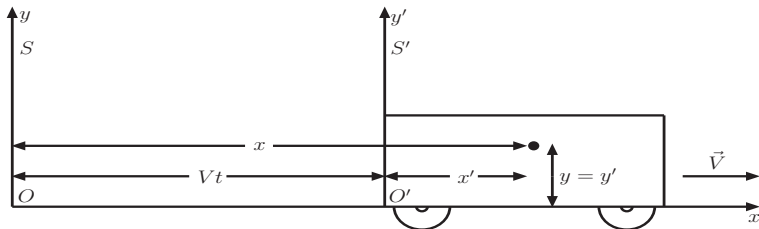
Rozważmy ponownie zdarzenie, które obserwujemy w dwóch różnych, inercjalnych układach odniesienia S i S' .



Znajdźmy związek pomiędzy współrzędnymi tego zdarzenia (t, x, y, z) w S i (t', x', y', z') w S' .

Transformacja Lorentza

Rozważmy ponownie zdarzenie, które obserwujemy w dwóch różnych, inercjalnych układach odniesienia S i S' .



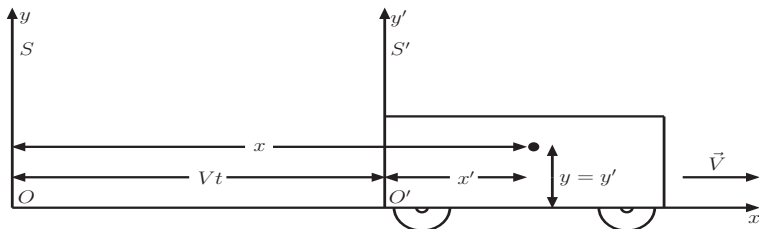
Znajdźmy związek pomiędzy współrzędnymi tego zdarzenia (t, x, y, z) w S i (t', x', y', z') w S' .

Ze wzoru na skrócenie długości

$$x - Vt = x' / \gamma \quad \Rightarrow \quad x' = \gamma (x - Vt).$$

Transformacja Lorentza

Rozważmy ponownie zdarzenie, które obserwujemy w dwóch różnych, inercjalnych układach odniesienia S i S' .



Znajdźmy związek pomiędzy współrzędnymi tego zdarzenia (t, x, y, z) w S i (t', x', y', z') w S' .

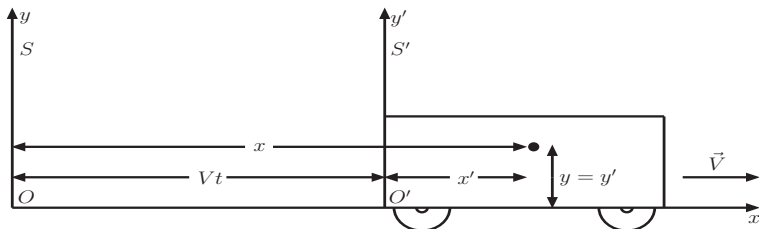
Ze wzoru na skrócenie długości

$$x - Vt = x' / \gamma \quad \Rightarrow \quad x' = \gamma (x - Vt).$$

Poprzeczne rozmiary nie ulegają zmianie, więc $y' = y$ i $z' = z$.

Transformacja Lorentza

Rozważmy ponownie zdarzenie, które obserwujemy w dwóch różnych, inercjalnych układach odniesienia S i S' .



Znajdźmy związek pomiędzy współrzędnymi tego zdarzenia (t, x, y, z) w S i (t', x', y', z') w S' .

Ze wzoru na skrócenie długości

$$x - Vt = x' / \gamma \quad \Rightarrow \quad x' = \gamma (x - Vt).$$

Poprzeczne rozmiary nie ulegają zmianie, więc $y' = y$ i $z' = z$.

Transformacja Lorentza

Związek odwrotny do $x' = \gamma (x - Vt)$ otrzymamy zamieniając V na $-V$ oraz zmienne primowane na nieprimowane i odwrotnie

$$x = \gamma (x' + Vt').$$

Z tego równania możemy wyznaczyć x'

$$x' = x/\gamma - Vt'.$$

Transformacja Lorentza

Związek odwrotny do $x' = \gamma (x - Vt)$ otrzymamy zamieniając V na $-V$ oraz zmienne primowane na nieprimowane i odwrotnie

$$x = \gamma (x' + Vt').$$

Z tego równania możemy wyznaczyć x'

$$x' = x/\gamma - Vt'.$$

Porównując oba wzory na x' otrzymamy równanie

$$x/\gamma - Vt' = \gamma (x - Vt),$$

Transformacja Lorentza

Związek odwrotny do $x' = \gamma(x - Vt)$ otrzymamy zamieniając V na $-V$ oraz zmienne primowane na nieprimowane i odwrotnie

$$x = \gamma(x' + Vt').$$

Z tego równania możemy wyznaczyć x'

$$x' = x/\gamma - Vt'.$$

Porównując oba wzory na x' otrzymamy równanie

$$x/\gamma - Vt' = \gamma(x - Vt),$$

z którego możemy wyznaczyć t'

$$t' = \frac{1}{V} [x/\gamma - \gamma(x - Vt)] = \gamma \left[t - \frac{1}{V} \left(1 - 1/\gamma^2 \right) x \right].$$

Transformacja Lorentza

Związek odwrotny do $x' = \gamma(x - Vt)$ otrzymamy zamieniając V na $-V$ oraz zmienne primowane na nieprimowane i odwrotnie

$$x = \gamma(x' + Vt').$$

Z tego równania możemy wyznaczyć x'

$$x' = x/\gamma - Vt'.$$

Porównując oba wzory na x' otrzymamy równanie

$$x/\gamma - Vt' = \gamma(x - Vt),$$

z którego możemy wyznaczyć t'

$$t' = \frac{1}{V} [x/\gamma - \gamma(x - Vt)] = \gamma \left[t - \frac{1}{V} \left(1 - 1/\gamma^2 \right) x \right].$$

Rozważmy współczynnik stojący przy x we wzorze

$$t' = \gamma \left[t - \frac{1}{V} \left(1 - 1/\gamma^2 \right) x \right],$$

$$\frac{1}{V} \left(1 - 1/\gamma^2 \right) = \frac{1}{V} \left[1 - \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right] = \frac{1}{V} \frac{V^2}{c^2} = \frac{V}{c^2},$$

Rozważmy współczynnik stojący przy x we wzorze

$$t' = \gamma \left[t - \frac{1}{V} \left(1 - 1/\gamma^2 \right) x \right],$$

$$\frac{1}{V} \left(1 - 1/\gamma^2 \right) = \frac{1}{V} \left[1 - \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right] = \frac{1}{V} \frac{V^2}{c^2} = \frac{V}{c^2},$$

a więc

$$t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right).$$

Rozważmy współczynnik stojący przy x we wzorze

$$t' = \gamma \left[t - \frac{1}{V} \left(1 - 1/\gamma^2 \right) x \right],$$

$$\frac{1}{V} \left(1 - 1/\gamma^2 \right) = \frac{1}{V} \left[1 - \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right] = \frac{1}{V} \frac{V^2}{c^2} = \frac{V}{c^2},$$

a więc

$$t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right).$$

Podsumowując

$$t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right), \quad x' = \gamma (x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Zauważmy, że dla $V \ll c \Rightarrow \gamma \approx 1, \quad V/c \approx 0$, otrzymamy

$$t' \approx t, \quad x' \approx x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

czyli wzory transformacyjne Galileusza.

Transformacja Lorentza

Podsumowując

$$t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right), \quad x' = \gamma (x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Zauważmy, że dla $V \ll c \Rightarrow \gamma \approx 1, \quad V/c \approx 0$, otrzymamy

$$t' \approx t, \quad x' \approx x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

czyli wzory transformacyjne Galileusza.

Związki na odwrotną transformację Lorentza otrzymamy zamieniając V na $-V$ oraz zmienne primowane na nieprimowane i odwrotnie

$$t = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right), \quad x = \gamma (x' + Vt'), \quad y = y', \quad z = z'.$$

Podsumowując

$$t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right), \quad x' = \gamma (x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Zauważmy, że dla $V \ll c \Rightarrow \gamma \approx 1, \quad V/c \approx 0$, otrzymamy

$$t' \approx t, \quad x' \approx x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

czyli wzory transformacyjne Galileusza.

Związki na odwrotną transformację Lorentza otrzymamy zamieniając V na $-V$ oraz zmienne primowane na nieprimowane i odwrotnie

$$t = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right), \quad x = \gamma (x' + Vt'), \quad y = y', \quad z = z'.$$

Transformacja Lorentza – dodawanie prędkości

Zróżniczkujemy wzory transformacyjne Lorentza

$$dt' = \gamma \left(dt - \frac{V}{c^2} dx \right), \quad dx' = \gamma (dx - V dt), \quad dy' = dy, \quad dz' = dz.$$

Składowa x prędkości ciała w układzie S'

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma (dx - V dt)}{\gamma \left(dt - \frac{V}{c^2} dx \right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V v_x}{c^2}},$$

gdzie ostatnią równość uzyskaliśmy dzieląc licznik i mianownik przez γdt .

