

Wiadomości wstępne

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

Punkt materialny w przestrzeni

W fizyce często operujemy pojęciem *punktu materialnego*, który jest wyidealizowanym obiektem pozbawionym rozmiarów, ale obdarzonym masą.

Położenie punktu w trójwymiarowej przestrzeni opisujemy w wybranym układzie odniesienia.

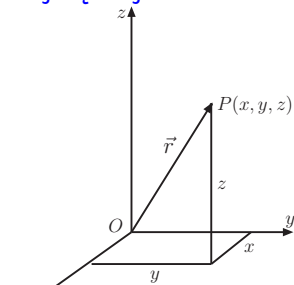
Najczęściej stosowane trójwymiarowe układy współrzędnych:

Punkt materialny w przestrzeni

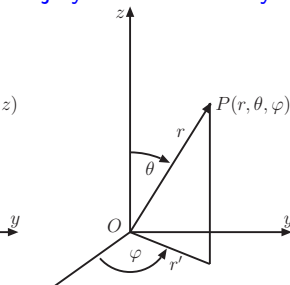
W fizyce często operujemy pojęciem *punktu materialnego*, który jest wyidealizowanym obiektem pozbawionym rozmiarów, ale obdarzonym masą.

Położenie punktu w trójwymiarowej przestrzeni opisujemy w wybranym układzie odniesienia.

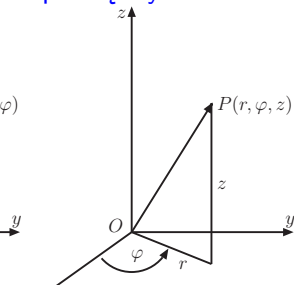
Najczęściej stosowane trójwymiarowe układy współrzędnych:



kartezjański



sferyczny



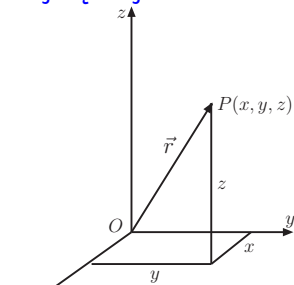
cylindryczny

Punkt materialny w przestrzeni

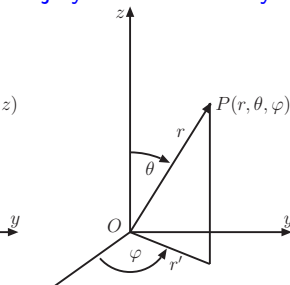
W fizyce często operujemy pojęciem *punktu materialnego*, który jest wyidealizowanym obiektem pozbawionym rozmiarów, ale obdarzonym masą.

Położenie punktu w trójwymiarowej przestrzeni opisujemy w wybranym układzie odniesienia.

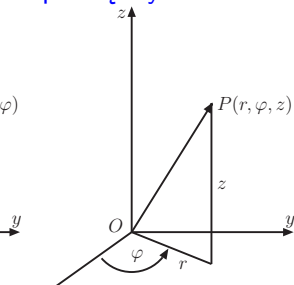
Najczęściej stosowane trójwymiarowe układy współrzędnych:



kartezjański



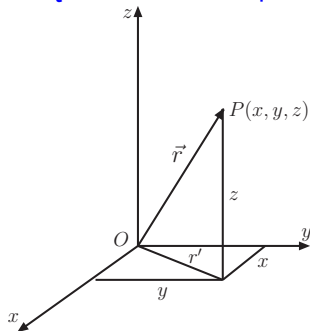
sferyczny



cylindryczny

Wektor położenia punktu

W układzie kartezjańskim wektor położenia (wodzący) $\vec{r}$ łączący początek układu O z punktem $P(x, y, z)$ ma współrzędne:

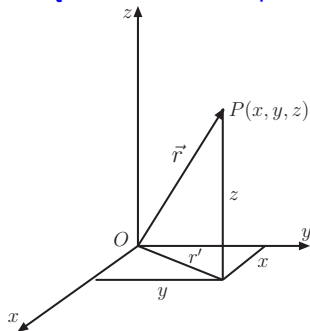


$$\vec{r} = [x - 0, y - 0, z - 0] = [x, y, z].$$



Wektor położenia punktu

W układzie kartezjańskim wektor położenia (wodzący) $\vec{r}$ łączący początek układu O z punktem $P(x, y, z)$ ma współrzędne:

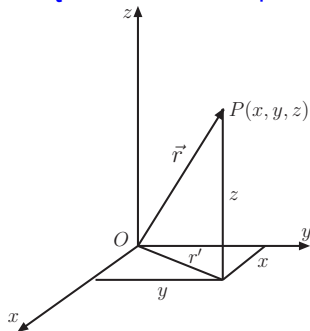


$$\vec{r} = [x - 0, y - 0, z - 0] = [x, y, z].$$

$$\Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{r'^2 + z^2}$$

Wektor położenia punktu

W układzie kartezjańskim wektor położenia (wodzący) $\vec{r}$ łączący początek układu O z punktem $P(x, y, z)$ ma współrzędne:

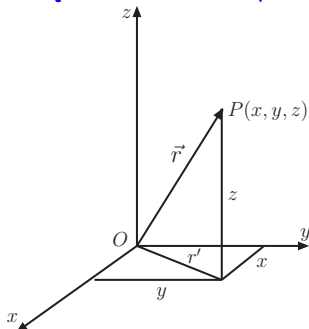


$$\vec{r} = [x - 0, y - 0, z - 0] = [x, y, z].$$

$$\Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{r'^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Wektor położenia punktu

W układzie kartezjańskim wektor położenia (wodzący) $\vec{r}$ łączący początek układu O z punktem $P(x, y, z)$ ma współrzędne:



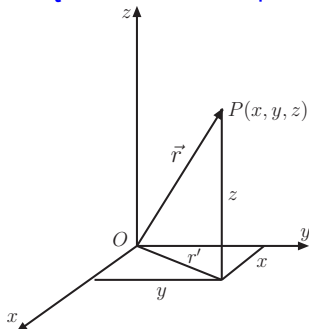
$$\vec{r} = [x - 0, y - 0, z - 0] = [x, y, z].$$

$$\Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{r'^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Zauważmy, że wektor ten ma dokładnie takie same współrzędne jak punkt P .

Wektor położenia punktu

W układzie kartezjańskim wektor położenia (wodzący) $\vec{r}$ łączący początek układu O z punktem $P(x, y, z)$ ma współrzędne:



$$\vec{r} = [x - 0, y - 0, z - 0] = [x, y, z].$$

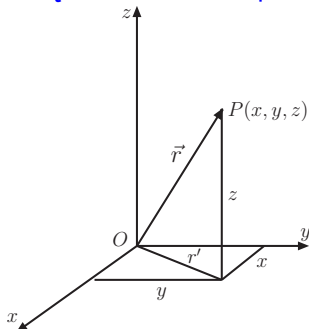
$$\Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{r'^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Zauważmy, że wektor ten ma dokładnie takie same współrzędne jak punkt P .

Dlatego możemy użyć go do opisu położenia punktu materialnego w trakcie ruchu.

Wektor położenia punktu

W układzie kartezjańskim wektor położenia (wodzący) $\vec{r}$ łączący początek układu O z punktem $P(x, y, z)$ ma współrzędne:



$$\vec{r} = [x - 0, y - 0, z - 0] = [x, y, z].$$

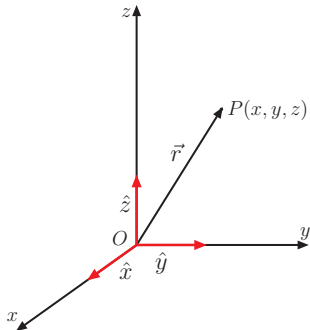
$$\Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{r'^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Zauważmy, że wektor ten ma dokładnie takie same współrzędne jak punkt P .

Dlatego możemy użyć go do opisu położenia punktu materialnego w trakcie ruchu.

Wersory

Zdefiniujmy wersory, czyli wektory jednostkowe wzdłuż osi układu kartezjańskiego.

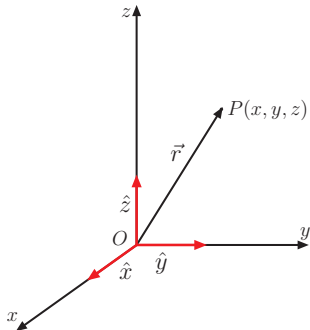


Wersory spełniają relacje:

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1,$$

Wersory

Zdefiniujmy wersory, czyli wektory jednostkowe wzdłuż osi układu kartezjańskiego.

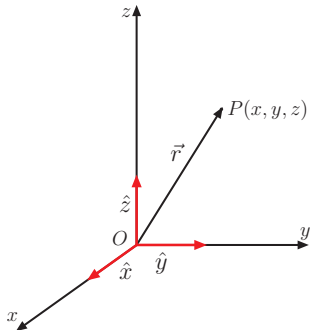


Wersory spełniają relacje:

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1, \quad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}.$$

Wersory

Zdefiniujmy wersory, czyli wektory jednostkowe wzdłuż osi układu kartezjańskiego.

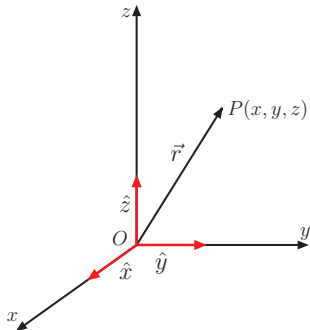


Wersory spełniają relacje:

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1, \quad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}.$$

Ostatnia równość oznacza, że układ kartezjański jest prawoskrętny.

Zdefiniujemy wersory, czyli wektory jednostkowe wzdłuż osi układu kartezjańskiego.



Wersory spełniają relacje:

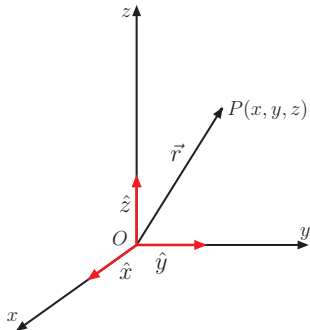
$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1, \quad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}.$$

Ostatnia równość oznacza, że układ kartezjański jest prawoskrętny.

Przy użyciu wersorów wektor ten możemy zapisać w formie:

$$\vec{r} = [x, y, z] = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

Zdefiniujemy wersory, czyli wektory jednostkowe wzdłuż osi układu kartezjańskiego.



Wersory spełniają relacje:

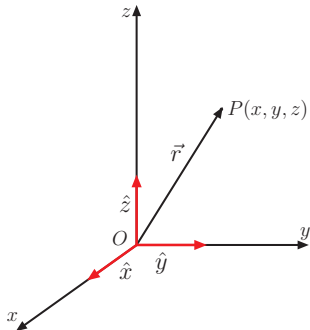
$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1, \quad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}.$$

Ostatnia równość oznacza, że układ kartezjański jest prawoskrętny.

Przy użyciu wersorów wektor ten możemy zapisać w formie:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= [x, y, z] = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} \\ &= [x_1, x_2, x_3] \end{aligned}$$

Zdefiniujemy wersory, czyli wektory jednostkowe wzdłuż osi układu kartezjańskiego.



Wersory spełniają relacje:

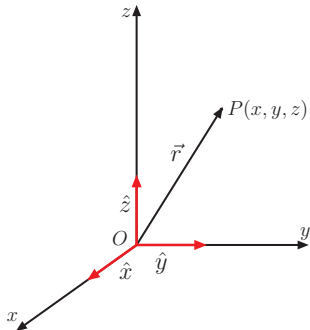
$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1, \quad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}.$$

Ostatnia równość oznacza, że układ kartezjański jest prawoskrętny.

Przy użyciu wersorów wektor ten możemy zapisać w formie:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= [x, y, z] = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} \\ &= [x_1, x_2, x_3] = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3. \end{aligned}$$

Zdefiniujemy wersory, czyli wektory jednostkowe wzdłuż osi układu kartezjańskiego.



Wersory spełniają relacje:

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1, \quad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}.$$

Ostatnia równość oznacza, że układ kartezjański jest prawoskrętny.

Przy użyciu wersorów wektor ten możemy zapisać w formie:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= [x, y, z] = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} \\ &= [x_1, x_2, x_3] = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3. \end{aligned}$$

Przyjęliśmy tutaj konwencję

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3,$$

$$\hat{x} = \hat{e}_1, \quad \hat{y} = \hat{e}_2, \quad \hat{z} = \hat{e}_3,$$

Przyjęliśmy tutaj konwencję

$$\begin{aligned}x &= x_1, & y &= x_2, & z &= x_3, \\ \hat{x} &= \hat{e}_1, & \hat{y} &= \hat{e}_2, & \hat{z} &= \hat{e}_3,\end{aligned}$$

która, jak się przekonamy dalej, jest bardzo wygodna.

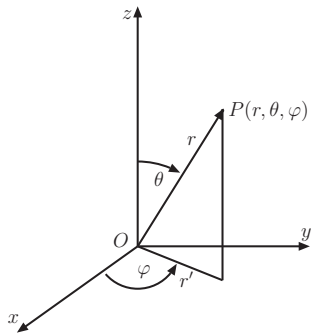
Przyjęliśmy tutaj konwencję

$$\begin{aligned}x &= x_1, & y &= x_2, & z &= x_3, \\ \hat{x} &= \hat{e}_1, & \hat{y} &= \hat{e}_2, & \hat{z} &= \hat{e}_3,\end{aligned}$$

która, jak się przekonamy dalej, jest bardzo wygodna.

