

Elementy rachunku wariacyjnego

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

Rachunek wariacyjny jest bardzo przydatnym narzędziem mogącym posłużyć do rozwiązywania wielu problemów praktycznych, nie tylko z zakresu fizyki.

Dana jest funkcja $F(y(x), y'(x), x)$ i dwa punkty $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ takie, że $y_1 = y(x_1)$ i $y_2 = y(x_2)$.

Rachunek wariacyjny jest bardzo przydatnym narzędziem mogącym posłużyć do rozwiązywania wielu problemów praktycznych, nie tylko z zakresu fizyki.

Dana jest funkcja $F(y(x), y'(x), x)$ i dwa punkty $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ takie, że $y_1 = y(x_1)$ i $y_2 = y(x_2)$.

Uwaga. W trakcie tego wykładu, zgodnie z tradycją, będziemy używać symbolu $y'(x)$ dla oznaczenia pochodnej funkcji $y(x)$ po zmiennej x mimo, że później symbolem “prim” oznaczać będziemy współrzędne po transformacji.

Rachunek wariacyjny jest bardzo przydatnym narzędziem mogącym posłużyć do rozwiązywania wielu problemów praktycznych, nie tylko z zakresu fizyki.

Dana jest funkcja $F(y(x), y'(x), x)$ i dwa punkty $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ takie, że $y_1 = y(x_1)$ i $y_2 = y(x_2)$.

Uwaga. W trakcie tego wykładu, zgodnie z tradycją, będziemy używać symbolu $y'(x)$ dla oznaczenia pochodnej funkcji $y(x)$ po zmiennej x mimo, że później symbolem “prim” oznaczać będziemy współrzędne po transformacji.

Mówimy, że całka

$$I \equiv \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), y'(x), x) dx$$

ma minimum

Mówimy, że całka

$$I \equiv \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), y'(x), x) dx$$

ma **minimum** lub **maksimum**

Mówimy, że całka

$$I \equiv \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), y'(x), x) dx$$

ma **minimum** lub **maksimum** dla pewnej różniczkowalnej krzywej $y(x)$ o początku w punkcie P_1 i końcu w punkcie P_2 , jeśli dla każdej innej, bliskiej, różniczkowalnej krzywej $\tilde{y}(x)$ o tych samych końcach

Mówimy, że całka

$$I \equiv \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), y'(x), x) dx$$

ma **minimum** lub **maksimum** dla pewnej różniczkowalnej krzywej $y(x)$ o początku w punkcie P_1 i końcu w punkcie P_2 , jeśli dla każdej innej, bliskiej, różniczkowalnej krzywej $\tilde{y}(x)$ o tych samych końcach osiąga odpowiednio wartość **większą**

Mówimy, że całka

$$I \equiv \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), y'(x), x) dx$$

ma **minimum** lub **maksimum** dla pewnej różniczkowalnej krzywej $y(x)$ o początku w punkcie P_1 i końcu w punkcie P_2 , jeśli dla każdej innej, bliskiej, różniczkowalnej krzywej $\tilde{y}(x)$ o tych samych końcach osiąga odpowiednio wartość **większą** lub **mniejszą**.

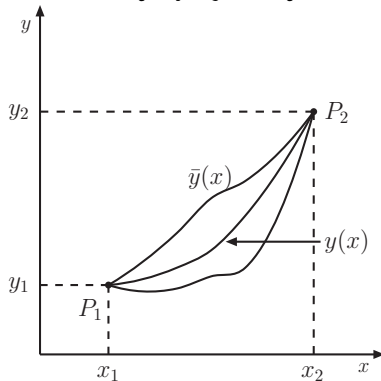
Mówimy, że całka

$$I \equiv \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), y'(x), x) dx$$

ma **minimum** lub **maksimum** dla pewnej różniczkowalnej krzywej $y(x)$ o początku w punkcie P_1 i końcu w punkcie P_2 , jeśli dla każdej innej, bliskiej, różniczkowalnej krzywej $\tilde{y}(x)$ o tych samych końcach osiąga odpowiednio wartość **większą** lub **mniejszą**.

Elementy rachunku wariacyjnego

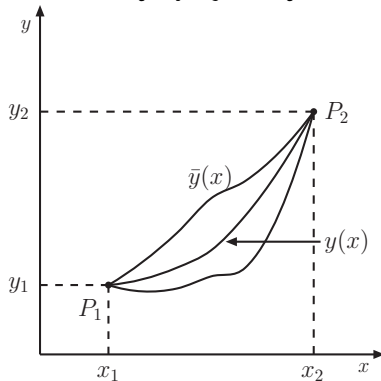
Innymi słowy, rozpatrujemy wszystkie różniczkowalne krzywe pomiędzy punktami P_1 i P_2 i wybieramy tę, która ekstremalizuje zdefiniowaną wyżej całkę.



Poszukiwana krzywa $y(x)$ ekstremalizuje całkę I .

Elementy rachunku wariacyjnego

Innymi słowy, rozpatrujemy wszystkie różniczkowalne krzywe pomiędzy punktami P_1 i P_2 i wybieramy tę, która ekstremalizuje zdefiniowaną wyżej całkę.



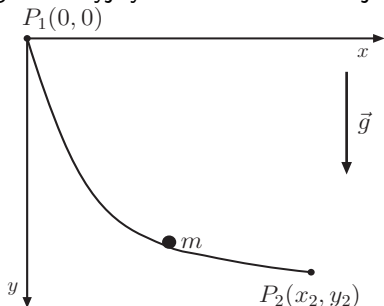
Poszukiwana krzywa $y(x)$ ekstremalizuje całkę I .

Po raz pierwszy tego typu problem sformułował Johann Bernoulli w 1696 r.

Przykład 1: Brachistochrona Bernoulliego. Poszukujemy krzywej rozpiętej pomiędzy zadanymi punktami P_1 i P_2 , po której punkt materialny o masie m zsunie się w jednorodnym polu grawitacyjnym bez tarcia w najkrótszym czasie.