Transformacja Lorentza – dodawanie prędkości

Zróżniczkujemy wzory transformacyjne Lorentza

$$dt' = \gamma \left(dt - \frac{V}{c^2} dx \right), \quad dx' = \gamma (dx - V dt), \quad dy' = dy, \quad dz' = dz.$$

Składowa x prędkości ciała w układzie S'

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma (dx - V dt)}{\gamma \left(dt - \frac{V}{c^2} dx \right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V v_x}{c^2}},$$

gdzie ostatnią równość uzyskaliśmy dzieląc licznik i mianownik przez γdt . Składowa y prędkości ciała w układzie S'

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma \left(dt - \frac{V}{c^2} dx \right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{V v_x}{c^2} \right)}.$$

Transformacja Lorentza – dodawanie prędkości

Zróżniczkujemy wzory transformacyjne Lorentza

$$dt' = \gamma \left(dt - \frac{V}{c^2} dx \right), \quad dx' = \gamma (dx - V dt), \quad dy' = dy, \quad dz' = dz.$$

Składowa x prędkości ciała w układzie S'

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma (dx - V dt)}{\gamma \left(dt - \frac{V}{c^2} dx \right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V v_x}{c^2}},$$

gdzie ostatnią równość uzyskaliśmy dzieląc licznik i mianownik przez γdt . Składowa y prędkości ciała w układzie S'

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma \left(dt - \frac{V}{c^2} dx \right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{V v_x}{c^2} \right)}.$$

Podobnie, dla składowej z uzyskujemy

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma \left(dt - \frac{V}{c^2} dx \right)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right)}.$$

Podsumowując

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right)}.$$

Transformacja Lorentza – dodawanie prędkości

Podobnie, dla składowej z uzyskujemy

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma \left(dt - \frac{V}{c^2} dx \right)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right)}.$$

Podsumowując

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right)}.$$

Asymetria tych wzorów wynika z faktu, że układ S' porusza się w S z prędkością skierowaną w kierunku osi Ox , $\vec{V} = (V, 0, 0)$.

Podobnie, dla składowej z uzyskujemy

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma \left(dt - \frac{V}{c^2} dx \right)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right)}.$$

Podsumowując

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right)}.$$

Asymetria tych wzorów wynika z faktu, że układ S' porusza się w S z prędkością skierowaną w kierunku osi Ox , $\vec{V} = (V, 0, 0)$.

Przykład 2. Rakieta poruszająca się względem Ziemi z prędkością $0.8c$ wystrzeliwuje w kierunku swego ruchu

- 1 pocisk z prędkością $0.6c$,
- 2 wiązkę światła laserowego z prędkością c

względem rakiety. Jaka jest prędkość pocisku i wiązki światła lasera względem Ziemi?

Przykład 2. Rakieta poruszająca się względem Ziemi z prędkością $0.8c$ wyrzeliwuje w kierunku swego ruchu

- 1 pocisk z prędkością $0.6c$,
- 2 wiązkę światła laserowego z prędkością c

względem rakiety. *Jaka jest prędkość pocisku i wiązki światła lasera względem Ziemi?*

Rozwiązanie. Wybieramy oś Ox układu kartezjańskiego związanego z Ziemią w kierunku ruchu rakiety i pocisku. Prędkość układu inercjalnego związanego z raketą $V = 0.8c$, a prędkość w układzie rakiety

- 1 pocisku $v'_x = 0.6c$,
- 2 wiązki lasera $v'_x = c$.

Przykład 2. Rakieta poruszająca się względem Ziemi z prędkością $0.8c$ wyrzeliwuje w kierunku swego ruchu

- 1 pocisk z prędkością $0.6c$,
- 2 wiązkę światła laserowego z prędkością c

względem rakiety. *Jaka jest prędkość pocisku i wiązki światła lasera względem Ziemi?*

Rozwiązanie. Wybieramy oś Ox układu kartezjańskiego związanego z Ziemią w kierunku ruchu rakiety i pocisku. Prędkość układu inercjalnego związanego z raketą $V = 0.8c$, a prędkość w układzie rakiety

- 1 pocisku $v'_x = 0.6c$,
- 2 wiązki lasera $v'_x = c$.

Korzystamy z odwróconej transformacji prędkości

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)}, \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)},$$

co daje

❶ dla pocisku:

Korzystamy z odwróconej transformacji prędkości

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)}, \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)},$$

co daje

❶ dla pocisku: $v_x = \frac{0.6c + 0.8c}{1 + 0.8c \cdot 0.6c/c^2}$

Korzystamy z odwróconej transformacji prędkości

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)}, \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)},$$

co daje

❶ dla pocisku: $v_x = \frac{0.6c + 0.8c}{1 + 0.8c \cdot 0.6c/c^2} = \frac{1.4c}{1.48}$

Korzystamy z odwróconej transformacji prędkości

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)}, \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)},$$

co daje

❶ dla pocisku: $v_x = \frac{0.6c + 0.8c}{1 + 0.8c \cdot 0.6c/c^2} = \frac{1.4c}{1.48} \approx 0.95c,$

Korzystamy z odwróconej transformacji prędkości

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)}, \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)},$$

co daje

- ❶ dla pocisku: $v_x = \frac{0.6c + 0.8c}{1 + 0.8c \cdot 0.6c/c^2} = \frac{1.4c}{1.48} \approx 0.95c$,
- ❷ dla światła lasera: $v_x = \frac{c + 0.8c}{1 + 0.8c \cdot c/c^2}$

Korzystamy z odwróconej transformacji prędkości

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)}, \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)},$$

co daje

- ❶ dla pocisku: $v_x = \frac{0.6c + 0.8c}{1 + 0.8c \cdot 0.6c/c^2} = \frac{1.4c}{1.48} \approx 0.95c$,
- ❷ dla światła lasera: $v_x = \frac{c + 0.8c}{1 + 0.8c \cdot c/c^2} = \frac{1.8c}{1.8}$

Korzystamy z odwróconej transformacji prędkości

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)}, \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)},$$

co daje

- ❶ dla pocisku: $v_x = \frac{0.6c + 0.8c}{1 + 0.8c \cdot 0.6c/c^2} = \frac{1.4c}{1.48} \approx 0.95c$,
- ❷ dla światła lasera: $v_x = \frac{c + 0.8c}{1 + 0.8c \cdot c/c^2} = \frac{1.8c}{1.8} = c$.

Korzystamy z odwróconej transformacji prędkości

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)}, \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)},$$

co daje

- ❶ dla pocisku: $v_x = \frac{0.6c + 0.8c}{1 + 0.8c \cdot 0.6c/c^2} = \frac{1.4c}{1.48} \approx 0.95c$,
- ❷ dla światła lasera: $v_x = \frac{c + 0.8c}{1 + 0.8c \cdot c/c^2} = \frac{1.8c}{1.8} = c$.

Zauważmy, że $v_y = v_z = 0$, bo w obu przypadkach $v'_y = v'_z = 0$.

Korzystamy z odwróconej transformacji prędkości

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)}, \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)},$$

co daje

- ❶ dla pocisku: $v_x = \frac{0.6c + 0.8c}{1 + 0.8c \cdot 0.6c/c^2} = \frac{1.4c}{1.48} \approx 0.95c$,
- ❷ dla światła lasera: $v_x = \frac{c + 0.8c}{1 + 0.8c \cdot c/c^2} = \frac{1.8c}{1.8} = c$.

Zauważmy, że $v_y = v_z = 0$, bo w obu przypadkach $v'_y = v'_z = 0$.

Czasoprzestrzeń Minkowskiego

Szczególną teorię względności wygodnie jest sformułować w czterowymiarowej **czasoprzestrzeni Minkowskiego**.

Zdefiniujemy **kontrawariantny** (z indeksami pisanymi u góry) czterowektor opisujący położenie punktu–zdarzenia w czasoprzestrzeni

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3).$$

Czasoprzestrzeń Minkowskiego

Szczególną teorię względności wygodnie jest sformułować w czterowymiarowej **czasoprzestrzeni Minkowskiego**.

Zdefiniujemy **kontrawariantny** (z indeksami pisanymi u góry) czterowektor opisujący położenie punktu–zdarzenia w czasoprzestrzeni

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3).$$

Umowa. Wskaźniki greckie przebiegają wartości:

$$\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots = 0, 1, 2, 3,$$

a wskaźniki łacińskie wartości:

$$i, j, k, l, \dots = 1, 2, 3.$$

Szczególną teorię względności wygodnie jest sformułować w czterowymiarowej **czasoprzestrzeni Minkowskiego**.

Zdefiniujemy **kontrawariantny** (z indeksami pisanymi u góry) czterowektor opisujący położenie punktu–zdarzenia w czasoprzestrzeni

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3).$$

Umowa. Wskaźniki greckie przebiegają wartości:

$$\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots = 0, 1, 2, 3,$$

a wskaźniki łacińskie wartości:

$$i, j, k, l, \dots = 1, 2, 3.$$

Definiujemy **kowariantny** (z indeksami pisanymi na dole) tensor metryczny

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definiujemy **kowariantny czterowektor położenia**

$$x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu},$$

gdzie sumujemy po powtarzających się indeksach greckich na różnych poziomach.

Definiujemy **kowariantny** (z indeksami pisanymi na dole) tensor metryczny

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definiujemy **kowariantny czterowektor położenia**

$$x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu},$$

gdzie sumujemy po powtarzających się indeksach greckich na różnych poziomach.

Umowa. Po powtarzających się indeksach łacińskich sumujemy również, gdy są na tym samym poziomie.

Zauważmy, że tensor metryczny jest symetryczny

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}.$$

Umowa. Po powtarzających się indeksach łacińskich sumujemy również, gdy są na tym samym poziomie.

Zauważmy, że tensor metryczny jest symetryczny

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}.$$

Znajdźmy związek pomiędzy składowymi kowariantnymi x_μ i kontrawariantnymi x^μ czterowektora położenia.

$$x_0 = g_{0\nu} x^\nu$$

Umowa. Po powtarzających się indeksach łacińskich sumujemy również, gdy są na tym samym poziomie.

Zauważmy, że tensor metryczny jest symetryczny

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}.$$

Znajdźmy związek pomiędzy składowymi kowariantnymi x_μ i kontrawariantnymi x^μ czterowektora położenia.

$$x_0 = g_{0\nu}x^\nu = g_{00}x^0 + g_{0j}x^j$$

Umowa. Po powtarzających się indeksach łacińskich sumujemy również, gdy są na tym samym poziomie.