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ .

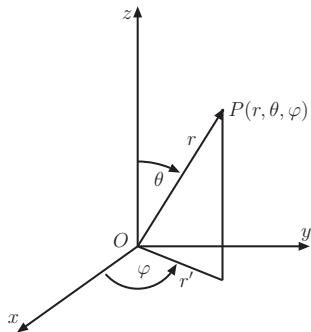


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:



Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ .

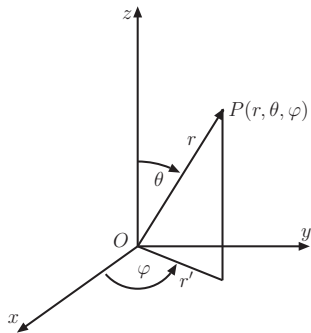


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$\left\{ \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right.$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ .

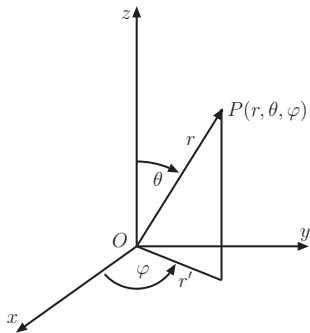


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right. =$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ .

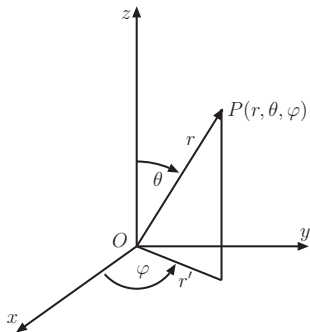


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r' \cos \varphi \end{array} \right.$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ .

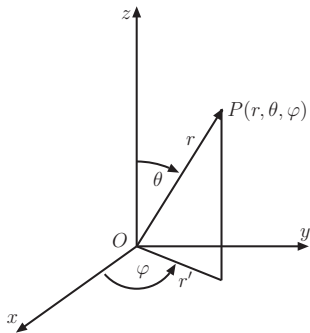


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r' \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi, \end{array} \right.$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ .

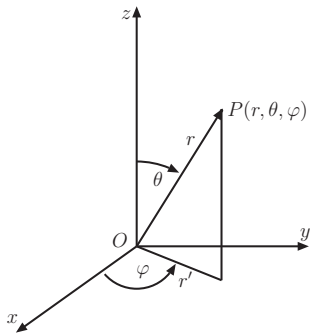


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x &= r' \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r' \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta \end{cases}$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ .

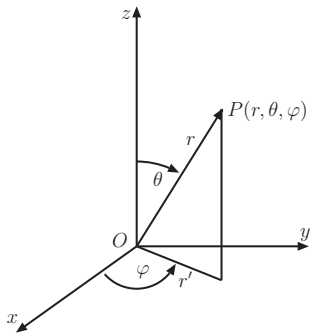


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x &= r' \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= \end{cases}$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ .

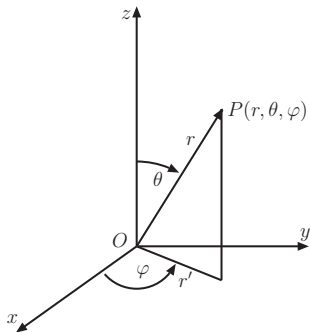


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x &= r' \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r' \sin \varphi \end{cases}$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ .

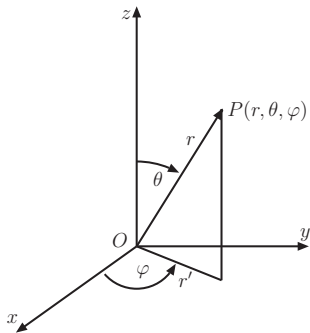


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x &= r' \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r' \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi, \end{cases}$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ .

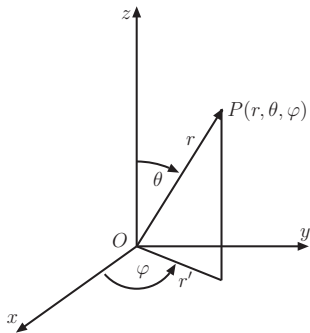


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x &= r' \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r' \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta \end{cases}$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ .

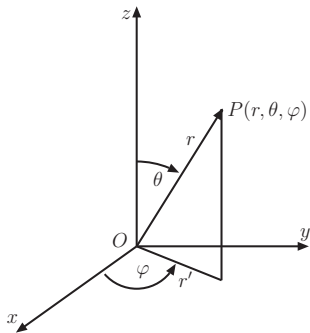


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x &= r' \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r' \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= \end{cases}$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ .

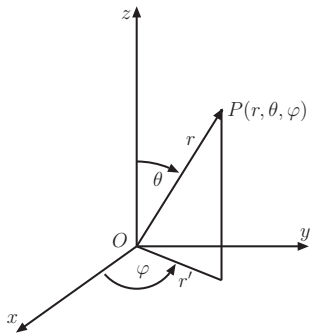


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x &= r' \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r' \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{cases}$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ .



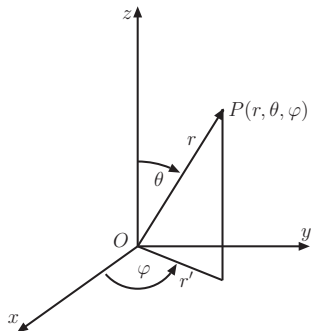
Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x &= r' \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r' \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{cases}$$

gdzie $r' = r \sin \theta$.

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ .



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

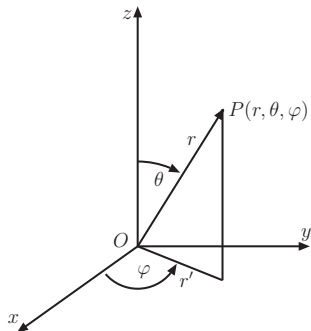
$$\begin{cases} x &= r' \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r' \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{cases}$$

gdzie $r' = r \sin \theta$.

Zakresy zmienności współrzędnych sferycznych:

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ .



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x &= r' \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r' \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{cases}$$

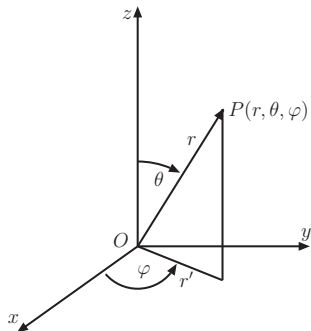
gdzie $r' = r \sin \theta$.

Zakresy zmienności współrzędnych sferycznych:

$$0 \leq r < \infty,$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ .



Związki ze współzrzednymi kartezyjskimi są następujące:

$$\begin{cases} x &= r' \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r' \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{cases}$$

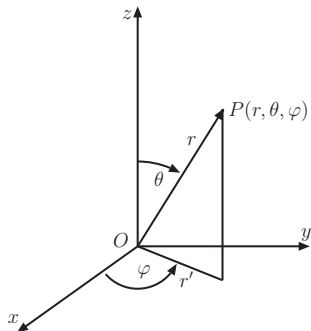
gdzie $r' = r \sin \theta$.

Zakresy zmienności współzrzednych sferycznych:

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ .



Związki ze współzrzednymi kartezyjskimi są następujące:

$$\begin{cases} x &= r' \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r' \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{cases}$$

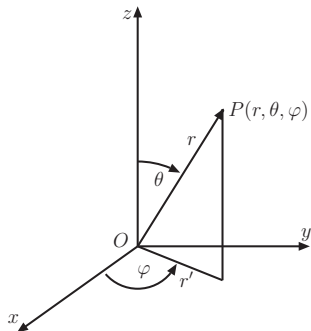
gdzie $r' = r \sin \theta$.

Zakresy zmienności współzrzednych sferycznych:

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ .



Związki ze współzrzednymi karte-
ziańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x &= r' \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r' \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{cases}$$

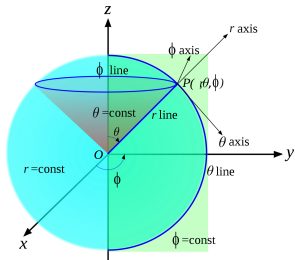
gdzie $r' = r \sin \theta$.

Zakresy zmienności współzrzednych sferycznych:

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Układ sferyczny - linie stałych współrzędnych

Ustalając jedną ze współrzędnych w układzie sferycznym otrzymamy powierzchnię.



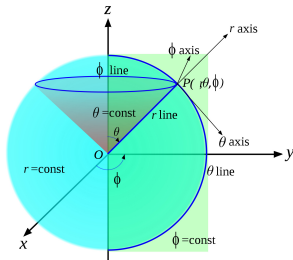
$r = r_0 \Rightarrow$ sfera o promieniu r_0

$\theta = \theta_0 \Rightarrow$ pobocznica stożka o kącie półrozwartości θ_0

$\varphi = \varphi_0 \Rightarrow$ półpłaszczyzna tworząca kąt φ_0 z płaszczyzną xOz .

Układ sferyczny - linie stałych współrzędnych

Ustalając jedną ze współrzędnych w układzie sferycznym otrzymamy powierzchnię.



- $r = r_0 \Rightarrow$ sfera o promieniu r_0
- $\theta = \theta_0 \Rightarrow$ pobocznicą stożka o kącie półrozwartości θ_0
- $\varphi = \varphi_0 \Rightarrow$ półpłaszczyzna tworząca kąt φ_0 z płaszczyzną xOz .

Ustalając jednocześnie dwie współrzędne otrzymamy linię. Np.

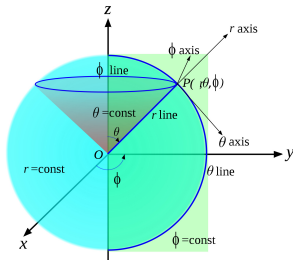
$r = r_0$ i $\theta = \theta_0 \Rightarrow$ okrąg (równoleżnik),

$r = r_0$ i $\varphi = \varphi_0 \Rightarrow$ półokrąg (południk),

$\theta = \theta_0$ i $\varphi = \varphi_0 \Rightarrow$ półprosta o początku w środku sfery, gdzie wykorzystaliśmy oczywistą analogię z globusem.

Układ sferyczny - linie stałych współrzędnych

Ustalając jedną ze współrzędnych w układzie sferycznym otrzymamy powierzchnię.



- $r = r_0 \Rightarrow$ sfera o promieniu r_0
- $\theta = \theta_0 \Rightarrow$ pobocznicą stożka o kącie półrozwartości θ_0
- $\varphi = \varphi_0 \Rightarrow$ półpłaszczyzna tworząca kąt φ_0 z płaszczyzną xOz .

Ustalając jednocześnie dwie współrzędne otrzymamy linię. Np.

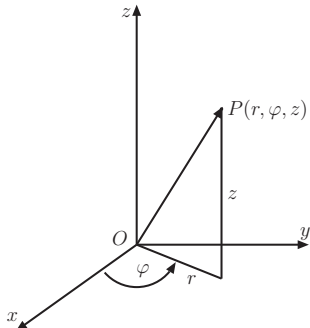
$r = r_0$ i $\theta = \theta_0 \Rightarrow$ okrąg (równoleżnik),

$r = r_0$ i $\varphi = \varphi_0 \Rightarrow$ półokrąg (południk),

$\theta = \theta_0$ i $\varphi = \varphi_0 \Rightarrow$ półprosta o początku w środku sfery, gdzie wykorzystaliśmy oczywistą analogię z globusem.

Układ cylindryczny

W układzie cylindrycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od wybranej osi r , kąt azymutalny φ oraz wysokość z nad płaszczyznę prostopadłą do wybranej osi, do której należy początek układu O .

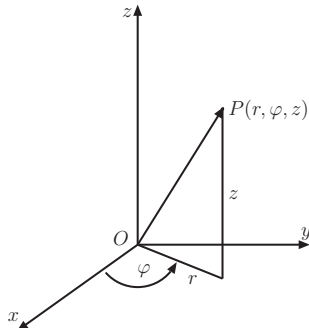


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Układ cylindryczny

W układzie cylindrycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od wybranej osi r , kąt azymutalny φ oraz wysokość z nad płaszczyznę prostopadłą do wybranej osi, do której należy początek układu O .



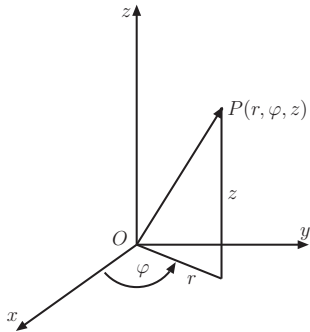
Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Zakresy zmienności współrzędnych cylindrycznych:

Układ cylindryczny

W układzie cylindrycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od wybranej osi r , kąt azymutalny φ oraz wysokość z nad płaszczyznę prostopadłą do wybranej osi, do której należy początek układu O .



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi:

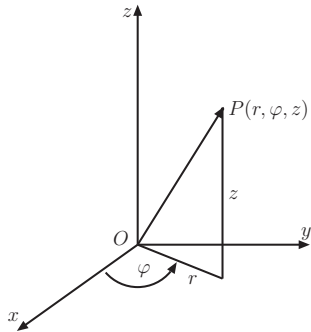
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Zakresy zmienności współrzędnych cylindrycznych:

$$0 \leq r < \infty,$$

Układ cylindryczny

W układzie cylindrycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od wybranej osi r , kąt azymutalny φ oraz wysokość z nad płaszczyznę prostopadłą do wybranej osi, do której należy początek układu O .



