

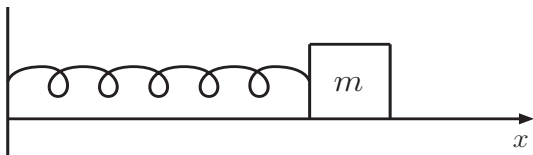
Równanie jednowymiarowego oscylatora harmonicznego

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

Oscylator harmoniczny

Ciało o masie m ślizga się bez tarcia po podłożu pod wpływem sprężyny przyczepionej do ściany. Sprężyna spełnia prawo Hooke'a $F = -Kx$, gdzie współczynnik sprężystości K jest zadany.

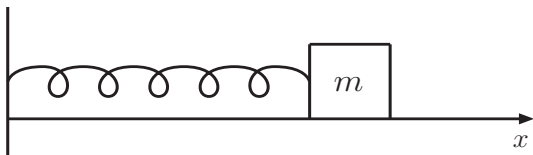


Z II zasady dynamiki Newtona otrzymujemy równanie ruchu

$$m\ddot{x} = -Kx$$

Oscylator harmoniczny

Ciało o masie m ślizga się bez tarcia po podłożu pod wpływem sprężyny przyczepionej do ściany. Sprężyna spełnia prawo Hooke'a $F = -Kx$, gdzie współczynnik sprężystości K jest zadany.

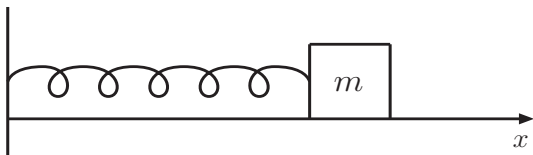


Z II zasady dynamiki Newtona otrzymujemy równanie ruchu

$$m\ddot{x} = -Kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{K}{m}x$$

Oscylator harmoniczny

Ciało o masie m ślizga się bez tarcia po podłożu pod wpływem sprężyny przyczepionej do ściany. Sprężyna spełnia prawo Hooke'a $F = -Kx$, gdzie współczynnik sprężystości K jest zadany.

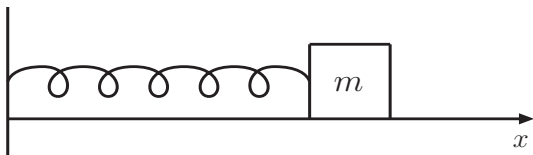


Z II zasady dynamiki Newtona otrzymujemy równanie ruchu

$$m\ddot{x} = -Kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{K}{m}x \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\omega_0^2 x,$$

Oscylator harmoniczny

Ciało o masie m ślizga się bez tarcia po podłożu pod wpływem sprężyny przyczepionej do ściany. Sprężyna spełnia prawo Hooke'a $F = -Kx$, gdzie współczynnik sprężystości K jest zadany.



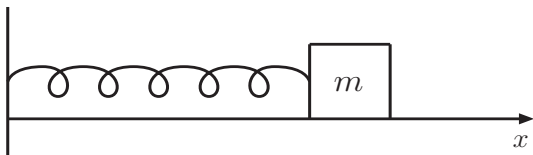
Z II zasady dynamiki Newtona otrzymujemy równanie ruchu

$$m\ddot{x} = -Kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{K}{m}x \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\omega_0^2 x,$$

gdzie oznaczyliśmy $\omega_0^2 \equiv \frac{K}{m}$.

Oscylator harmoniczny

Ciało o masie m ślizga się bez tarcia po podłożu pod wpływem sprężyny przyczepionej do ściany. Sprężyna spełnia prawo Hooke'a $F = -Kx$, gdzie współczynnik sprężystości K jest zadany.



Z II zasady dynamiki Newtona otrzymujemy równanie ruchu

$$m\ddot{x} = -Kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{K}{m}x \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\omega_0^2 x,$$

gdzie oznaczyliśmy $\omega_0^2 \equiv \frac{K}{m}$.

Rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

zwykle przedstawiamy w jednej z następujących postaci:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

Rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

zwykle przedstawiamy w jednej z następujących postaci:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad x(t) = B \cos(\omega_0 t + \beta)$$

Rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

zwykle przedstawiamy w jednej z następujących postaci:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad x(t) = B \cos(\omega_0 t + \beta)$$

lub wykorzystując liczby zespolone

$$x(t) = Ce^{i\omega_0 t} + De^{-i\omega_0 t},$$

Rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

zwykle przedstawiamy w jednej z następujących postaci:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad x(t) = B \cos(\omega_0 t + \beta)$$

lub wykorzystując liczby zespolone

$$x(t) = Ce^{i\omega_0 t} + De^{-i\omega_0 t},$$

gdzie A, α, B, β, C i D są dowolnymi stałymi.

Rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

zwykle przedstawiamy w jednej z następujących postaci:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad x(t) = B \cos(\omega_0 t + \beta)$$

lub wykorzystując liczby zespolone

$$x(t) = Ce^{i\omega_0 t} + De^{-i\omega_0 t},$$

gdzie A, α, B, β, C i D są dowolnymi stałymi.

Zadanie 2. Pokazać, że każda z powyższych funkcji jest rozwiązaniem równania $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$.

Rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

zwykle przedstawiamy w jednej z następujących postaci:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad x(t) = B \cos(\omega_0 t + \beta)$$

lub wykorzystując liczby zespolone

$$x(t) = Ce^{i\omega_0 t} + De^{-i\omega_0 t},$$

gdzie A, α, B, β, C i D są dowolnymi stałymi.

Zadanie 2. Pokazać, że każda z powyższych funkcji jest rozwiązaniem równania $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$.

Tłumiony oscylator harmoniczny

Rozważmy swobodny tłumiony oscylator harmoniczny opisywany równaniem

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0,$$

gdzie wyraz $c\dot{x}$ opisuje tłumienie – opór ruchu proporcjonalny do prędkości.

Tłumiony oscylator harmoniczny

Rozważmy swobodny tłumiony oscylator harmoniczny opisywany równaniem

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0,$$

gdzie wyraz $c\dot{x}$ opisuje tłumienie – opór ruchu proporcjonalny do prędkości.