Zauważmy, że tensor metryczny jest symetryczny

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}.$$

Znajdźmy związek pomiędzy składowymi kowariantnymi x_μ i kontrawariantnymi x^μ czterowektora położenia.

$$x_0 = g_{0\nu}x^\nu = g_{00}x^0 + g_{0j}x^j = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^j$$

Umowa. Po powtarzających się indeksach łacińskich sumujemy również, gdy są na tym samym poziomie.

Zauważmy, że tensor metryczny jest symetryczny

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}.$$

Znajdźmy związek pomiędzy składowymi kowariantnymi x_μ i kontrawariantnymi x^μ czterowektora położenia.

$$x_0 = g_{0\nu}x^\nu = g_{00}x^0 + g_{0j}x^j = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^j = x^0,$$

Umowa. Po powtarzających się indeksach łacińskich sumujemy również, gdy są na tym samym poziomie.

Zauważmy, że tensor metryczny jest symetryczny

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}.$$

Znajdźmy związek pomiędzy składowymi kowariantnymi x_μ i kontrawariantnymi x^μ czterowektora położenia.

$$x_0 = g_{0\nu} x^\nu = g_{00} x^0 + g_{0j} x^j = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^j = x^0,$$

x_i

Umowa. Po powtarzających się indeksach łacińskich sumujemy również, gdy są na tym samym poziomie.

Zauważmy, że tensor metryczny jest symetryczny

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}.$$

Znajdźmy związek pomiędzy składowymi kowariantnymi x_μ i kontrawariantnymi x^μ czterowektora położenia.

$$\begin{aligned}x_0 &= g_{0\nu}x^\nu = g_{00}x^0 + g_{0j}x^j = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^j = x^0, \\x_i &= \end{aligned}$$

Umowa. Po powtarzających się indeksach łacińskich sumujemy również, gdy są na tym samym poziomie.

Zauważmy, że tensor metryczny jest symetryczny

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}.$$

Znajdźmy związek pomiędzy składowymi kowariantnymi x_μ i kontrawariantnymi x^μ czterowektora położenia.

$$x_0 = g_{0\nu}x^\nu = g_{00}x^0 + g_{0j}x^j = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^j = x^0,$$

$$x_i = g_{i\nu}x^\nu$$

Umowa. Po powtarzających się indeksach łacińskich sumujemy również, gdy są na tym samym poziomie.

Zauważmy, że tensor metryczny jest symetryczny

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}.$$

Znajdźmy związek pomiędzy składowymi kowariantnymi x_μ i kontrawariantnymi x^μ czterowektora położenia.

$$\begin{aligned}x_0 &= g_{0\nu}x^\nu = g_{00}x^0 + g_{0j}x^j = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^j = x^0, \\x_i &= g_{i\nu}x^\nu = g_{i0}x^0 + g_{ij}x^j\end{aligned}$$

Umowa. Po powtarzających się indeksach łacińskich sumujemy również, gdy są na tym samym poziomie.

Zauważmy, że tensor metryczny jest symetryczny

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}.$$

Znajdźmy związek pomiędzy składowymi kowariantnymi x_μ i kontrawariantnymi x^μ czterowektora położenia.

$$\begin{aligned}x_0 &= g_{0\nu}x^\nu = g_{00}x^0 + g_{0j}x^j = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^j = x^0, \\x_i &= g_{i\nu}x^\nu = g_{i0}x^0 + g_{ij}x^j = 0 \cdot x^0 - \delta_{ij}x^j\end{aligned}$$

Umowa. Po powtarzających się indeksach łacińskich sumujemy również, gdy są na tym samym poziomie.

Zauważmy, że tensor metryczny jest symetryczny

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}.$$

Znajdźmy związek pomiędzy składowymi kowariantnymi x_μ i kontrawariantnymi x^μ czterowektora położenia.

$$\begin{aligned}x_0 &= g_{0\nu}x^\nu = g_{00}x^0 + g_{0j}x^j = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^j = x^0, \\x_i &= g_{i\nu}x^\nu = g_{i0}x^0 + g_{ij}x^j = 0 \cdot x^0 - \delta_{ij}x^j = -x^i,\end{aligned}$$

Umowa. Po powtarzających się indeksach łacińskich sumujemy również, gdy są na tym samym poziomie.

Zauważmy, że tensor metryczny jest symetryczny

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}.$$

Znajdźmy związek pomiędzy składowymi kowariantnymi x_μ i kontrawariantnymi x^μ czterowektora położenia.

$$\begin{aligned}x_0 &= g_{0\nu}x^\nu = g_{00}x^0 + g_{0j}x^j = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^j = x^0, \\x_i &= g_{i\nu}x^\nu = g_{i0}x^0 + g_{ij}x^j = 0 \cdot x^0 - \delta_{ij}x^j = -x^i,\end{aligned}$$

a więc

$$x_\mu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (ct, -\vec{x}).$$

Umowa. Po powtarzających się indeksach łacińskich sumujemy również, gdy są na tym samym poziomie.

Zauważmy, że tensor metryczny jest symetryczny

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}.$$

Znajdźmy związek pomiędzy składowymi kowariantnymi x_μ i kontrawariantnymi x^μ czterowektora położenia.

$$\begin{aligned}x_0 &= g_{0\nu}x^\nu = g_{00}x^0 + g_{0j}x^j = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^j = x^0, \\x_i &= g_{i\nu}x^\nu = g_{i0}x^0 + g_{ij}x^j = 0 \cdot x^0 - \delta_{ij}x^j = -x^i,\end{aligned}$$

a więc

$$x_\mu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (ct, -\vec{x}).$$

Definiujemy **kontrawariantny tensor metryczny** $g^{\mu\nu}$ poprzez relację

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta_{\nu}^{\mu},$$

przy czym delta Kroneckera zdefiniowana jest następująco

$$\delta_{\nu}^{\mu} = \begin{cases} 1, & \text{dla } \mu = \nu \\ 0, & \text{dla } \mu \neq \nu \end{cases}.$$

Zadanie 1. Pokazać, że $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$.

Definiujemy **kontrawariantny tensor metryczny** $g^{\mu\nu}$ poprzez relację

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta_{\nu}^{\mu},$$

przy czym delta Kroneckera zdefiniowana jest następująco

$$\delta_{\nu}^{\mu} = \begin{cases} 1, & \text{dla } \mu = \nu \\ 0, & \text{dla } \mu \neq \nu \end{cases}.$$

Zadanie 1. Pokazać, że $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$.

Definiujemy iloczyn skalarny czterowektorów

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu.$$

Wykorzystując związek $y_\mu = g_{\mu\nu} y^\nu$ możemy zapisać

$$x \cdot y = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu$$

Definiujemy iloczyn skalarny czterowektorów

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu.$$

Wykorzystując związek $y_\mu = g_{\mu\nu} y^\nu$ możemy zapisać

$$x \cdot y = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = x^\mu y_\mu.$$

Definiujemy iloczyn skalarny czterowektorów

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu.$$

Wykorzystując związek $y_\mu = g_{\mu\nu} y^\nu$ możemy zapisać

$$x \cdot y = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = x^\mu y_\mu.$$

Skorzystajmy z symetrii tensora $g_{\mu\nu}$

$$x \cdot y = g_{\nu\mu} x^\mu y^\nu$$

Definiujemy iloczyn skalarny czterowektorów

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu.$$

Wykorzystując związek $y_\mu = g_{\mu\nu} y^\nu$ możemy zapisać

$$x \cdot y = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = x^\mu y_\mu.$$

Skorzystajmy z symetrii tensora $g_{\mu\nu}$

$$x \cdot y = g_{\nu\mu} x^\mu y^\nu = x_\nu y^\nu,$$

Definiujemy iloczyn skalarny czterowektorów

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu.$$

Wykorzystując związek $y_\mu = g_{\mu\nu} y^\nu$ możemy zapisać

$$x \cdot y = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = x^\mu y_\mu.$$

Skorzystajmy z symetrii tensora $g_{\mu\nu}$

$$x \cdot y = g_{\nu\mu} x^\mu y^\nu = x_\nu y^\nu,$$

a zatem

$$x \cdot y = x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu.$$

Definiujemy iloczyn skalarny czterowektorów

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu.$$

Wykorzystując związek $y_\mu = g_{\mu\nu} y^\nu$ możemy zapisać

$$x \cdot y = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = x^\mu y_\mu.$$

Skorzystajmy z symetrii tensora $g_{\mu\nu}$

$$x \cdot y = g_{\nu\mu} x^\mu y^\nu = x_\nu y^\nu,$$

a zatem

$$x \cdot y = x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu.$$

Rozpiszmy sumę

$$x_\mu y^\mu = x_0 y^0 + x_i y^i$$

i skorzystajmy ze związków: $x_0 = x^0$ i $x_i = -x^i$, wtedy otrzymamy

$$x_\mu y^\mu = x^0 y^0 - x^i y^i$$

Rozpiszmy sumę

$$x_\mu y^\mu = x_0 y^0 + x_i y^i$$

i skorzystajmy ze związków: $x_0 = x^0$ i $x_i = -x^i$, wtedy otrzymamy

$$x_\mu y^\mu = x^0 y^0 - x^i y^i = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}.$$

Rozpiszmy sumę

$$x_\mu y^\mu = x_0 y^0 + x_i y^i$$

i skorzystajmy ze związków: $x_0 = x^0$ i $x_i = -x^i$, wtedy otrzymamy

$$x_\mu y^\mu = x^0 y^0 - x^i y^i = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}.$$

W takim razie iloczyn skalarny czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego wyraża się wzorem:

$$x \cdot y = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}.$$

Rozpiszmy sumę

$$x_\mu y^\mu = x_0 y^0 + x_i y^i$$

i skorzystajmy ze związków: $x_0 = x^0$ i $x_i = -x^i$, wtedy otrzymamy

$$x_\mu y^\mu = x^0 y^0 - x^i y^i = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}.$$