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi:

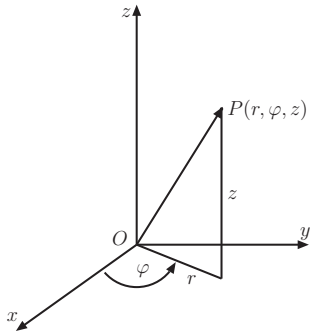
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Zakresy zmienności współrzędnych cylindrycznych:

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

Układ cylindryczny

W układzie cylindrycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od wybranej osi r , kąt azymutalny φ oraz wysokość z nad płaszczyznę prostopadłą do wybranej osi, do której należy początek układu O .



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi:

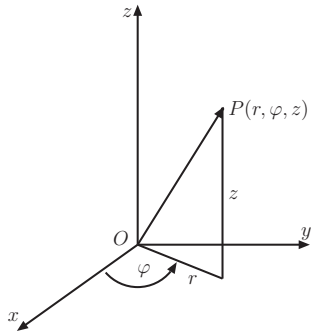
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Zakresy zmienności współrzędnych cylindrycznych:

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

Układ cylindryczny

W układzie cylindrycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od wybranej osi r , kąt azymutalny φ oraz wysokość z nad płaszczyznę prostopadłą do wybranej osi, do której należy początek układu O .



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Zakresy zmienności współrzędnych cylindrycznych:

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

Zadanie. Jak wyglądają linie stałych współrzędnych w układzie cylindrycznym?

Zauważmy, że linie stałych współrzędnych w układzie sferycznym i cylindrycznym, chociaż mogą być liniami krzywymi, to zawsze przecinają się pod kątami prostymi w każdym punkcie 3-wymiarowej przestrzeni, tzn.

- $P_0(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ w układzie sferycznym i
- $P_0(r_0, \varphi_0, z_0)$ w układzie cylindrycznym.

Dlatego układy sferyczny i cylindryczny, podobnie jak układ kartezjański, nazywamy ortogonalnymi układami współrzędnych.

Zadanie. Znaleźć element objętości, odpowiadający elementowi $dv = dx dy dz$ w układzie kartezjańskim, w układach sferycznym i cylindrycznym.

Zadanie. Jak wyglądają linie stałych współrzędnych w układzie cylindrycznym?

Zauważmy, że linie stałych współrzędnych w układzie sferycznym i cylindrycznym, chociaż mogą być liniami krzywymi, to zawsze przecinają się pod kątami prostymi w każdym punkcie 3-wymiarowej przestrzeni, tzn.

- $P_0(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ w układzie sferycznym i
- $P_0(r_0, \varphi_0, z_0)$ w układzie cylindrycznym.

Dlatego układy sferyczny i cylindryczny, podobnie jak układ kartezjański, nazywamy ortogonalnymi układami współrzędnych.

Zadanie. Znaleźć element objętości, odpowiadający elementowi $dv = dx dy dz$ w układzie kartezjańskim, w układach sferycznym i cylindrycznym.

Wektor w przestrzeni trójwymiarowej możemy zapisać

$$\vec{r} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i$$

Wektor w przestrzeni trójwymiarowej możemy zapisać

$$\vec{r} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i \equiv x_i \hat{e}_i,$$

Wektor w przestrzeni trójwymiarowej możemy zapisać

$$\vec{r} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i \equiv x_i \hat{e}_i,$$

gdzie w ostatniej równości pominęliśmy symbol sumy.

Wektor w przestrzeni trójwymiarowej możemy zapisać

$$\vec{r} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i \equiv x_i \hat{e}_i,$$

gdzie w ostatniej równości pominęliśmy symbol sumy.
Za Einsteinem przyjmujemy następującą konwencję.

Wektor w przestrzeni trójwymiarowej możemy zapisać

$$\vec{r} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i \equiv x_i \hat{e}_i,$$

gdzie w ostatniej równości pominęliśmy symbol sumy.

Za Einsteinem przyjmujemy następującą konwencję.

Wskaźnik sumacyjny w wyrażeniu iloczynowym zawsze się powtarza (występuje dwukrotnie) dlatego, jeśli tylko zakres sumowania jest oczywisty, możemy pominąć znak sumy.

Wektor w przestrzeni trójwymiarowej możemy zapisać

$$\vec{r} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i \equiv x_i \hat{e}_i,$$

gdzie w ostatniej równości pominęliśmy symbol sumy.

Za Einsteinem przyjmujemy następującą konwencję.

Wskaźnik sumacyjny w wyrażeniu iloczynowym zawsze się powtarza (występuje dwukrotnie) dlatego, jeśli tylko zakres sumowania jest oczywisty, możemy pominąć znak sumy.

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\vec{a} = [a_1, a_2, a_3] = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\vec{a} = [a_1, a_2, a_3] = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 \equiv a_i \hat{e}_i,$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\vec{a} = [a_1, a_2, a_3] = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 \equiv a_i \hat{e}_i,$$

$\vec{b}$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned}\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 \equiv a_i \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= \end{aligned}$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\vec{a} = [a_1, a_2, a_3] = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 \equiv a_i \hat{e}_i,$$

$$\vec{b} = [b_1, b_2, b_3] = b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 + b_3 \hat{e}_3$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned}\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 \equiv a_i \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 + b_3 \hat{e}_3 \equiv b_i \hat{e}_i.\end{aligned}$$

Działania na wektorach

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned}\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 \equiv a_i \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 + b_3 \hat{e}_3 \equiv b_i \hat{e}_i.\end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\vec{a} + \vec{b} =$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned}\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 \equiv a_i \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 + b_3 \hat{e}_3 \equiv b_i \hat{e}_i.\end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\vec{a} + \vec{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3]$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned}\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 \equiv a_i \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 + b_3 \hat{e}_3 \equiv b_i \hat{e}_i.\end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\vec{a} + \vec{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3]$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned}\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 \equiv a_i \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 + b_3 \hat{e}_3 \equiv b_i \hat{e}_i.\end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \\ &= \end{aligned}$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned}\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 \equiv a_i \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 + b_3 \hat{e}_3 \equiv b_i \hat{e}_i.\end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \\ &= (a_1 + b_1) \hat{e}_1 + (a_2 + b_2) \hat{e}_2 + (a_3 + b_3) \hat{e}_3\end{aligned}$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\vec{a} = [a_1, a_2, a_3] = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 \equiv a_i \hat{e}_i,$$

$$\vec{b} = [b_1, b_2, b_3] = b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 + b_3 \hat{e}_3 \equiv b_i \hat{e}_i.$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \\ &= (a_1 + b_1) \hat{e}_1 + (a_2 + b_2) \hat{e}_2 + (a_3 + b_3) \hat{e}_3 \equiv (a_i + b_i) \hat{e}_i.\end{aligned}$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned}\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 \equiv a_i \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 + b_3 \hat{e}_3 \equiv b_i \hat{e}_i.\end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \\ &= (a_1 + b_1) \hat{e}_1 + (a_2 + b_2) \hat{e}_2 + (a_3 + b_3) \hat{e}_3 \equiv (a_i + b_i) \hat{e}_i.\end{aligned}$$

Iloczyn wektora $\vec{a}$ przez liczbę c wyraża się wzorem

$$c \vec{a} = [ca_1, ca_2, ca_3]$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned}\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 \equiv a_i \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 + b_3 \hat{e}_3 \equiv b_i \hat{e}_i.\end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \\ &= (a_1 + b_1) \hat{e}_1 + (a_2 + b_2) \hat{e}_2 + (a_3 + b_3) \hat{e}_3 \equiv (a_i + b_i) \hat{e}_i.\end{aligned}$$

Iloczyn wektora $\vec{a}$ przez liczbę c wyraża się wzorem

$$c \vec{a} = [ca_1, ca_2, ca_3] = ca_1 \hat{e}_1 + ca_2 \hat{e}_2 + ca_3 \hat{e}_3$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned}\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 \equiv a_i \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 + b_3 \hat{e}_3 \equiv b_i \hat{e}_i.\end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \\ &= (a_1 + b_1) \hat{e}_1 + (a_2 + b_2) \hat{e}_2 + (a_3 + b_3) \hat{e}_3 \equiv (a_i + b_i) \hat{e}_i.\end{aligned}$$

Iloczyn wektora $\vec{a}$ przez liczbę c wyraża się wzorem

$$c \vec{a} = [ca_1, ca_2, ca_3] = ca_1 \hat{e}_1 + ca_2 \hat{e}_2 + ca_3 \hat{e}_3 \equiv ca_i \hat{e}_i.$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\vec{a} = [a_1, a_2, a_3] = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 \equiv a_i \hat{e}_i,$$

$$\vec{b} = [b_1, b_2, b_3] = b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 + b_3 \hat{e}_3 \equiv b_i \hat{e}_i.$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \\ &= (a_1 + b_1) \hat{e}_1 + (a_2 + b_2) \hat{e}_2 + (a_3 + b_3) \hat{e}_3 \equiv (a_i + b_i) \hat{e}_i.\end{aligned}$$

Iloczyn wektora $\vec{a}$ przez liczbę c wyraża się wzorem

$$c \vec{a} = [ca_1, ca_2, ca_3] = ca_1 \hat{e}_1 + ca_2 \hat{e}_2 + ca_3 \hat{e}_3 \equiv ca_i \hat{e}_i.$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta,$$

gdzie θ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

W układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_j b_j.$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta,$$

gdzie θ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

W układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i.$$

Rzeczywiście, zapiszmy $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$, $\vec{b} = b_j \hat{e}_j$ i obliczmy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta,$$

gdzie θ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

W układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i.$$

Rzeczywiście, zapiszmy $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$, $\vec{b} = b_j \hat{e}_j$ i obliczmy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \hat{e}_i \cdot b_j \hat{e}_j =$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta,$$

gdzie θ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

W układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i.$$

Rzeczywiście, zapiszmy $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$, $\vec{b} = b_j \hat{e}_j$ i obliczmy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \hat{e}_i \cdot b_j \hat{e}_j = a_i b_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j =$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta,$$

gdzie θ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

W układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i.$$

Rzeczywiście, zapiszmy $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$, $\vec{b} = b_j \hat{e}_j$ i obliczmy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \hat{e}_i \cdot b_j \hat{e}_j = a_i b_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} =$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta,$$

gdzie θ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

W układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i.$$

Rzeczywiście, zapiszmy $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$, $\vec{b} = b_j \hat{e}_j$ i obliczmy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \hat{e}_i \cdot b_j \hat{e}_j = a_i b_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i,$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta,$$

gdzie θ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

W układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i.$$

Rzeczywiście, zapiszmy $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$, $\vec{b} = b_j \hat{e}_j$ i obliczmy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \hat{e}_i \cdot b_j \hat{e}_j = a_i b_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i,$$

gdzie wprowadziliśmy **tensor symetryczny δ_{ij}** , zwany **delta Kroneckera**

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j, \\ 0, & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij} , zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j, \\ 0, & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

$\Rightarrow$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij} , zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j, \\ 0, & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1,$$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij} , zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j, \\ 0, & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = \dots = 0.$$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij} , zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j, \\ 0, & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = \dots = 0.$$

i wykorzystaliśmy relację ortogonalności wektorów kartezjańskiego układu współrzędnych

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij} , zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j, \\ 0, & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = \dots = 0.$$

i wykorzystaliśmy relację ortogonalności wektorów kartezjańskiego układu współrzędnych

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij},$$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij} , zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j, \\ 0, & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

$\Rightarrow \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = \dots = 0.$

i wykorzystaliśmy relację ortogonalności wektorów kartezjańskiego układu współrzędnych

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij},$$

która łączy w sobie własności ich unormowania, $|\hat{e}_i| = 1$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij} , zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j, \\ 0, & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

$\Rightarrow \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = \dots = 0.$

i wykorzystaliśmy relację ortogonalności wektorów kartezjańskiego układu współrzędnych

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij},$$

która łączy w sobie własności ich unormowania, $|\hat{e}_i| = 1$ i wzajemnej ortogonalności $\hat{e}_i \perp \hat{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3.$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij} , zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j, \\ 0, & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

$\Rightarrow \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = \dots = 0.$

i wykorzystaliśmy relację ortogonalności wektorów kartezjańskiego układu współrzędnych

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij},$$

która łączy w sobie własności ich unormowania, $|\hat{e}_i| = 1$ i wzajemnej ortogonalności $\hat{e}_i \perp \hat{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3.$

Działania na wektorach

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j \delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ (*podobnie dla $i = 2, 3$*) mamy

$$a_j \delta_{1j} =$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j \delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ (*podobnie dla $i = 2, 3$*) mamy

$$a_j \delta_{1j} = \sum_{j=1}^3 a_j \delta_{1j}$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j \delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ (*podobnie dla $i = 2, 3$*) mamy

$$a_j \delta_{1j} = \sum_{j=1}^3 a_j \delta_{1j} =$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j \delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ (*podobnie dla $i = 2, 3$*) mamy

$$a_j \delta_{1j} = \sum_{j=1}^3 a_j \delta_{1j} = a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{12} + a_3 \delta_{13}$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j \delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ (*podobnie dla $i = 2, 3$*) mamy

$$a_j \delta_{1j} = \sum_{j=1}^3 a_j \delta_{1j} = a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{12} + a_3 \delta_{13}$$

