

Symetrie i prawa zachowania w fizyce

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

w fizyce

Współrzędne cykliczne

Postaramy się znaleźć wzajemny związek pomiędzy wielkościami zachowanymi a symetriami układu fizycznego.

Jeśli funkcja Lagrange'a zależy tylko od prędkości $\dot{q}_j$, a nie zależy od odpowiedniej współrzędnej uogólnionej q_j , to taką współrzędną nazywamy **współrzędną cykliczną**.

Współrzędne cykliczne

Postaramy się znaleźć wzajemny związek pomiędzy wielkościami zachowanymi a symetriami układu fizycznego.

Jeśli funkcja Lagrange'a zależy tylko od prędkości $\dot{q}_j$, a nie zależy od odpowiedniej współrzędnej uogólnionej q_j , to taką współrzędną nazywamy **współrzędną cykliczną**.

Dla współrzędnej cyklicznej z definicji zachodzi

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

Współrzędne cykliczne

Postaramy się znaleźć wzajemny związek pomiędzy wielkościami zachowanymi a symetriami układu fizycznego.

Jeśli funkcja Lagrange'a zależy tylko od prędkości $\dot{q}_j$, a nie zależy od odpowiedniej współrzędnej uogólnionej q_j , to taką współrzędną nazywamy **współrzędną cykliczną**.

Dla współrzędnej cyklicznej z definicji zachodzi

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

a po skorzystaniu z odpowiedniego równania Lagrange'a II rodzaju otrzymamy

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_j}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{const.}$$

Współrzędne cykliczne

Postaramy się znaleźć wzajemny związek pomiędzy wielkościami zachowanymi a symetriami układu fizycznego.

Jeśli funkcja Lagrange'a zależy tylko od prędkości $\dot{q}_j$, a nie zależy od odpowiedniej współrzędnej uogólnionej q_j , to taką współrzędną nazywamy **współrzędną cykliczną**.

Dla współrzędnej cyklicznej z definicji zachodzi

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

a po skorzystaniu z odpowiedniego równania Lagrange'a II rodzaju otrzymamy

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_j}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{const.}$$

Widzimy, że pęd uogólniony sprzężony do współrzędnej cyklicznej jest zachowany.

Postarajmy się powiązać ten fakt z pewną symetrią układu fizycznego opisywanego funkcją Lagrange'a L .

Widzimy, że pęd uogólniony sprzężony do współrzędnej cyklicznej jest zachowany.

Postarajmy się powiązać ten fakt z pewną symetrią układu fizycznego opisywanego funkcją Lagrange'a L .

Jeśli funkcja Lagrange'a nie zależy od współrzędnej uogólnionej q_j , to możemy dokonać dowolnego przesunięcia (translacji) tej współrzędnej o stałą wielkość a_j

$$q_j \rightarrow q'_j = q_j + a_j \Rightarrow \dot{q}_j = \dot{q}'_j$$

Widzimy, że pęd uogólniony sprzężony do współrzędnej cyklicznej jest zachowany.

Postaramy się powiązać ten fakt z pewną symetrią układu fizycznego opisywanego funkcją Lagrange'a L .

Jeśli funkcja Lagrange'a nie zależy od współrzędnej uogólnionej q_j , to możemy dokonać dowolnego przesunięcia (translacji) tej współrzędnej o stałą wielkość a_j

$$q_j \rightarrow q'_j = q_j + a_j \Rightarrow \dot{q}_j = \dot{q}'_j$$

i funkcja Lagrange'a po transformacji będzie miała dokładnie taką samą postać, jak przed transformacją.

Widzimy, że pęd uogólniony sprzężony do współrzędnej cyklicznej jest zachowany.

Postaramy się powiązać ten fakt z pewną symetrią układu fizycznego opisywanego funkcją Lagrange'a L .

Jeśli funkcja Lagrange'a nie zależy od współrzędnej uogólnionej q_j , to możemy dokonać dowolnego przesunięcia (translacji) tej współrzędnej o stałą wielkość a_j

$$q_j \rightarrow q'_j = q_j + a_j \Rightarrow \dot{q}_j = \dot{q}'_j$$

i funkcja Lagrange'a po transformacji będzie miała dokładnie taką samą postać, jak przed transformacją.

Mówimy, że układ ma symetrię translacyjną ze względu na współrzędną q_j .

Widzimy, że pęd uogólniony sprzężony do współrzędnej cyklicznej jest zachowany.