Przedzielimy obustronnie przez m

$$\ddot{x} + 2\frac{c}{2m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Rozważmy swobodny tłumiony oscylator harmoniczny opisywany równaniem

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0,$$

gdzie wyraz $c\dot{x}$ opisuje tłumienie – opór ruchu proporcjonalny do prędkości.

Przedzielimy obustronnie przez m

$$\ddot{x} + 2\frac{c}{2m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

i oznaczymy

$$\gamma \equiv \frac{c}{2m}, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{K}{m},$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Rozważmy swobodny tłumiony oscylator harmoniczny opisywany równaniem

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0,$$

gdzie wyraz $c\dot{x}$ opisuje tłumienie – opór ruchu proporcjonalny do prędkości.

Przedzielimy obustronnie przez m

$$\ddot{x} + 2\frac{c}{2m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

i oznaczmy

$$\gamma \equiv \frac{c}{2m}, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{K}{m},$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

wówczas otrzymamy równanie ruchu tłumionego oscylatora harmonicznego w formie

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Podstawiając $x(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$,
otrzymamy

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0,$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

wówczas otrzymamy równanie ruchu tłumionego oscylatora harmonicznego w formie

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Podstawiając $x(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, otrzymamy

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0,$$

a po pomnożeniu przez niezerowy czynnik $e^{-\lambda t}$ otrzymamy równanie algebraiczne na wykładnik λ

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

wówczas otrzymamy równanie ruchu tłumionego oscylatora harmonicznego w formie

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Podstawiając $x(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, otrzymamy

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0,$$

a po pomnożeniu przez niezerowy czynnik $e^{-\lambda t}$ otrzymamy równanie algebraiczne na wykładnik λ

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

które możemy łatwo rozwiązać.

Tłumiony oscylator harmoniczny

wówczas otrzymamy równanie ruchu tłumionego oscylatora harmonicznego w formie

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Podstawiając $x(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, otrzymamy

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0,$$

a po pomnożeniu przez niezerowy czynnik $e^{-\lambda t}$ otrzymamy równanie algebraiczne na wykładnik λ

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

które możemy łatwo rozwiązać.

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \gamma^2 - \gamma^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$(\lambda + \gamma)^2 = \gamma^2 - \omega_0^2$$

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \gamma^2 - \gamma^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$(\lambda + \gamma)^2 = \gamma^2 - \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda + \gamma = \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \gamma^2 - \gamma^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$(\lambda + \gamma)^2 = \gamma^2 - \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda + \gamma = \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \gamma^2 - \gamma^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$(\lambda + \gamma)^2 = \gamma^2 - \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda + \gamma = \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

W zbiorze liczb zespolonych oba pierwiastki zawsze istnieją.

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \gamma^2 - \gamma^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$(\lambda + \gamma)^2 = \gamma^2 - \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda + \gamma = \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

W zbiorze liczb zespolonych oba pierwiastki zawsze istnieją.

Jeżeli $\lambda_1 \neq \lambda_2$, to rozwiązanie ogólne równania swobodnego oscylatora tłumionego ma postać

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t},$$

gdzie A_1 i A_2 są stałymi dowolnymi.

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \gamma^2 - \gamma^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$(\lambda + \gamma)^2 = \gamma^2 - \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda + \gamma = \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

W zbiorze liczb zespolonych oba pierwiastki zawsze istnieją. Jeżeli $\lambda_1 \neq \lambda_2$, to rozwiązanie ogólne równania swobodnego oscylatora tłumionego ma postać

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t},$$

gdzie A_1 i A_2 są stałymi dowolnymi.

Tłumiony oscylator harmoniczny

Rozważmy 3 możliwości.

a) $\gamma^2 < \omega_0^2$ – słabe tłumienie $\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 < 0$

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-(\omega_0^2 - \gamma^2)} = \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2},$$

Rozważmy 3 możliwości.

a) $\gamma^2 < \omega_0^2$ – słabe tłumienie $\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 < 0$

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-(\omega_0^2 - \gamma^2)} = \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2},$$

Oznaczmy $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$, wówczas

$$\lambda_1 = -\gamma + i\omega, \quad \lambda_2 = -\gamma - i\omega$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Rozważmy 3 możliwości.

a) $\gamma^2 < \omega_0^2$ – słabe tłumienie $\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 < 0$

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-(\omega_0^2 - \gamma^2)} = \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2},$$

Oznaczmy $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$, wówczas

$$\lambda_1 = -\gamma + i\omega, \quad \lambda_2 = -\gamma - i\omega$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{(-\gamma + i\omega)t} + A_2 e^{(-\gamma - i\omega)t} \\ &= e^{-\gamma t} (A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}). \end{aligned}$$

Rozważmy 3 możliwości.

a) $\gamma^2 < \omega_0^2$ – słabe tłumienie $\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 < 0$

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-(\omega_0^2 - \gamma^2)} = \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2},$$

Oznaczmy $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$, wówczas

$$\lambda_1 = -\gamma + i\omega, \quad \lambda_2 = -\gamma - i\omega$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{(-\gamma + i\omega)t} + A_2 e^{(-\gamma - i\omega)t} \\ &= e^{-\gamma t} (A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}). \end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right]$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\ &= \end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\ &= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right]\end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\ &= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\ &= \end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\ &= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\ &= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t},\end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\ &= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\ &= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t},\end{aligned}$$

$x(0)$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\ &= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\ &= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t}, \\ x(0) &= \end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\ &= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\ &= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t}, \\ x(0) &= e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \Big|_{t=0}\end{aligned}$$

Załóżmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\ &= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\ &= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t}, \\ x(0) &= e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \Big|_{t=0} = A_1 + A_2 = x_0,\end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\ &= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\ &= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t}, \\ x(0) &= e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \Big|_{t=0} = A_1 + A_2 = x_0, \\ \dot{x}(0) &= \end{aligned}$$

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} (A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) \right] \\&= -\gamma e^{-\gamma t} [A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}] + e^{-\gamma t} i\omega [A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t}] \\&= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t}, \\x(0) &= e^{-\gamma t} (A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) \Big|_{t=0} = A_1 + A_2 = x_0, \\ \dot{x}(0) &= \end{aligned}$$