=

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j \delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ (*podobnie dla $i = 2, 3$*) mamy

$$\begin{aligned} a_j \delta_{1j} &= \sum_{j=1}^3 a_j \delta_{1j} = a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{12} + a_3 \delta_{13} \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1. \end{aligned}$$

Działania na wektorach

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j \delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ (*podobnie dla $i = 2, 3$*) mamy

$$\begin{aligned} a_j \delta_{1j} &= \sum_{j=1}^3 a_j \delta_{1j} = a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{12} + a_3 \delta_{13} \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1. \end{aligned}$$

Długość wektora $\vec{a}$ obliczamy następująco

$$a = |\vec{a}|$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j \delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ (*podobnie dla $i = 2, 3$*) mamy

$$\begin{aligned} a_j \delta_{1j} &= \sum_{j=1}^3 a_j \delta_{1j} = a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{12} + a_3 \delta_{13} \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1. \end{aligned}$$

Długość wektora $\vec{a}$ obliczamy następująco

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j \delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ (*podobnie dla $i = 2, 3$*) mamy

$$\begin{aligned} a_j \delta_{1j} &= \sum_{j=1}^3 a_j \delta_{1j} = a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{12} + a_3 \delta_{13} \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1. \end{aligned}$$

Długość wektora $\vec{a}$ obliczamy następująco

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{a_i a_i}$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j \delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ (*podobnie dla $i = 2, 3$*) mamy

$$\begin{aligned} a_j \delta_{1j} &= \sum_{j=1}^3 a_j \delta_{1j} = a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{12} + a_3 \delta_{13} \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1. \end{aligned}$$

Długość wektora $\vec{a}$ obliczamy następująco

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{a_i a_i} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j \delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ (*podobnie dla $i = 2, 3$*) mamy

$$\begin{aligned} a_j \delta_{1j} &= \sum_{j=1}^3 a_j \delta_{1j} = a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{12} + a_3 \delta_{13} \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1. \end{aligned}$$

Długość wektora $\vec{a}$ obliczamy następująco

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{a_i a_i} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a^2}.$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j \delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ (*podobnie dla $i = 2, 3$*) mamy

$$\begin{aligned} a_j \delta_{1j} &= \sum_{j=1}^3 a_j \delta_{1j} = a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{12} + a_3 \delta_{13} \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1. \end{aligned}$$

Długość wektora $\vec{a}$ obliczamy następująco

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{a_i a_i} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a^2}.$$

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \hat{e},$$

gdzie $\hat{e}$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, którego zwrot wyznaczamy zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \hat{e},$$

gdzie $\hat{e}$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, którego **zwrot wyznaczamy zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej**.

W układzie kartezjańskim zachodzi wzór:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \hat{e},$$

gdzie $\hat{e}$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, którego **zwrot wyznaczamy zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej**.

W układzie kartezjańskim zachodzi wzór:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_3.$$

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \hat{e},$$

gdzie $\hat{e}$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, którego **zwrot wyznaczamy zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej**.

W układzie kartezjańskim zachodzi wzór:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_3.$$

Zdefiniujmy **pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civita**

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Zdefiniujemy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$



Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \varepsilon_{123} = 1,$$

Zdefiniujemy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} =$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1,$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1, \quad \varepsilon_{213} =$$

Zdefiniujemy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1, \quad \varepsilon_{213} = -1,$$

Zdefiniujemy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1, \quad \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} =$$

Zdefiniujemy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1, \quad \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1,$$

Zdefiniujemy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_{123} &= 1, & \varepsilon_{132} &= -1, & \varepsilon_{213} &= -1, \\ \varepsilon_{231} &= 1, & \varepsilon_{312} &= \end{aligned}$$

Zdefiniujemy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_{123} &= 1, & \varepsilon_{132} &= -1, & \varepsilon_{213} &= -1, \\ \varepsilon_{231} &= 1, & \varepsilon_{312} &= 1, \end{aligned}$$

Zdefiniujemy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_{123} &= 1, & \varepsilon_{132} &= -1, & \varepsilon_{213} &= -1, \\ \varepsilon_{231} &= 1, & \varepsilon_{312} &= 1, & \varepsilon_{321} &= \end{aligned}$$

Zdefiniujemy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_{123} &= 1, & \varepsilon_{132} &= -1, & \varepsilon_{213} &= -1, \\ \varepsilon_{231} &= 1, & \varepsilon_{312} &= 1, & \varepsilon_{321} &= -1, \end{aligned}$$

Zdefiniujemy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_{123} &= 1, & \varepsilon_{132} &= -1, & \varepsilon_{213} &= -1, \\ \varepsilon_{231} &= 1, & \varepsilon_{312} &= 1, & \varepsilon_{321} &= -1, \\ \varepsilon_{121} &= \end{aligned}$$

Zdefiniujemy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_{123} &= 1, & \varepsilon_{132} &= -1, & \varepsilon_{213} &= -1, \\ \varepsilon_{231} &= 1, & \varepsilon_{312} &= 1, & \varepsilon_{321} &= -1, \\ \varepsilon_{121} &= 0, \end{aligned}$$

Zdefiniujemy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_{123} &= 1, & \varepsilon_{132} &= -1, & \varepsilon_{213} &= -1, \\ \varepsilon_{231} &= 1, & \varepsilon_{312} &= 1, & \varepsilon_{321} &= -1, \\ \varepsilon_{121} &= 0, & \varepsilon_{223} &= \end{aligned}$$

Zdefiniujemy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_{123} &= 1, & \varepsilon_{132} &= -1, & \varepsilon_{213} &= -1, \\ \varepsilon_{231} &= 1, & \varepsilon_{312} &= 1, & \varepsilon_{321} &= -1, \\ \varepsilon_{121} &= 0, & \varepsilon_{223} &= 0, \end{aligned}$$

Zdefiniujemy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1, \quad \varepsilon_{213} = -1, \\ & \varepsilon_{231} = 1, \quad \varepsilon_{312} = 1, \quad \varepsilon_{321} = -1, \\ & \varepsilon_{121} = 0, \quad \varepsilon_{223} = 0, \quad \varepsilon_{333} = 0 \end{aligned}$$

Zdefiniujemy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{lll} \varepsilon_{123} = 1, & \varepsilon_{132} = -1, & \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{312} = 1, & \varepsilon_{321} = -1, \\ \varepsilon_{121} = 0, & \varepsilon_{223} = 0, & \varepsilon_{333} = 0, \dots \end{array}$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_{123} &= 1, & \varepsilon_{132} &= -1, & \varepsilon_{213} &= -1, \\ \varepsilon_{231} &= 1, & \varepsilon_{312} &= 1, & \varepsilon_{321} &= -1, \\ \varepsilon_{121} &= 0, & \varepsilon_{223} &= 0, & \varepsilon_{333} &= 0, \dots \end{aligned}$$

Uwaga. Pseudotensor różni się od tensora jedynie sposobem transformacji przy odbiciach przestrzennych, $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$.

Zdefiniujmy **pseudotensor antysymetryczny** ε_{ijk} Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1, \quad \varepsilon_{213} = -1, \\ & \varepsilon_{231} = 1, \quad \varepsilon_{312} = 1, \quad \varepsilon_{321} = -1, \\ & \varepsilon_{121} = 0, \quad \varepsilon_{223} = 0, \quad \varepsilon_{333} = 0, \dots \end{aligned}$$

Uwaga. Pseudotensor różni się od tensora jedynie sposobem transformacji przy odbiciach przestrzennych, $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$.

Dlatego często pomija się przedrostek *pseudo* i używa nazwy *tensor*.

Zdefiniujmy **pseudotensor antysymetryczny** ε_{ijk} Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i, j, k), & (i, j, k) \text{ permutacja liczb } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1, \quad \varepsilon_{213} = -1, \\ & \varepsilon_{231} = 1, \quad \varepsilon_{312} = 1, \quad \varepsilon_{321} = -1, \\ & \varepsilon_{121} = 0, \quad \varepsilon_{223} = 0, \quad \varepsilon_{333} = 0, \dots \end{aligned}$$

Uwaga. Pseudotensor różni się od tensora jedynie sposobem transformacji przy odbiciach przestrzennych, $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$.

Dlatego często pomija się przedrostek *pseudo* i używa nazwy *tensor*.

Przydatne tożsamości tensorowe

Pokażemy, że i -tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

Przydatne tożsamości tensorowe

Pokażemy, że i -tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_3.$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Pokażemy, że i -tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_3.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_1$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Pokażemy, że i -tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_3.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_1 =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Pokażemy, że i -tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_3.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_1 = \varepsilon_{1jk} a_j b_k =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Pokażemy, że i -tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_3.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_1 = \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \underbrace{\varepsilon_{11k}}_0 a_1 b_k + \varepsilon_{12k} a_2 b_k + \varepsilon_{13k} a_3 b_k$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Pokażemy, że i -tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_3.$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})_1 &= \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \underbrace{\varepsilon_{11k}}_0 a_1 b_k + \varepsilon_{12k} a_2 b_k + \varepsilon_{13k} a_3 b_k \\ &= \end{aligned}$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Pokażemy, że i -tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_3.$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})_1 &= \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \underbrace{\varepsilon_{11k}}_0 a_1 b_k + \varepsilon_{12k} a_2 b_k + \varepsilon_{13k} a_3 b_k \\ &= \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 = \end{aligned}$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Pokażemy, że i -tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_3.$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})_1 &= \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \underbrace{\varepsilon_{11k}}_0 a_1 b_k + \varepsilon_{12k} a_2 b_k + \varepsilon_{13k} a_3 b_k \\ &= \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \end{aligned}$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Pokażemy, że i -tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_3.$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})_1 &= \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \underbrace{\varepsilon_{11k}}_0 a_1 b_k + \varepsilon_{12k} a_2 b_k + \varepsilon_{13k} a_3 b_k \\ &= \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \end{aligned}$$

Przydatne tożsamości tensorowe

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j , a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.

Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$(\vec{a} \times \vec{b})_2 =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j , a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.

Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$(\vec{a} \times \vec{b})_2 = \varepsilon_{2jk} a_j b_k =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j , a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.

Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$(\vec{a} \times \vec{b})_2 = \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_0 a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k$$

Przydatne tożsamości tensorowe

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j , a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.

Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_0 a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\ &= \end{aligned}$$

Przydatne tożsamości tensorowe

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j , a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.

Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b})_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_0 a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\ &= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 =\end{aligned}$$

Przydatne tożsamości tensorowe

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j , a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.

Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b})_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_0 a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\ &= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1,\end{aligned}$$

Przydatne tożsamości tensorowe

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j , a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.

Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b})_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_0 a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\ &= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\ (\vec{a} \times \vec{b})_3\end{aligned}$$

Przydatne tożsamości tensorowe

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j , a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.

Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b})_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_0 a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\&= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\(\vec{a} \times \vec{b})_3 &= \end{aligned}$$

Przydatne tożsamości tensorowe

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j , a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.

Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b})_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_0 a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\&= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\(\vec{a} \times \vec{b})_3 &= \varepsilon_{3jk} a_j b_k =\end{aligned}$$

Przydatne tożsamości tensorowe

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j , a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.

Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b})_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_0 a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\&= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\(\vec{a} \times \vec{b})_3 &= \varepsilon_{3jk} a_j b_k = \varepsilon_{31k} a_1 b_k + \varepsilon_{32k} a_2 b_k + \underbrace{\varepsilon_{33k}}_0 a_3 b_k\end{aligned}$$

Przydatne tożsamości tensorowe

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j , a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.

Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b})_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_0 a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\&= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\(\vec{a} \times \vec{b})_3 &= \varepsilon_{3jk} a_j b_k = \varepsilon_{31k} a_1 b_k + \varepsilon_{32k} a_2 b_k + \underbrace{\varepsilon_{33k}}_0 a_3 b_k \\&= \end{aligned}$$

Przydatne tożsamości tensorowe

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j , a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.

Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b})_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_0 a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\&= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\(\vec{a} \times \vec{b})_3 &= \varepsilon_{3jk} a_j b_k = \varepsilon_{31k} a_1 b_k + \varepsilon_{32k} a_2 b_k + \underbrace{\varepsilon_{33k}}_0 a_3 b_k \\&= \varepsilon_{312} a_1 b_2 + \varepsilon_{321} a_2 b_1\end{aligned}$$

Przydatne tożsamości tensorowe

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j , a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.

Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b})_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_0 a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\&= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\(\vec{a} \times \vec{b})_3 &= \varepsilon_{3jk} a_j b_k = \varepsilon_{31k} a_1 b_k + \varepsilon_{32k} a_2 b_k + \underbrace{\varepsilon_{33k}}_0 a_3 b_k \\&= \varepsilon_{312} a_1 b_2 + \varepsilon_{321} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1,\end{aligned}$$

Przydatne tożsamości tensorowe

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j , a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.

Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b})_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_0 a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\&= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\(\vec{a} \times \vec{b})_3 &= \varepsilon_{3jk} a_j b_k = \varepsilon_{31k} a_1 b_k + \varepsilon_{32k} a_2 b_k + \underbrace{\varepsilon_{33k}}_0 a_3 b_k \\&= \varepsilon_{312} a_1 b_2 + \varepsilon_{321} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1,\end{aligned}$$

podczas gdy wzór wyznacznikowy daje

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_3.$$

Przydatne tożsamości tensorowe

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j , a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.

Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b})_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_0 a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\&= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\(\vec{a} \times \vec{b})_3 &= \varepsilon_{3jk} a_j b_k = \varepsilon_{31k} a_1 b_k + \varepsilon_{32k} a_2 b_k + \underbrace{\varepsilon_{33k}}_0 a_3 b_k \\&= \varepsilon_{312} a_1 b_2 + \varepsilon_{321} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1,\end{aligned}$$

podczas gdy wzór wyznacznikowy daje

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_3.$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Korzystając z własności pseudotensora antysymetrycznego i wyznacznika można udowodnić tożsamość:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

Dla dowodu sprawdźmy najpierw czy zachodzi równość dla $i = l = 1, j = m = 2, k = n = 3$.

Przydatne tożsamości tensorowe

Korzystając z własności pseudotensora antysymetrycznego i wyznacznika można udowodnić tożsamość:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

Dla dowodu sprawdzimy najpierw czy zachodzi równość dla $i = l = 1, j = m = 2, k = n = 3$.

$$\varepsilon_{123} \varepsilon_{123} = 1 \cdot 1 = 1 =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Korzystając z własności pseudotensora antysymetrycznego i wyznacznika można udowodnić tożsamość:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

Dla dowodu sprawdzimy najpierw czy zachodzi równość dla $i = l = 1, j = m = 2, k = n = 3$.

$$\varepsilon_{123} \varepsilon_{123} = 1 \cdot 1 = 1 = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Korzystając z własności pseudotensora antysymetrycznego i wyznacznika można udowodnić tożsamość:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

Dla dowodu sprawdzimy najpierw czy zachodzi równość dla $i = l = 1, j = m = 2, k = n = 3$.

$$\varepsilon_{123} \varepsilon_{123} = 1 \cdot 1 = 1 = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

Korzystając z własności pseudotensora antysymetrycznego i wyznacznika można udowodnić tożsamość:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

Dla dowodu sprawdzimy najpierw czy zachodzi równość dla $i = l = 1, j = m = 2, k = n = 3$.

$$\varepsilon_{123} \varepsilon_{123} = 1 \cdot 1 = 1 = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Korzystając z własności pseudotensora antysymetrycznego i wyznacznika można udowodnić tożsamość:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

Dla dowodu sprawdzimy najpierw czy zachodzi równość dla $i = l = 1, j = m = 2, k = n = 3$.

$$\varepsilon_{123} \varepsilon_{123} = 1 \cdot 1 = 1 = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik} \varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik} \varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik} \varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0,$$

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik} \varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0,$$

a dwa jednakowe indeksy w drugim tensorze odpowiadają dwóm jednakowym kolumnom w wyznaczniku,

Przydatne tożsamości tensorowe

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik}\varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0,$$

a dwa jednakowe indeksy w drugim tensorze odpowiadają dwóm jednakowym kolumnom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{nmn} = \varepsilon_{ijk} \cdot 0 = 0 =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, **np.**

$$\varepsilon_{iik}\varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0,$$

a dwa jednakowe indeksy w drugim tensorze odpowiadają dwóm jednakowym kolumnom w wyznaczniku, **np.**

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{nmn} = \varepsilon_{ijk} \cdot 0 = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{in} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jn} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kn} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik} \varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0,$$

a dwa jednakowe indeksy w drugim tensorze odpowiadają dwóm jednakowym kolumnom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{nmn} = \varepsilon_{ijk} \cdot 0 = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{in} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jn} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kn} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0.$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, **np.**

$$\varepsilon_{iik}\varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0,$$

a dwa jednakowe indeksy w drugim tensorze odpowiadają dwóm jednakowym kolumnom w wyznaczniku, **np.**

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{nmn} = \varepsilon_{ijk} \cdot 0 = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{in} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jn} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kn} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0.$$

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk} , które zmienia jego znak,

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk} , które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku,

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk} , które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk} , które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn} ,

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk} , które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn} , które zmienia jego znak,

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk} , które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn} , które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch kolumn w wyznaczniku,

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk} , które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn} , które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch kolumn w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk} , które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn} , które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch kolumn w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

A zatem, jeśli wystartujemy z równości wykazanej na początku dowodu i dokonamy dowolnej permutacji indeksów w jednym i/lub drugim tensorze,

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk} , które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn} , które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch kolumn w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

A zatem, jeśli wystartujemy z równości wykazanej na początku dowodu i dokonamy dowolnej permutacji indeksów w jednym i/lub drugim tensorze, to otrzymamy równość prawdziwą.

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk} , które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn} , które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch kolumn w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

A zatem, jeśli wystartujemy z równości wykazanej na początku dowodu i dokonamy dowolnej permutacji indeksów w jednym i/lub drugim tensorze, to otrzymamy równość prawdziwą.

To kończy dowód tożsamości.

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk} , które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn} , które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch kolumn w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

A zatem, jeśli wystartujemy z równości wykazanej na początku dowodu i dokonamy dowolnej permutacji indeksów w jednym i/lub drugim tensorze, to otrzymamy równość prawdziwą.

To kończy dowód tożsamości.

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} =$$

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \begin{vmatrix} \delta_{ij} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} =$$

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \begin{vmatrix} \delta_{ij} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \delta_{ij} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{ki} + \delta_{in} \delta_{ji} \delta_{km} \\ - \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{ki} - \delta_{ij} \delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{ji} \delta_{kn}$$

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} &= \begin{vmatrix} \delta_{ij} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \delta_{ij} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{ki} + \delta_{in} \delta_{ji} \delta_{km} \\ &\quad - \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{ki} - \delta_{ij} \delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{ji} \delta_{kn} \\ &= \end{aligned}$$

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} &= \begin{vmatrix} \delta_{ij} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \delta_{ij} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{ki} + \delta_{in} \delta_{ji} \delta_{km} \\ &\quad - \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{ki} - \delta_{ij} \delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{ji} \delta_{kn} \\ &= 3\delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{jn} \delta_{km} + \delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kn} - 3\delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kn} \end{aligned}$$

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} &= \begin{vmatrix} \delta_{ij} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \delta_{ij} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{ki} + \delta_{in} \delta_{ji} \delta_{km} \\ &\quad - \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{ki} - \delta_{ij} \delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{ji} \delta_{kn} \\ &= 3\delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{jn} \delta_{km} + \delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kn} - 3\delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kn} \\ &= \end{aligned}$$

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} &= \begin{vmatrix} \delta_{ij} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \delta_{ij} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{ki} + \delta_{in} \delta_{ji} \delta_{km} \\ &\quad - \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{ki} - \delta_{ij} \delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{ji} \delta_{kn} \\ &= 3\delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{jn} \delta_{km} + \delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kn} - 3\delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kn} \\ &= \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}, \end{aligned}$$

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} &= \begin{vmatrix} \delta_{ij} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \delta_{ij} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{ki} + \delta_{in} \delta_{ji} \delta_{km} \\ &\quad - \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{ki} - \delta_{ij} \delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{ji} \delta_{kn} \\ &= 3\delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{jn} \delta_{km} + \delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kn} - 3\delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kn} \\ &= \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} =$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 =$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3,$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3,$$
$$\delta_{ki}\delta_{im}$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned}\delta_{ii} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3, \\ \delta_{ki}\delta_{im} &= \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned}\delta_{ii} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3, \\ \delta_{ki}\delta_{im} &= \delta_{k1}\delta_{1m} + \delta_{k2}\delta_{2m} + \delta_{k3}\delta_{3m} =\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned}\delta_{ii} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3, \\ \delta_{ki}\delta_{im} &= \delta_{k1}\delta_{1m} + \delta_{k2}\delta_{2m} + \delta_{k3}\delta_{3m} = \delta_{km},\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned}\delta_{ii} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3, \\ \delta_{ki}\delta_{im} &= \delta_{k1}\delta_{1m} + \delta_{k2}\delta_{2m} + \delta_{k3}\delta_{3m} = \delta_{km},\end{aligned}$$

gdzież obie delty Kroneckera w iloczynie są niezerowe tylko jeśli $k = m$.

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned}\delta_{ii} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3, \\ \delta_{ki}\delta_{im} &= \delta_{k1}\delta_{1m} + \delta_{k2}\delta_{2m} + \delta_{k3}\delta_{3m} = \delta_{km},\end{aligned}$$

gdzyż obie delty Kroneckera w iloczynie są niezerowe tylko jeśli $k = m$.

Tożsamość

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned}\delta_{ii} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3, \\ \delta_{ki}\delta_{im} &= \delta_{k1}\delta_{1m} + \delta_{k2}\delta_{2m} + \delta_{k3}\delta_{3m} = \delta_{km},\end{aligned}$$

gdzie obie delty Kroneckera w iloczynie są niezerowe tylko jeśli $k = m$.

Tożsamość

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

łatwo jest zapamiętać, biorąc pod uwagę, że w pierwszym iloczynie delt Kroneckera po prawej stronie łączymy ze sobą drugi indeks z drugim i trzeci z trzecim,

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned}\delta_{ii} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3, \\ \delta_{ki}\delta_{im} &= \delta_{k1}\delta_{1m} + \delta_{k2}\delta_{2m} + \delta_{k3}\delta_{3m} = \delta_{km},\end{aligned}$$

gdzież obie delty Kroneckera w iloczynie są niezerowe tylko jeśli $k = m$.

Tożsamość

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

łatwo jest zapamiętać, biorąc pod uwagę, że w pierwszym iloczynie delt Kroneckera po prawej stronie łączymy ze sobą drugi indeks z drugim i trzeci z trzecim, a w drugim iloczynie łączymy indeksy naprzemiennie.

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned}\delta_{ii} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3, \\ \delta_{ki}\delta_{im} &= \delta_{k1}\delta_{1m} + \delta_{k2}\delta_{2m} + \delta_{k3}\delta_{3m} = \delta_{km},\end{aligned}$$

gdzie obie delty Kroneckera w iloczynie są niezerowe tylko jeśli $k = m$.

Tożsamość

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

łatwo jest zapamiętać, biorąc pod uwagę, że w pierwszym iloczynie delt Kroneckera po prawej stronie łączymy ze sobą drugi indeks z drugim i trzeci z trzecim, a w drugim iloczynie łączymy indeksy naprzemiennie.

Pochodna i jej własności

Przypomnijmy wybrane pojęcia i twierdzenia rachunku różniczkowego.

Pochodna funkcji skalarnej $f(t) \in \mathbb{R}$:

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t}$$

Pochodna i jej własności

Przypomnijmy wybrane pojęcia i twierdzenia rachunku różniczkowego.

Pochodna funkcji skalarnej $f(t) \in \mathbb{R}$:

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Pochodna i jej własności

Przypomnijmy wybrane pojęcia i twierdzenia rachunku różniczkowego.

Pochodna funkcji skalarnej $f(t) \in \mathbb{R}$:

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Pochodna funkcji wektorowej $\vec{r}(t)$ o składowych rzeczywistych:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Pochodna i jej własności

Przypomnijmy wybrane pojęcia i twierdzenia rachunku różniczkowego.

Pochodna funkcji skalarnej $f(t) \in \mathbb{R}$:

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Pochodna funkcji wektorowej $\vec{r}(t)$ o składowych rzeczywistych:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Pochodna i jej własności

Przypomnijmy wybrane pojęcia i twierdzenia rachunku różniczkowego.

Pochodna funkcji skalarnej $f(t) \in \mathbb{R}$:

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Pochodna funkcji wektorowej $\vec{r}(t)$ o składowych rzeczywistych:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Pochodna iloczynu funkcji skalarnej $f(t)$ przez liczbę $c \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d(cf)}{dt} = c \frac{df}{dt}.$$

Pochodna i jej własności

Przypomnijmy wybrane pojęcia i twierdzenia rachunku różniczkowego.