Postaramy się powiązać ten fakt z pewną symetrią układu fizycznego opisywanego funkcją Lagrange'a L .

Jeśli funkcja Lagrange'a nie zależy od współrzędnej uogólnionej q_j , to możemy dokonać dowolnego przesunięcia (translacji) tej współrzędnej o stałą wielkość a_j

$$q_j \rightarrow q'_j = q_j + a_j \Rightarrow \dot{q}_j = \dot{q}'_j$$

i funkcja Lagrange'a po transformacji będzie miała dokładnie taką samą postać, jak przed transformacją.

Mówimy, że układ ma symetrię translacyjną ze względu na współrzędną q_j .

Widzimy, że prawo zachowania pędu w pewnym kierunku możemy dość prosto powiązać z symetrią układu fizycznego ze względu na translacje w tym samym kierunku.

Podobnie, niezmienniczość obrotowa układu fizycznego względem pewnej osi symetrii,

Widzimy, że prawo zachowania pędu w pewnym kierunku możemy dość prosto powiązać z symetrią układu fizycznego ze względu na translacje w tym samym kierunku.

Podobnie, niezmienniczość obrotowa układu fizycznego względem pewnej osi symetrii, która wiąże się z niezmienniczością względem przesunięć kąta obrotu,

Widzimy, że prawo zachowania pędu w pewnym kierunku możemy dość prosto powiązać z symetrią układu fizycznego ze względu na translacje w tym samym kierunku.

Podobnie, niezmienniczość obrotowa układu fizycznego względem pewnej osi symetrii, która wiąże się z niezmienniczością względem przesunięć kąta obrotu, prowadzi do zachowania odpowiedniej składowej momentu pędu.

Widzimy, że prawo zachowania pędu w pewnym kierunku możemy dość prosto powiązać z symetrią układu fizycznego ze względu na translacje w tym samym kierunku.

Podobnie, niezmienniczość obrotowa układu fizycznego względem pewnej osi symetrii, która wiąże się z niezmienniczością względem przesunięć kąta obrotu, prowadzi do zachowania odpowiedniej składowej momentu pędu.

Ilustruje to następujący, rozpatrywany już wcześniej, przykład.

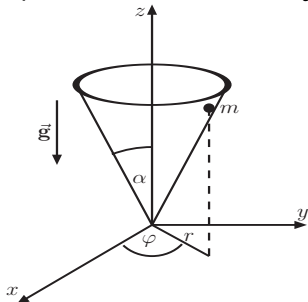
Widzimy, że prawo zachowania pędu w pewnym kierunku możemy dość prosto powiązać z symetrią układu fizycznego ze względu na translacje w tym samym kierunku.

Podobnie, niezmienniczość obrotowa układu fizycznego względem pewnej osi symetrii, która wiąże się z niezmienniczością względem przesunięć kąta obrotu, prowadzi do zachowania odpowiedniej składowej momentu pędu.

Ilustruje to następujący, rozpatrywany już wcześniej, przykład.

Współrzędne cykliczne

Przykład. Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .

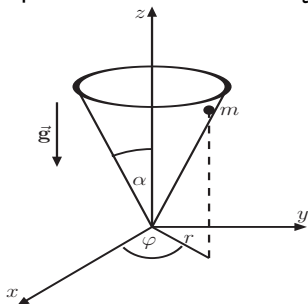


Funkcja Lagrange'a we współrzędnych cylindrycznych ma postać

$$L = \frac{1}{2} m \left[(1 + \operatorname{ctg} \alpha) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

Współrzędne cykliczne

Przykład. Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .



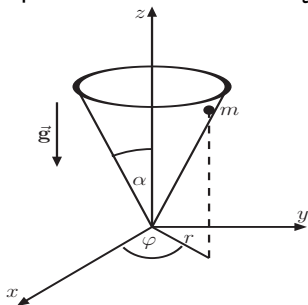
Funkcja Lagrange'a we współrzędnych cylindrycznych ma postać

$$L = \frac{1}{2} m \left[(1 + \operatorname{ctg} \alpha) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

Widzimy, że φ jest współzrędną cykliczną.

Współrzędne cykliczne

Przykład. Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .



Funkcja Lagrange'a we współrzędnych cylindrycznych ma postać

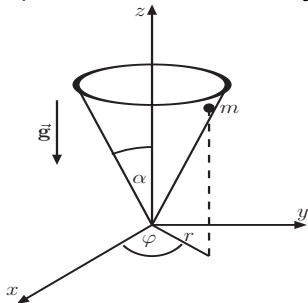
$$L = \frac{1}{2} m \left[(1 + \operatorname{ctg} \alpha) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

Widzimy, że φ jest współzrędną cykliczną. W takim razie

$$p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = \text{const}, \quad \text{ale} \quad p_{\varphi} = r \cdot m \underbrace{r \dot{\varphi}}_{v_{\varphi}} = L_z = \text{const.}$$

Współrzędne cykliczne

Przykład. Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .



Funkcja Lagrange'a we współrzędnych cylindrycznych ma postać

$$L = \frac{1}{2} m \left[(1 + \operatorname{ctg} \alpha) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

Widzimy, że φ jest współzrędną cykliczną. W takim razie

$$p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{const}, \quad \text{ale} \quad p_{\varphi} = r \cdot m \underbrace{r \dot{\varphi}}_{v_{\varphi}} = L_z = \text{const.}$$

Dzięki odpowiedniemu wyborowi układu współrzędnych, niezmienniczość obrotowa rozpatrywanego układu fizycznego względem osi Oz została sprowadzona do niezmienniczości ze względu na przesunięcia kąta φ , a równanie Lagrange'a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

które jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu,

Dzięki odpowiedniemu wyborowi układu współrzędnych, niezmienniczość obrotowa rozpatrywanego układu fizycznego względem osi Oz została sprowadzona do niezmienniczości ze względu na przesunięcia kąta φ , a równanie Lagrange'a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

które jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, zostało sprowadzone do równania różniczkowego pierwszego rzędu

$$p_{\varphi} = mr^2 \dot{\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi}}{mr^2}.$$

Dzięki odpowiedniemu wyborowi układu współrzędnych, niezmienniczość obrotowa rozpatrywanego układu fizycznego względem osi Oz została sprowadzona do niezmienniczości ze względu na przesunięcia kąta φ , a równanie Lagrange'a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

które jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, zostało sprowadzone do równania różniczkowego pierwszego rzędu

$$p_{\varphi} = mr^2 \dot{\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi}}{mr^2}.$$

Tym samym liczba całkowań niezbędnych do rozwiązania równania ruchu została zredukowana o jeden.

Dzięki odpowiedniemu wyborowi układu współrzędnych, niezmienniczość obrotowa rozpatrywanego układu fizycznego względem osi Oz została sprowadzona do niezmienniczości ze względu na przesunięcia kąta φ , a równanie Lagrange'a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

które jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, zostało sprowadzone do równania różniczkowego pierwszego rzędu

$$p_{\varphi} = mr^2 \dot{\varphi} \Leftrightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi}}{mr^2}.$$

Tym samym liczba całkowań niezbędnych do rozwiązania równania ruchu została zredukowana o jeden.

Twierdzenie Noether

Związek pomiędzy prawami zachowania a symetriami układu fizycznego ma charakter uniwersalny, czego dowiodła Emmy Noether (1882–1935).

Zanim sformułujemy twierdzenie Noether przeanalizujemy sytuację, której ono dotyczy.

Związek pomiędzy prawami zachowania a symetriami układu fizycznego ma charakter uniwersalny, czego dowiodła Emmy Noether (1882–1935).

Zanim sformułujemy twierdzenie Noether przeanalizujemy sytuację, której ono dotyczy.

Rozważmy transformację współrzędnych układu o n stopniach swobody

$$q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t, \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

Związek pomiędzy prawami zachowania a symetriami układu fizycznego ma charakter uniwersalny, czego dowiodła Emmy Noether (1882–1935).

Zanim sformułujemy twierdzenie Noether przeanalizujemy sytuację, której ono dotyczy.

Rozważmy transformację współrzędnych układu o n stopniach swobody

$$q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t, \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

która jest różniczkowalna w sposób ciągły względem ciągłego parametru α i odwracalna

$$q'_i \rightarrow q_i = q_i(q'_1, q'_2, \dots, q'_n, t, \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Związek pomiędzy prawami zachowania a symetriami układu fizycznego ma charakter uniwersalny, czego dowiodła Emmy Noether (1882–1935).

Zanim sformułujemy twierdzenie Noether przeanalizujemy sytuację, której ono dotyczy.