W takim razie iloczyn skalarny czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego wyraża się wzorem:

$$x \cdot y = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}.$$

Zdefiniujmy kwadrat normy czterowektora

$$\|x\|^2 = x \cdot x = (x^0)^2 - \vec{x}^2$$

i interwał – kwadrat odległości czasoprzestrzennej – pomiędzy zdarzeniami x i y

$$\|x - y\|^2 = (x - y) \cdot (x - y)$$

Zdefiniujmy kwadrat normy czterowektora

$$\|x\|^2 = x \cdot x = (x^0)^2 - \vec{x}^2$$

i interwał – kwadrat odległości czasoprzestrzennej – pomiędzy zdarzeniami x i y

$$\|x - y\|^2 = (x - y) \cdot (x - y) = (x^0 - y^0)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2.$$

Zdefiniujemy kwadrat normy czterowektora

$$\|x\|^2 = x \cdot x = (x^0)^2 - \vec{x}^2$$

i interwał – kwadrat odległości czasoprzestrzennej – pomiędzy zdarzeniami x i y

$$\|x - y\|^2 = (x - y) \cdot (x - y) = (x^0 - y^0)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2.$$

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct'$$

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right)$$

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) = \gamma (x^0 - \beta x^1),$$

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) = \gamma (x^0 - \beta x^1),$$

x'^1

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) = \gamma (x^0 - \beta x^1),$$

$$x'^1 =$$

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) = \gamma (x^0 - \beta x^1),$$

$$x'^1 = x' = \gamma (x - Vt)$$

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) = \gamma (x^0 - \beta x^1),$$

$$x'^1 = x' = \gamma (x - Vt) = \gamma (x^1 - \beta x^0),$$

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) = \gamma (x^0 - \beta x^1),$$

$$x'^1 = x' = \gamma (x - Vt) = \gamma (x^1 - \beta x^0),$$

$$x'^2$$

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) = \gamma (x^0 - \beta x^1),$$

$$x'^1 = x' = \gamma (x - Vt) = \gamma (x^1 - \beta x^0),$$

$$x'^2 =$$

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) = \gamma (x^0 - \beta x^1),$$

$$x'^1 = x' = \gamma (x - Vt) = \gamma (x^1 - \beta x^0),$$

$$x'^2 = y' = y =$$

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) = \gamma (x^0 - \beta x^1),$$

$$x'^1 = x' = \gamma (x - Vt) = \gamma (x^1 - \beta x^0),$$

$$x'^2 = y' = y = x^2,$$

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) = \gamma (x^0 - \beta x^1),$$

$$x'^1 = x' = \gamma (x - Vt) = \gamma (x^1 - \beta x^0),$$

$$x'^2 = y' = y = x^2, \quad x'^3 = z' = z$$

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) = \gamma (x^0 - \beta x^1),$$

$$x'^1 = x' = \gamma (x - Vt) = \gamma (x^1 - \beta x^0),$$

$$x'^2 = y' = y = x^2, \quad x'^3 = z' = z = x^3$$

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) = \gamma (x^0 - \beta x^1),$$

$$x'^1 = x' = \gamma (x - Vt) = \gamma (x^1 - \beta x^0),$$

$$x'^2 = y' = y = x^2, \quad x'^3 = z' = z = x^3$$

i obliczmy iloczyn skalarny czterowektorów x' i y'

$$x' \cdot y' =$$

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) = \gamma (x^0 - \beta x^1),$$

$$x'^1 = x' = \gamma (x - Vt) = \gamma (x^1 - \beta x^0),$$

$$x'^2 = y' = y = x^2, \quad x'^3 = z' = z = x^3$$

i obliczmy iloczyn skalarny czterowektorów x' i y'

$$x' \cdot y' = x'^0 y'^0 - x'^i y'^i =$$

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) = \gamma (x^0 - \beta x^1),$$

$$x'^1 = x' = \gamma (x - Vt) = \gamma (x^1 - \beta x^0),$$

$$x'^2 = y' = y = x^2, \quad x'^3 = z' = z = x^3$$

i obliczmy iloczyn skalarny czterowektorów x' i y'

$$x' \cdot y' = x'^0 y'^0 - x'^i y'^i = x'^0 y'^0 - x'^1 y'^1 - x'^2 y'^2 - x'^3 y'^3$$

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) = \gamma (x^0 - \beta x^1),$$

$$x'^1 = x' = \gamma (x - Vt) = \gamma (x^1 - \beta x^0),$$

$$x'^2 = y' = y = x^2, \quad x'^3 = z' = z = x^3$$

i obliczmy iloczyn skalarny czterowektorów x' i y'

$$x' \cdot y' = x'^0 y'^0 - x'^i y'^i = x'^0 y'^0 - x'^1 y'^1 - x'^2 y'^2 - x'^3 y'^3$$

=

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) = \gamma (x^0 - \beta x^1),$$

$$x'^1 = x' = \gamma (x - Vt) = \gamma (x^1 - \beta x^0),$$

$$x'^2 = y' = y = x^2, \quad x'^3 = z' = z = x^3$$

i obliczmy iloczyn skalarny czterowektorów x' i y'

$$\begin{aligned} x' \cdot y' &= x'^0 y'^0 - x'^i y'^i = x'^0 y'^0 - x'^1 y'^1 - x'^2 y'^2 - x'^3 y'^3 \\ &= \gamma^2 \left[(x^0 - \beta x^1) (y^0 - \beta y^1) - (x^1 - \beta x^0) (y^1 - \beta y^0) \right] - x^2 y^2 \\ &\quad - x^3 y^3 = \end{aligned}$$

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) = \gamma (x^0 - \beta x^1),$$

$$x'^1 = x' = \gamma (x - Vt) = \gamma (x^1 - \beta x^0),$$

$$x'^2 = y' = y = x^2, \quad x'^3 = z' = z = x^3$$

i obliczmy iloczyn skalarny czterowektorów x' i y'

$$\begin{aligned} x' \cdot y' &= x'^0 y'^0 - x'^i y'^i = x'^0 y'^0 - x'^1 y'^1 - x'^2 y'^2 - x'^3 y'^3 \\ &= \gamma^2 \left[(x^0 - \beta x^1) (y^0 - \beta y^1) - (x^1 - \beta x^0) (y^1 - \beta y^0) \right] - x^2 y^2 \\ &\quad - x^3 y^3 = \gamma^2 \left[x^0 y^0 (1 - \beta^2) - x^1 y^1 (1 - \beta^2) + x^0 y^1 (-\beta + \beta) \right. \\ &\quad \left. + x^1 y^0 (-\beta + \beta) \right] - x^2 y^2 - x^3 y^3 = \end{aligned}$$

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) = \gamma (x^0 - \beta x^1),$$

$$x'^1 = x' = \gamma (x - Vt) = \gamma (x^1 - \beta x^0),$$

$$x'^2 = y' = y = x^2, \quad x'^3 = z' = z = x^3$$

i obliczmy iloczyn skalarny czterowektorów x' i y'

$$\begin{aligned} x' \cdot y' &= x'^0 y'^0 - x'^i y'^i = x'^0 y'^0 - x'^1 y'^1 - x'^2 y'^2 - x'^3 y'^3 \\ &= \gamma^2 \left[(x^0 - \beta x^1) (y^0 - \beta y^1) - (x^1 - \beta x^0) (y^1 - \beta y^0) \right] - x^2 y^2 \\ &\quad - x^3 y^3 = \gamma^2 \left[x^0 y^0 (1 - \beta^2) - x^1 y^1 (1 - \beta^2) + x^0 y^1 (-\beta + \beta) \right. \\ &\quad \left. + x^1 y^0 (-\beta + \beta) \right] - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 \end{aligned}$$

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) = \gamma (x^0 - \beta x^1),$$

$$x'^1 = x' = \gamma (x - Vt) = \gamma (x^1 - \beta x^0),$$

$$x'^2 = y' = y = x^2, \quad x'^3 = z' = z = x^3$$

i obliczmy iloczyn skalarny czterowektorów x' i y'

$$\begin{aligned} x' \cdot y' &= x'^0 y'^0 - x'^i y'^i = x'^0 y'^0 - x'^1 y'^1 - x'^2 y'^2 - x'^3 y'^3 \\ &= \gamma^2 \left[(x^0 - \beta x^1) (y^0 - \beta y^1) - (x^1 - \beta x^0) (y^1 - \beta y^0) \right] - x^2 y^2 \\ &\quad - x^3 y^3 = \gamma^2 \left[x^0 y^0 (1 - \beta^2) - x^1 y^1 (1 - \beta^2) + x^0 y^1 (-\beta + \beta) \right. \\ &\quad \left. + x^1 y^0 (-\beta + \beta) \right] - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 \\ &= \end{aligned}$$

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) = \gamma (x^0 - \beta x^1),$$

$$x'^1 = x' = \gamma (x - Vt) = \gamma (x^1 - \beta x^0),$$

$$x'^2 = y' = y = x^2, \quad x'^3 = z' = z = x^3$$

i obliczmy iloczyn skalarny czterowektorów x' i y'

$$\begin{aligned} x' \cdot y' &= x'^0 y'^0 - x'^i y'^i = x'^0 y'^0 - x'^1 y'^1 - x'^2 y'^2 - x'^3 y'^3 \\ &= \gamma^2 \left[(x^0 - \beta x^1) (y^0 - \beta y^1) - (x^1 - \beta x^0) (y^1 - \beta y^0) \right] - x^2 y^2 \\ &\quad - x^3 y^3 = \gamma^2 \left[x^0 y^0 (1 - \beta^2) - x^1 y^1 (1 - \beta^2) + x^0 y^1 (-\beta + \beta) \right. \\ &\quad \left. + x^1 y^0 (-\beta + \beta) \right] - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 \\ &= x \cdot y \end{aligned}$$

Transformacja Lorentza

Dokonajmy transformacji Lorentza czterowektora x do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$

$$x'^0 = ct' = c\gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) = \gamma (x^0 - \beta x^1),$$

$$x'^1 = x' = \gamma (x - Vt) = \gamma (x^1 - \beta x^0),$$

$$x'^2 = y' = y = x^2, \quad x'^3 = z' = z = x^3$$

i obliczmy iloczyn skalarny czterowektorów x' i y'

$$\begin{aligned} x' \cdot y' &= x'^0 y'^0 - x'^i y'^i = x'^0 y'^0 - x'^1 y'^1 - x'^2 y'^2 - x'^3 y'^3 \\ &= \gamma^2 \left[(x^0 - \beta x^1) (y^0 - \beta y^1) - (x^1 - \beta x^0) (y^1 - \beta y^0) \right] - x^2 y^2 \\ &\quad - x^3 y^3 = \gamma^2 \left[x^0 y^0 (1 - \beta^2) - x^1 y^1 (1 - \beta^2) + x^0 y^1 (-\beta + \beta) \right. \\ &\quad \left. + x^1 y^0 (-\beta + \beta) \right] - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 \\ &= x \cdot y \end{aligned}$$

Transformacja Lorentza

Widzimy, że transformacja polegająca na *pchnięciu* do układu poruszającego się nie zmienia iloczynu skalarnego czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego.