Pochodna funkcji skalarnej $f(t) \in \mathbb{R}$:

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Pochodna funkcji wektorowej $\vec{r}(t)$ o składowych rzeczywistych:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Pochodna iloczynu funkcji skalarnej $f(t)$ przez liczbę $c \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d(cf)}{dt} = c \frac{df}{dt}.$$

Pochodna i jej własności

Pochodna sumy i iloczynu dwóch funkcji skalarnych $f(t)$ i $g(t)$:

$$\frac{d(f+g)}{dt} = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt},$$

Pochodna i jej własności

Pochodna sumy i iloczynu dwóch funkcji skalarnych $f(t)$ i $g(t)$:

$$\frac{d(f+g)}{dt} = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt}, \quad \frac{d(fg)}{dt} = \frac{df}{dt} g + f \frac{dg}{dt}.$$

Wzory te łatwo uogólnić na większą liczbę składników lub czynników. Np. dla iloczynu trzech funkcji $f(t)g(t)h(t)$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d(fgh)}{dt} &= \frac{d(fg)}{dt} h + (fg) \frac{dh}{dt} = \left(\frac{df}{dt} g + f \frac{dg}{dt} \right) h + fg \frac{dh}{dt} \\ &= \frac{df}{dt} gh + f \frac{dg}{dt} h + fg \frac{dh}{dt} = \dot{f}gh + f\dot{g}h + fg\dot{h}, \end{aligned}$$

gdzie przyjęliśmy powszechnie stosowane oznaczenie pochodnej czasowej

$$\frac{df}{dt} = \dot{f}.$$

Pochodna i jej własności

Pochodna sumy i iloczynu dwóch funkcji skalarnych $f(t)$ i $g(t)$:

$$\frac{d(f+g)}{dt} = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt}, \quad \frac{d(fg)}{dt} = \frac{df}{dt} g + f \frac{dg}{dt}.$$

Wzory te łatwo uogólnić na większą liczbę składników lub czynników. Np. dla iloczynu trzech funkcji $f(t)g(t)h(t)$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d(fgh)}{dt} &= \frac{d(fg)}{dt} h + (fg) \frac{dh}{dt} = \left(\frac{df}{dt} g + f \frac{dg}{dt} \right) h + fg \frac{dh}{dt} \\ &= \frac{df}{dt} gh + f \frac{dg}{dt} h + fg \frac{dh}{dt} = \dot{f}gh + f\dot{g}h + fg\dot{h}, \end{aligned}$$

gdzie przyjęliśmy powszechnie stosowane oznaczenie pochodnej czasowej

$$\frac{df}{dt} = \dot{f}.$$

Pochodna wektora w układzie o ustalonych – niezmiennych w czasie – osiach:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} =$$

Pochodna wektora w układzie o ustalonych – niezmiennych w czasie – osiach:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d(x_i(t)\hat{e}_i)}{dt} =$$

Pochodna wektora w układzie o ustalonych – niezmiennych w czasie – osiach:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d(x_i(t)\hat{e}_i)}{dt} = \frac{dx_i(t)}{dt} \hat{e}_i =$$

Pochodna wektora w układzie o ustalonych – niezmiennych w czasie – osiach:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d(x_i(t)\hat{e}_i)}{dt} = \frac{dx_i(t)}{dt} \hat{e}_i = \dot{x}_i(t) \hat{e}_i = v_i(t) \hat{e}_i =$$

Pochodna wektora w układzie o ustalonych – niezmiennych w czasie – osiach:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d(x_i(t)\hat{e}_i)}{dt} = \frac{dx_i(t)}{dt} \hat{e}_i = \dot{x}_i(t) \hat{e}_i = v_i(t) \hat{e}_i = \vec{v}(t),$$

Pochodna wektora w układzie o ustalonych – niezmiennych w czasie – osiach:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d(x_i(t)\hat{e}_i)}{dt} = \frac{dx_i(t)}{dt} \hat{e}_i = \dot{x}_i(t) \hat{e}_i = v_i(t) \hat{e}_i = \vec{v}(t),$$

gdzie zdefiniowaliśmy wektor prędkości $\vec{v}$ o składowych

$$v_i(t) = \dot{x}_i(t)$$

Pochodna wektora w układzie o ustalonych – niezmiennych w czasie – osiach:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d(x_i(t)\hat{e}_i)}{dt} = \frac{dx_i(t)}{dt} \hat{e}_i = \dot{x}_i(t) \hat{e}_i = v_i(t) \hat{e}_i = \vec{v}(t),$$

gdzie zdefiniowaliśmy wektor prędkości $\vec{v}$ o składowych

$$v_i(t) = \dot{x}_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Pochodna wektora w układzie o ustalonych – niezmiennych w czasie – osiach:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d(x_i(t)\hat{e}_i)}{dt} = \frac{dx_i(t)}{dt} \hat{e}_i = \dot{x}_i(t) \hat{e}_i = v_i(t) \hat{e}_i = \vec{v}(t),$$

gdzie zdefiniowaliśmy wektor prędkości $\vec{v}$ o składowych

$$v_i(t) = \dot{x}_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f(x(t))$, wówczas

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} =$$

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f(x(t))$, wówczas

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx} \dot{x},$$

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f(x(t))$, wówczas

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx} \dot{x}, \quad df = \frac{df}{dx} dx,$$

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f(x(t))$, wówczas

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx} \dot{x}, \quad df = \frac{df}{dx} dx,$$

Niech $f(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t)$,

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f(x(t))$, wówczas

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx} \dot{x}, \quad df = \frac{df}{dx} dx,$$

Niech $f(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t)$, wówczas

$$\frac{df}{dt} =$$

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f(x(t))$, wówczas

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx} \dot{x}, \quad df = \frac{df}{dx} dx,$$

Niech $f(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t)$, wówczas

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} =$$

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f(x(t))$, wówczas

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx} \dot{x}, \quad df = \frac{df}{dx} dx,$$

Niech $f(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t)$, wówczas

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t},$$

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f(x(t))$, wówczas

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx} \dot{x}, \quad df = \frac{df}{dx} dx,$$

Niech $f(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t)$, wówczas

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t},$$

df

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f(x(t))$, wówczas

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx} \dot{x}, \quad df = \frac{df}{dx} dx,$$

Niech $f(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t)$, wówczas

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t},$$

$$df =$$

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f(x(t))$, wówczas

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx} \dot{x}, \quad df = \frac{df}{dx} dx,$$

Niech $f(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t)$, wówczas

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t}, \\ df &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f(x(t))$, wówczas

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx} \dot{x}, \quad df = \frac{df}{dx} dx,$$

Niech $f(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t)$, wówczas

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t}, \\ df &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla niezależnych zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$ zachodzi

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f(x(t))$, wówczas

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx} \dot{x}, \quad df = \frac{df}{dx} dx,$$

Niech $f(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t)$, wówczas

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t}, \\ df &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla niezależnych zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$ zachodzi

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Przykładowo, zastosujmy wzór

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$$

do funkcji wyrażającej współrzędną x układu kartezjańskiego przez współrzędne sferyczne, z których każda zależy od czasu

$$x(t) = x(r(t), \theta(t), \varphi(t)) = r(t) \sin \theta(t) \cos \varphi(t).$$

Wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \\ &= \sin \theta \cos \varphi \dot{r} + r \cos \theta \cos \varphi \dot{\theta} - r \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że nie pojawił się tu wyraz $\frac{\partial x}{\partial t}$, gdyż funkcja $x(t)$ nie zależy jawnie od czasu, tzn. zależy od czasu tylko poprzez $r(t)$, $\theta(t)$ i $\varphi(t)$.

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Przykładowo, zastosujmy wzór

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$$

do funkcji wyrażającej współrzędną x układu kartezjańskiego przez współrzędne sferyczne, z których każda zależy od czasu

$$x(t) = x(r(t), \theta(t), \varphi(t)) = r(t) \sin \theta(t) \cos \varphi(t).$$

Wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \\ &= \sin \theta \cos \varphi \dot{r} + r \cos \theta \cos \varphi \dot{\theta} - r \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że nie pojawił się tu wyraz $\frac{\partial x}{\partial t}$, gdyż funkcja $x(t)$ nie zależy jawnie od czasu, tzn. zależy od czasu tylko poprzez $r(t)$, $\theta(t)$ i $\varphi(t)$.

Zadanie. Obliczyć pochodne czasowe funkcji wyrażających współrzędne y i z układu kartezjańskiego przez współrzędne sferyczne:

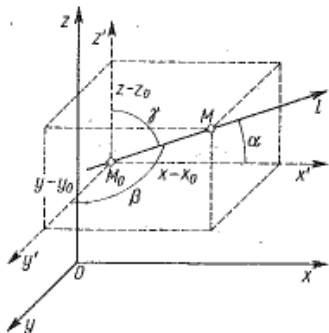
$$\begin{aligned}y(t) &= y(r(t), \theta(t), \varphi(t)) = r(t) \sin \theta(t) \sin \varphi(t), \\z(t) &= z(r(t), \theta(t)) = r(t) \cos \theta(t).\end{aligned}$$

Pochodna kierunkowa

Założmy, że $f(M) = f(x, y, z)$ jest różniczkowalną funkcją rzeczywistą określoną w pewnym obszarze otwartym. Pochodne cząstkowe funkcji $f(M)$ względem x , względem y i względem z :

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(M)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(M)}{\partial z}$$

wyrażają prędkość zmiany funkcji względem osi współrzędnych.

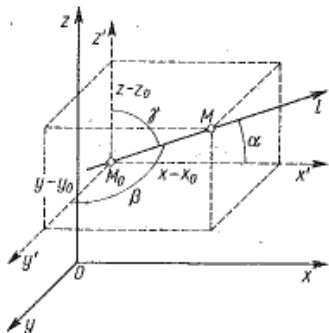


Pochodna kierunkowa

Założmy, że $f(M) = f(x, y, z)$ jest różniczkowalną funkcją rzeczywistą określoną w pewnym obszarze otwartym. Pochodne cząstkowe funkcji $f(M)$ względem x , względem y i względem z :

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(M)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(M)}{\partial z}$$

wyrażają prędkość zmiany funkcji względem osi współrzędnych.



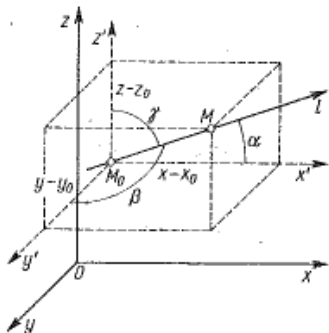
Rozważmy dowolny punkt $M_0(x_0, y_0, z_0)$ rozpatrywanego obszaru i dowolną prostą oś l przechodzącą przez ten punkt. Niech $M(x, y, z) \in l$, a M_0M jest długością odcinka pomiędzy punktami M_0 i M , dodatnią jeśli zwrot wektora $\overrightarrow{M_0M}$ pokrywa się ze zwrotem osi l , a ujemną w przeciwnym przypadku.

Pochodna kierunkowa

Założmy, że $f(M) = f(x, y, z)$ jest różniczkowalną funkcją rzeczywistą określoną w pewnym obszarze otwartym. Pochodne cząstkowe funkcji $f(M)$ względem x , względem y i względem z :

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(M)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(M)}{\partial z}$$

wyrażają prędkość zmiany funkcji względem osi współrzędnych.



Rozważmy dowolny punkt $M_0(x_0, y_0, z_0)$ rozpatrywanego obszaru i dowolną prostą oś l przechodzącą przez ten punkt. Niech $M(x, y, z) \in l$, a M_0M jest długością odcinka pomiędzy punktami M_0 i M , dodatnią jeśli zwrot wektora $\overrightarrow{M_0M}$ pokrywa się ze zwrotem osi l , a ujemną w przeciwnym przypadku.

Pochodna kierunkowa

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0 M},$$

to nazywamy ją *pochodną kierunkową funkcji $f(M)$ w kierunku l* i oznaczamy

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l}.$$

Pochodna ta charakteryzuje prędkość zmiany funkcji $f(M)$ w punkcie M_0 w kierunku l .

Założmy, że funkcja $f(x, y, z)$ ma w rozpatrywanym obszarze ciągłe pochodne cząstkowe, a oś l tworzy z osiami współrzędnych kąty α, β, γ , wtedy pochodna w kierunku l istnieje i wyraża się wzorem:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \cos \gamma.$$

Pochodna kierunkowa

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0 M},$$

to nazywamy ją *pochodną kierunkową funkcji $f(M)$ w kierunku l* i oznaczamy

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l}.$$

Pochodna ta charakteryzuje prędkość zmiany funkcji $f(M)$ w punkcie M_0 w kierunku l .

Założmy, że funkcja $f(x, y, z)$ ma w rozpatrywanym obszarze ciągłe pochodne cząstkowe, a oś l tworzy z osiami współrzędnych kąty α, β, γ , wtedy pochodna w kierunku l istnieje i wyraża się wzorem:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \cos \gamma.$$

Dowód. Oznaczmy $M_0M = t$, wtedy

$$x - x_0 = t \cos \alpha, \quad y - y_0 = t \cos \beta, \quad z - z_0 = t \cos \gamma,$$

a funkcję $f(M) = f(x_0, y_0, z_0)$ możemy potraktować jako funkcję złożoną $\varphi(t) = f(x(t), y(t), z(t))$, przy czym dla $t = 0$ mamy $M = M_0$. Obliczmy

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma,$$

co kończy dowód.

Dowód. Oznaczmy $M_0M = t$, wtedy

$$x - x_0 = t \cos \alpha, \quad y - y_0 = t \cos \beta, \quad z - z_0 = t \cos \gamma,$$

a funkcję $f(M) = f(x_0, y_0, z_0)$ możemy potraktować jako funkcję złożoną $\varphi(t) = f(x(t), y(t), z(t))$, przy czym dla $t = 0$ mamy $M = M_0$. Obliczmy

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma,$$

co kończy dowód.

Jeżeli w każdym punkcie M obszaru przestrzennego, który może być również całą przestrzenią, określona jest pewna wartość skalarna lub pewien wektor o początku w punkcie M , to mówimy odpowiednio o *polu skalarnym* lub *polu wektorowym*.

Jeżeli położenie punktu M jest określone przez współrzędne kartezjańskie xyz , to pole skalarne jest równoznaczne z podaniem funkcji skalarnej $U(x, y, z)$. Będziemy zawsze zakładali, że funkcja ta ma ciągłe pochodne cząstkowe względem wszystkich zmiennych.

Jeżeli w każdym punkcie M obszaru przestrzennego, który może być również całą przestrzenią, określona jest pewna wartość skalarna lub pewien wektor o początku w punkcie M , to mówimy odpowiednio o *polu skalarnym* lub *polu wektorowym*.