Rozważmy transformację współrzędnych układu o n stopniach swobody

$$q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t, \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

która jest różniczkowalna w sposób ciągły względem ciągłego parametru α i odwracalna

$$q'_i \rightarrow q_i = q_i(q'_1, q'_2, \dots, q'_n, t, \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Twierdzenie Noether

Ponadto, dla wygody zakładamy, że

$$q'_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t, \alpha) \Big|_{\alpha=0} = q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

co oznacza, że rozpatrywana transformacja ewoluuje w sposób ciągły wraz z parametrem α od transformacji identycznościowej, która odpowiada $\alpha = 0$.

Twierdzenie Noether

Ponadto, dla wygody zakładamy, że

$$q'_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t, \alpha) \Big|_{\alpha=0} = q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

co oznacza, że rozpatrywana transformacja ewoluuje w sposób ciągły wraz z parametrem α od transformacji identycznościowej, która odpowiada $\alpha = 0$.

Przykładem takiej transformacji jest

- translacja punktu materialnego o stały wektor $\vec{a}$:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \alpha \vec{a} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}' - \alpha \vec{a},$$

Twierdzenie Noether

Ponadto, dla wygody zakładamy, że

$$q'_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t, \alpha) \Big|_{\alpha=0} = q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

co oznacza, że rozpatrywana transformacja ewoluuje w sposób ciągły wraz z parametrem α od transformacji identycznościowej, która odpowiada $\alpha = 0$.

Przykładem takiej transformacji jest

- translacja punktu materialnego o stały wektor $\vec{a}$:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \alpha \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}' - \alpha \vec{a},$$

przy czym

$$\vec{r}' \Big|_{\alpha=0} = \vec{r},$$

Ponadto, dla wygody zakładamy, że

$$q'_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t, \alpha) \Big|_{\alpha=0} = q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

co oznacza, że rozpatrywana transformacja ewoluuje w sposób ciągły wraz z parametrem α od transformacji identycznościowej, która odpowiada $\alpha = 0$.

Przykładem takiej transformacji jest

- translacja punktu materialnego o stały wektor $\vec{a}$:

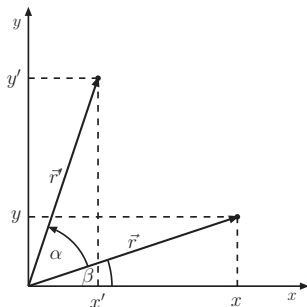
$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \alpha \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}' - \alpha \vec{a},$$

przy czym

$$\vec{r}' \Big|_{\alpha=0} = \vec{r},$$

Twierdzenie Noether

- obrót punktu o kąt α względem osi Oz układu kartezjańskiego:



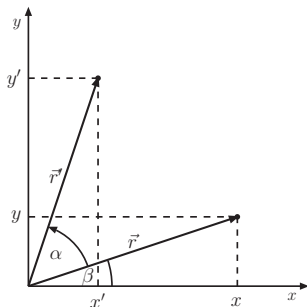
$$\begin{cases} x' = r \cos(\beta + \alpha) \\ y' = r \sin(\beta + \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \beta \\ y = r \sin \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r \cos \beta \cos \alpha - r \sin \beta \sin \alpha = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = r \sin \beta \cos \alpha + r \cos \beta \sin \alpha = x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z' = z \end{cases}$$

Twierdzenie Noether

- obrót punktu o kąt α względem osi Oz układu kartezjańskiego:



$$\begin{cases} x' = r \cos(\beta + \alpha) \\ y' = r \sin(\beta + \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \beta \\ y = r \sin \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r \cos \beta \cos \alpha - r \sin \beta \sin \alpha = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = r \sin \beta \cos \alpha + r \cos \beta \sin \alpha = x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z' = z \end{cases}$$

Obrót odwrotny otrzymamy podstawiając $\alpha \rightarrow -\alpha$

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\ y = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \\ z = z' \end{cases}$$

Obrót odwrotny otrzymamy podstawiając $\alpha \rightarrow -\alpha$

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\ y = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \\ z = z' \end{cases}$$

a dla $\alpha = 0$ otrzymamy transformację identycznościową.

Obrót odwrotny otrzymamy podstawiając $\alpha \rightarrow -\alpha$

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\ y = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \\ z = z' \end{cases}$$

a dla $\alpha = 0$ otrzymamy transformację identycznościową.

Zapiszmy powyższe równania w formie macierzowej:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{r}' = A \vec{r},$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{r} = A^T \vec{r}',$$

gdzie A^T oznacza macierz transponowaną do macierzy A .

Obrót odwrotny otrzymamy podstawiając $\alpha \rightarrow -\alpha$

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\ y = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \\ z = z' \end{cases}$$

a dla $\alpha = 0$ otrzymamy transformację identycznościową.