Ponieważ iloczyn skalarny trójwektorów $\vec{x} \cdot \vec{y}$ jest niezmienniczy przy obrotach w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, to iloczyn skalarny czterowektorów:

$$x \cdot y = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$$

również pozostanie niezmienny.

Transformacja Lorentza

Widzimy, że transformacja polegająca na *pchnięciu* do układu poruszającego się nie zmienia iloczynu skalarnego czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego.

Ponieważ iloczyn skalarny trójwektorów $\vec{x} \cdot \vec{y}$ jest niezmienniczy przy obrotach w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, to iloczyn skalarny czterowektorów:

$$x \cdot y = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$$

również pozostanie niezmienniczy.

Zdefiniujmy transformację Lorentza jako najogólniejszą transformację Λ , która nie zmienia iloczynu skalarnego czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego

$$x \rightarrow x' = \Lambda x, \quad \text{przy} \quad x' \cdot y' = x \cdot y.$$

Transformacja Lorentza

Widzimy, że transformacja polegająca na *pchnięciu* do układu poruszającego się nie zmienia iloczynu skalarnego czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego.

Ponieważ iloczyn skalarny trójwektorów $\vec{x} \cdot \vec{y}$ jest niezmienniczy przy obrotach w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, to iloczyn skalarny czterowektorów:

$$x \cdot y = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$$

również pozostanie niezmienniczy.

Zdefiniujemy transformację Lorentza jako najogólniejszą transformację Λ , która nie zmienia iloczynu skalarnego czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego

$$x \rightarrow x' = \Lambda x, \quad \text{przy} \quad x' \cdot y' = x \cdot y.$$

Tak określone transformacje obejmują zarówno pchnięcia jak i obroty w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej.

Transformacja Lorentza

Widzimy, że transformacja polegająca na *pchnięciu* do układu poruszającego się nie zmienia iloczynu skalarnego czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego.

Ponieważ iloczyn skalarny trójwektorów $\vec{x} \cdot \vec{y}$ jest niezmienniczy przy obrotach w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, to iloczyn skalarny czterowektorów:

$$x \cdot y = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$$

również pozostanie niezmienniczy.

Zdefiniujemy transformację Lorentza jako najogólniejszą transformację Λ , która nie zmienia iloczynu skalarnego czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego

$$x \rightarrow x' = \Lambda x, \quad \text{przy} \quad x' \cdot y' = x \cdot y.$$

Tak określone transformacje obejmują zarówno pchnięcia jak i obroty w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej.

Transformacja Lorentza

Dla składowych kontrawariantnych mamy

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}.$$

Uwaga. Uwzględniając translacje czasoprzestrzenne

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$$

otrzymalibyśmy tzw. transformację Poincare'go.

Transformacja Lorentza

Dla składowych kontrawariantnych mamy

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}.$$

Uwaga. Uwzględniając translacje czasoprzestrzenne

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$$

otrzymalibyśmy tzw. **transformację Poincare'go**.

Dokonajmy transformacji Lorentza i obliczmy, dla dowolnych x, y ,

$$x' \cdot y' = g_{\mu\nu} x'^{\mu} y'^{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} x^{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} y^{\sigma} = x \cdot y = g_{\rho\sigma} x^{\rho} y^{\sigma} \quad \Leftrightarrow$$

Transformacja Lorentza

Dla składowych kontrawariantnych mamy

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}.$$

Uwaga. Uwzględniając translacje czasoprzestrzenne

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$$

otrzymalibyśmy tzw. **transformację Poincare'go**.

Dokonajmy transformacji Lorentza i obliczmy, dla dowolnych x, y ,

$$x' \cdot y' = g_{\mu\nu} x'^{\mu} y'^{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} x^{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} y^{\sigma} = x \cdot y = g_{\rho\sigma} x^{\rho} y^{\sigma} \quad \Leftrightarrow$$

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} = g_{\rho\sigma}$$

Transformacja Lorentza

Dla składowych kontrawariantnych mamy

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}.$$

Uwaga. Uwzględniając translacje czasoprzestrzenne

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$$

otrzymalibyśmy tzw. transformację Poincare'go.

Dokonajmy transformacji Lorentza i obliczmy, dla dowolnych x, y ,

$$x' \cdot y' = g_{\mu\nu} x'^{\mu} y'^{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} x^{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} y^{\sigma} = x \cdot y = g_{\rho\sigma} x^{\rho} y^{\sigma} \quad \Leftrightarrow$$

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} = g_{\rho\sigma}$$

Transformacja Lorentza

Przekształćmy warunek $g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma g^{\sigma\tau} = g_{\rho\sigma}g^{\sigma\tau} \Rightarrow \Lambda_{\nu\rho}\Lambda^{\nu\tau} = \delta_\rho^\tau \Rightarrow \Lambda_{\rho\nu}^T\Lambda^{\nu\tau} = \delta_\rho^\tau,$$

co możemy zapisać w formie macierzowej

$$\Lambda^T \Lambda = I$$

Transformacja Lorentza

Przekształćmy warunek $g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma g^{\sigma\tau} = g_{\rho\sigma}g^{\sigma\tau} \Rightarrow \Lambda_{\nu\rho}\Lambda^{\nu\tau} = \delta_\rho^\tau \Rightarrow \Lambda_{\rho\nu}^T\Lambda^{\nu\tau} = \delta_\rho^\tau,$$

co możemy zapisać w formie macierzowej

$$\Lambda^T \Lambda = I$$

Widzimy, że transformacja Lorentza w czasoprzestrzeni Minkowskiego jest analogiem obrotu.

Transformacja Lorentza

Przekształćmy warunek $g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma g^{\sigma\tau} = g_{\rho\sigma}g^{\sigma\tau} \Rightarrow \Lambda_{\nu\rho}\Lambda^{\nu\tau} = \delta_\rho^\tau \Rightarrow \Lambda_{\rho\nu}^T\Lambda^{\nu\tau} = \delta_\rho^\tau,$$

co możemy zapisać w formie macierzowej

$$\Lambda^T \Lambda = I$$

Widzimy, że transformacja Lorentza w czasoprzestrzeni Minkowskiego jest analogiem obrotu.

Obliczmy obustronnie wyznacznik

$$\det(\Lambda^T \Lambda) = \det(I) \Rightarrow [\det(\Lambda)]^2 = 1 \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1$$

Transformacja Lorentza

Przekształćmy warunek $g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma g^{\sigma\tau} = g_{\rho\sigma}g^{\sigma\tau} \Rightarrow \Lambda_{\nu\rho}\Lambda^{\nu\tau} = \delta_\rho^\tau \Rightarrow \Lambda_{\rho\nu}^T\Lambda^{\nu\tau} = \delta_\rho^\tau,$$

co możemy zapisać w formie macierzowej

$$\Lambda^T \Lambda = I$$

Widzimy, że transformacja Lorentza w czasoprzestrzeni Minkowskiego jest analogiem obrotu.

Obliczmy obustronnie wyznacznik

$$\det(\Lambda^T \Lambda) = \det(I) \Rightarrow [\det(\Lambda)]^2 = 1 \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1$$

$$\det(\Lambda) = 1 \Rightarrow \text{transformacje właściwe,}$$

$$\det(\Lambda) = -1 \Rightarrow \text{transformacje niewłaściwe.}$$

Transformacja Lorentza

Przekształćmy warunek $g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma g^{\sigma\tau} = g_{\rho\sigma}g^{\sigma\tau} \Rightarrow \Lambda_{\nu\rho}\Lambda^{\nu\tau} = \delta_\rho^\tau \Rightarrow \Lambda_{\rho\nu}^T\Lambda^{\nu\tau} = \delta_\rho^\tau,$$

co możemy zapisać w formie macierzowej

$$\Lambda^T \Lambda = I$$

Widzimy, że transformacja Lorentza w czasoprzestrzeni Minkowskiego jest analogiem obrotu.

Obliczmy obustronnie wyznacznik

$$\det(\Lambda^T \Lambda) = \det(I) \Rightarrow [\det(\Lambda)]^2 = 1 \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1$$

$$\det(\Lambda) = 1 \Rightarrow \text{transformacje właściwe,}$$

$$\det(\Lambda) = -1 \Rightarrow \text{transformacje niewłaściwe.}$$

Transformacje właściwe tworzą podgrupę, a transformacje niewłaściwe nie tworzą podgrupy wszystkich transformacji Lorentza.

Jeśli $\Lambda^0_0 \geq 0 \Rightarrow$ transformacja nie zmienia znaku składowej czasowej czterowektora i nazywamy ją ortochroniczną.