Po raz pierwszy tego typu problem sformułował Johann Bernoulli w 1696 r.

Przykład 1: Brachistochrona Bernoulliego. Poszukujemy krzywej rozpiętej pomiędzy zadanymi punktami P_1 i P_2 , po której punkt materialny o masie m zsunie się w jednorodnym polu grawitacyjnym bez tarcia w najkrótszym czasie.

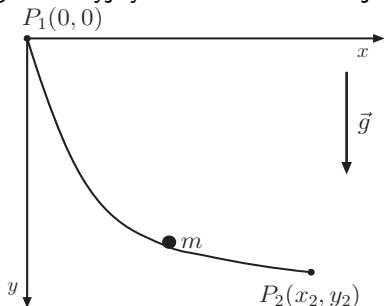


Na nieskończenie krótkiej drodze ds prędkość v jest w przybliżeniu stała, więc

$$dt = \frac{ds}{v}$$

Po raz pierwszy tego typu problem sformułował Johann Bernoulli w 1696 r.

Przykład 1: Brachistochrona Bernoulliego. Poszukujemy krzywej rozpiętej pomiędzy zadanymi punktami P_1 i P_2 , po której punkt materialny o masie m zsunie się w jednorodnym polu grawitacyjnym bez tarcia w najkrótszym czasie.



Na nieskończenie krótkiej drodze ds prędkość v jest w przybliżeniu stała, więc

$$dt = \frac{ds}{v}$$

Problemy wariacyjne

Całkowity czas ruchu punktu materialnego pomiędzy punktami P_1 i P_2 jest równy całce

$$\int_0^T dt = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v} \quad \Rightarrow \quad T = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v},$$

gdzie

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Skorzystajmy z zasady zachowania energii w polu grawitacyjnym

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gy},$$

Całkowity czas ruchu punktu materialnego pomiędzy punktami P_1 i P_2 jest równy całce

$$\int_0^T dt = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v} \quad \Rightarrow \quad T = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v},$$

gdzie

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Skorzystajmy z zasady zachowania energii w polu grawitacyjnym

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gy},$$

gdzie uwzględniliśmy fakt, że oś Oy układu kartezjańskiego jest skierowana w dół.

Musimy zatem zminimalizować całkę:

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx.$$

gdzie uwzględniliśmy fakt, że oś Oy układu kartezjańskiego jest skierowana w dół.

Musimy zatem zminimalizować całkę:

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx.$$

Zauważmy, że funkcja F ma w tym przypadku postać

$$F(y, y') \equiv \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}},$$

gdyż stały czynnik występujący przed całką nie wpływa na to, dla jakiej funkcji będzie mieć ona ekstremum.

gdzie uwzględniliśmy fakt, że oś Oy układu kartezjańskiego jest skierowana w dół.

Musimy zatem zminimalizować całkę:

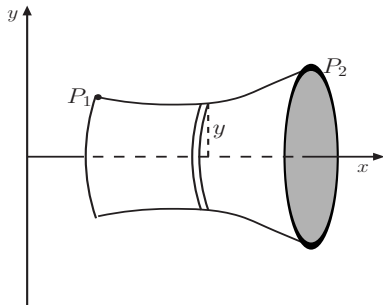
$$T = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx.$$

Zauważmy, że funkcja F ma w tym przypadku postać

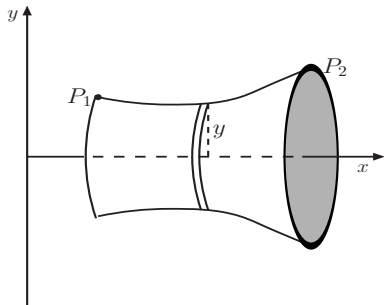
$$F(y, y') \equiv \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}},$$

gdyż stały czynnik występujący przed całką nie wpływa na to, dla jakiej funkcji będzie mieć ona ekstremum.

Przykład 2: Minimalna powierzchnia obrotowa. Poszukujemy krzywej rozpiętej pomiędzy zadanymi punktami P_1 i P_2 , która w wyniku obrotu o kąt pełny względem osi Ox utworzy bryłę o najmniejszej powierzchni.



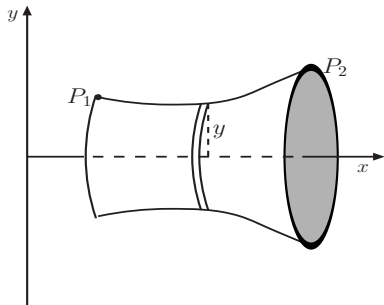
Przykład 2: Minimalna powierzchnia obrotowa. Poszukujemy krzywej rozpiętej pomiędzy zadanymi punktami P_1 i P_2 , która w wyniku obrotu o kąt pełny względem osi Ox utworzy bryłę o najmniejszej powierzchni.



Promień y nieskończenie cienkiego paska o szerokości ds jest w przybliżeniu stały, więc jego powierzchnia

$$dS = 2\pi y \, ds,$$

Przykład 2: Minimalna powierzchnia obrotowa. Poszukujemy krzywej rozpiętej pomiędzy zadanymi punktami P_1 i P_2 , która w wyniku obrotu o kąt pełny względem osi Ox utworzy bryłę o najmniejszej powierzchni.



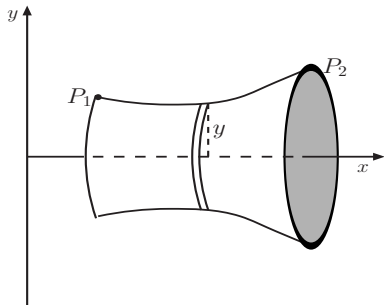
Promień y nieskończenie cienkiego paska o szerokości ds jest w przybliżeniu stały, więc jego powierzchnia

$$dS = 2\pi y \, ds,$$

gdzie tak jak poprzednio

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2} \, dx.$$

Przykład 2: Minimalna powierzchnia obrotowa. Poszukujemy krzywej rozpiętej pomiędzy zadanymi punktami P_1 i P_2 , która w wyniku obrotu o kąt pełny względem osi Ox utworzy bryłę o najmniejszej powierzchni.