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\&= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\&= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t}, \\x(0) &= e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \Big|_{t=0} = A_1 + A_2 = x_0, \\\dot{x}(0) &= (-\gamma + i\omega) A_1 - (\gamma + i\omega) A_2\end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\&= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\&= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t}, \\x(0) &= e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \Big|_{t=0} = A_1 + A_2 = x_0, \\ \dot{x}(0) &= (-\gamma + i\omega) A_1 - (\gamma + i\omega) A_2 \\&= \end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\&= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\&= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t}, \\x(0) &= e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \Big|_{t=0} = A_1 + A_2 = x_0, \\ \dot{x}(0) &= (-\gamma + i\omega) A_1 - (\gamma + i\omega) A_2 \\&= \underbrace{-\gamma(A_1 + A_2)}_{x_0} + i\omega(A_1 - A_2) = \dot{x}_0.\end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\&= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\&= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t}, \\x(0) &= e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \Big|_{t=0} = A_1 + A_2 = x_0, \\ \dot{x}(0) &= (-\gamma + i\omega) A_1 - (\gamma + i\omega) A_2 \\&= -\gamma \underbrace{(A_1 + A_2)}_{x_0} + i\omega (A_1 - A_2) = \dot{x}_0.\end{aligned}$$

Skąd

$$i\omega(A_1 - A_2) = \dot{x}_0 + \gamma x_0 \Rightarrow A_1 - A_2 = -i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega}.$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ A_1 - A_2 = -i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \end{cases}$$

Skąd

$$i\omega(A_1 - A_2) = \dot{x}_0 + \gamma x_0 \Rightarrow A_1 - A_2 = -i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega}.$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ A_1 - A_2 = -i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \end{cases}$$

otrzymamy stałe A_1 i A_2 :

$$A_1 = \frac{1}{2} \left[x_0 - i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right], \quad A_2 = \frac{1}{2} \left[x_0 + i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right] = A_1^*.$$

Skąd

$$i\omega(A_1 - A_2) = \dot{x}_0 + \gamma x_0 \Rightarrow A_1 - A_2 = -i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega}.$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ A_1 - A_2 = -i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \end{cases}$$

otrzymamy stałe A_1 i A_2 :

$$A_1 = \frac{1}{2} \left[x_0 - i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right], \quad A_2 = \frac{1}{2} \left[x_0 + i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right] = A_1^*.$$

Rozwiązanie przyjmuje postać

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{i\omega t} + (A_1 e^{i\omega t})^*]$$

Rozwiązanie przyjmuje postać

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\gamma t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{i\omega t} + (A_1 e^{i\omega t})^*] \\&= \end{aligned}$$

Rozwiązanie przyjmuje postać

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\gamma t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{i\omega t} + (A_1 e^{i\omega t})^*] \\&= e^{-\gamma t} 2\operatorname{Re}(A_1 e^{i\omega t}),\end{aligned}$$

Rozwiązanie przyjmuje postać

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\gamma t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{i\omega t} + (A_1 e^{i\omega t})^*] \\&= e^{-\gamma t} 2\operatorname{Re} (A_1 e^{i\omega t}),\end{aligned}$$

gdzie

$$2\operatorname{Re} (A_1 e^{i\omega t}) = 2\operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \left(x_0 - i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right) (\cos \omega t + i \sin \omega t) \right]$$

Rozwiązanie przyjmuje postać

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\gamma t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{i\omega t} + (A_1 e^{i\omega t})^*] \\&= e^{-\gamma t} 2\operatorname{Re} (A_1 e^{i\omega t}),\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}2\operatorname{Re} (A_1 e^{i\omega t}) &= 2\operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \left(x_0 - i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right) (\cos \omega t + i \sin \omega t) \right] \\&= \end{aligned}$$

Rozwiązanie przyjmuje postać

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\gamma t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{i\omega t} + (A_1 e^{i\omega t})^*] \\&= e^{-\gamma t} 2\operatorname{Re}(A_1 e^{i\omega t}),\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}2\operatorname{Re}(A_1 e^{i\omega t}) &= 2\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}\left(x_0 - i\frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega}\right)(\cos \omega t + i \sin \omega t)\right] \\&= x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \sin \omega t.\end{aligned}$$

Rozwiązanie przyjmuje postać

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\gamma t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{i\omega t} + (A_1 e^{i\omega t})^*] \\&= e^{-\gamma t} 2\operatorname{Re} (A_1 e^{i\omega t}),\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}2\operatorname{Re} (A_1 e^{i\omega t}) &= 2\operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \left(x_0 - i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right) (\cos \omega t + i \sin \omega t) \right] \\&= x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \sin \omega t.\end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

W takim razie, rozwiązanie w przypadku słabego tłumienia przyjmuje postać

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \sin \omega t \right].$$

Podstawmy

$$x_0 = a \sin \alpha, \quad \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} = a \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0 + \gamma x_0}.$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

W takim razie, rozwiązanie w przypadku słabego tłumienia przyjmuje postać

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \sin \omega t \right].$$

Podstawmy

$$x_0 = a \sin \alpha, \quad \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} = a \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0 + \gamma x_0}.$$

Podnosząc obustronnie do kwadratu i dodając stronami dwa pierwsze równania otrzymamy

$$a^2 = x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right)^2}.$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

W takim razie, rozwiązanie w przypadku słabego tłumienia przyjmuje postać

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \sin \omega t \right].$$

Podstawmy

$$x_0 = a \sin \alpha, \quad \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} = a \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0 + \gamma x_0}.$$

Podnosząc obustronnie do kwadratu i dodając stronami dwa pierwsze równania otrzymamy

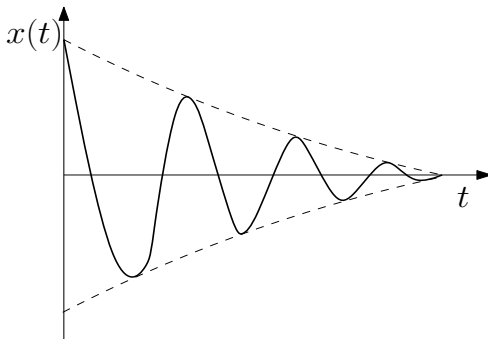
$$a^2 = x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right)^2}.$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Wtedy $x(t)$ możemy zapisać w formie

$$x(t) = e^{-\gamma t} (a \sin \alpha \cos \omega t + a \cos \alpha \sin \omega t) = a e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha).$$

Otrzymaliśmy tłumione drgania, których amplituda maleje eksponencjalnie, a częstość $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ jest nieco mniejsza od częstości oscylatora swobodnego.