Zapiszmy powyższe równania w formie macierzowej:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{r}' = A \vec{r},$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{r} = A^T \vec{r}',$$

gdzie A^T oznacza macierz transponowaną do macierzy A .

Twierdzenie Noether

Funkcja Lagrange'a w nowych współrzędnych ma postać

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q(q', t, \alpha), \dot{q}(q', t, \alpha), t) \equiv L'(q', \dot{q}', t, \alpha).$$

Obliczmy pochodną

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right],$$

Twierdzenie Noether

Funkcja Lagrange'a w nowych współrzędnych ma postać

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q(q', t, \alpha), \dot{q}(q', t, \alpha), t) \equiv L'(q', \dot{q}', t, \alpha).$$

Obliczmy pochodną

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right],$$

gdzie skorzystaliśmy z równań Lagrange'a II rodzaju i zamieniliśmy kolejność różniczkowania

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}.$$

Twierdzenie Noether

Funkcja Lagrange'a w nowych współrzędnych ma postać

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q(q', t, \alpha), \dot{q}(q', t, \alpha), t) \equiv L'(q', \dot{q}', t, \alpha).$$

Obliczmy pochodną

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right],$$

gdzie skorzystaliśmy z równań Lagrange'a II rodzaju i zamieniliśmy kolejność różniczkowania

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}.$$

Wyrażenie pod sumą po prawej stronie wzoru na $\frac{\partial L'}{\partial \alpha}$ jest pochodną iloczynu

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right).$$

Twierdzenie Noether

Funkcja Lagrange'a w nowych współrzędnych ma postać

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q(q', t, \alpha), \dot{q}(q', t, \alpha), t) \equiv L'(q', \dot{q}', t, \alpha).$$

Obliczmy pochodną

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right],$$

gdzie skorzystaliśmy z równań Lagrange'a II rodzaju i zamieniliśmy kolejność różniczkowania

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}.$$

Wyrażenie pod sumą po prawej stronie wzoru na $\frac{\partial L'}{\partial \alpha}$ jest pochodną iloczynu

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right).$$

Twierdzenie Noether

Układ fizyczny ma symetrię ze względu na rozpatrywaną transformację, jeśli nowa funkcja Lagrange'a $L'(q', \dot{q}', t, \alpha)$ jest równa wyjściowej funkcji $L(q, \dot{q}, t)$ wyrażonej przez nowe współrzędne

$$L(q, \dot{q}, t) = L'(q', \dot{q}', t, \alpha) = L(q', \dot{q}', t).$$

Biorąc pod uwagę niezmienniczość cechowania równań Lagrange'a II rodzaju, warunek symetrii będzie również spełniony jeśli po prawej stronie tej równości dodamy zupełną pochodną czasową dowolnej różniczkowalnej funkcji współrzędnych, czasu i parametru α

$$L'(q', \dot{q}', t, \alpha) = L(q', \dot{q}', t) + \frac{d}{dt}F(q', t, \alpha).$$

Układ fizyczny ma symetrię ze względu na rozpatrywaną transformację, jeśli nowa funkcja Lagrange'a $L'(q', \dot{q}', t, \alpha)$ jest równa wyjściowej funkcji $L(q, \dot{q}, t)$ wyrażonej przez nowe współrzędne

$$L(q, \dot{q}, t) = L'(q', \dot{q}', t, \alpha) = L(q', \dot{q}', t).$$

Biorąc pod uwagę **niezmienniczość cechowania równań Lagrange'a II rodzaju**, warunek symetrii będzie również spełniony jeśli po prawej stronie tej równości dodamy zupełną pochodną czasową dowolnej różniczkowalnej funkcji współrzędnych, czasu i parametru α

$$L'(q', \dot{q}', t, \alpha) = L(q', \dot{q}', t) + \frac{d}{dt}F(q', t, \alpha).$$

Różniczkując powyższy związek po α otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} L'(q', \dot{q}', t, \alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q', \dot{q}', t) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} F(q', t, \alpha) \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} F(q', t, \alpha),\end{aligned}$$

gdyż ze względu na symetrię

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L(q', \dot{q}', t) = \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q, \dot{q}, t) = 0.$$

Różniczkując powyższy związek po α otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} L'(q', \dot{q}', t, \alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q', \dot{q}', t) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} F(q', t, \alpha) \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} F(q', t, \alpha),\end{aligned}$$

gdyż ze względu na symetrię

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L(q', \dot{q}', t) = \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q, \dot{q}, t) = 0.$$