Transformacje właściwe tworzą podgrupę, a transformacje niewłaściwe nie tworzą podgrupy wszystkich transformacji Lorentza.

Jeśli $\Lambda^0_0 \geq 0 \Rightarrow$ transformacja nie zmienia znaku składowej czasowej czterowektora i nazywamy ją **ortochroniczną**.

Transformacje właściwe i ortochroniczne nazywamy **szczególnymi transformacjami Lorentza**. Tworzą one podgrupę.

Transformacje właściwe tworzą podgrupę, a transformacje niewłaściwe nie tworzą podgrupy wszystkich transformacji Lorentza.

Jeśli $\Lambda^0_0 \geq 0 \Rightarrow$ transformacja nie zmienia znaku składowej czasowej czterowektora i nazywamy ją **ortochroniczną**.

Transformacje **właściwe i ortochroniczne** nazywamy **szczególnymi transformacjami Lorentza**. Tworzą one podgrupę.

Od każdej teorii fizycznej wymagamy, aby była niezmiennicza względem szczególnych transformacji Lorentza.

Transformacje właściwe tworzą podgrupę, a transformacje niewłaściwe nie tworzą podgrupy wszystkich transformacji Lorentza.

Jeśli $\Lambda^0_0 \geq 0 \Rightarrow$ transformacja nie zmienia znaku składowej czasowej czterowektora i nazywamy ją **ortochroniczną**.

Transformacje **właściwe i ortochroniczne** nazywamy **szczególnymi transformacjami Lorentza**. Tworzą one podgrupę.

Od każdej teorii fizycznej wymagamy, aby była **niezmiennicza względem szczególnych transformacji Lorentza**.

Nazywamy ją wtedy **relatywistycznie niezmienniczą**, a dokładniej **relatywistycznie współzmienniczą**.

Transformacje właściwe tworzą podgrupę, a transformacje niewłaściwe nie tworzą podgrupy wszystkich transformacji Lorentza.

Jeśli $\Lambda^0_0 \geq 0 \Rightarrow$ transformacja nie zmienia znaku składowej czasowej czterowektora i nazywamy ją ortochroniczną.

Transformacje właściwe i ortochroniczne nazywamy szczególnymi transformacjami Lorentza. Tworzą one podgrupę.

Od każdej teorii fizycznej wymagamy, aby była niezmiennicza względem szczególnych transformacji Lorentza.

Nazywamy ją wtedy relatywistycznie niezmienniczą, a dokładniej relatywistycznie współzmienniczą.

Transformacja Lorentza

Jak transformują się składowe kowariantne czterowektora?

Skorzystajmy ze związków:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{i} \quad x^{\mu} = g^{\mu\nu} x_{\nu},$$

Transformacja Lorentza

Jak transformują się składowe kowariantne czterowektora?
Skorzystajmy ze związków:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{i} \quad x^{\mu} = g^{\mu\nu} x_{\nu},$$

które w połączeniu dają

$$g^{\mu\nu} x'_{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} g^{\nu\rho} x_{\rho}.$$

Transformacja Lorentza

Jak transformują się składowe kowariantne czterowektora?
Skorzystajmy ze związków:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{i} \quad x^{\mu} = g^{\mu\nu} x_{\nu},$$

które w połączeniu dają

$$g^{\mu\nu} x'_{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} g^{\nu\rho} x_{\rho}.$$

Mnożąc obie strony tego równania przez $g_{\sigma\mu}$ otrzymamy:

$$g_{\sigma\mu} g^{\mu\nu} x'_{\nu} = g_{\sigma\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} g^{\nu\rho} x_{\rho},$$

Transformacja Lorentza

Jak transformują się składowe kowariantne czterowektora?
Skorzystajmy ze związków:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{i} \quad x^{\mu} = g^{\mu\nu} x_{\nu},$$

które w połączeniu dają

$$g^{\mu\nu} x'_{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} g^{\nu\rho} x_{\rho}.$$

Mnożąc obie strony tego równania przez $g_{\sigma\mu}$ otrzymamy:

$$g_{\sigma\mu} g^{\mu\nu} x'_{\nu} = g_{\sigma\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} g^{\nu\rho} x_{\rho},$$

ale

$$g_{\sigma\mu} g^{\mu\nu} = \delta_{\sigma}^{\nu}, \quad g_{\sigma\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} = \Lambda_{\sigma\nu} = \Lambda^T_{\nu\sigma},$$

Transformacja Lorentza

Jak transformują się składowe kowariantne czterowektora?
Skorzystajmy ze związków:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{i} \quad x^{\mu} = g^{\mu\nu} x_{\nu},$$

które w połączeniu dają

$$g^{\mu\nu} x'_{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} g^{\nu\rho} x_{\rho}.$$

Mnożąc obie strony tego równania przez $g_{\sigma\mu}$ otrzymamy:

$$g_{\sigma\mu} g^{\mu\nu} x'_{\nu} = g_{\sigma\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} g^{\nu\rho} x_{\rho},$$

ale

$$g_{\sigma\mu} g^{\mu\nu} = \delta^{\nu}_{\sigma}, \quad g_{\sigma\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} = \Lambda_{\sigma\nu} = \Lambda^T_{\nu\sigma},$$

więc nasze równanie przyjmuje postać

$$\delta_{\sigma}^{\nu} x'_{\nu} = \Lambda_{\nu\sigma}^T g^{\rho\nu} x_{\rho},$$

gdzie skorzystaliśmy z symetrii tensora metrycznego.

Po wysumowaniu po ν i podniesieniu pierwszego indeksu w macierzy Λ^T dostaniemy związek

$$x'_{\sigma} = \Lambda^{T\rho}_{\sigma} x_{\rho},$$

więc nasze równanie przyjmuje postać

$$\delta^\nu_\sigma x'^\nu = \Lambda^T_{\nu\sigma} g^{\rho\nu} x_\rho,$$

gdzie skorzystaliśmy z symetrii tensora metrycznego.

Po wysumowaniu po ν i podniesieniu pierwszego indeksu w macierzy Λ^T dostaniemy związek

$$x'_\sigma = \Lambda^{T\rho}_{\sigma} x_\rho,$$

który ostatecznie możemy zapisać w formie

$$x'_\mu = x_\rho \Lambda^{T\rho}_{\mu}.$$

więc nasze równanie przyjmuje postać

$$\delta_{\sigma}^{\nu} x'_{\nu} = \Lambda_{\nu\sigma}^T g^{\rho\nu} x_{\rho},$$

gdzie skorzystaliśmy z symetrii tensora metrycznego.

Po wysumowaniu po ν i podniesieniu pierwszego indeksu w macierzy Λ^T dostaniemy związek

$$x'_{\sigma} = \Lambda^{T\rho}_{\sigma} x_{\rho},$$

który ostatecznie możemy zapisać w formie

$$x'_{\mu} = x_{\rho} \Lambda^{T\rho}_{\mu}.$$

Porównajmy prawa transformacyjne dla składowych kontra- i kowariantnych czterowektora położenia.

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad x'_{\mu} = x_{\nu} \Lambda^{\nu}_{\mu}.$$

Przypomnijmy, że dla transformacji Lorentza macierze Λ i Λ^T reprezentują transformacje wzajemnie [odwrotne](#).

Porównajmy prawa transformacyjne dla składowych kontra- i kowariantnych czterowektora położenia.

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad x'_{\mu} = x_{\nu} \Lambda^{\nu}_{\mu}.$$

Przypomnijmy, że dla transformacji Lorentza macierze Λ i Λ^T reprezentują transformacje wzajemnie **odwrotne**.

Z definicji transformacji Lorentza od razu wynika niezmienniczość interwału czasoprzestrzennego

$$\|x - y\|^2 = (x - y) \cdot (x - y) = (x^0 - y^0)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2$$

i normy czterowektora $\|x\|^2 = x \cdot x = (x^0)^2 - \vec{x}^2$.

Kwadrat normy czterowektora (lub interwał) może być

Z definicji transformacji Lorentza od razu wynika niezmienniczość interwału czasoprzestrzennego

$$\|x - y\|^2 = (x - y) \cdot (x - y) = (x^0 - y^0)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2$$

i normy czterowektora $\|x\|^2 = x \cdot x = (x^0)^2 - \vec{x}^2$.

Kwadrat normy czterowektora (lub interwał) może być

- $\|x\|^2 > 0 \Rightarrow$ czterowektor jest czasopodobny,

Z definicji transformacji Lorentza od razu wynika niezmienniczość interwału czasoprzestrzennego

$$\|x - y\|^2 = (x - y) \cdot (x - y) = (x^0 - y^0)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2$$

i normy czterowektora $\|x\|^2 = x \cdot x = (x^0)^2 - \vec{x}^2$.

Kwadrat normy czterowektora (lub interwał) może być

- $\|x\|^2 > 0 \Rightarrow$ czterowektor jest **czasopodobny**,
- $\|x\|^2 < 0 \Rightarrow$ czterowektor jest **przestrzennopodobny**,

Z definicji transformacji Lorentza od razu wynika niezmienniczość interwału czasoprzestrzennego

$$\|x - y\|^2 = (x - y) \cdot (x - y) = (x^0 - y^0)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2$$

i normy czterowektora $\|x\|^2 = x \cdot x = (x^0)^2 - \vec{x}^2$.

Kwadrat normy czterowektora (lub interwał) może być

- $\|x\|^2 > 0 \Rightarrow$ czterowektor jest **czasopodobny**,
- $\|x\|^2 < 0 \Rightarrow$ czterowektor jest **przestrzennopodobny**,
- $\|x\|^2 = c^2 t^2 - \vec{x}^2 = 0 \Rightarrow$ czterowektor jest **zerowy** – leży na tzw. **stożku świetlnym**.