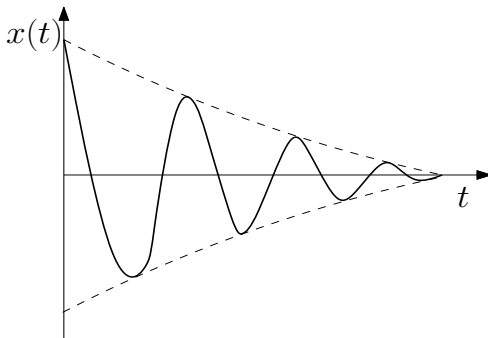


Tłumiony oscylator harmoniczny

Wtedy $x(t)$ możemy zapisać w formie

$$x(t) = e^{-\gamma t} (a \sin \alpha \cos \omega t + a \cos \alpha \sin \omega t) = a e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha).$$

Otrzymaliśmy tłumione drgania, których amplituda maleje eksponencjalnie, a częstość $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ jest nieco mniejsza od częstości oscylatora swobodnego.



b) $\gamma^2 > \omega_0^2$ – silne tłumienie $\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 > 0$

Rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}.$$

b) $\gamma^2 > \omega_0^2$ – silne tłumienie $\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 > 0$

Rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}.$$

Nie opisuje ono drgań periodycznych.

b) $\gamma^2 > \omega_0^2$ – silne tłumienie $\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 > 0$

Rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}.$$

Nie opisuje ono drgań periodycznych.

Przyjmijmy warunki początkowe w formie $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

b) $\gamma^2 > \omega_0^2$ – silne tłumienie $\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 > 0$

Rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}.$$

Nie opisuje ono drgań periodycznych.

Przyjmijmy warunki początkowe w formie $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

Obliczmy najpierw

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & - \left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right) A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + \\ & - \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right) A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}, \end{aligned}$$

b) $\gamma^2 > \omega_0^2$ – silne tłumienie $\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 > 0$

Rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}.$$

Nie opisuje ono drgań periodycznych.

Przyjmijmy warunki początkowe w formie $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

Obliczmy najpierw

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & - \left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right) A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + \\ & - \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right) A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}, \end{aligned}$$

a następnie

$$\begin{aligned}x(0) &= A_1 + A_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_2 = -A_1, \\ \dot{x}(0) &= -\left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right) A_1 - \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right) A_2 = \\ &= \left[-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} + \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right] A_1 = \dot{x}_0,\end{aligned}$$

skąd

$$A_1 = \frac{\dot{x}_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}.$$

a następnie

$$\begin{aligned}x(0) &= A_1 + A_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_2 = -A_1, \\ \dot{x}(0) &= -\left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right) A_1 - \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right) A_2 = \\ &= \left[-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} + \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right] A_1 = \dot{x}_0,\end{aligned}$$

skąd

$$A_1 = \frac{\dot{x}_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}.$$

Rozwiązanie szczególne ma zatem postać

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\&= \end{aligned}$$

Rozwiązanie szczególne ma zatem postać

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\&= A_1 \left[e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right]\end{aligned}$$

Rozwiązanie szczególne ma zatem postać

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\&= A_1 \left[e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right] \\&= \end{aligned}$$

Rozwiązanie szczególne ma zatem postać

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\&= A_1 \left[e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right] \\&= A_1 e^{-\gamma t} \left(e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right)\end{aligned}$$

Rozwiązanie szczególne ma zatem postać

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\&= A_1 \left[e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right] \\&= A_1 e^{-\gamma t} \left(e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right)\end{aligned}$$

=

Rozwiązanie szczególne ma zatem postać

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\&= A_1 \left[e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right] \\&= A_1 e^{-\gamma t} \left(e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right) \\&= \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \frac{e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}}{2}\end{aligned}$$

Rozwiązanie szczególne ma zatem postać

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\&= A_1 \left[e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right] \\&= A_1 e^{-\gamma t} \left(e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right) \\&= \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \frac{e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}}{2} \\&= \end{aligned}$$

Rozwiązanie szczególne ma zatem postać

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\&= A_1 \left[e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right] \\&= A_1 e^{-\gamma t} \left(e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right) \\&= \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \frac{e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}}{2} \\&= \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \sinh \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t.\end{aligned}$$

Rozwiązanie szczególne ma zatem postać

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\&= A_1 \left[e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right] \\&= A_1 e^{-\gamma t} \left(e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right) \\&= \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \frac{e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}}{2} \\&= \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \sinh \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t.\end{aligned}$$

c) $\gamma^2 = \omega_0^2$ – aperiodyczny przypadek graniczny

$$\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$$

$$x(t) = A_1 e^{-\gamma t} + A_2 e^{-\gamma t} = (A_1 + A_2) e^{-\gamma t} = \tilde{A}_1 e^{-\gamma t}.$$

To rozwiązanie zawiera tylko jedną stałą dowolną, a więc nie jest rozwiązaniem ogólnym, które musi zawierać dwie stałe dowolne.

c) $\gamma^2 = \omega_0^2$ – aperiodyczny przypadek graniczny

$$\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$$

$$x(t) = A_1 e^{-\gamma t} + A_2 e^{-\gamma t} = (A_1 + A_2) e^{-\gamma t} = \tilde{A}_1 e^{-\gamma t}.$$

To rozwiązanie zawiera tylko jedną stałą dowolną, a więc nie jest rozwiązaniem ogólnym, które musi zawierać dwie stałe dowolne.

Jeżeli λ jest pierwiastkiem dwukrotnym równania charakterystycznego, to rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = \tilde{A}_1 e^{\lambda t} + \tilde{A}_2 t e^{\lambda t}.$$

c) $\gamma^2 = \omega_0^2$ – aperiodyczny przypadek graniczny

$$\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$$

$$x(t) = A_1 e^{-\gamma t} + A_2 e^{-\gamma t} = (A_1 + A_2) e^{-\gamma t} = \tilde{A}_1 e^{-\gamma t}.$$

To rozwiązanie zawiera tylko jedną stałą dowolną, a więc nie jest rozwiązaniem ogólnym, które musi zawierać dwie stałe dowolne.