Zamieniając kolejność różniczkowania otrzymamy następujący warunek symetrii

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L'(q', \dot{q}', t, \alpha) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \alpha} F(q', t, \alpha).$$

Różniczkując powyższy związek po α otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} L'(q', \dot{q}', t, \alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q', \dot{q}', t) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} F(q', t, \alpha) \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} F(q', t, \alpha),\end{aligned}$$

gdyż ze względu na symetrię

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L(q', \dot{q}', t) = \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q, \dot{q}, t) = 0.$$

Zamieniając kolejność różniczkowania otrzymamy następujący warunek symetrii

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L'(q', \dot{q}', t, \alpha) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \alpha} F(q', t, \alpha).$$

Wstawmy teraz do warunku symetrii wyprowadzony uprzednio wzór

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right),$$

wówczas otrzymamy równość

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \alpha}.$$

Wstawmy teraz do warunku symetrii wyprowadzony uprzednio wzór

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right),$$

wówczas otrzymamy równość

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \alpha}.$$

Przenieśmy wszystko na lewą stronę równości i wstawmy $\alpha = 0$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) = 0,$$

Wstawmy teraz do warunku symetrii wyprowadzony uprzednio wzór

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right),$$

wówczas otrzymamy równość

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \alpha}.$$

Przenieśmy wszystko na lewą stronę równości i wstawmy $\alpha = 0$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0,$$

a zatem wyrażenie w nawiasie, które oznaczmy J musi być wielkością stałą

$$J \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \text{const.}$$

W ten sposób udowodniliśmy [twierdzenie Noether](#), które brzmi następująco.

a zatem wyrażenie w nawiasie, które oznaczmy J musi być wielkością stałą

$$J \equiv \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \text{const.}$$

W ten sposób udowodniliśmy **twierdzenie Noether**, które brzmi następująco.

Jeśli funkcja Lagrange'a jest niezmiennicza względem różniczkowalnej w sposób ciągły trasformacji współrzędnych

$$q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t, \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

przy czym $q'_i|_{\alpha=0} = q_i$ i są spełnione równania ruchu, to wielkość J określona powyżej jest stałą ruchu.

a zatem wyrażenie w nawiasie, które oznaczmy J musi być wielkością stałą

$$J \equiv \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \text{const.}$$

W ten sposób udowodniliśmy **twierdzenie Noether**, które brzmi następująco.

Jeśli funkcja Lagrange'a jest niezmiennicza względem różniczkowalnej w sposób ciągły transformacji współrzędnych

$$q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t, \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

przy czym $q'_i|_{\alpha=0} = q_i$ i są spełnione równania ruchu, to wielkość J określona powyżej jest stałą ruchu.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Noether nie jest prawdziwe, tzn., że istnieją wielkości zachowane, którym nie odpowiadają ciągłe przekształcenia symetrii. Na przykład wektor Lenza

$$\vec{\Lambda} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m\alpha} - \frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem położenia ciała względem centrum potencjału,

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Noether nie jest prawdziwe, tzn., że istnieją wielkości zachowane, którym nie odpowiadają ciągłe przekształcenia symetrii. Na przykład wektor Lenza

$$\vec{\Lambda} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m\alpha} - \frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem położenia ciała względem centrum potencjału, $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ jego pędem,

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Noether nie jest prawdziwe, tzn., że istnieją wielkości zachowane, którym nie odpowiadają ciągłe przekształcenia symetrii. Na przykład wektor Lenza

$$\vec{\Lambda} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m\alpha} - \frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem położenia ciała względem centrum potencjału, $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ jego pędem, a $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ momentem pędu,

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Noether nie jest prawdziwe, tzn., że istnieją wielkości zachowane, którym nie odpowiadają ciągłe przekształcenia symetrii. Na przykład wektor Lenza

$$\vec{\Lambda} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m\alpha} - \frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem położenia ciała względem centrum potencjału, $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ jego pędem, a $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ momentem pędu, jest wielkością zachowaną w potencjale Keplera $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, jednak nie odpowiada mu żadne ciągłe przekształcenie symetrii, o których mowa w udowodnionej przez nas wersji twierdzenia Noether.