Z definicji transformacji Lorentza od razu wynika niezmienniczość interwału czasoprzestrzennego

$$\|x - y\|^2 = (x - y) \cdot (x - y) = (x^0 - y^0)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2$$

i normy czterowektora $\|x\|^2 = x \cdot x = (x^0)^2 - \vec{x}^2$.

Kwadrat normy czterowektora (lub interwał) może być

- $\|x\|^2 > 0 \Rightarrow$ czterowektor jest **czasopodobny**,
- $\|x\|^2 < 0 \Rightarrow$ czterowektor jest **przestrzennopodobny**,
- $\|x\|^2 = c^2 t^2 - \vec{x}^2 = 0 \Rightarrow$ czterowektor jest **zerowy** – leży na tzw. **stożku świetlnym**.

Zauważmy, że pojęcia te są relatywistycznie niezmiennicze.

Z definicji transformacji Lorentza od razu wynika niezmienniczość interwału czasoprzestrzennego

$$\|x - y\|^2 = (x - y) \cdot (x - y) = (x^0 - y^0)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2$$

i normy czterowektora $\|x\|^2 = x \cdot x = (x^0)^2 - \vec{x}^2$.

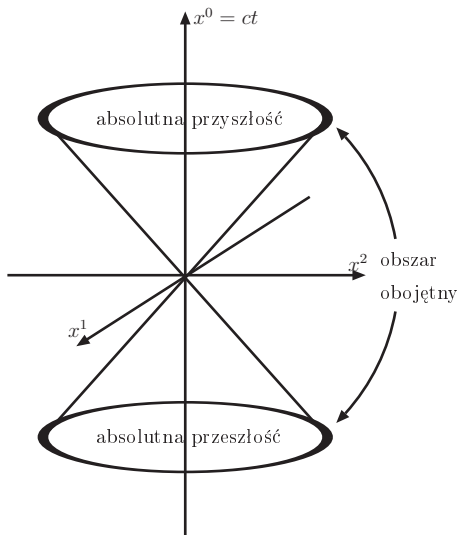
Kwadrat normy czterowektora (lub interwał) może być

- $\|x\|^2 > 0 \Rightarrow$ czterowektor jest **czasopodobny**,
- $\|x\|^2 < 0 \Rightarrow$ czterowektor jest **przestrzennopodobny**,
- $\|x\|^2 = c^2 t^2 - \vec{x}^2 = 0 \Rightarrow$ czterowektor jest **zerowy** – leży na tzw. **stożku świetlnym**.

Zauważmy, że pojęcia te są relatywistycznie niezmiennicze.

Czasoprzestrzeń Minkowskiego – stożek świetlny

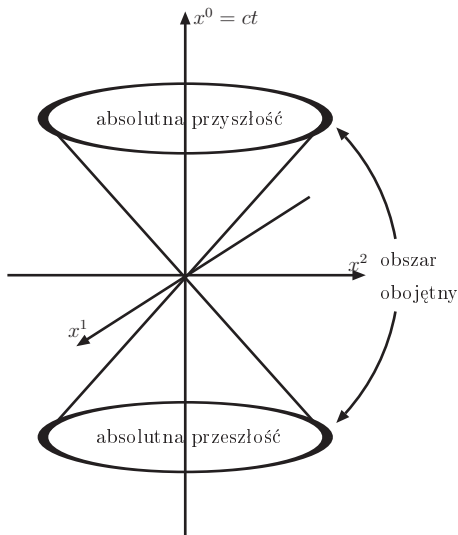
Pomińmy współrzędną $x^3 \Rightarrow$ równanie
 $c^2 t^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$ opisuje powierzchnię stożka.



Czasoprzestrzeń rozkłada się na rozłączne obszary.

Czasoprzestrzeń Minkowskiego – stożek świetlny

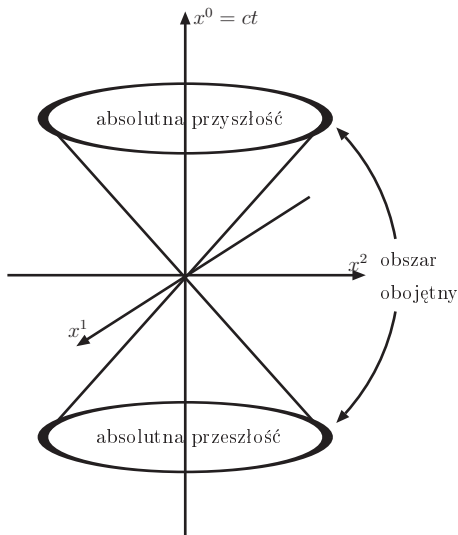
Pomińmy współzrzedną $x^3 \Rightarrow$ równanie
 $c^2 t^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$ opisuje powierzchnię stożka.



Czasoprzestrzeń rozkłada się na rozłączne obszary.
Przyszłościowy stożek świetlny:

Czasoprzestrzeń Minkowskiego – stożek świetlny

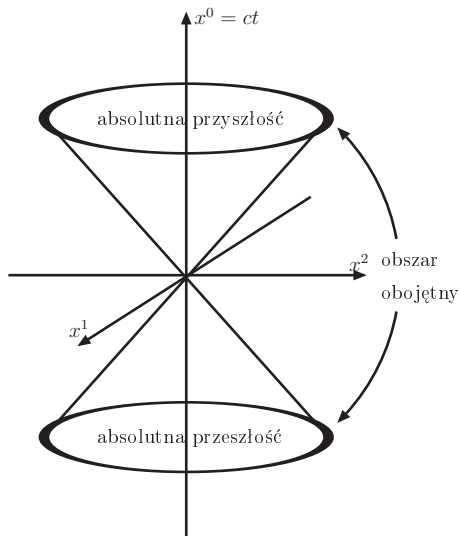
Pomińmy współzrzedną $x^3 \Rightarrow$ równanie
 $c^2 t^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$ opisuje powierzchnię stożka.



Czasoprzestrzeń rozkłada się na rozłączne obszary. Przyszłościowy stożek świetlny: *Z początku układu wysyłamy błysk światła w chwili $t = 0$. Dla $t > 0$ czoło fali tworzy w płaszczyźnie $x^1 x^2$ okrąg (sferę w $\mathbb{R}^3$) o promieniu $r = ct$.*

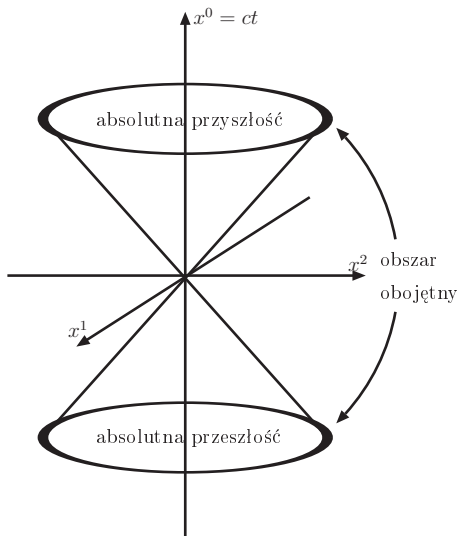
Czasoprzestrzeń Minkowskiego – stożek świetlny

Pomińmy współzrzedną $x^3 \Rightarrow$ równanie
 $c^2 t^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$ opisuje powierzchnię stożka.



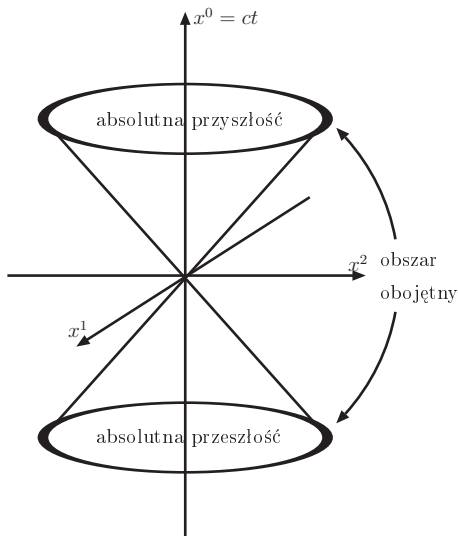
Czasoprzestrzeń rozkłada się na rozłączne obszary. Przyszłościowy stożek świetlny: Z początku układu wysyłamy błysk światła w chwili $t = 0$. Dla $t > 0$ czoło fali tworzy w płaszczyźnie $x^1 x^2$ okrąg (sferę w $\mathbb{R}^3$) o promieniu $r = ct$.

Czasoprzestrzeń Minkowskiego – stożek świetlny



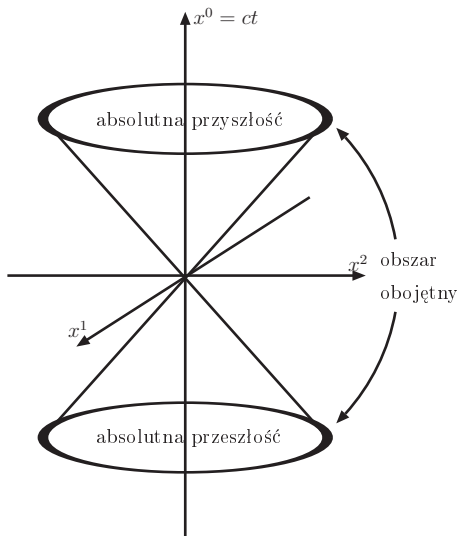
Przesłościowy stożek
świetlny:

Czasoprzestrzeń Minkowskiego – stożek świetlny



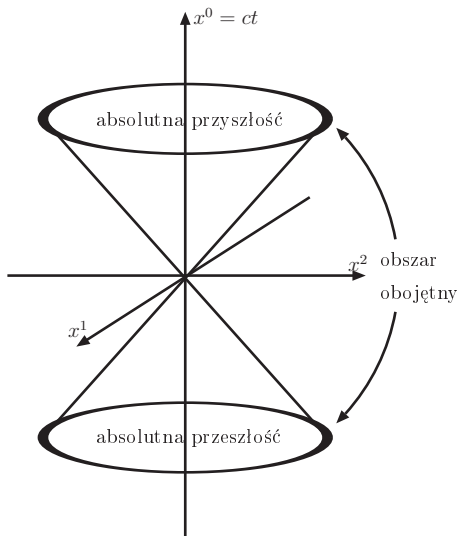
Przeszłościowy stożek świetlny: *Błysk wysłany z punktu $(ct, \vec{x})$ w chwili $t < 0$ przejdzie przez początek układu w chwili $t = 0$.*