Jeżeli λ jest pierwiastkiem dwukrotnym równania charakterystycznego, to rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = \tilde{A}_1 e^{\lambda t} + \tilde{A}_2 t e^{\lambda t}.$$

Aby się przekonać, że tak jest, sprawdźmy, że

$$x(t) = \tilde{A}_1 e^{-\gamma t} + \tilde{A}_2 t e^{-\gamma t}$$

jest rozwiązaniem rozpatrywanego równania

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

jeżeli $\gamma^2 = \omega_0^2$.

Tłumiony oscylator harmoniczny

W tym celu obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\gamma\tilde{A}_1e^{-\gamma t} + \tilde{A}_2e^{-\gamma t} - \gamma\tilde{A}_2te^{-\gamma t}, \\ \ddot{x}(t) &= \gamma^2\tilde{A}_1e^{-\gamma t} - 2\gamma\tilde{A}_2e^{-\gamma t} + \gamma^2\tilde{A}_2te^{-\gamma t}\end{aligned}$$

i sprawdźmy, czy jest spełnione równanie

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2x = 0.$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

W tym celu obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\gamma\tilde{A}_1e^{-\gamma t} + \tilde{A}_2e^{-\gamma t} - \gamma\tilde{A}_2te^{-\gamma t}, \\ \ddot{x}(t) &= \gamma^2\tilde{A}_1e^{-\gamma t} - 2\gamma\tilde{A}_2e^{-\gamma t} + \gamma^2\tilde{A}_2te^{-\gamma t}\end{aligned}$$

i sprawdźmy, czy jest spełnione równanie

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2x = 0.$$

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2x &= (\gamma^2\tilde{A}_1 - 2\gamma\tilde{A}_2 + \gamma^2\tilde{A}_2t)e^{-\gamma t} \\ &+ 2\gamma(-\gamma\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 - \gamma\tilde{A}_2t)e^{-\gamma t} + \gamma^2(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2t)e^{-\gamma t} = \\ &(\gamma^2 - 2\gamma^2 + \gamma^2)\tilde{A}_1e^{-\gamma t} + (-2\gamma + 2\gamma)\tilde{A}_2e^{-\gamma t} \\ &+ (\gamma^2 - 2\gamma^2 + \gamma^2)\tilde{A}_2te^{-\gamma t} = 0.\end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

W tym celu obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\gamma\tilde{A}_1e^{-\gamma t} + \tilde{A}_2e^{-\gamma t} - \gamma\tilde{A}_2te^{-\gamma t}, \\ \ddot{x}(t) &= \gamma^2\tilde{A}_1e^{-\gamma t} - 2\gamma\tilde{A}_2e^{-\gamma t} + \gamma^2\tilde{A}_2te^{-\gamma t}\end{aligned}$$

i sprawdźmy, czy jest spełnione równanie

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2x = 0.$$

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2x &= (\gamma^2\tilde{A}_1 - 2\gamma\tilde{A}_2 + \gamma^2\tilde{A}_2t)e^{-\gamma t} \\ &+ 2\gamma(-\gamma\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 - \gamma\tilde{A}_2t)e^{-\gamma t} + \gamma^2(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2t)e^{-\gamma t} = \\ &(\gamma^2 - 2\gamma^2 + \gamma^2)\tilde{A}_1e^{-\gamma t} + (-2\gamma + 2\gamma)\tilde{A}_2e^{-\gamma t} \\ &+ (\gamma^2 - 2\gamma^2 + \gamma^2)\tilde{A}_2te^{-\gamma t} = 0.\end{aligned}$$

Przyjmijmy warunki początkowe $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, wtedy

$$x(0) = x(t) = \tilde{A}_1 e^0 + \tilde{A}_2 \cdot 0 e^0 = \tilde{A}_1 = 0,$$

$$\dot{x}(0) = -\gamma \tilde{A}_1 e^0 + \tilde{A}_2 e^0 - \gamma \tilde{A}_2 \cdot 0 e^0 = \tilde{A}_2 = \dot{x}_0.$$

Wtedy rozwiązanie szczególne ma postać

$$x(t) = \dot{x}_0 t e^{-\gamma t}.$$

Przyjmijmy warunki początkowe $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, wtedy

$$x(0) = x(t) = \tilde{A}_1 e^0 + \tilde{A}_2 \cdot 0 e^0 = \tilde{A}_1 = 0,$$

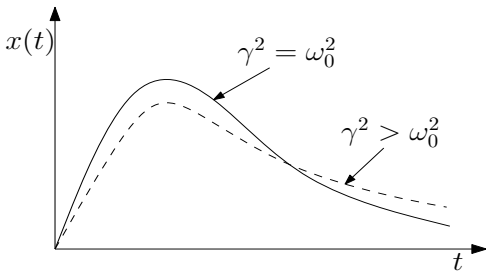
$$\dot{x}(0) = -\gamma \tilde{A}_1 e^0 + \tilde{A}_2 e^0 - \gamma \tilde{A}_2 \cdot 0 e^0 = \tilde{A}_2 = \dot{x}_0.$$

Wtedy rozwiązanie szczególne ma postać

$$x(t) = \dot{x}_0 t e^{-\gamma t}.$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

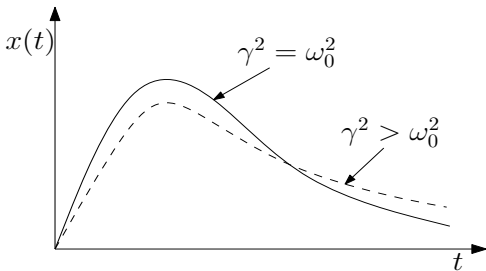
Zilustrujmy przypadek silnego tłumienia ($\gamma^2 > \omega_0^2$) i aperiodyczny przypadek graniczny ($\gamma^2 = \omega_0^2$) wykresem.