Promień y nieskończenie cienkiego paska o szerokości ds jest w przybliżeniu stały, więc jego powierzchnia

$$dS = 2\pi y \, ds,$$

gdzie tak jak poprzednio

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2} \, dx.$$

Całkowita powierzchnia bryły obrotowej wyraża się wzorem

$$S = \int_{P_1}^{P_2} 2\pi y \, ds = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} \, dx.$$

Funkcja F ma w tym przypadku postać

$$F(y, y') \equiv y \sqrt{1 + y'^2},$$

gdyż czynnik 2π występujący przed całką nie wpływa na to, dla jakiej funkcji będzie mieć ona ekstremum.

Całkowita powierzchnia bryły obrotowej wyraża się wzorem

$$S = \int_{P_1}^{P_2} 2\pi y \, ds = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} \, dx.$$

Funkcja F ma w tym przypadku postać

$$F(y, y') \equiv y \sqrt{1 + y'^2},$$

gdyż czynnik 2π występujący przed całką nie wpływa na to, dla jakiej funkcji będzie mieć ona ekstremum.

Leonhard Euler (1707–1783) sprowadził **problem wariacyjny** do **równań różniczkowych**.

Zapiszmy wszystkie krzywe $\tilde{y}(x)$ o końcach w punktach $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ leżące w sąsiedztwie poszukiwanej krzywej ekstremalnej $y(x)$ w postaci

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x),$$

Leonhard Euler (1707–1783) sprowadził **problem wariacyjny** do **równań różniczkowych**.

Zapiszmy wszystkie krzywe $\tilde{y}(x)$ o końcach w punktach $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ leżące w sąsiedztwie poszukiwanej krzywej ekstremalnej $y(x)$ w postaci

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x),$$

gdzie ε jest dowolnym parametrem rzeczywistym, a $\eta(x)$ są dowolnymi funkcjami różniczkowalnymi spełniającymi warunki brzegowe

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0,$$

Leonhard Euler (1707–1783) sprowadził **problem wariacyjny** do **równań różniczkowych**.

Zapiszmy wszystkie krzywe $\tilde{y}(x)$ o końcach w punktach $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ leżące w sąsiedztwie poszukiwanej krzywej ekstremalnej $y(x)$ w postaci

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x),$$

gdzie ε jest dowolnym parametrem rzeczywistym, a $\eta(x)$ są dowolnymi funkcjami różniczkowalnymi spełniającymi warunki brzegowe

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0,$$

które zapewniają, że każda krzywa ma końce w punktach P_1 i P_2 .

Leonhard Euler (1707–1783) sprowadził **problem wariacyjny** do **równań różniczkowych**.

Zapiszmy wszystkie krzywe $\tilde{y}(x)$ o końcach w punktach $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ leżące w sąsiedztwie poszukiwanej krzywej ekstremalnej $y(x)$ w postaci

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x),$$

gdzie ε jest dowolnym parametrem rzeczywistym, a $\eta(x)$ są dowolnymi funkcjami różniczkowalnymi spełniającymi warunki brzegowe

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0,$$

które zapewniają, że każda krzywa ma końce w punktach P_1 i P_2 .

Rozważmy funkcję $I_\eta(\varepsilon)$ zdefiniowaną następująco

$$I_\eta(\varepsilon) \equiv \int_{x_1}^{x_2} F(\tilde{y}, \tilde{y}', x) dx = \int_{x_1}^{x_2} F(y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x) dx.$$

Warunkiem koniecznym na to aby funkcja $I_\eta(\varepsilon)$ miała ekstremum w punkcie $\varepsilon = 0$ jest znikanie pochodnej

$$\begin{aligned} \left. \frac{dI_\eta}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial (y + \varepsilon\eta)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'} \frac{\partial (y' + \varepsilon\eta')}{\partial \varepsilon} \right] \Big|_{\varepsilon=0} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right] dx = 0. \end{aligned}$$

Rozważmy funkcję $I_\eta(\varepsilon)$ zdefiniowaną następująco

$$I_\eta(\varepsilon) \equiv \int_{x_1}^{x_2} F(\tilde{y}, \tilde{y}', x) dx = \int_{x_1}^{x_2} F(y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x) dx .$$

Warunkiem koniecznym na to aby funkcja $I_\eta(\varepsilon)$ miała ekstremum w punkcie $\varepsilon = 0$ jest znikanie pochodnej

$$\begin{aligned} \left. \frac{dI_\eta}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial (y + \varepsilon\eta)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'} \frac{\partial (y' + \varepsilon\eta')}{\partial \varepsilon} \right] \Big|_{\varepsilon=0} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right] dx = 0. \end{aligned}$$

Elementy rachunku wariacyjnego

Skorzystajmy z przekształconego wzoru na pochodną iloczynu

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \eta' = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right) - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta.$$

i wykonajmy całkowanie przez części

$$\begin{aligned} \left. \frac{dI_\eta}{d\eta} \right|_{\varepsilon=0} &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right) - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right] dx \\ &= \underbrace{\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right|_{x_1}^{x_2}}_0 + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \eta \, dx = 0. \end{aligned}$$

Skorzystajmy z przekształconego wzoru na pochodną iloczynu

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \eta' = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right) - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta.$$

i wykonajmy całkowanie przez części

$$\begin{aligned} \left. \frac{dI_\eta}{d\eta} \right|_{\varepsilon=0} &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right) - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right] dx \\ &= \underbrace{\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right|_{x_1}^{x_2}}_0 + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \eta \, dx = 0. \end{aligned}$$

Pierwszy wyraz po lewej stronie ostatniej równości znika, gdyż $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, a ponieważ funkcja $\eta(x)$ pod występującą tam całką jest dowolna, to równość będzie spełniona tylko gdy

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Pierwszy wyraz po lewej stronie ostatniej równości znika, gdyż $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, a ponieważ funkcja $\eta(x)$ pod występującą tam całką jest dowolna, to równość będzie spełniona tylko gdy

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Jest to **równanie Eulera–Lagrange’a**, którego spełnienie jest **warunkiem koniecznym** na to, aby całka

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), y'(x), x) dx$$

miała ekstremum dla krzywej $y(x)$ o ustalonych współrzędnych punktów końcowych: $y_1 = y(x_1)$ i $y_2 = y(x_2)$.

Pierwszy wyraz po lewej stronie ostatniej równości znika, gdyż $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, a ponieważ funkcja $\eta(x)$ pod występującą tam całką jest dowolna, to równość będzie spełniona tylko gdy

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Jest to **równanie Eulera–Lagrange’a**, którego spełnienie jest **warunkiem koniecznym** na to, aby całka

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), y'(x), x) dx$$

miała ekstremum dla krzywej $y(x)$ o ustalonych współrzędnych punktów końcowych: $y_1 = y(x_1)$ i $y_2 = y(x_2)$.

Równanie Eulera–Lagrange’a jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu.

W przypadku gdy funkcja F nie zależy bezpośrednio od zmiennej niezależnej x , tzn. $F(y, y', x) \equiv F(y, y')$,

Równanie Eulera–Lagrange’a jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu.

W przypadku gdy funkcja F nie zależy bezpośrednio od zmiennej niezależnej x , tzn. $F(y, y', x) \equiv F(y, y')$, jedno całkowanie można łatwo wykonać i równanie Eulera–Lagrange’a sprowadza się do równania

Równanie Eulera–Lagrange’a jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu.

W przypadku gdy funkcja F nie zależy bezpośrednio od zmiennej niezależnej x , tzn. $F(y, y', x) \equiv F(y, y')$, jedno całkowanie można łatwo wykonać i równanie Eulera–Lagrange’a sprowadza się do równania

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

Równanie Eulera–Lagrange’a jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu.

W przypadku gdy funkcja F nie zależy bezpośrednio od zmiennej niezależnej x , tzn. $F(y, y', x) \equiv F(y, y')$, jedno całkowanie można łatwo wykonać i równanie Eulera–Lagrange’a sprowadza się do równania

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

Dla dowodu pokażemy, że pochodna wyrażenia po lewej stronie równania znika. Obliczmy

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) &= \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - y'' \frac{\partial F}{\partial y'} - y' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \\ &= y' \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right)}_0 = 0,\end{aligned}$$

Dla dowodu pokażemy, że pochodna wyrażenia po lewej stronie równania znika. Obliczmy

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) &= \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - y'' \frac{\partial F}{\partial y'} - y' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \\ &= y' \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right)}_0 = 0,\end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy z równania Eulera–Lagrange’a.

Dla dowodu pokażemy, że pochodna wyrażenia po lewej stronie równania znika. Obliczmy

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) &= \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - y'' \frac{\partial F}{\partial y'} - y' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \\ &= y' \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right)}_0 = 0,\end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy z równania Eulera–Lagrange’a.

Z taką sytuacją mieliśmy właśnie do czynienia w obu rozpatrzonych wcześniej przykładach problemów wariacyjnych.

Dla dowodu pokażemy, że pochodna wyrażenia po lewej stronie równania znika. Obliczmy

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) &= \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - y'' \frac{\partial F}{\partial y'} - y' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \\ &= y' \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right)}_0 = 0,\end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy z równania Eulera–Lagrange’a.

Z taką sytuacją mieliśmy właśnie do czynienia w obu rozpatrzonych wcześniej przykładach problemów wariacyjnych.

Zadanie. Znaleźć rozwiązanie problemu brachistochrony z *Przykładu 1.* i minimalnej powierzchni obrotowej z *Przykładu 2.*

Dla dowodu pokażemy, że pochodna wyrażenia po lewej stronie równania znika. Obliczmy

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) &= \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - y'' \frac{\partial F}{\partial y'} - y' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \\ &= y' \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right)}_0 = 0,\end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy z równania Eulera–Lagrange’a.

Z taką sytuacją mieliśmy właśnie do czynienia w obu rozpatrzonych wcześniej przykładach problemów wariacyjnych.

Zadanie. Znaleźć rozwiązanie problemu brachistochrony z *Przykładu 1.* i minimalnej powierzchni obrotowej z *Przykładu 2.*

Problem wariacyjny można uogólnić na przypadek n funkcji $y_i(x)$,
 $i = 1, 2, \dots, n$, i całkę

$$I \equiv \int_{x_1}^{x_2} F(y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n', x) dx.$$

Problem wariacyjny można uogólnić na przypadek n funkcji $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, i całkę

$$I \equiv \int_{x_1}^{x_2} F(y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n', x) dx.$$

Aby znaleźć warunki konieczne istnienia ekstremum całki I dla funkcji $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, zdefiniujemy wariacje funkcji i ich pochodnych

$$\tilde{y}_i(x) = y_i(x) + \delta y_i(x), \quad \tilde{y}_i'(x) = y_i'(x) + \delta y_i'(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Problem wariacyjny można uogólnić na przypadek n funkcji $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, i całkę

$$I \equiv \int_{x_1}^{x_2} F(y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n', x) dx.$$

Aby znaleźć warunki konieczne istnienia ekstremum całki I dla funkcji $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, zdefiniujmy wariacje funkcji i ich pochodnych

$$\tilde{y}_i(x) = y_i(x) + \delta y_i(x), \quad \tilde{y}_i'(x) = y_i'(x) + \delta y_i'(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Aby wszystkie krzywe próbne $\tilde{y}_i(x)$ miały te same końce trzeba założyć, że $\delta y_i(x_1) = \delta y_i(x_2) = 0$.

Problem wariacyjny można uogólnić na przypadek n funkcji $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, i całkę

$$I \equiv \int_{x_1}^{x_2} F(y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n', x) dx.$$

Aby znaleźć warunki konieczne istnienia ekstremum całki I dla funkcji $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, zdefiniujemy wariacje funkcji i ich pochodnych

$$\tilde{y}_i(x) = y_i(x) + \delta y_i(x), \quad \tilde{y}_i'(x) = y_i'(x) + \delta y_i'(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Aby wszystkie krzywe próbne $\tilde{y}_i(x)$ miały te same końce trzeba założyć, że $\delta y_i(x_1) = \delta y_i(x_2) = 0$.

Zróżniczkujemy wzór na $\tilde{y}_i(x)$, wówczas otrzymamy

$$\tilde{y}'_i(x) = y'_i(x) + \frac{d}{dx} \delta y_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Zróżniczkujemy wzór na $\tilde{y}_i(x)$, wówczas otrzymamy

$$\tilde{y}'_i(x) = y'_i(x) + \frac{d}{dx} \delta y_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Porównując wynik z wzorem

$$\tilde{y}'_i(x) = y'_i(x) + \delta y'_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

Zróżniczkujemy wzór na $\tilde{y}_i(x)$, wówczas otrzymamy

$$\tilde{y}'_i(x) = y'_i(x) + \frac{d}{dx}\delta y_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Porównując wynik z wzorem

$$\tilde{y}'_i(x) = y'_i(x) + \delta y'_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

otrzymamy równość

$$\frac{d}{dx}\delta y_i(x) = \delta y'_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Zróżniczkujemy wzór na $\tilde{y}_i(x)$, wówczas otrzymamy

$$\tilde{y}'_i(x) = y'_i(x) + \frac{d}{dx}\delta y_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Porównując wynik z wzorem

$$\tilde{y}'_i(x) = y'_i(x) + \delta y'_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

otrzymamy równość

$$\frac{d}{dx}\delta y_i(x) = \delta y'_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Stąd wynika, że możemy wzajemnie przestawiać operacje obliczania pochodnej i wariacji.

Zróżniczkujemy wzór na $\tilde{y}_i(x)$, wówczas otrzymamy

$$\tilde{y}'_i(x) = y'_i(x) + \frac{d}{dx}\delta y_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Porównując wynik z wzorem

$$\tilde{y}'_i(x) = y'_i(x) + \delta y'_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

otrzymamy równość

$$\frac{d}{dx}\delta y_i(x) = \delta y'_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Stąd wynika, że możemy wzajemnie przestawiać operacje obliczania pochodnej i wariacji.

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum całki I dla funkcji $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, jest znikanie jej wariacji

$$\delta I = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \delta I \equiv & \int_{x_1}^{x_2} F(y_1 + \delta y_1, \dots, y_n + \delta y_n, y_1' + \delta y_1', \dots, y_n' + \delta y_n', x) dx \\ & - \int_{x_1}^{x_2} F(y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', x) dx. \end{aligned}$$

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum całki I dla funkcji $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, jest znikanie jej wariacji

$$\delta I = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \delta I \equiv & \int_{x_1}^{x_2} F(y_1 + \delta y_1, \dots, y_n + \delta y_n, y'_1 + \delta y'_1, \dots, y'_n + \delta y'_n, x) dx \\ & - \int_{x_1}^{x_2} F(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n, x) dx. \end{aligned}$$

Jest to oczywisty analog warunku znikania pochodnej.

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum całki I dla funkcji $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, jest znikanie jej wariacji

$$\delta I = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \delta I \equiv & \int_{x_1}^{x_2} F(y_1 + \delta y_1, \dots, y_n + \delta y_n, y'_1 + \delta y'_1, \dots, y'_n + \delta y'_n, x) dx \\ & - \int_{x_1}^{x_2} F(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n, x) dx. \end{aligned}$$

Jest to oczywisty analog warunku znikania pochodnej.

Rozwińmy w szereg pierwszą funkcję podcałkową w punkcie $(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n, x)$

$$\delta I \approx \int_{x_1}^{x_2} \left\{ F + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y'_i} \delta y'_i \right] - F \right\} dx,$$

gdzie pominęliśmy wyrazy wyższego rzędu w wariacjach δy_i i $\delta y'_i$.

Rozwińmy w szereg pierwszą funkcję podcałkową w punkcie $(y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', x)$

$$\delta I \approx \int_{x_1}^{x_2} \left\{ F + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'} \delta y_i' \right] - F \right\} dx,$$

gdzie pominęliśmy wyrazy wyższego rzędu w wariacjach δy_i i $\delta y_i'$.

Po wykonaniu redukcji wyrazów podobnych, wyłączeniu sumy przed całką i zamianie kolejności operacji wariacji i pochodnej otrzymamy

$$\delta I \approx \sum_{i=1}^n \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'} \frac{d}{dx} \delta y_i \right] dx.$$

Rozwińmy w szereg pierwszą funkcję podcałkową w punkcie $(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n, x)$

$$\delta I \approx \int_{x_1}^{x_2} \left\{ F + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y'_i} \delta y'_i \right] - F \right\} dx,$$

gdzie pominęliśmy wyrazy wyższego rzędu w wariacjach δy_i i $\delta y'_i$.
Po wykonaniu redukcji wyrazów podobnych, wyłączeniu sumy przed całkę i zamianie kolejności operacji wariacji i pochodnej otrzymamy

$$\delta I \approx \sum_{i=1}^n \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y'_i} \frac{d}{dx} \delta y_i \right] dx.$$

Scałkujemy przez części drugi wyraz

$$\begin{aligned}\delta I &\approx \sum_{i=1}^n \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i'} \delta y_i \right) - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_i'} \delta y_i \right] dx \\&= \sum_{i=1}^n \left\{ \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y_i'} \delta y_i}_{0} \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_i'} \delta y_i \right] dx \right\} \\&= \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_i'} \right] \delta y_i dx = 0,\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy założenie o znikaniu wariacji w punktach końcowych, $\delta y_i(x_1) = \delta y_i(x_2) = 0$ i ponownie włączyliśmy sumę pod całkę.

Scałkujemy przez części drugi wyraz

$$\begin{aligned}\delta I &\approx \sum_{i=1}^n \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i'} \delta y_i \right) - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_i'} \delta y_i \right] dx \\&= \sum_{i=1}^n \left\{ \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y_i'} \delta y_i}_{0} \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_i'} \delta y_i \right] dx \right\} \\&= \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_i'} \right] \delta y_i dx = 0,\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy założenie o znikaniu wariacji w punktach końcowych, $\delta y_i(x_1) = \delta y_i(x_2) = 0$ i ponownie włączyliśmy sumę pod całkę.

Całka znika tylko jeśli funkcja podcałkowa znika

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} \right] \delta y_i = 0,$$

a niezależność wszystkich wariacji δy_i pociąga za sobą warunki

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Całka znika tylko jeśli funkcja podcałkowa znika

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} \right] \delta y_i = 0,$$

a niezależność wszystkich wariacji δy_i pociąga za sobą warunki

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Są to równania Eulera–Lagrange'a, których spełnienie jest warunkiem koniecznym na to, aby wyjściowa całka I miała ekstremum dla krzywych $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, o ustalonych punktach końcowych, w których zachodzi $y_1 = y_i(x_1)$ i $y_2 = y_i(x_2)$.

Całka znika tylko jeśli funkcja podcałkowa znika

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} \right] \delta y_i = 0,$$

a niezależność wszystkich wariacji δy_i pociąga za sobą warunki

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Są to równania Eulera–Lagrange'a, których spełnienie jest warunkiem koniecznym na to, aby wyjściowa całka I miała ekstremum dla krzywych $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, o ustalonych punktach końcowych, w których zachodzi $y_1 = y_i(x_1)$ i $y_2 = y_i(x_2)$.

Jeśli $\delta I = 0$, to mówimy, że całka I ma **wartość stacjonarną**, tzn. ekstremum lub tzw. punkt siodłowy.

Sformułowanie **warunku wystarczającego** istnienia ekstremum jest w tym przypadku bardziej skomplikowane niż w przypadku ekstremum funkcji, dlatego pominiemy to zagadnienie.

Jeśli $\delta I = 0$, to mówimy, że całka I ma **wartość stacjonarną**, tzn. ekstremum lub tzw. punkt siodłowy.

Sformułowanie **warunku wystarczającego** istnienia ekstremum jest w tym przypadku bardziej skomplikowane niż w przypadku ekstremum funkcji, dlatego pominiemy to zagadnienie.

Czy w danym problemie wariacyjnym mamy rzeczywiście do czynienia z ekstremum i czy jest to minimum, czy też maksimum, na ogół wynika jasno z kontekstu fizycznego.

Jeśli $\delta I = 0$, to mówimy, że całka I ma **wartość stacjonarną**, tzn. ekstremum lub tzw. punkt siodłowy.

Sformułowanie **warunku wystarczającego** istnienia ekstremum jest w tym przypadku bardziej skomplikowane niż w przypadku ekstremum funkcji, dlatego pominiemy to zagadnienie.

Czy w danym problemie wariacyjnym mamy rzeczywiście do czynienia z ekstremum i czy jest to minimum, czy też maksimum, na ogół wynika jasno z kontekstu fizycznego.

Zasada Hamiltona

Irlandzki matematyk William Rowan Hamilton (1805–1865) sformułował **zasadę minimalnego (stacjonarnego) działania**, która brzmi następująco.

Ruch układu mechanicznego o n stopniach swobody od chwili początkowej t_1 do chwili końcowej t_2 przebiega tak, że działanie

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) dt$$

jest minimalne (stacjonarne), tzn. $\delta S = 0$.

Zasada Hamiltona

Irlandzki matematyk William Rowan Hamilton (1805–1865) sformułował **zasadę minimalnego (stacjonarnego) działania**, która brzmi następująco.

Ruch układu mechanicznego o n stopniach swobody od chwili początkowej t_1 do chwili końcowej t_2 przebiega tak, że działanie

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) dt$$

jest minimalne (stacjonarne), tzn. $\delta S = 0$. Wariacje współrzędnych uogólnionych w chwili początkowej i końcowej muszą przy tym zniknąć $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Zasada Hamiltona

Irlandzki matematyk William Rowan Hamilton (1805–1865) sformułował **zasadę minimalnego (stacjonarnego) działania**, która brzmi następująco.

Ruch układu mechanicznego o n stopniach swobody od chwili początkowej t_1 do chwili końcowej t_2 przebiega tak, że działanie

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) dt$$

jest minimalne (stacjonarne), tzn. $\delta S = 0$. Wariacje współrzędnych uogólnionych w chwili początkowej i końcowej muszą przy tym znikać $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

W powyższej całce

$$L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) \equiv L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t)$$

jest funkcją Lagrange'a, która dla sił zachowawczych jest różnicą energii kinetycznej $T(q, \dot{q}, t)$ i potencjalnej $V(q, t)$.

Zasada Hamiltona

Irlandzki matematyk William Rowan Hamilton (1805–1865) sformułował **zasadę minimalnego (stacjonarnego) działania**, która brzmi następująco.

Ruch układu mechanicznego o n stopniach swobody od chwili początkowej t_1 do chwili końcowej t_2 przebiega tak, że działanie

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) dt$$

jest minimalne (stacjonarne), tzn. $\delta S = 0$. Wariacje współrzędnych uogólnionych w chwili początkowej i końcowej muszą przy tym zniknąć $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

W powyższej całce

$$L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) \equiv L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t)$$

jest funkcją Lagrange'a, która dla sił zachowawczych jest różnicą energii kinetycznej $T(q, \dot{q}, t)$ i potencjalnej $V(q, t)$.

Jeśli wszystkie współrzędne w funkcji Lagrange'a są niezależne, to zasada Hamiltona jest równoważna równaniom Lagrange'a II rodzaju,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

których spełnienie jest warunkiem koniecznym istnienia minimum całki działania.

Dowód tego stwierdzenia jest oczywisty, jeśli w rozpatrywanej wcześniej całce

$$I \equiv \int_{x_1}^{x_2} F(y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n', x) dx$$

Jeśli wszystkie współrzędne w funkcji Lagrange'a są niezależne, to zasada Hamiltona jest równoważna równaniom Lagrange'a II rodzaju,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

których spełnienie jest warunkiem koniecznym istnienia minimum całki działania.

Dowód tego stwierdzenia jest oczywisty, jeśli w rozpatrywanej wcześniej całce

$$I \equiv \int_{x_1}^{x_2} F(y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n', x) dx$$

podstawimy

$$F \rightarrow L, \quad x \rightarrow t, \quad y_i \rightarrow q_i, \quad y_i' \rightarrow \dot{q}_i$$

i przedzielimy odpowiednie równania Eulera–Lagrange’a

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

będące warunkiem koniecznym istnienia ekstremum całki I przez (-1) .

Równania Lagrange’a II rodzaju mają jednoznaczne rozwiązania przy zadanych warunkach początkowych na współrzędne i prędkości uogólnione

$$q_i(t_1) = q_{i0} \quad \text{ i } \quad \dot{q}_i(t_1) = \dot{q}_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

podstawimy

$$F \rightarrow L, \quad x \rightarrow t, \quad y_i \rightarrow q_i, \quad y_i' \rightarrow \dot{q}_i$$

i przedzielimy odpowiednie równania Eulera–Lagrange'a

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

będące warunkiem koniecznym istnienia ekstremum całki I przez (-1) .

Równania Lagrange'a II rodzaju mają jednoznaczne rozwiązania przy zadanych warunkach początkowych na współrzędne i prędkości uogólnione

$$q_i(t_1) = q_{i0} \quad \text{ i } \quad \dot{q}_i(t_1) = \dot{q}_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ta równoważność tłumaczy, dlaczego fakt, że w przypadku zasady Hamiltona ruch układu mechanicznego jest po części zdeterminowany przez warunki końcowe na wariacje współrzędnych, $\delta q_i(t_2) = 0$, **nie narusza zasady przyczynowości.**

Równania Lagrange'a II rodzaju

Równania Lagrange'a są spełnione nie tylko dla sił zachowawczych. Moglibyśmy je również otrzymać zakładając istnienie tzw.

potencjału uogólnionego $V(q, \dot{q}, t)$, zależnego od prędkości, który wiąże się z siłą uogólnioną Q_j wzorem

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}.$$

Wówczas funkcja Lagrange'a ma postać

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t).$$

Znaczenie potencjałów uogólnionych w fizyce ilustruje następujący przykład.

Równania Lagrange'a II rodzaju

Równania Lagrange'a są spełnione nie tylko dla sił zachowawczych. Moglibyśmy je również otrzymać zakładając istnienie tzw.

potencjału uogólnionego $V(q, \dot{q}, t)$, zależnego od prędkości, który wiąże się z siłą uogólnioną Q_j wzorem

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}.$$

Wówczas funkcja Lagrange'a ma postać

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t).$$

Znaczenie potencjałów uogólnionych w fizyce ilustruje następujący przykład.

Przykład 1: Na cząstkę o masie m i ładunku elektrycznym q znajdującą się w polu elektromagnetycznym o natężeniu pola elektrycznego $\vec{E}$ i indukcji magnetycznej $\vec{B}$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t),$$

gdzie $\varphi(\vec{r}, t)$ i $\vec{A}(\vec{r}, t)$ są odpowiednio potencjałami skalarnym i wektorowym,

Przykład 1: Na cząstkę o masie m i ładunku elektrycznym q znajdującą się w polu elektromagnetycznym o natężeniu pola elektrycznego $\vec{E}$ i indukcji magnetycznej $\vec{B}$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial\vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t),$$

gdzie $\varphi(\vec{r}, t)$ i $\vec{A}(\vec{r}, t)$ są odpowiednio potencjałami skalarnym i wektorowym, *działa siła Lorentza*

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right).$$

Przykład 1: Na cząstkę o masie m i ładunku elektrycznym q znajdującą się w polu elektromagnetycznym o natężeniu pola elektrycznego $\vec{E}$ i indukcji magnetycznej $\vec{B}$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t),$$

gdzie $\varphi(\vec{r}, t)$ i $\vec{A}(\vec{r}, t)$ są odpowiednio potencjałami skalarnym i wektorowym, **działa siła Lorentza**

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right).$$

Dla siły Lorentza nie istnieje potencjał.

Przykład 1: Na cząstkę o masie m i ładunku elektrycznym q znajdującą się w polu elektromagnetycznym o natężeniu pola elektrycznego $\vec{E}$ i indukcji magnetycznej $\vec{B}$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t),$$

gdzie $\varphi(\vec{r}, t)$ i $\vec{A}(\vec{r}, t)$ są odpowiednio potencjałami skalarnym i wektorowym, **działa siła Lorentza**

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right).$$

Dla siły Lorentza nie istnieje potencjał. Można ją jednak wyprowadzić z potencjału uogólnionego postaci

$$V(\vec{r}, \vec{v}, t) = q \left(\varphi(\vec{r}, t) - \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v} \right).$$

Przykład 1: Na cząstkę o masie m i ładunku elektrycznym q znajdującą się w polu elektromagnetycznym o natężeniu pola elektrycznego $\vec{E}$ i indukcji magnetycznej $\vec{B}$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t),$$

gdzie $\varphi(\vec{r}, t)$ i $\vec{A}(\vec{r}, t)$ są odpowiednio potencjałami skalarnym i wektorowym, **działa siła Lorentza**

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right).$$

Dla siły Lorentza nie istnieje potencjał. Można ją jednak wyprowadzić **z potencjału uogólnionego postaci**

$$V(\vec{r}, \vec{v}, t) = q \left(\varphi(\vec{r}, t) - \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v} \right).$$

W przypadku, gdy położenie cząstki opisujemy we współrzędnych kartezjańskich, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, a zatem $q_j = x_j$, składowe siły uogólnionej są tożsame ze składowymi kartezjańskimi siły na nią działającej.

Zatem i -ta składowa siły Lorentza powinna wyrazić się wzorem

$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

W przypadku, gdy położenie cząstki opisujemy we współrzędnych kartezjańskich, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, a zatem $q_j = x_j$, składowe siły uogólnionej są tożsame ze składowymi kartezjańskimi siły na nią działającej.

Zatem i -ta składowa siły Lorentza powinna wyrazić się wzorem

$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i}$$
$$=$$

W przypadku, gdy położenie cząstki opisujemy we współrzędnych kartezjańskich, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, a zatem $q_j = x_j$, składowe siły uogólnionej są tożsame ze składowymi kartezjańskimi siły na nią działającej.

Zatem i -ta składowa siły Lorentza powinna wyrazić się wzorem

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} [q(\varphi - A_j \dot{x}_j)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [q(\varphi - A_j \dot{x}_j)] \end{aligned}$$

W przypadku, gdy położenie cząstki opisujemy we współrzędnych kartezjańskich, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, a zatem $q_j = x_j$, składowe siły uogólnionej są tożsame ze składowymi kartezjańskimi siły na nią działającej.

Zatem i -ta składowa siły Lorentza powinna wyrazić się wzorem

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} [q(\varphi - A_j \dot{x}_j)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [q(\varphi - A_j \dot{x}_j)] \\ &= \end{aligned}$$

W przypadku, gdy położenie cząstki opisujemy we współrzędnych kartezjańskich, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, a zatem $q_j = x_j$, składowe siły uogólnionej są tożsame ze składowymi kartezjańskimi siły na nią działającej.

Zatem i -ta składowa siły Lorentza powinna wyrazić się wzorem

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} [q(\varphi - A_j \dot{x}_j)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [q(\varphi - A_j \dot{x}_j)] \\ &= -q \frac{d}{dt} \underbrace{\left(A_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_i} \right)}_{A_j \delta_{ij} = A_i} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j, \end{aligned}$$

W przypadku, gdy położenie cząstki opisujemy we współrzędnych kartezjańskich, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, a zatem $q_j = x_j$, składowe siły uogólnionej są tożsame ze składowymi kartezjańskimi siły na nią działającej.

Zatem i -ta składowa siły Lorentza powinna wyrazić się wzorem

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} [q(\varphi - A_j \dot{x}_j)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [q(\varphi - A_j \dot{x}_j)] \\ &= -q \frac{d}{dt} \underbrace{\left(A_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_i} \right)}_{A_j \delta_{ij} = A_i} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_i &= -q \frac{dA_i}{dt} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_i &= -q \frac{dA_i}{dt} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\&= -q \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_i &= -q \frac{dA_i}{dt} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\&= -q \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\&= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_i &= -q \frac{dA_i}{dt} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\&= -q \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\&= q \underbrace{\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)}_{E_i} + q \dot{x}_j \underbrace{\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right)}_{(\vec{v} \times \vec{B})_i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_i &= -q \frac{dA_i}{dt} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\
 &= -q \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\
 &= q \underbrace{\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)}_{E_i} + q \dot{x}_j \underbrace{\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right)}_{(\vec{v} \times \vec{B})_i} \\
 &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_i &= -q \frac{dA_i}{dt} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\&= -q \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\&= q \underbrace{\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)}_{E_i} + q \dot{x}_j \underbrace{\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right)}_{(\vec{v} \times \vec{B})_i} \\&= q \left[E_i + (\vec{v} \times \vec{B})_i \right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_i &= -q \frac{dA_i}{dt} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\&= -q \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\&= q \underbrace{\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)}_{E_i} + q \dot{x}_j \underbrace{\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right)}_{(\vec{v} \times \vec{B})_i} \\&= q \left[E_i + (\vec{v} \times \vec{B})_i \right].\end{aligned}$$

Aby skończyć dowód musimy pokazać, że

$$(\vec{v} \times \vec{B})_i = \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right).$$

$$\begin{aligned}
 F_i &= -q \frac{dA_i}{dt} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\
 &= -q \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\
 &= q \underbrace{\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)}_{E_i} + q \dot{x}_j \underbrace{\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right)}_{(\vec{v} \times \vec{B})_i} \\
 &= q \left[E_i + (\vec{v} \times \vec{B})_i \right].
 \end{aligned}$$

Aby skończyć dowód musimy pokazać, że

$$(\vec{v} \times \vec{B})_i = \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right).$$

Rzeczywiście

$$(\vec{v} \times \vec{B})_i = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k$$

Rzeczywiście

$$(\vec{v} \times \vec{B})_i = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m}$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\ &= \end{aligned}$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\ &= \dot{x}_j (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial A_n}{\partial x_m}\end{aligned}$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \end{aligned}$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right),\end{aligned}$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right),\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności tensora antysymetrycznego

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} =$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right),\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności tensora antysymetrycznego

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kmn} =$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right),\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności tensora antysymetrycznego

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}.$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right),\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności tensora antysymetrycznego

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm} .$$