Uwaga. Wektor Lenza można jednak powiązać z tzw. *symetrią dynamiczną* ze względu na obroty w przestrzeni rozszerzonej o dodatkowy wymiar $x_4 = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2m|E|}}$. Więcej informacji na ten temat można znaleźć w rozdziale VII §4 podręcznika G. Białkowskiego.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Noether nie jest prawdziwe, tzn., że istnieją wielkości zachowane, którym nie odpowiadają ciągłe przekształcenia symetrii. Na przykład wektor Lenza

$$\vec{\Lambda} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m\alpha} - \frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem położenia ciała względem centrum potencjału, $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ jego pędem, a $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ momentem pędu, **jest wielkością zachowaną w potencjale Keplera** $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, jednak nie odpowiada mu żadne ciągłe przekształcenie symetrii, o których mowa w udowodnionej przez nas wersji twierdzenia Noether.

Uwaga. Wektor Lenza można jednak powiązać z tzw. *symetrią dynamiczną* ze względu na obroty w przestrzeni rozszerzonej o dodatkowy wymiar $x_4 = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2m|E|}}$. Więcej informacji na ten temat można znaleźć w rozdziale VII §4 podręcznika G. Białkowskiego.

Zadanie. Udowodnić, że $\vec{\Lambda} = \text{const.}$

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Noether nie jest prawdziwe, tzn., że istnieją wielkości zachowane, którym nie odpowiadają ciągłe przekształcenia symetrii. Na przykład wektor Lenza

$$\vec{\Lambda} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m\alpha} - \frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem położenia ciała względem centrum potencjału, $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ jego pędem, a $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ momentem pędu, jest wielkością zachowaną w potencjale Keplera $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, jednak nie odpowiada mu żadne ciągłe przekształcenie symetrii, o których mowa w udowodnionej przez nas wersji twierdzenia Noether.

Uwaga. Wektor Lenza można jednak powiązać z tzw. *symetrią dynamiczną* ze względu na obroty w przestrzeni rozszerzonej o dodatkowy wymiar $x_4 = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2m|E|}}$. Więcej informacji na ten temat można znaleźć w rozdziale VII §4 podręcznika G. Białkowskiego.

Zadanie. Udowodnić, że $\vec{\Lambda} = \text{const.}$

Twierdzenie Noether w wersji przez nas udowodnionej nie obejmuje transformacji czasu. Dlatego rozpatrzemy teraz oddzielnie przypadek symetrii względem translacji czasu

$$t \rightarrow t' = t + a, \quad a = \text{const.}$$

Funkcja Lagrange'a będzie symetryczna względem takich transformacji jeśli

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t + a) \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Zasada zachowania energii

Twierdzenie Noether w wersji przez nas udowodnionej nie obejmuje transformacji czasu. Dlatego rozpatrzemy teraz oddzielnie przypadek symetrii względem translacji czasu

$$t \rightarrow t' = t + a, \quad a = \text{const.}$$

Funkcja Lagrange'a będzie symetryczna względem takich transformacji jeśli

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t + a) \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Obliczmy zupełną pochodną czasową funkcji L

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right).$$

Zasada zachowania energii

Twierdzenie Noether w wersji przez nas udowodnionej nie obejmuje transformacji czasu. Dlatego rozpatrzmy teraz oddzielnie przypadek symetrii względem translacji czasu

$$t \rightarrow t' = t + a, \quad a = \text{const.}$$

Funkcja Lagrange'a będzie symetryczna względem takich transformacji jeśli

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t + a) \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Obliczmy zupełną pochodną czasową funkcji L

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right).$$

Zasada zachowania energii

Skorzystajmy z równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

Wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j. \end{aligned}$$

Zasada zachowania energii

Skorzystajmy z równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

Wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j. \end{aligned}$$

Skąd wynika, że

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right) = 0 \Leftrightarrow h \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \text{const.}$$

Zasada zachowania energii

Skorzystajmy z równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

Wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j. \end{aligned}$$

Skąd wynika, że

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right) = 0 \Leftrightarrow h \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \text{const.}$$

Zasada zachowania energii

Zachowaną wielkość h nazywamy funkcją energii.

Dla układów zachowawczych istnieje potencjał, niezależny od prędkości, więc

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}.$$

Wtedy

$$h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L$$

Zasada zachowania energii

Zachowaną wielkość h nazywamy funkcją energii.

Dla układów zachowawczych istnieje potencjał, niezależny od prędkości, więc

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}.$$

Wtedy

$$h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L$$

Dla więzów skleronomicznych i jeśli nie wykonujemy transformacji do poruszających się układów odniesienia, związki pomiędzy wektorami położenia punktów, $i = 1, 2, \dots, N$, a współrzędnymi uogólnionymi mają postać

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

Zasada zachowania energii

Zachowaną wielkość h nazywamy funkcją energii.

Dla układów zachowawczych istnieje potencjał, niezależny od prędkości, więc

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}.$$

Wtedy

$$h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L$$

Dla więzów skleronomicznych i jeśli nie wykonujemy transformacji do poruszających się układów odniesienia, związki pomiędzy wektorami położenia punktów, $i = 1, 2, \dots, N$, a współrzędnymi uogólnionymi mają postać

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

Zasada zachowania energii

i energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \sum_{l=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l \\ &= \sum_{j,l=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right)}_{a_{jl}} \dot{q}_j \dot{q}_l = \sum_{j,l=1}^n a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l, \end{aligned}$$

gdzie współczynniki a_{jl} nie zależą od prędkości uogólnionych. Ponadto zauważmy, że $a_{jl} = a_{lj}$. Obliczmy

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{k,l=1}^n a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l \right) \dot{q}_j = \sum_{j,k,l=1}^n a_{kl} \frac{\partial (\dot{q}_k \dot{q}_l)}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j,$$

Zasada zachowania energii

i energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \sum_{l=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l \\ &= \sum_{j,l=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right)}_{a_{jl}} \dot{q}_j \dot{q}_l = \sum_{j,l=1}^n a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l, \end{aligned}$$

gdzie współczynniki a_{jl} nie zależą od prędkości uogólnionych. Ponadto zauważmy, że $a_{jl} = a_{lj}$. Obliczmy

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{k,l=1}^n a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l \right) \dot{q}_j = \sum_{j,k,l=1}^n a_{kl} \frac{\partial (\dot{q}_k \dot{q}_l)}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j,$$

Zasada zachowania energii

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j &= \sum_{j,k,l=1}^n a_{kl} \left(\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_l + \dot{q}_k \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j \\ &= \sum_{j,k,l=1}^n a_{kl} (\delta_{kj} \dot{q}_l + \dot{q}_k \delta_{lj}) \dot{q}_j \\ &= \sum_{j,l=1}^n a_{jl} \dot{q}_l \dot{q}_j + \sum_{j,k=1}^n a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j.\end{aligned}$$

Zamieńmy wskaźnik sumacyjny k na l i skorzystajmy z symetrii współczynników w ostatniej sumie, $a_{lj} = a_{jl}$, wtedy widzimy, że

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j,l=1}^n a_{jl} \dot{q}_l \dot{q}_j + \sum_{j,k=1}^n a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j = 2T.$$

W takim razie wielkość zachowana h jest równa

$$h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = 2T - (T - V) = T + V = E.$$

Zasada zachowania energii

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j &= \sum_{j,k,l=1}^n a_{kl} \left(\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_l + \dot{q}_k \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j \\ &= \sum_{j,k,l=1}^n a_{kl} (\delta_{kj} \dot{q}_l + \dot{q}_k \delta_{lj}) \dot{q}_j \\ &= \sum_{j,l=1}^n a_{jl} \dot{q}_l \dot{q}_j + \sum_{j,k=1}^n a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j.\end{aligned}$$

Zamieńmy wskaźnik sumacyjny k na l i skorzystajmy z symetrii współczynników w ostatniej sumie, $a_{lj} = a_{jl}$, wtedy widzimy, że

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j,l=1}^n a_{jl} \dot{q}_l \dot{q}_j + \sum_{j,k=1}^n a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j = 2T.$$

W takim razie wielkość zachowana h jest równa

$$h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = 2T - (T - V) = T + V = E.$$

W ten sposób dowiedliśmy, że

- funkcja energii h jest wielkością zachowaną jeśli funkcja Lagrange'a nie zależy jawnie od czasu,
- dla układów podlegających siłom zachowawczym i więzom skleronomicznym funkcja energii h jest równa całkowitej energii układu

$$h = E = T + V = \text{const.}$$

W przypadku więzów reonomicznych, które mogą wykonywać pracę nad układem, całkowita energia nie musi być zachowana.

W ten sposób dowiedliśmy, że

- funkcja energii h jest wielkością zachowaną jeśli funkcja Lagrange'a nie zależy jawnie od czasu,
- dla układów podlegających siłom zachowawczym i więzom skleronomicznym funkcja energii h jest równa całkowitej energii układu

$$h = E = T + V = \text{const.}$$

W przypadku więzów reonomicznych, które mogą wykonywać pracę nad układem, całkowita energia nie musi być zachowana.