Widzimy, że w aperiodycznym przypadku granicznym wychylenia maleją przy $t \rightarrow \infty$ szybciej niż w przypadku silnego tłumienia.

Tłumiony oscylator harmoniczny

Zilustrujmy przypadek silnego tłumienia ($\gamma^2 > \omega_0^2$) i aperiodyczny przypadek graniczny ($\gamma^2 = \omega_0^2$) wykresem.

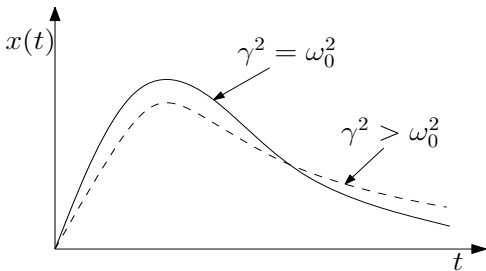


Widzimy, że w aperiodycznym przypadku granicznym wychylenia maleją przy $t \rightarrow \infty$ szybciej niż w przypadku silnego tłumienia.

Dlatego *wskazówkowe przyrządy pomiarowe* pracują właśnie w tym reżimie.

Tłumiony oscylator harmoniczny

Zilustrujemy przypadek silnego tłumienia ($\gamma^2 > \omega_0^2$) i aperiodyczny przypadek graniczny ($\gamma^2 = \omega_0^2$) wykresem.



Widzimy, że w aperiodycznym przypadku granicznym wychylenia maleją przy $t \rightarrow \infty$ szybciej niż w przypadku silnego tłumienia. Dlatego wskazówkowe przyrządy pomiarowe pracują właśnie w tym reżimie.

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego opisywane są równaniem

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \cos \Omega t.$$

Podzielmy przez m

$$\ddot{x} + 2\frac{c}{2m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego opisywane są równaniem

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \cos \Omega t.$$

Podzielmy przez m

$$\ddot{x} + 2\frac{c}{2m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

i oznaczmy

$$\gamma \equiv \frac{c}{2m}, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{K}{m}, \quad f_0 \equiv \frac{F_0}{m},$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego opisywane są równaniem

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \cos \Omega t.$$

Podzielmy przez m

$$\ddot{x} + 2\frac{c}{2m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

i oznaczmy

$$\gamma \equiv \frac{c}{2m}, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{K}{m}, \quad f_0 \equiv \frac{F_0}{m},$$

wówczas otrzymamy równanie

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t.$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego opisywane są równaniem

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \cos \Omega t.$$

Podzielmy przez m

$$\ddot{x} + 2\frac{c}{2m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

i oznaczmy

$$\gamma \equiv \frac{c}{2m}, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{K}{m}, \quad f_0 \equiv \frac{F_0}{m},$$

wówczas otrzymamy równanie

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t.$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Rozwiązanie ogólne $x(t)$ takiego równania niejednorodnego jest sumą

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t)$$

rozwiązania ogólnego równania jednorodnego

$$\ddot{x}_0 + 2\gamma\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Rozwiązanie ogólne $x(t)$ takiego równania niejednorodnego jest sumą

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t)$$

rozwiązania ogólnego równania jednorodnego

$$\ddot{x}_0 + 2\gamma\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$$

i szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego

$$\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = f_0 \cos \Omega t.$$

Rozwiązanie ogólne $x(t)$ takiego równania niejednorodnego jest sumą

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t)$$

rozwiązania ogólnego równania jednorodnego

$$\ddot{x}_0 + 2\gamma\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$$

i szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego

$$\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = f_0 \cos \Omega t.$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Poszukajmy rozwiązania **szczególnego** $x_1(t)$ w formie

$$x_1(t) = B \cos \Omega t + C \sin \Omega t.$$

Obliczmy pochodne

$$\dot{x}_1(t) =$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Poszukajmy rozwiązania **szczególnego** $x_1(t)$ w formie

$$x_1(t) = B \cos \Omega t + C \sin \Omega t.$$

Obliczmy pochodne

$$\dot{x}_1(t) = -B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t,$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Poszukajmy rozwiązania **szczególnego** $x_1(t)$ w formie

$$x_1(t) = B \cos \Omega t + C \sin \Omega t.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t, \\ \ddot{x}_1(t) \end{aligned}$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Poszukajmy rozwiązania **szczególnego** $x_1(t)$ w formie

$$x_1(t) = B \cos \Omega t + C \sin \Omega t.$$

Obliczmy pochodne

$$\dot{x}_1(t) = -B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t,$$

$$\ddot{x}_1(t) =$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Poszukajmy rozwiązania **szczególnego** $x_1(t)$ w formie

$$x_1(t) = B \cos \Omega t + C \sin \Omega t.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t, \\ \ddot{x}_1(t) &= -B\Omega^2 \cos \Omega t - C\Omega^2 \sin \Omega t\end{aligned}$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Poszukajmy rozwiązania **szczególnego** $x_1(t)$ w formie

$$x_1(t) = B \cos \Omega t + C \sin \Omega t.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t, \\ \ddot{x}_1(t) &= -B\Omega^2 \cos \Omega t - C\Omega^2 \sin \Omega t\end{aligned}$$

i wstawmy do równania $\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = f_0 \cos \Omega t$:

$$\begin{aligned}&-B\Omega^2 \cos \Omega t - C\Omega^2 \sin \Omega t + 2\gamma(-B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t) \\ &+ \omega_0^2 (B \cos \Omega t + C \sin \Omega t) = f_0 \cos \Omega t.\end{aligned}$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Poszukajmy rozwiązania **szczególnego** $x_1(t)$ w formie

$$x_1(t) = B \cos \Omega t + C \sin \Omega t.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t, \\ \ddot{x}_1(t) &= -B\Omega^2 \cos \Omega t - C\Omega^2 \sin \Omega t\end{aligned}$$

i wstawmy do równania $\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = f_0 \cos \Omega t$:

$$\begin{aligned}-B\Omega^2 \cos \Omega t - C\Omega^2 \sin \Omega t + 2\gamma(-B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t) \\ + \omega_0^2 (B \cos \Omega t + C \sin \Omega t) = f_0 \cos \Omega t.\end{aligned}$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Porównując współczynniki przy $\sin \Omega t$ i $\cos \Omega t$ po obu stronach równania:

$$\begin{aligned} & -B\Omega^2 \cos \Omega t - C\Omega^2 \sin \Omega t + 2\gamma(-B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t) \\ & + \omega_0^2(B \cos \Omega t + C \sin \Omega t) = f_0 \cos \Omega t \end{aligned}$$

otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} -\Omega^2 B + 2\gamma\Omega C + \omega_0^2 B &= f_0, \\ -\Omega^2 C - 2\gamma\Omega B + \omega_0^2 C &= 0 \Rightarrow C(\omega_0^2 - \Omega^2) = 2\gamma\Omega B. \end{aligned}$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Porównując współczynniki przy $\sin \Omega t$ i $\cos \Omega t$ po obu stronach równania:

$$\begin{aligned} & -B\Omega^2 \cos \Omega t - C\Omega^2 \sin \Omega t + 2\gamma(-B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t) \\ & + \omega_0^2 (B \cos \Omega t + C \sin \Omega t) = f_0 \cos \Omega t \end{aligned}$$

otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} -\Omega^2 B + 2\gamma\Omega C + \omega_0^2 B &= f_0, \\ -\Omega^2 C - 2\gamma\Omega B + \omega_0^2 C &= 0 \Rightarrow C(\omega_0^2 - \Omega^2) = 2\gamma\Omega B. \end{aligned}$$

W takim razie, jeśli $\Omega \neq \omega_0$, to

$$C = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} B,$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Porównując współczynniki przy $\sin \Omega t$ i $\cos \Omega t$ po obu stronach równania:

$$\begin{aligned} & -B\Omega^2 \cos \Omega t - C\Omega^2 \sin \Omega t + 2\gamma(-B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t) \\ & + \omega_0^2 (B \cos \Omega t + C \sin \Omega t) = f_0 \cos \Omega t \end{aligned}$$

otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} -\Omega^2 B + 2\gamma\Omega C + \omega_0^2 B &= f_0, \\ -\Omega^2 C - 2\gamma\Omega B + \omega_0^2 C &= 0 \Rightarrow C(\omega_0^2 - \Omega^2) = 2\gamma\Omega B. \end{aligned}$$

W takim razie, jeśli $\Omega \neq \omega_0$, to

$$C = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} B,$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

a po wstawieniu do pierwszego równania otrzymamy

$$(\omega_0^2 - \Omega^2) B + \frac{(2\gamma\Omega)^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} B = f_0,$$

a więc

$$B = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} f_0, \quad C = \frac{2\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} f_0.$$

a po wstawieniu do pierwszego równania otrzymamy

$$(\omega_0^2 - \Omega^2) B + \frac{(2\gamma\Omega)^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} B = f_0,$$

a więc

$$B = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} f_0, \quad C = \frac{2\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} f_0.$$

Podstawmy $B \equiv A \cos \varphi$ i $C \equiv A \sin \varphi$, wtedy

$$A = \sqrt{B^2 + C^2} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{C}{B} = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

a po wstawieniu do pierwszego równania otrzymamy

$$(\omega_0^2 - \Omega^2) B + \frac{(2\gamma\Omega)^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} B = f_0,$$

a więc

$$B = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} f_0, \quad C = \frac{2\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} f_0.$$

Podstawmy $B \equiv A \cos \varphi$ i $C \equiv A \sin \varphi$, wtedy

$$A = \sqrt{B^2 + C^2} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{C}{B} = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Rozwiązanie szczególne $x_1(t)$ przybiera postać

$$x_1(t) = A \cos \varphi \cos \Omega t + A \sin \varphi \sin \Omega t = A \cos(\Omega t - \varphi).$$

Zauważmy, że jeśli $\Omega = \omega_0$, to

$$C(\omega_0^2 - \Omega^2) = 2\gamma\Omega B = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Rozwiązanie szczególne $x_1(t)$ przybiera postać

$$x_1(t) = A \cos \varphi \cos \Omega t + A \sin \varphi \sin \Omega t = A \cos(\Omega t - \varphi).$$

Zauważmy, że jeśli $\Omega = \omega_0$, to

$$C(\omega_0^2 - \Omega^2) = 2\gamma\Omega B = 0 \Rightarrow B = 0.$$

a z równania

$$-\Omega^2 B + 2\gamma\Omega C + \omega_0^2 B = f_0 \Rightarrow 2\gamma\Omega C = f_0 \Rightarrow C = \frac{f_0}{2\gamma\Omega},$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Rozwiązanie szczególne $x_1(t)$ przybiera postać

$$x_1(t) = A \cos \varphi \cos \Omega t + A \sin \varphi \sin \Omega t = A \cos(\Omega t - \varphi).$$

Zauważmy, że jeśli $\Omega = \omega_0$, to

$$C(\omega_0^2 - \Omega^2) = 2\gamma\Omega B = 0 \Rightarrow B = 0.$$

a z równania

$$-\Omega^2 B + 2\gamma\Omega C + \omega_0^2 B = f_0 \Rightarrow 2\gamma\Omega C = f_0 \Rightarrow C = \frac{f_0}{2\gamma\Omega},$$

co jest szczególnym przypadkiem wzorów

$$B = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} f_0, \quad C = \frac{2\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} f_0.$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Rozwiązanie szczególne $x_1(t)$ przybiera postać

$$x_1(t) = A \cos \varphi \cos \Omega t + A \sin \varphi \sin \Omega t = A \cos(\Omega t - \varphi).$$

Zauważmy, że jeśli $\Omega = \omega_0$, to

$$C(\omega_0^2 - \Omega^2) = 2\gamma\Omega B = 0 \Rightarrow B = 0.$$

a z równania

$$-\Omega^2 B + 2\gamma\Omega C + \omega_0^2 B = f_0 \Rightarrow 2\gamma\Omega C = f_0 \Rightarrow C = \frac{f_0}{2\gamma\Omega},$$

co jest szczególnym przypadkiem wzorów

$$B = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} f_0, \quad C = \frac{2\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} f_0.$$