Czasoprzestrzeń Minkowskiego – stożek świetlny



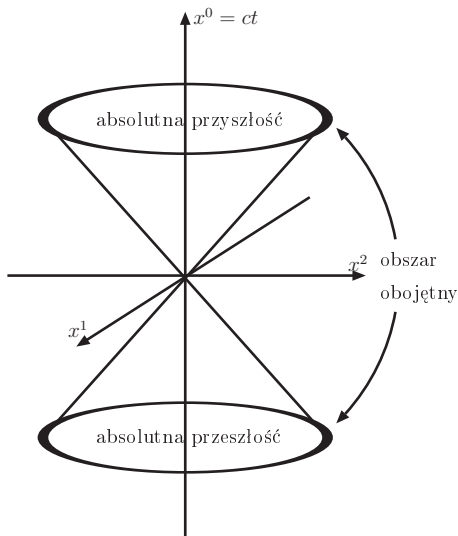
Przeszłościowy stożek świetlny: *Błysk wysłany z punktu $(ct, \vec{x})$ w chwili $t < 0$ przejdzie przez początek układu w chwili $t = 0$.*

Czasoprzestrzeń Minkowskiego – stożek świetlny



Absolutna przyszłość:

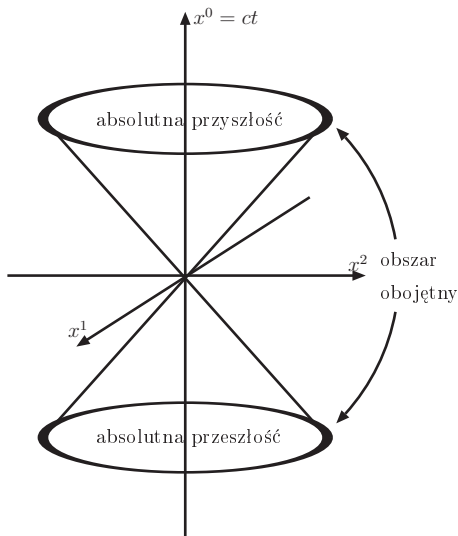
Czasoprzestrzeń Minkowskiego – stożek świetlny



Absolutna przyszłość:

$$t > 0 \text{ i } c^2 t^2 > (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

Czasoprzestrzeń Minkowskiego – stożek świetlny

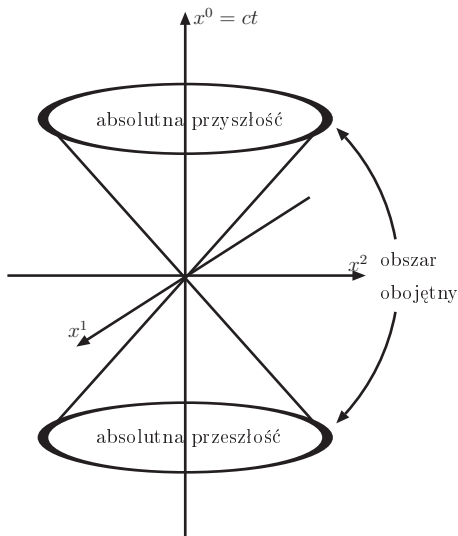


Absolutna przyszłość:

$$t > 0 \text{ i } c^2 t^2 > (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

Absolutna przeszłość:

Czasoprzestrzeń Minkowskiego – stożek świetlny



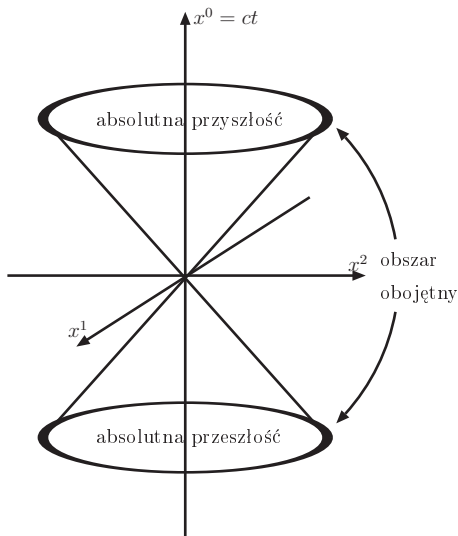
Absolutna przyszłość:

$$t > 0 \text{ i } c^2 t^2 > (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

Absolutna przeszłość:

$$t < 0 \text{ i } c^2 t^2 > (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

Czasoprzestrzeń Minkowskiego – stożek świetlny



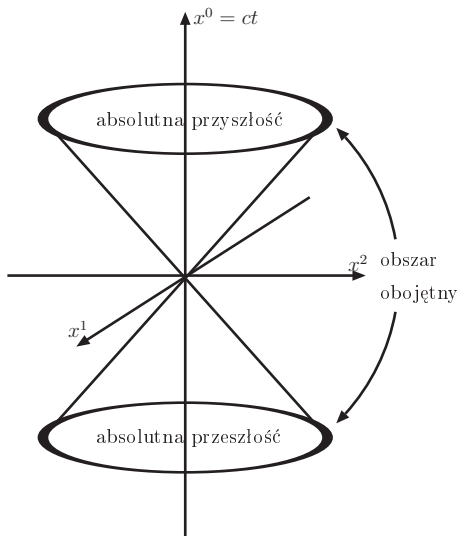
Absolutna przyszłość:

$$t > 0 \text{ i } c^2 t^2 > (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

Absolutna przeszłość:

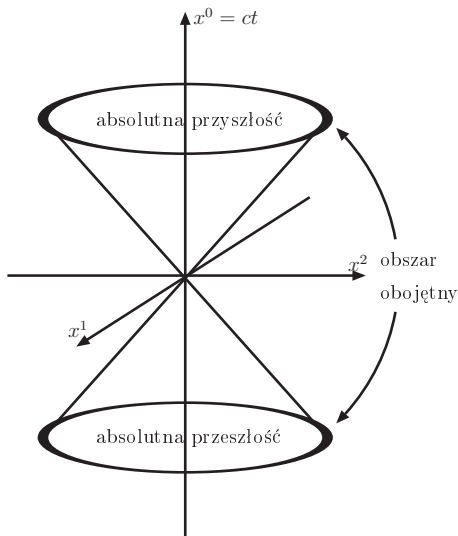
$$t < 0 \text{ i } c^2 t^2 > (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

Czasoprzestrzeń Minkowskiego – stożek świetlny



Obszar obojętny:

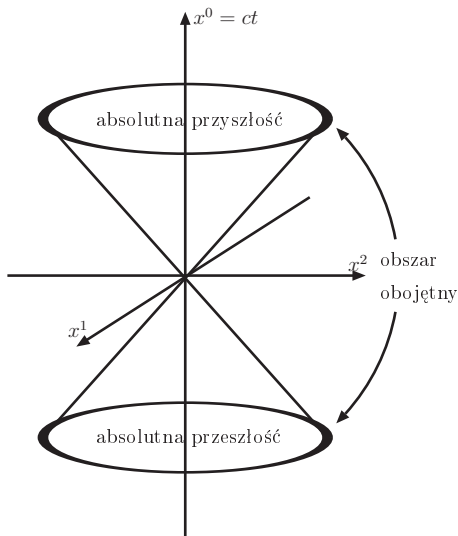
Czasoprzestrzeń Minkowskiego – stożek świetlny



Obszar obojętny:

$$c^2 t^2 < (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

Czasoprzestrzeń Minkowskiego – stożek świetlny

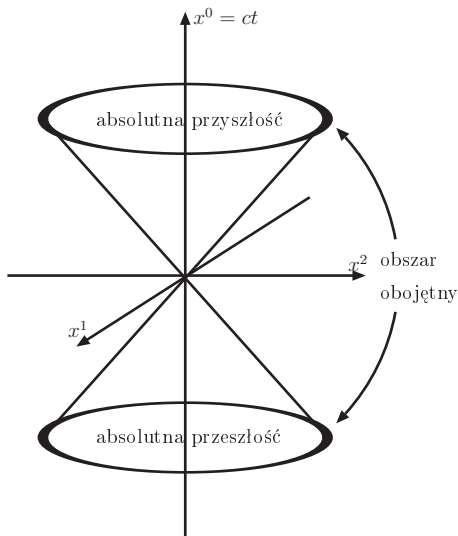


Obszar obojętny:

$$c^2 t^2 < (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

Zbiór punktów przyczynowo niezwiązanych z początkiem układu, gdyż oddziaływanie nie może rozchodzić się z prędkością większą od prędkości światła w próżni c .

Czasoprzestrzeń Minkowskiego – stożek świetlny



Obszar obojętny:

$$c^2 t^2 < (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

Zbiór punktów przyczynowo niezwiązanych z początkiem układu, gdyż oddziaływanie nie może rozchodzić się z prędkością większą od prędkości światła w próżni c .

Wszystkie obiekty, które przy transformacji Lorentza transformują się tak jak

- kontrawariantny czterowektor położenia $x^\mu = (ct, \vec{x})$, tzn.

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu,$$

nazywamy czterowektorami kontrawariantnymi.

- kowariantny czterowektor położenia $x_\mu = (ct, -\vec{x})$, tzn.

$$x'_\mu = x_\nu \Lambda^{-1\nu}_\mu = x_\nu \Lambda^{T\nu}_\mu,$$

nazywamy czterowektorami kowariantnymi.