Jeżeli położenie punktu M jest określone przez współrzędne kartezjańskie xyz , to pole skalarne jest równoznaczne z podaniem funkcji skalarnej $U(x, y, z)$. Będziemy zawsze zakładali, że funkcja ta ma ciągłe pochodne cząstkowe względem wszystkich zmiennych.

Niech będzie dane pole skalarne $U(M) = U(x, y, z)$. Wektor $\vec{g}$ o współrzędnych

$$\vec{g} = \left[\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right]$$

nazywamy *gradientem* wielkości U i oznaczamy

$$\vec{g} = \text{grad} U.$$

Taka definicja gradientu zależy oczywiście od wyboru współrzędnych, co jest pewną wadą.

Niech będzie dane pole skalarne $U(M) = U(x, y, z)$. Wektor $\vec{g}$ o współrzędnych

$$\vec{g} = \left[\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right]$$

nazywamy *gradientem* wielkości U i oznaczamy

$$\vec{g} = \text{grad} U.$$

Taka definicja gradientu zależy oczywiście od wyboru współrzędnych, co jest pewną wadą.

Gradient

Aby zdefiniować gradient w sposób niezależny od współrzędnych, wykorzystajmy pojęcie pochodnej kierunkowej

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma.$$

Zdefiniujmy wektor $\vec{\lambda}$ w kierunku osi l , $\vec{\lambda} = [\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma]$, wtedy pochodną kierunkową możemy zapisać

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \text{grad} U \cdot \vec{\lambda} = |\text{grad} U| |\vec{\lambda}| \cos \theta,$$

gdzie θ jest kątem pomiędzy wektorami $\text{grad} U$ i $\vec{\lambda}$.

Gradient

Aby zdefiniować gradient w sposób niezależny od współrzędnych, wykorzystajmy pojęcie pochodnej kierunkowej

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma.$$

Zdefiniujmy wektor $\vec{\lambda}$ w kierunku osi l , $\vec{\lambda} = [\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma]$, wtedy pochodną kierunkową możemy zapisać

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \text{grad} U \cdot \vec{\lambda} = |\text{grad} U| |\vec{\lambda}| \cos \theta,$$

gdzie θ jest kątem pomiędzy wektorami $\text{grad} U$ i $\vec{\lambda}$.

Widzimy, że pochodna kierunkowa osiąga maksimum dla $\theta = 0$, a więc w kierunku zgodnym z kierunkiem gradientu. Dlatego gradient możemy zdefiniować następująco.

Gradient

Aby zdefiniować gradient w sposób niezależny od współrzędnych, wykorzystajmy pojęcie pochodnej kierunkowej

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma.$$

Zdefiniujmy wektor $\vec{\lambda}$ w kierunku osi l , $\vec{\lambda} = [\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma]$, wtedy pochodną kierunkową możemy zapisać

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \text{grad} U \cdot \vec{\lambda} = |\text{grad} U| |\vec{\lambda}| \cos \theta,$$

gdzie θ jest kątem pomiędzy wektorami $\text{grad} U$ i $\vec{\lambda}$.

Widzimy, że pochodna kierunkowa osiąga maksimum dla $\theta = 0$, a więc w kierunku zgodnym z kierunkiem gradientu. Dlatego gradient możemy zdefiniować następująco.

Gradientem wielkości skalarnej U w danym punkcie M nazywamy wektor charakteryzujący kierunek i wartość największego wzrostu wielkości U w punkcie M .

Gradient

Aby zdefiniować gradient w sposób niezależny od współrzędnych, wykorzystajmy pojęcie pochodnej kierunkowej

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma.$$

Zdefiniujmy wektor $\vec{\lambda}$ w kierunku osi l , $\vec{\lambda} = [\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma]$, wtedy pochodną kierunkową możemy zapisać

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \text{grad} U \cdot \vec{\lambda} = |\text{grad} U| |\vec{\lambda}| \cos \theta,$$

gdzie θ jest kątem pomiędzy wektorami $\text{grad} U$ i $\vec{\lambda}$.

Widzimy, że pochodna kierunkowa osiąga maksimum dla $\theta = 0$, a więc w kierunku zgodnym z kierunkiem gradientu. Dlatego gradient możemy zdefiniować następująco.

Gradientem wielkości skalarnej U w danym punkcie M nazywamy wektor charakteryzujący kierunek i wartość największego wzrostu wielkości U w punkcie M .

Gradient i powierzchnia $U(x, y, z) = C$

Widzimy, że pole skalarne $U(M)$ generuje pole wektorowe gradientu $\text{grad}U$.

Równanie

$$U(x, y, z) = C$$

określa pewną powierzchnię (bez punktów osobliwych) w przestrzeni trójwymiarowej.

Gradient i powierzchnia $U(x, y, z) = C$

Widzimy, że pole skalarne $U(M)$ generuje pole wektorowe gradientu $\text{grad}U$.

Równanie

$$U(x, y, z) = C$$

określa pewną powierzchnię (bez punktów osobliwych) w przestrzeni trójwymiarowej.

Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$, w którym $U(x_0, y_0, z_0) = C$, należy do tej powierzchni. Rozważmy krzywą

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (\alpha < t < \beta),$$

zawartą w tej powierzchni, tzn. $U(x(t), y(t), z(t)) = C$ dla wszystkich $t \in (\alpha, \beta)$, przechodzącą przez punkt P , przy czym $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ i $z_0 = z(t_0)$.

Gradient i powierzchnia $U(x, y, z) = C$

Widzimy, że pole skalarne $U(M)$ generuje pole wektorowe gradientu $\text{grad} U$.

Równanie

$$U(x, y, z) = C$$

określa pewną powierzchnię (bez punktów osobliwych) w przestrzeni trójwymiarowej.

Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$, w którym $U(x_0, y_0, z_0) = C$, należy do tej powierzchni. Rozważmy krzywą

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (\alpha < t < \beta),$$

zawartą w tej powierzchni, tzn. $U(x(t), y(t), z(t)) = C$ dla wszystkich $t \in (\alpha, \beta)$, przechodzącą przez punkt P , przy czym $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ i $z_0 = z(t_0)$.

Gradient i powierzchnia $U(x, y, z) = C$

Wtedy styczna do tej krzywej w punkcie P leży całkowicie na płaszczyźnie o równaniu

$$\frac{\partial U(P)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial U(P)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial U(P)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

Rzeczywiście, różniczkując równanie $U(x(t), y(t), z(t)) = C$ otrzymamy

$$\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} = 0,$$

Wtedy styczna do tej krzywej w punkcie P leży całkowicie na płaszczyźnie o równaniu

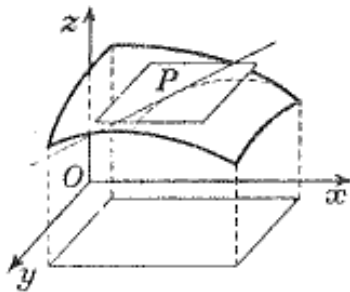
$$\frac{\partial U(P)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial U(P)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial U(P)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

Rzeczywiście, różniczkując równanie $U(x(t), y(t), z(t)) = C$ otrzymamy

$$\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} = 0,$$

Gradient i powierzchnia $U(x, y, z) = C$

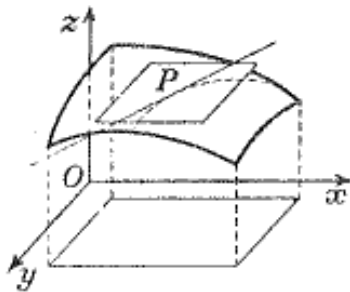
a współrzędne dowolnego punktu stycznej do naszej krzywej w punkcie P wyrażają się wzorami



$$\begin{aligned}x &= x_0 + \dot{x}(t_0)\tau, \\y &= y_0 + \dot{y}(t_0)\tau, \\z &= z_0 + \dot{z}(t_0)\tau, \\-\infty &< \tau < \infty.\end{aligned}$$

Gradient i powierzchnia $U(x, y, z) = C$

a współrzędne dowolnego punktu stycznej do naszej krzywej w punkcie P wyrażają się wzorami



$$\begin{aligned}x &= x_0 + \dot{x}(t_0)\tau, \\y &= y_0 + \dot{y}(t_0)\tau, \\z &= z_0 + \dot{z}(t_0)\tau, \\-\infty &< \tau < \infty.\end{aligned}$$

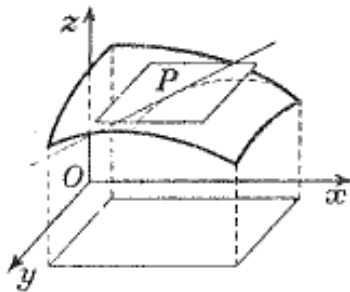
Stąd widać, że współrzędne dowolnego punktu stycznej do krzywej spełniają równanie

$$\frac{\partial U(P)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial U(P)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial U(P)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

z którego wynika również, że wektor $\text{grad}U(P)$ jest ortogonalny do powierzchni $U(x, y, z) = C$ w punkcie P .

Gradient i powierzchnia $U(x, y, z) = C$

a współrzędne dowolnego punktu stycznej do naszej krzywej w punkcie P wyrażają się wzorami



$$\begin{aligned}x &= x_0 + \dot{x}(t_0)\tau, \\y &= y_0 + \dot{y}(t_0)\tau, \\z &= z_0 + \dot{z}(t_0)\tau, \\-\infty &< \tau < \infty.\end{aligned}$$

Stąd widać, że współrzędne dowolnego punktu stycznej do krzywej spełniają równanie

$$\frac{\partial U(P)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial U(P)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial U(P)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

z którego wynika również, że wektor $\text{grad}U(P)$ jest ortogonalny do powierzchni $U(x, y, z) = C$ w punkcie P .

Gradient, potencjał i siła

Za Hamiltonem możemy zdefiniować wektor nabra $\vec{\nabla}$ o składowych

$$\vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right],$$

przy pomocy którego możemy zapisać

$$\text{grad} U = \vec{\nabla} U.$$

W fizyce zachodzi następujący związek pomiędzy polem sił a potencjałem skalarnym, a ściślej energią potencjalną, $V(\vec{r})$

$$\vec{F} = -\text{grad} V = -\vec{\nabla} V.$$

Gradient, potencjał i siła

Za Hamiltonem możemy zdefiniować wektor nabra $\vec{\nabla}$ o składowych

$$\vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right],$$

przy pomocy którego możemy zapisać

$$\text{grad} U = \vec{\nabla} U.$$

W fizyce zachodzi następujący związek pomiędzy polem sił a potencjałem skalarnym, a ściślej energią potencjalną, $V(\vec{r})$

$$\vec{F} = -\text{grad} V = -\vec{\nabla} V.$$

Zadanie. Znaleźć siłę dla potencjału Keplera

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \text{gdzie} \quad r = |\vec{r}|, \quad \alpha > 0.$$

Gradient, potencjał i siła

Za Hamiltonem możemy zdefiniować wektor nabra $\vec{\nabla}$ o składowych

$$\vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right],$$

przy pomocy którego możemy zapisać

$$\text{grad} U = \vec{\nabla} U.$$

W fizyce zachodzi następujący związek pomiędzy polem sił a potencjałem skalarnym, a ściślej energią potencjalną, $V(\vec{r})$

$$\vec{F} = -\text{grad} V = -\vec{\nabla} V.$$

Zadanie. Znaleźć siłę dla potencjału Keplera

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \text{gdzie} \quad r = |\vec{r}|, \quad \alpha > 0.$$

Dywergencja i rotacja

Dla pola wektorowego $\vec{w}$ o składowych

$$\vec{w} = [w_x, w_y, w_z] = w_i \hat{e}_i,$$

gdzie składowe $w_i = w_i(\vec{r})$, $i = 1, 2, 3$, są klasy $C^{(1)}$, a więc są różniczkowalne i mają ciągłe pierwsze pochodne, definiujemy skalar

$$\operatorname{div} \vec{w} = \vec{\nabla} \cdot \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \frac{\partial w_i}{\partial x_i},$$

który nazywamy *dywergencją pola wektorowego $\vec{w}$* , oraz wektor

$$\operatorname{rot} \vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{w},$$

który nazywamy *rotacją pola wektorowego $\vec{w}$* .

Dywergencja i rotacja

Dla pola wektorowego $\vec{w}$ o składowych

$$\vec{w} = [w_x, w_y, w_z] = w_i \hat{e}_i,$$

gdzie składowe $w_i = w_i(\vec{r})$, $i = 1, 2, 3$, są klasy $C^{(1)}$, a więc są różniczkowalne i mają ciągłe pierwsze pochodne, definiujemy skalar

$$\operatorname{div} \vec{w} = \vec{\nabla} \cdot \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \frac{\partial w_i}{\partial x_i},$$

który nazywamy *dywergencją pola wektorowego $\vec{w}$* , oraz wektor

$$\operatorname{rot} \vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{w},$$

który nazywamy *rotacją pola wektorowego $\vec{w}$* .

Pole wektorowe, w którym $\operatorname{div} \vec{w} = 0$ nazywamy *beźródłowym*, a pole w którym $\operatorname{rot} \vec{w} = 0$ nazywamy *bezwirowym*.