Związki

$$B = A \cos \varphi = 0 \quad \text{ i } \quad C = A \sin \varphi = \frac{f_0}{2\gamma\Omega}$$

możemy spełnić wybierając

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad C = A = \frac{f_0}{2\gamma\Omega}$$

i nasze rozwiązanie ma taką samą postać jak dla $\Omega \neq \omega_0$:

$$x_1(t) = A \cos \frac{\pi}{2} \cos \Omega t + A \sin \frac{\pi}{2} \sin \Omega t = A \cos \left(\Omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Związki

$$B = A \cos \varphi = 0 \quad \text{i} \quad C = A \sin \varphi = \frac{f_0}{2\gamma\Omega}$$

możemy spełnić wybierając

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad C = A = \frac{f_0}{2\gamma\Omega}$$

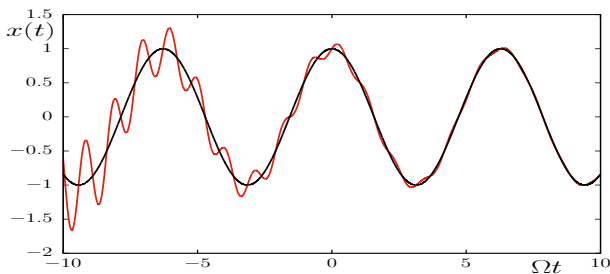
i nasze rozwiązanie ma taką samą postać jak dla $\Omega \neq \omega_0$:

$$x_1(t) = A \cos \frac{\pi}{2} \cos \Omega t + A \sin \frac{\pi}{2} \sin \Omega t = A \cos \left(\Omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

W przypadku słabego tłumienia ($\omega_0^2 > \gamma^2$) otrzymamy następujące rozwiązanie ogólne

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) = ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha) + A \cos(\Omega t - \varphi).$$

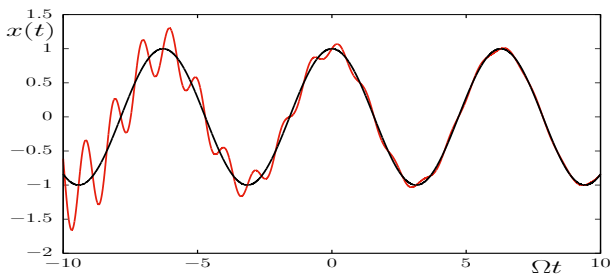


Oscylacje wokół wiodącego wyrazu $A \cos(\Omega t - \varphi)$ maleją przy tym eksponencjalnie.

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

W przypadku słabego tłumienia ($\omega_0^2 > \gamma^2$) otrzymamy następujące rozwiązanie ogólne

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) = ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha) + A \cos(\Omega t - \varphi).$$



Oscylacje wokół wiodącego wyrazu $A \cos(\Omega t - \varphi)$ maleją przy tym eksponencjalnie.

Po długim czasie pozostanie tylko tzw. **składowa stacjonarna drgania**

$$x(t) = A \cos(\Omega t - \varphi).$$

Znajdźmy częstość rezonansową, która odpowiada maksimum amplitudy

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}.$$

Po długim czasie pozostanie tylko tzw. **składowa stacjonarna drgania**

$$x(t) = A \cos(\Omega t - \varphi).$$

Znajdźmy częstość rezonansową, która odpowiada maksimum amplitudy

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}.$$

Oznaczmy wyrażenie podpierwiastkowe w mianowniku wzoru na A przez

$$f(\Omega^2) \equiv (\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2$$

i przyrównajmy jego pochodną do zera

$$\frac{df(\Omega^2)}{d\Omega^2} = 2(\Omega^2 - \omega_0^2) + 4\gamma^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2 = 0.$$

Oznaczmy wyrażenie podpierwiastkowe w mianowniku wzoru na A przez

$$f(\Omega^2) \equiv (\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2$$

i przyrównajmy jego pochodną do zera

$$\frac{df(\Omega^2)}{d\Omega^2} = 2(\Omega^2 - \omega_0^2) + 4\gamma^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2 = 0.$$

Otrzymujemy stąd częstość rezonansową

$$\Omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \quad \Rightarrow \quad \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2},$$

Oznaczmy wyrażenie podpierwiastkowe w mianowniku wzoru na A przez

$$f(\Omega^2) \equiv (\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2$$

i przyrównajmy jego pochodną do zera

$$\frac{df(\Omega^2)}{d\Omega^2} = 2(\Omega^2 - \omega_0^2) + 4\gamma^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2 = 0.$$

Otrzymujemy stąd częstość rezonansową

$$\Omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \quad \Rightarrow \quad \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2},$$

której odpowiada amplituda rezonansowa

$$\begin{aligned} A_{\max} &= A(\Omega_R) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2)^2 + 4\gamma^2(\omega_0^2 - 2\gamma^2)}} = \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{4\gamma^4 + 4\gamma^2\omega_0^2 - 8\gamma^4}} = \frac{f_0}{\sqrt{4\gamma^2\omega_0^2 - 4\gamma^4}} = \\ &= \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{f_0}{2\gamma\omega}, \end{aligned}$$

gdzie, tak jak poprzednio, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

której odpowiada amplituda rezonansowa

$$\begin{aligned} A_{\max} &= A(\Omega_R) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2)^2 + 4\gamma^2(\omega_0^2 - 2\gamma^2)}} = \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{4\gamma^4 + 4\gamma^2\omega_0^2 - 8\gamma^4}} = \frac{f_0}{\sqrt{4\gamma^2\omega_0^2 - 4\gamma^4}} = \\ &= \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{f_0}{2\gamma\omega}, \end{aligned}$$

gdzie, tak jak poprzednio, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Rezonans jest zjawiskiem występującym powszechnie w przyrodzie.

której odpowiada amplituda rezonansowa

$$\begin{aligned} A_{\max} &= A(\Omega_R) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2)^2 + 4\gamma^2(\omega_0^2 - 2\gamma^2)}} = \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{4\gamma^4 + 4\gamma^2\omega_0^2 - 8\gamma^4}} = \frac{f_0}{\sqrt{4\gamma^2\omega_0^2 - 4\gamma^4}} = \\ &= \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{f_0}{2\gamma\omega}, \end{aligned}$$

gdzie, tak jak poprzednio, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Rezonans jest zjawiskiem występującym powszechnie w przyrodzie.