Dywergencja i rotacja

Dla pola wektorowego $\vec{w}$ o składowych

$$\vec{w} = [w_x, w_y, w_z] = w_i \hat{e}_i,$$

gdzie składowe $w_i = w_i(\vec{r})$, $i = 1, 2, 3$, są klasy $C^{(1)}$, a więc są różniczkowalne i mają ciągłe pierwsze pochodne, definiujemy skalar

$$\operatorname{div} \vec{w} = \vec{\nabla} \cdot \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \frac{\partial w_i}{\partial x_i},$$

który nazywamy *dywergencją pola wektorowego $\vec{w}$* , oraz wektor

$$\operatorname{rot} \vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{w},$$

który nazywamy *rotacją pola wektorowego $\vec{w}$* .

Pole wektorowe, w którym $\operatorname{div} \vec{w} = 0$ nazywamy *beźródłowym*, a pole w którym $\operatorname{rot} \vec{w} = 0$ nazywamy *bezwirowym*.

Potencjał pola wektorowego

Zadanie. Pokazać, że wektor $\text{rot } \vec{w}$ ma następujące składowe

$$\text{rot } \vec{w} = \left[\frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3}, \frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1}, \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right].$$

Nie każde pole wektorowe ma potencjał.

Założmy, że pole wektorowe $\vec{w}$ ma potencjał V i jego składowe są klasy $C^{(1)}$. Zachodzi związek

$$\vec{w} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \hat{e}_i,$$

a zatem

$$w_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Zróżniczkujemy te związki po $\partial/\partial x_j$

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Potencjał pola wektorowego

Jeśli składowe $w_i = -\partial V / \partial x_i$ są klasy $C(1)$, to odpowiednie pochodne mieszane potencjału V

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i \neq j.$$

Stąd wynika, że zachodzi

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} = 0,$$

jeśli tylko $i \neq j$, a to oznacza, że

$$\text{rot} \vec{w} = \left[\frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3}, \frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1}, \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right] = 0.$$

Potencjał pola wektorowego

Jeśli składowe $w_i = -\partial V / \partial x_i$ są klasy $C(1)$, to odpowiednie pochodne mieszane potencjału V

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i \neq j.$$

Stąd wynika, że zachodzi

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} = 0,$$

jeśli tylko $i \neq j$, a to oznacza, że

$$\operatorname{rot} \vec{w} = \left[\frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3}, \frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1}, \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right] = 0.$$

Znikanie rotacji pola wektorowego $\vec{w}$ jest warunkiem *koniecznym* aby miało ono potencjał, tzn. aby było zachowawcze.

Potencjał pola wektorowego

Jeśli składowe $w_i = -\partial V / \partial x_i$ są klasy $C(1)$, to odpowiednie pochodne mieszane potencjału V

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i \neq j.$$

Stąd wynika, że zachodzi

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} = 0,$$

jeśli tylko $i \neq j$, a to oznacza, że

$$\operatorname{rot} \vec{w} = \left[\frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3}, \frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1}, \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right] = 0.$$

Znikanie rotacji pola wektorowego $\vec{w}$ jest warunkiem *koniecznym* aby miało ono potencjał, tzn. aby było zachowawcze.

II zasada dynamiki, przyspieszenie

Jeżeli na ciało działa siła $\vec{F}$, to porusza się ono ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły $\vec{F}$ i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}.$$

(obowiązuje tylko dla prędkości nierelatywistycznych).

II zasada dynamiki, przyspieszenie

Jeżeli na ciało działa siła $\vec{F}$, to porusza się ono ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły $\vec{F}$ i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}.$$

(obowiązuje tylko dla prędkości nierelatywistycznych).

Przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

II zasada dynamiki, przyspieszenie

Jeżeli na ciało działa siła $\vec{F}$, to porusza się ono ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły $\vec{F}$ i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}.$$

(obowiązuje tylko dla prędkości nierelatywistycznych).

Przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$$

II zasada dynamiki, przyspieszenie

Jeżeli na ciało działa siła $\vec{F}$, to porusza się ono ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły $\vec{F}$ i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}.$$

(obowiązuje tylko dla prędkości nierelatywistycznych).

Przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

II zasada dynamiki, przyspieszenie

Jeżeli na ciało działa siła $\vec{F}$, to porusza się ono ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły $\vec{F}$ i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}.$$

(obowiązuje tylko dla prędkości nierelatywistycznych).

Przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

II zasada dynamiki, przyspieszenie

Jeżeli na ciało działa siła $\vec{F}$, to porusza się ono ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły $\vec{F}$ i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}.$$

(obowiązuje tylko dla prędkości nierelatywistycznych).

Przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Zauważmy, że chociaż $\vec{F} = \vec{0}$

II zasada dynamiki, przyspieszenie

Jeżeli na ciało działa siła $\vec{F}$, to porusza się ono ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły $\vec{F}$ i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}.$$

(obowiązuje tylko dla prędkości nierelatywistycznych).

Przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Zauważmy, że chociaż $\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$

II zasada dynamiki, przyspieszenie

Jeżeli na ciało działa siła $\vec{F}$, to porusza się ono ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły $\vec{F}$ i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}.$$

(obowiązuje tylko dla prędkości nierelatywistycznych).

Przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Zauważmy, że chociaż $\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{const},$

II zasada dynamiki, przyspieszenie

Jeżeli na ciało działa siła $\vec{F}$, to porusza się ono ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły $\vec{F}$ i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}.$$

(obowiązuje tylko dla prędkości nierelatywistycznych).

Przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Zauważmy, że chociaż $\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{const}$,
to I zasada dynamiki jest czymś więcej niż prostą konsekwencją II.

II zasada dynamiki, przyspieszenie

Jeżeli na ciało działa siła $\vec{F}$, to porusza się ono ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły $\vec{F}$ i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}.$$

(obowiązuje tylko dla prędkości nierelatywistycznych).

Przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Zauważmy, że chociaż $\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{const}$,
to I zasada dynamiki jest czymś więcej niż prostą konsekwencją II.

Pęd ciała

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}}$$

Pęd ciała

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a}$$

Pęd ciała

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F}$$

Pęd ciała

$$\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \dot{\vec{p}} = \vec{F}.$$

Pęd ciała

$$\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \dot{\vec{p}} = \vec{F}.$$

Ostatnie równanie wyraża nieco ogólniejszą postać II zasady dynamiki:

Pęd ciała

$$\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \dot{\vec{p}} = \vec{F}.$$

Ostatnie równanie wyraża nieco ogólniejszą postać II zasady dynamiki:

Zmiana pędu ciała w czasie jest równa działającej na nie sile.

Pęd ciała

$$\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \dot{\vec{p}} = \vec{F}.$$

Ostatnie równanie wyraża nieco ogólniejszą postać II zasady dynamiki:

Zmiana pędu ciała w czasie jest równa działającej na nie sile.

Wynikające z II zasady dynamiki równanie ruchu ciała

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m}$$

jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, tzn. zawiera drugą pochodną.

Jego rozwiązaniem jest funkcja wektorowa $\vec{r}(t)$ określająca jednoznacznie położenie ciała w wybranym układzie współrzędnych w każdej chwili czasu, pod warunkiem że znamy położenie i prędkość ciała w chwili początkowej, $t = 0$.

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(0), \quad \vec{v}_0 = \vec{v}(0) = \dot{\vec{r}}(0).$$

Wynikające z II zasady dynamiki równanie ruchu ciała

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m}$$

jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, tzn. zawiera drugą pochodną.

Jego rozwiązaniem jest funkcja wektorowa $\vec{r}(t)$ określająca jednoznacznie położenie ciała w wybranym układzie współrzędnych w każdej chwili czasu, pod warunkiem że znamy położenie i prędkość ciała w chwili początkowej, $t = 0$.

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(0), \quad \vec{v}_0 = \vec{v}(0) = \dot{\vec{r}}(0).$$

Przykład

Ruch pod wpływem stałej siły $\vec{F}_0$.

Wyberzmy oś Ox układu kartezjańskiego w kierunku siły $\vec{F}_0$.

Przykład

Ruch pod wpływem stałej siły $\vec{F}_0$.

Wyberzmy oś Ox układu kartezjańskiego w kierunku siły $\vec{F}_0$.

Wówczas $\vec{F}_0 = [F_0, 0, 0]$, a równanie ruchu na składową x wektora położenia ma postać

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m} = a_0,$$

Przykład

Ruch pod wpływem stałej siły $\vec{F}_0$.

Wyberzmy oś Ox układu kartezjańskiego w kierunku siły $\vec{F}_0$.

Wówczas $\vec{F}_0 = [F_0, 0, 0]$, a równanie ruchu na składową x wektora położenia ma postać

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m} = a_0,$$

przy warunkach początkowych $x(0) = 0$ i $v(0) = v_0$.

Przykład

Ruch pod wpływem stałej siły $\vec{F}_0$.

Wyberzmy oś Ox układu kartezjańskiego w kierunku siły $\vec{F}_0$.

Wówczas $\vec{F}_0 = [F_0, 0, 0]$, a równanie ruchu na składową x wektora położenia ma postać

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m} = a_0,$$

przy warunkach początkowych $x(0) = 0$ i $v(0) = v_0$.

Całkując obustronnie

$$\int \ddot{x}(t) dt = \int a_0 dt =$$

Przykład

Ruch pod wpływem stałej siły $\vec{F}_0$.

Wyberzmy oś Ox układu kartezjańskiego w kierunku siły $\vec{F}_0$.

Wówczas $\vec{F}_0 = [F_0, 0, 0]$, a równanie ruchu na składową x wektora położenia ma postać

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m} = a_0,$$

przy warunkach początkowych $x(0) = 0$ i $v(0) = v_0$.

Całkując obustronnie

$$\int \ddot{x}(t) dt = \int a_0 dt = a_0 \int dt$$

Przykład

Ruch pod wpływem stałej siły $\vec{F}_0$.

Wyberzmy oś Ox układu kartezjańskiego w kierunku siły $\vec{F}_0$.

Wówczas $\vec{F}_0 = [F_0, 0, 0]$, a równanie ruchu na składową x wektora położenia ma postać

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m} = a_0,$$

przy warunkach początkowych $x(0) = 0$ i $v(0) = v_0$.

Całkując obustronnie

$$\int \ddot{x}(t) dt = \int a_0 dt = a_0 \int dt$$

otrzymujemy

$$\dot{x}(t) = a_0 t + C_1.$$

Przykład

Ruch pod wpływem stałej siły $\vec{F}_0$.

Wyberzmy oś Ox układu kartezjańskiego w kierunku siły $\vec{F}_0$.

Wówczas $\vec{F}_0 = [F_0, 0, 0]$, a równanie ruchu na składową x wektora położenia ma postać

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m} = a_0,$$

przy warunkach początkowych $x(0) = 0$ i $v(0) = v_0$.

Całkując obustronnie

$$\int \ddot{x}(t) dt = \int a_0 dt = a_0 \int dt$$

otrzymujemy

$$\dot{x}(t) = a_0 t + C_1.$$

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t) dt = \int (a_0 t + C_1) dt = a_0 \int t dt + C_1 \int dt$$

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t) dt = \int (a_0 t + C_1) dt = a_0 \int t dt + C_1 \int dt$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t) dt = \int (a_0 t + C_1) dt = a_0 \int t dt + C_1 \int dt$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t) dt = \int (a_0 t + C_1) dt = a_0 \int t dt + C_1 \int dt$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$$x(0) = 0$$

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t) dt = \int (a_0 t + C_1) dt = a_0 \int t dt + C_1 \int dt$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow$$

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t) dt = \int (a_0 t + C_1) dt = a_0 \int t dt + C_1 \int dt$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = \frac{1}{2}a_0 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2$$

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t) dt = \int (a_0 t + C_1) dt = a_0 \int t dt + C_1 \int dt$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = \frac{1}{2}a_0 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$$

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t) dt = \int (a_0 t + C_1) dt = a_0 \int t dt + C_1 \int dt$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = \frac{1}{2}a_0 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0,$$

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t) dt = \int (a_0 t + C_1) dt = a_0 \int t dt + C_1 \int dt$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = \frac{1}{2}a_0 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0,$$

$$\dot{x}(0) = v_0$$

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t) dt = \int (a_0 t + C_1) dt = a_0 \int t dt + C_1 \int dt$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = \frac{1}{2}a_0 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0,$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \Rightarrow$$

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t) dt = \int (a_0 t + C_1) dt = a_0 \int t dt + C_1 \int dt$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = \frac{1}{2}a_0 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0,$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(0) = a_0 \cdot 0 + C_1$$

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t) dt = \int (a_0 t + C_1) dt = a_0 \int t dt + C_1 \int dt$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = \frac{1}{2}a_0 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0,$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(0) = a_0 \cdot 0 + C_1 = v_0$$

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t) dt = \int (a_0 t + C_1) dt = a_0 \int t dt + C_1 \int dt$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = \frac{1}{2}a_0 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0,$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(0) = a_0 \cdot 0 + C_1 = v_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = v_0.$$

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t) dt = \int (a_0 t + C_1) dt = a_0 \int t dt + C_1 \int dt$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = \frac{1}{2} a_0 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0,$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(0) = a_0 \cdot 0 + C_1 = v_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = v_0.$$

Rozwiązanie problemu ma postać

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t.$$

Jest to wzór na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym.

Rozwiązanie problemu ma postać

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t.$$

Jest to wzór na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym.