Nonrelativistic limit of the Dirac equation

Foldy-Wouthuysen transformation

Karol Kołodziej

Institute of Physics
University of Silesia, Katowice
http://kk.us.edu.pl

Cząstka w zewnętrznym polu EM

Rozważmy oddziaływanie cząstki diracowskiej z zewnętrznym polem elektromagnetycznym (EM) opisywanym czteropotencjałem

$$A^{\mu}(x) = \left(\varphi(t, \vec{x}), \vec{A}(t, \vec{x})\right).$$

Oddziaływanie to uwzględnimy przez zamianę czteropędu cząstki

$$p_{\mu} \;\rightarrow\; p_{\mu} - eA_{\mu} \;\equiv\; \pi_{\mu}, \qquad \text{gdzie} \quad e = -|e|.$$

Cząstka w zewnętrznym polu EM

Rozważmy oddziaływanie cząstki diracowskiej z zewnętrznym polem elektromagnetycznym (EM) opisywanym czteropotencjałem

$$A^{\mu}(x) = \left(\varphi(t, \vec{x}), \vec{A}(t, \vec{x})\right).$$

Oddziaływanie to uwzględnimy przez zamianę czteropędu cząstki

$$p_{\mu} \;\to\; p_{\mu} - eA_{\mu} \;\equiv\; \pi_{\mu}, \qquad \text{gdzie} \quad e = -|e|.$$

W mechanice kwantowej odpowiada to podstawieniu

$$i\partial_{\mu} \;\to\; i\partial_{\mu} - eA_{\mu}, \qquad (\hbar = 1).$$

w równaniu Diraca.

Rozważmy oddziaływanie cząstki diracowskiej z zewnętrznym polem elektromagnetycznym (EM) opisywanym czteropotencjałem

$$A^{\mu}(x) = \left(\varphi(t,\vec{x}), \vec{A}(t,\vec{x})\right).$$

Oddziaływanie to uwzględnimy przez zamianę czteropędu cząstki

$$p_\mu \;\rightarrow\; p_\mu - eA_\mu \;\equiv\; \pi_\mu, \qquad \text{gdzie} \quad e = -|e|.$$

W mechanice kwantowej odpowiada to podstawieniu

$$i\partial_\mu \;\rightarrow\; i\partial_\mu - eA_\mu, \qquad (\hbar = 1).$$

w równaniu Diraca.

Operator czteropędu

Zauważmy, że znana z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej reguła podstawienia

$$E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to -i\hbar \vec{\nabla}$$

w mechanice relatywistycznej przybiera postać następującą

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right)$$

Operator czteropędu

Zauważmy, że znana z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej reguła podstawienia

$$E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$$

w mechanice relatywistycznej przybiera postać następującą

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) \;\to\; i\hbar\partial_\mu$$

Operator czteropędu

Zauważmy, że znana z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej reguła podstawienia

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$$

w mechanice relatywistycznej przybiera postać następującą

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) \;\to\; i\hbar\partial_\mu = i\hbar\left(\partial_0, \partial_i\right)$$

Operator czteropędu

Zauważmy, że znana z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej reguła podstawienia

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$$

w mechanice relatywistycznej przybiera postać następującą

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) \;\to\; i\hbar\partial_\mu = i\hbar\left(\partial_0, \partial_i\right) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial ct}, i\hbar\vec{\nabla}\right),$$

Operator czteropędu

Zauważmy, że znana z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej reguła podstawienia

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$$

w mechanice relatywistycznej przybiera postać następującą

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) \;\to\; i\hbar\partial_\mu = i\hbar\left(\partial_0, \partial_i\right) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial ct}, i\hbar\vec{\nabla}\right),$$

co dla składowych kontrawariantnych czterowektora pędu daje

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

Operator czteropędu

Zauważmy, że znana z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej reguła podstawienia

$$E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to -i\hbar \vec{\nabla}$$

w mechanice relatywistycznej przybiera postać następującą

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) \;\to\; i\hbar\partial_\mu = i\hbar\left(\partial_0, \partial_i\right) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial ct}, i\hbar\vec{\nabla}\right),$$

co dla składowych kontrawariantnych czterowektora pędu daje

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \;\to\; i\hbar\partial^\mu$$

Operator czteropędu

Zauważmy, że znana z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej reguła podstawienia

$$E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to -i\hbar \vec{\nabla}$$

w mechanice relatywistycznej przybiera postać następującą

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p} \right) \;\to\; i\hbar\partial_\mu = i\hbar \left(\partial_0, \partial_i \right) \;=\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial ct}, i\hbar\vec{\nabla} \right),$$

co dla składowych kontrawariantnych czterowektora pędu daje

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \;\to\; i\hbar\partial^\mu = i\hbar \left(\partial^0, \partial^i \right)$$

Operator czteropędu

Zauważmy, że znana z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej reguła podstawienia

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$$

w mechanice relatywistycznej przybiera postać następującą

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) \;\to\; i\hbar\partial_\mu = i\hbar\left(\partial_0, \partial_i\right) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial ct}, i\hbar\vec{\nabla}\right),$$

co dla składowych kontrawariantnych czterowektora pędu daje

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \;\to\; i\hbar\partial^\mu = i\hbar\left(\partial^0, \partial^i\right) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial ct}, -i\hbar\vec{\nabla}\right).$$

Operator czteropędu

Zauważmy, że znana z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej reguła podstawienia

$$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$$

w mechanice relatywistycznej przybiera postać następującą

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) \;\rightarrow\; i\hbar\partial_\mu = i\hbar\left(\partial_0, \partial_i\right) \;=\; \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial ct}, i\hbar\vec{\nabla}\right),$$

co dla składowych kontrawariantnych czterowektora pędu daje

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \;\rightarrow\; i\hbar\partial^\mu = i\hbar\left(\partial^0, \partial^i\right) \;=\; \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial ct}, -i\hbar\vec{\nabla}\right).$$

To właśnie dlatego wprowadziliśmy znak "$-$" w definicji operatora pędu.

Operator czteropędu

Zauważmy, że znana z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej reguła podstawienia

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$$

w mechanice relatywistycznej przybiera postać następującą

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) \;\to\; i\hbar\partial_\mu = i\hbar\left(\partial_0, \partial_i\right) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial ct}, i\hbar\vec{\nabla}\right),$$

co dla składowych kontrawariantnych czterowektora pędu daje

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \;\to\; i\hbar\partial^\mu = i\hbar\left(\partial^0, \partial^i\right) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial ct}, -i\hbar\vec{\nabla}\right).$$

To właśnie dlatego wprowadziliśmy znak "−" w definicji operatora pędu.

Cząstka w zewnętrznym polu EM

Równanie Diraca przybiera wtedy postać

$$(i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/ - m)\,\psi(x) = 0,$$

gdzie $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu$ i $A\!\!\!/ = \gamma^\mu A_\mu$.

Aby równanie Diraca dla cząstki w zewnętrznym polu EM było relatywistycznie współzmiennicze, trzeba przyjąć, że kowariantne składowe czteropotencjału $A_\mu(x)$ transformują się przy transformacjach Lorentza jak czterowektor kowariantny, tzn.

$$A'_\mu(\Lambda x) = A_\nu(x)\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}{}_{\mu},$$

Cząstka w zewnętrznym polu EM

Równanie Diraca przybiera wtedy postać

$$(i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/ - m)\,\psi(x) = 0,$$

gdzie $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu$ i $A\!\!\!/ = \gamma^\mu A_\mu$.
Aby równanie Diraca dla cząstki w zewnętrznym polu EM było relatywistycznie współzmiennicze, trzeba przyjąć, że kowariantne składowe czteropotencjału $A_\mu(x)$ transformują się przy transformacjach Lorentza jak czterowektor kowariantny, tzn.

$$A'_\mu(\Lambda x) = A_\nu(x) \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu,$$

Nasze równanie posiada jeszcze inną symetrię, niezwiązaną z transformacjami czasoprzestrzeni, mianowicie lokalną niezmienniczość cechowania $U(1)$,

Cząstka w zewnętrznym polu EM

Równanie Diraca przybiera wtedy postać

$$(i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/ - m)\,\psi(x) = 0,$$

gdzie $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu$ i $A\!\!\!/ = \gamma^\mu A_\mu$.
Aby równanie Diraca dla cząstki w zewnętrznym polu EM było relatywistycznie współzmiennicze, trzeba przyjąć, że kowariantne składowe czteropotencjału $A_\mu(x)$ transformują się przy transformacjach Lorentza jak czterowektor kowariantny, tzn.

$$A'_\mu(\Lambda x) = A_\nu(x)\left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu,$$

Nasze równanie posiada jeszcze inną symetrię, niezwiązaną z transformacjami czasoprzestrzeni, mianowicie lokalną niezmienniczość cechowania $U(1)$,

tzn. niezmienniczość względem przekształceń

$$\psi(x) \;\rightarrow\; \psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\psi(x),$$

gdzie $\alpha(x)$ jest dowolną różniczkowalną funkcją punktu czasoprzestrzeni Minkowskiego x,

tzn. niezmienniczość względem przekształceń

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\psi(x),$$

gdzie $\alpha(x)$ jest dowolną różniczkowalną funkcją punktu czasoprzestrzeni Minkowskiego x, pod warunkiem, że czteropotencjał będzie się transformował następująco

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x).$$

tzn. niezmienniczość względem przekształceń

$$\psi(x) \;\rightarrow\; \psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\psi(x),$$

gdzie $\alpha(x)$ jest dowolną różniczkowalną funkcją punktu czasoprzestrzeni Minkowskiego x, pod warunkiem, że czteropotencjał będzie się transformował następująco

$$A_\mu(x) \;\rightarrow\; A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x).$$

Zadanie. Pokazać, że zbiór przekształceń postaci $e^{ie\alpha(x)}$ tworzy jednoparametrową, abelową grupę przekształceń unitarnych, którą oznaczamy $U(1)$.

tzn. niezmienniczość względem przekształceń

$$\psi(x) \ \rightarrow \ \psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\psi(x),$$

gdzie $\alpha(x)$ jest dowolną różniczkowalną funkcją punktu czasoprzestrzeni Minkowskiego x, pod warunkiem, że czteropotencjał będzie się transformował następująco

$$A_\mu(x) \ \rightarrow \ A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x).$$

Zadanie. Pokazać, że zbiór przekształceń postaci $e^{ie\alpha(x)}$ tworzy jednoparametrową, abelową grupę przekształceń unitarnych, którą oznaczamy $U(1)$.

Udowodnijmy niezmienniczość cechowania rozpatrywanego równania. Ponieważ

$$\partial_\mu \left(\psi'(x)\right) =$$

Udowodnijmy niezmienniczość cechowania rozpatrywanego równania. Ponieważ

$$\partial_\mu \left(\psi'(x)\right) = \partial_\mu \left(e^{ie\alpha(x)}\psi(x)\right) =$$

Cząstka w zewnętrznym polu EM

Udowodnijmy niezmienniczość cechowania rozpatrywanego równania. Ponieważ

$$\partial_\mu\left(\psi'(x)\right) = \partial_\mu\left(e^{ie\alpha(x)}\psi(x)\right) = ie\partial_\mu\alpha(x)e^{ie\alpha(x)}\psi(x) + e^{ie\alpha(x)}\partial_\mu\psi(x),$$

Udowodnijmy niezmienniczość cechowania rozpatrywanego równania. Ponieważ

$$\partial_\mu \left(\psi'(x)\right) = \partial_\mu \left(e^{ie\alpha(x)}\psi(x)\right) = ie\partial_\mu\alpha(x)e^{ie\alpha(x)}\psi(x) + e^{ie\alpha(x)}\partial_\mu\psi(x),$$

to lewa strona równania Diraca po transformacji cechowania będzie miała postać

$$\left(i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/' - m\right)\psi'(x) =$$

Udowodnijmy niezmienniczość cechowania rozpatrywanego równania. Ponieważ

$$\partial_\mu \left(\psi'(x)\right) = \partial_\mu \left(e^{ie\alpha(x)}\psi(x)\right) = ie\partial_\mu\alpha(x)e^{ie\alpha(x)}\psi(x) + e^{ie\alpha(x)}\partial_\mu\psi(x),$$

to lewa strona równania Diraca po transformacji cechowania będzie miała postać

$$\left(i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/' - m\right)\psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\left[i\partial\!\!\!/ - e\gamma^\mu\left(\partial_\mu\alpha + A'_\mu\right) - m\right]\psi(x).$$

Udowodnijmy niezmienniczość cechowania rozpatrywanego równania. Ponieważ

$$\partial_\mu \left(\psi'(x)\right) = \partial_\mu \left(e^{ie\alpha(x)}\psi(x)\right) = ie\partial_\mu\alpha(x)e^{ie\alpha(x)}\psi(x) + e^{ie\alpha(x)}\partial_\mu\psi(x),$$

to lewa strona równania Diraca po transformacji cechowania będzie miała postać

$$\left(i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/' - m\right)\psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\left[i\partial\!\!\!/ - e\gamma^\mu\left(\partial_\mu\alpha + A'_\mu\right) - m\right]\psi(x).$$

Widać, że prawa strona będzie równa zero na podstawie wyjściowego równania Diraca, jeżeli

$$\partial_\mu\alpha + A'_\mu = A_\mu \quad \Leftrightarrow \quad A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\alpha.$$

Cząstka w zewnętrznym polu EM

Udowodnijmy niezmienniczość cechowania rozpatrywanego równania. Ponieważ

$$\partial_\mu \left(\psi'(x)\right) = \partial_\mu \left(e^{ie\alpha(x)}\psi(x)\right) = ie\partial_\mu\alpha(x)e^{ie\alpha(x)}\psi(x) + e^{ie\alpha(x)}\partial_\mu\psi(x),$$

to lewa strona równania Diraca po transformacji cechowania będzie miała postać

$$\left(i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/' - m\right)\psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\left[i\partial\!\!\!/ - e\gamma^\mu\left(\partial_\mu\alpha + A'_\mu\right) - m\right]\psi(x).$$

Widać, że prawa strona będzie równa zero na podstawie wyjściowego równania Diraca, jeżeli

$$\partial_\mu\alpha + A'_\mu = A_\mu \quad \Leftrightarrow \quad A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\alpha.$$

Cząstka w zewnętrznym polu EM

Przekształćmy równanie Diraca dla cząstki w zewnętrznym polu EM

$$(i\not{\partial} - e\not{A} - m)\,\psi = 0.$$

Rozpisując $\not{\partial}$ i $\not{A}$ w składowych otrzymamy

$$\left(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - e\gamma^0 A_0 - e\gamma^i A_i - m\right)\psi = 0.$$

Cząstka w zewnętrznym polu EM

Przekształćmy równanie Diraca dla cząstki w zewnętrznym polu EM

$$\left(i\not{\partial} - e\not{A} - m\right)\psi = 0.$$

Rozpisując $\not{\partial}$ i $\not{A}$ w składowych otrzymamy

$$\left(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - e\gamma^0 A_0 - e\gamma^i A_i - m\right)\psi = 0.$$

Mnożąc lewostronnie przez γ^0 otrzymamy

$$\left(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^i A_i - m\gamma^0\right)\psi = 0,$$

gdzie skorzystaliśmy z równości $\left(\gamma^0\right)^2 = \mathbb{I}$.

Cząstka w zewnętrznym polu EM

Przekształćmy równanie Diraca dla cząstki w zewnętrznym polu EM

$$(i\not{\partial} - e\not{A} - m)\,\psi = 0.$$

Rozpisując $\not{\partial}$ i $\not{A}$ w składowych otrzymamy

$$\left(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - e\gamma^0 A_0 - e\gamma^i A_i - m\right)\psi = 0.$$

Mnożąc lewostronnie przez γ^0 otrzymamy

$$\left(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^i A_i - m\gamma^0\right)\psi = 0,$$

gdzie skorzystaliśmy z równości $\left(\gamma^0\right)^2 = \mathbb{I}$.

Cząstka w zewnętrznym polu EM

Równanie

$$\left(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^i A_i - m\gamma^0\right)\psi = 0$$

możemy przepisać w formie

$$\left(i\partial_0 + i\gamma^0\,\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} - eA^0 + e\gamma^0\,\vec{\gamma}\cdot\vec{A} - m\gamma^0\right)\psi = 0,$$

gdzie wykorzystaliśmy związki

$$A^0 = A_0, \qquad A^i = -A_i, \qquad \vec{\nabla} = [\partial_1, \partial_2, \partial_3].$$

Równanie

$$\left(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^i A_i - m\gamma^0\right)\psi = 0$$

możemy przepisać w formie

$$\left(i\partial_0 + i\gamma^0\,\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} - eA^0 + e\gamma^0\,\vec{\gamma}\cdot\vec{A} - m\gamma^0\right)\psi = 0,$$

gdzie wykorzystaliśmy związki

$$A^0 = A_0, \qquad A^i = -A_i, \qquad \vec{\nabla} = [\partial_1, \partial_2, \partial_3]\,.$$

Powróćmy do macierzy β i α_i, $i = 1, 2, 3$,

Równanie

$$\left(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^i A_i - m\gamma^0\right)\psi = 0$$

możemy przepisać w formie

$$\left(i\partial_0 + i\gamma^0\,\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} - eA^0 + e\gamma^0\,\vec{\gamma}\cdot\vec{A} - m\gamma^0\right)\psi = 0,$$

gdzie wykorzystaliśmy związki

$$A^0 = A_0, \qquad A^i = -A_i, \qquad \vec{\nabla} = [\partial_1, \partial_2, \partial_3]\,.$$

Powróćmy do macierzy β i α_i, $i = 1, 2, 3$,

$$\gamma^0 = \beta,$$

Cząstka w zewnętrznym polu EM

Równanie

$$\left(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^i A_i - m\gamma^0\right)\psi = 0$$

możemy przepisać w formie

$$\left(i\partial_0 + i\gamma^0\,\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} - eA^0 + e\gamma^0\,\vec{\gamma}\cdot\vec{A} - m\gamma^0\right)\psi = 0,$$

gdzie wykorzystaliśmy związki

$$A^0 = A_0, \qquad A^i = -A_i, \qquad \vec{\nabla} = [\partial_1, \partial_2, \partial_3]\,.$$

Powróćmy do macierzy β i α_i, $i = 1, 2, 3$,

$$\gamma^0 = \beta, \qquad \gamma^i = \beta\alpha_i$$

Cząstka w zewnętrznym polu EM

Równanie

$$\left(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^i A_i - m\gamma^0\right)\psi = 0$$

możemy przepisać w formie

$$\left(i\partial_0 + i\gamma^0\,\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} - eA^0 + e\gamma^0\,\vec{\gamma}\cdot\vec{A} - m\gamma^0\right)\psi = 0,$$

gdzie wykorzystaliśmy związki

$$A^0 = A_0, \qquad A^i = -A_i, \qquad \vec{\nabla} = [\partial_1, \partial_2, \partial_3]\,.$$

Powróćmy do macierzy β i α_i, $i = 1, 2, 3$,

$$\gamma^0 = \beta, \qquad \gamma^i = \beta\alpha_i \quad \Rightarrow \qquad \gamma^0\,\vec{\gamma} = \vec{\alpha},$$

gdyż $\beta^2 = (\gamma^0)^2 = \mathbb{I}$.

Równanie

$$\left(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^i A_i - m\gamma^0\right)\psi = 0$$

możemy przepisać w formie

$$\left(i\partial_0 + i\gamma^0\,\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} - eA^0 + e\gamma^0\,\vec{\gamma}\cdot\vec{A} - m\gamma^0\right)\psi = 0,$$

gdzie wykorzystaliśmy związki

$$A^0 = A_0, \qquad A^i = -A_i, \qquad \vec{\nabla} = [\partial_1, \partial_2, \partial_3]\,.$$

Powróćmy do macierzy β i α_i, $i = 1, 2, 3$,

$$\gamma^0 = \beta, \qquad \gamma^i = \beta\alpha_i \quad \Rightarrow \qquad \gamma^0\,\vec{\gamma} = \vec{\alpha},$$

gdyż $\beta^2 = (\gamma^0)^2 = \mathbb{I}$.

Równanie

$$\left(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^i A_i - m\gamma^0\right)\psi = 0$$

możemy wtedy przepisać w formie następującej

$$\left(i\partial_0 + i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} - eA^0 + e\vec{\alpha}\cdot\vec{A} - m\beta\right)\psi = 0,$$

co daje równanie

$$i\partial_0\psi = \left[\vec{\alpha}\cdot\left(-i\vec{\nabla} - e\vec{A}\right) + eA^0 + m\beta\right]\psi.$$

Zauważmy, że równanie to moglibyśmy otrzymać podstawiając $\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla} - e\vec{A}$ oraz dodając wyraz $e\phi = eA^0$ reprezentujący energię oddziaływania z zewnętrznym polem elektrycznym

Równanie

$$\left(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^i A_i - m\gamma^0\right)\psi = 0$$

możemy wtedy przepisać w formie następującej

$$\left(i\partial_0 + i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} - eA^0 + e\vec{\alpha}\cdot\vec{A} - m\beta\right)\psi = 0,$$

co daje równanie

$$i\partial_0\psi = \left[\vec{\alpha}\cdot\left(-i\vec{\nabla} - e\vec{A}\right) + eA^0 + m\beta\right]\psi.$$

Zauważmy, że równanie to moglibyśmy otrzymać podstawiając $\vec{p} \;\rightarrow\; -i\vec{\nabla} - e\vec{A}$ oraz dodając wyraz $e\phi = eA^0$ reprezentujący energię oddziaływania z zewnętrznym polem elektrycznym w hamiltonianie Diraca

$$H = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + m\beta,$$

tak jak robiliśmy w mechanice nierelatywistycznej.

Cząstka w zewnętrznym polu EM

Równanie

$$\left(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^i A_i - m\gamma^0\right)\psi = 0$$

możemy wtedy przepisać w formie następującej

$$\left(i\partial_0 + i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} - eA^0 + e\vec{\alpha}\cdot\vec{A} - m\beta\right)\psi = 0,$$

co daje równanie

$$i\partial_0\psi = \left[\vec{\alpha}\cdot\left(-i\vec{\nabla} - e\vec{A}\right) + eA^0 + m\beta\right]\psi.$$

Zauważmy, że równanie to moglibyśmy otrzymać podstawiając $\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla} - e\vec{A}$ oraz dodając wyraz $e\phi = eA^0$ reprezentujący energię oddziaływania z zewnętrznym polem elektrycznym w hamiltonianie Diraca

$$H = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + m\beta,$$

tak jak robiliśmy w mechanice nierelatywistycznej.

Cząstka w zewnętrznym polu EM

Zauważmy, że prawą stronę równania możemy zapisać w formie

$$i\partial_0\psi = \left[\vec{\alpha}\cdot\left(-i\vec{\nabla} - e\vec{A}\right) + eA^0 + m\beta\right]\psi$$

$$=$$

Cząstka w zewnętrznym polu EM

Zauważmy, że prawą stronę równania możemy zapisać w formie

$$
\begin{aligned}
i\partial_0\psi &= \left[\vec{\alpha}\cdot\left(-i\vec{\nabla}-e\vec{A}\right)+eA^0+m\beta\right]\psi \\
&= \left[\underbrace{\vec{\alpha}\cdot\left(-i\vec{\nabla}\right)+m\beta}_{H_0}+\underbrace{e\left(-\vec{\alpha}\cdot\vec{A}+A^0\right)}_{H_I}\right]\psi
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że prawą stronę równania możemy zapisać w formie

$$
\begin{aligned}
i\partial_0\psi &= \left[\vec{\alpha}\cdot\left(-i\vec{\nabla} - e\vec{A}\right) + eA^0 + m\beta\right]\psi \\
&= \Big[\underbrace{\vec{\alpha}\cdot\left(-i\vec{\nabla}\right) + m\beta}_{H_0} + \underbrace{e\left(-\vec{\alpha}\cdot\vec{A} + A^0\right)}_{H_I}\Big]\psi = \left(H_0 + H_I\right)\psi.
\end{aligned}
$$

Cząstka w zewnętrznym polu EM

Zauważmy, że prawą stronę równania możemy zapisać w formie

$$
\begin{aligned}
i\partial_0\psi &= \left[\vec{\alpha}\cdot\left(-i\vec{\nabla}-e\vec{A}\right)+eA^0+m\beta\right]\psi \\
&= \Big[\underbrace{\vec{\alpha}\cdot\left(-i\vec{\nabla}\right)+m\beta}_{H_0}+\underbrace{e\left(-\vec{\alpha}\cdot\vec{A}+A^0\right)}_{H_I}\Big]\psi=(H_0+H_I)\,\psi.
\end{aligned}
$$

Oznaczmy $\vec{\pi}=-i\vec{\nabla}-e\vec{A}$, wtedy pierwsza równość przybiera postać

$$i\partial_0\psi=\left[\vec{\alpha}\cdot\vec{\pi}+eA^0+m\beta\right]\psi.$$

Cząstka w zewnętrznym polu EM

Zauważmy, że prawą stronę równania możemy zapisać w formie

$$
\begin{aligned}
i\partial_0\psi &= \left[\vec{\alpha}\cdot\left(-i\vec{\nabla}-e\vec{A}\right)+eA^0+m\beta\right]\psi \\
&= \Big[\underbrace{\vec{\alpha}\cdot\left(-i\vec{\nabla}\right)+m\beta}_{H_0}+\underbrace{e\left(-\vec{\alpha}\cdot\vec{A}+A^0\right)}_{H_I}\Big]\psi = (H_0+H_I)\,\psi.
\end{aligned}
$$

Oznaczmy $\vec{\pi}=-i\vec{\nabla}-e\vec{A}$, wtedy pierwsza równość przybiera postać

$$
i\partial_0\psi = \left[\vec{\alpha}\cdot\vec{\pi}+eA^0+m\beta\right]\psi.
$$

Zbadajmy granicę nierelatywistyczną tego równania, tzn. załóżmy, że prędkość cząstki spełnia warunek $v \ll c$.

Cząstka w zewnętrznym polu EM

Zauważmy, że prawą stronę równania możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned} i\partial_0\psi &= \left[\vec{\alpha}\cdot\left(-i\vec{\nabla}-e\vec{A}\right)+eA^0+m\beta\right]\psi \\ &= \Big[\underbrace{\vec{\alpha}\cdot\left(-i\vec{\nabla}\right)+m\beta}_{H_0}+\underbrace{e\left(-\vec{\alpha}\cdot\vec{A}+A^0\right)}_{H_I}\Big]\psi=(H_0+H_I)\,\psi. \end{aligned}$$

Oznaczmy $\vec{\pi}=-i\vec{\nabla}-e\vec{A}$, wtedy pierwsza równość przybiera postać

$$i\partial_0\psi=\left[\vec{\alpha}\cdot\vec{\pi}+eA^0+m\beta\right]\psi.$$

Zbadajmy granicę nierelatywistyczną tego równania, tzn. załóżmy, że prędkość cząstki spełnia warunek $v \ll c$.

Granica nierelatywistyczna

Macierze Diraca w reprezentacji Diraca mają postać

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \equiv \beta, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego.

W tej reprezentacji macierze $\vec{\alpha}$ dane są wzorem

$$\vec{\alpha} = \beta\,\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

Granica nierelatywistyczna

Macierze Diraca w reprezentacji Diraca mają postać

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \equiv \beta, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego.
W tej reprezentacji macierze $\vec{\alpha}$ dane są wzorem

$$\vec{\alpha} = \beta\,\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}.$$

Macierze Diraca w reprezentacji Diraca mają postać

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \equiv \beta, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego.
W tej reprezentacji macierze $\vec{\alpha}$ dane są wzorem

$$\vec{\alpha} = \beta\,\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}.$$

Spinor Diraca zapiszemy w formie

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Macierze Diraca w reprezentacji Diraca mają postać

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \equiv \beta, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego.
W tej reprezentacji macierze $\vec{\alpha}$ dane są wzorem

$$\vec{\alpha} = \beta\,\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}.$$

Spinor Diraca zapiszemy w formie

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Granica nierelatywistyczna

Równanie

$$i\partial_0 \psi = \left[\vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + eA^0 + m\beta\right] \psi$$

w reprezentacji Diraca przybiera postać

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\pi} + eA^0 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Równanie

$$i\partial_0\psi = \left[\vec{\alpha}\cdot\vec{\pi} + eA^0 + m\beta\right]\psi$$

w reprezentacji Diraca przybiera postać

$$i\partial_0\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}\cdot\vec{\pi} + eA^0\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}.$$

Dodając macierze w nawiasie kwadratowym otrzymamy równanie

$$i\partial_0\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}eA^0 + m & \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} & eA^0 - m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}.$$

Granica nierelatywistyczna

Równanie

$$i\partial_0\psi = \left[\vec{\alpha}\cdot\vec{\pi} + eA^0 + m\beta\right]\psi$$

w reprezentacji Diraca przybiera postać

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\cdot\vec{\pi} + eA^0 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Dodając macierze w nawiasie kwadratowym otrzymamy równanie

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA^0 + m & \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} & eA^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Granica nierelatywistyczna

Równanie

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA^0 + m & \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & eA^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

możemy rozbić na dwa równania na spinory dwuskładnikowe φ i χ

Granica nierelatywistyczna

Równanie

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA^0 + m & \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} & eA^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

możemy rozbić na dwa równania na spinory dwuskładnikowe φ i χ

$$i\partial_0\varphi$$

Równanie

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA^0 + m & \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} & eA^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

możemy rozbić na dwa równania na spinory dwuskładnikowe φ i χ

$$i\partial_0\varphi \quad =$$

Granica nierelatywistyczna

Równanie

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA^0 + m & \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} & eA^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

możemy rozbić na dwa równania na spinory dwuskładnikowe φ i χ

$$i\partial_0\varphi = \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,\chi + eA^0\varphi + m\varphi,$$

Równanie

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA^0 + m & \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} & eA^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

możemy rozbić na dwa równania na spinory dwuskładnikowe φ i χ

$$\begin{aligned} i\partial_0\varphi &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,\chi + eA^0\varphi + m\varphi, \\ i\partial_0\chi & \end{aligned}$$

Granica nierelatywistyczna

Równanie

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA^0 + m & \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} & eA^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

możemy rozbić na dwa równania na spinory dwuskładnikowe φ i χ

$$\begin{aligned} i\partial_0\varphi &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,\chi + eA^0\varphi + m\varphi, \\ i\partial_0\chi &= \end{aligned}$$

Równanie

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA^0 + m & \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} & eA^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

możemy rozbić na dwa równania na spinory dwuskładnikowe φ i χ

$$\begin{aligned} i\partial_0\varphi &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,\chi + eA^0\varphi + m\varphi, \\ i\partial_0\chi &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,\varphi + eA^0\chi - m\chi. \end{aligned}$$

Równanie

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA^0 + m & \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & eA^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

możemy rozbić na dwa równania na spinory dwuskładnikowe φ i χ

$$\begin{aligned} i\partial_0 \varphi &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\, \chi + eA^0 \varphi + m\varphi, \\ i\partial_0 \chi &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\, \varphi + eA^0 \chi - m\chi. \end{aligned}$$

W granicy nierelatywistycznej dominuje energia spoczynkowa cząstki, a więc największe są wyrazy z masą cząstki m.

Granica nierelatywistyczna

Równanie

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA^0 + m & \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} & eA^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

możemy rozbić na dwa równania na spinory dwuskładnikowe φ i χ

$$\begin{aligned} i\partial_0\varphi &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,\chi + eA^0\varphi + m\varphi, \\ i\partial_0\chi &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,\varphi + eA^0\chi - m\chi. \end{aligned}$$

W granicy nierelatywistycznej dominuje energia spoczynkowa cząstki, a więc największe są wyrazy z masą cząstki m.

Przypomnijmy, że dla stanów stacjonarnych zależność funkcji falowej od czasu ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

Ponieważ energia jest zdominowana przez masę, to możemy wprowadzić Φ i X, które będą wolnozmienne w czasie t

$$\varphi = e^{-imt}\Phi, \qquad \chi = e^{-imt}X, \qquad (\hbar = c = 1).$$

Przypomnijmy, że dla stanów stacjonarnych zależność funkcji falowej od czasu ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

Ponieważ energia jest zdominowana przez masę, to możemy wprowadzić Φ i X, które będą wolnozmienne w czasie t

$$\varphi = e^{-imt}\Phi, \qquad \chi = e^{-imt}X, \qquad (\hbar = c = 1).$$

Obliczmy pochodne czasowe

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad =$$

Przypomnijmy, że dla stanów stacjonarnych zależność funkcji falowej od czasu ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

Ponieważ energia jest zdominowana przez masę, to możemy wprowadzić Φ i X, które będą wolnozmienne w czasie t

$$\varphi = e^{-imt}\Phi, \qquad \chi = e^{-imt}X, \qquad (\hbar = c = 1).$$

Obliczmy pochodne czasowe

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = i(-im)e^{-imt}\Phi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t} =$$

Przypomnijmy, że dla stanów stacjonarnych zależność funkcji falowej od czasu ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

Ponieważ energia jest zdominowana przez masę, to możemy wprowadzić Φ i X, które będą wolnozmienne w czasie t

$$\varphi = e^{-imt}\Phi, \qquad \chi = e^{-imt}X, \qquad (\hbar = c = 1).$$

Obliczmy pochodne czasowe

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad = \quad i(-im)e^{-imt}\Phi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

Przypomnijmy, że dla stanów stacjonarnych zależność funkcji falowej od czasu ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

Ponieważ energia jest zdominowana przez masę, to możemy wprowadzić Φ i X, które będą wolnozmienne w czasie t

$$\varphi = e^{-imt}\Phi, \qquad \chi = e^{-imt}X, \qquad (\hbar = c = 1).$$

Obliczmy pochodne czasowe

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = i(-im)e^{-imt}\Phi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

$$i\frac{\partial\chi}{\partial t}$$

Przypomnijmy, że dla stanów stacjonarnych zależność funkcji falowej od czasu ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

Ponieważ energia jest zdominowana przez masę, to możemy wprowadzić Φ i X, które będą wolnozmienne w czasie t

$$\varphi = e^{-imt}\Phi, \qquad \chi = e^{-imt}X, \qquad (\hbar = c = 1).$$

Obliczmy pochodne czasowe

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= i(-im)e^{-imt}\Phi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \\ i\frac{\partial\chi}{\partial t} &= \end{aligned}$$

Granica nierelatywistyczna

Przypomnijmy, że dla stanów stacjonarnych zależność funkcji falowej od czasu ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

Ponieważ energia jest zdominowana przez masę, to możemy wprowadzić Φ i X, które będą wolnozmienne w czasie t

$$\varphi = e^{-imt}\Phi, \qquad \chi = e^{-imt}X, \qquad (\hbar = c = 1).$$

Obliczmy pochodne czasowe

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= i(-im)e^{-imt}\Phi + ie^{-imt}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \\ i\frac{\partial \chi}{\partial t} &= m\chi + ie^{-imt}\frac{\partial X}{\partial t}. \end{aligned}$$

Granica nierelatywistyczna

Przypomnijmy, że dla stanów stacjonarnych zależność funkcji falowej od czasu ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

Ponieważ energia jest zdominowana przez masę, to możemy wprowadzić Φ i X, które będą wolnozmienne w czasie t

$$\varphi = e^{-imt}\Phi, \qquad \chi = e^{-imt}X, \qquad (\hbar = c = 1).$$

Obliczmy pochodne czasowe

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= i(-im)e^{-imt}\Phi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \\ i\frac{\partial\chi}{\partial t} &= m\chi + ie^{-imt}\frac{\partial X}{\partial t}. \end{aligned}$$

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial \Phi}{\partial t} =$$

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, e^{-imt}X + eA^0 e^{-imt}\Phi + m\varphi,$$

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, e^{-imt}X + eA^0 e^{-imt}\Phi + m\varphi,$$

$$m\chi + ie^{-imt}\frac{\partial X}{\partial t}$$

Granica nierelatywistyczna

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$
\begin{aligned}
m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, e^{-imt}X + eA^0 e^{-imt}\Phi + m\varphi, \\
m\chi + ie^{-imt}\frac{\partial X}{\partial t} &=
\end{aligned}
$$

Granica nierelatywistyczna

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$
\begin{aligned}
m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, e^{-imt}X + eA^0 e^{-imt}\Phi + m\varphi, \\
m\chi + ie^{-imt}\frac{\partial X}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, e^{-imt}\Phi + eA^0 e^{-imt}X - m\chi.
\end{aligned}
$$

Granica nierelatywistyczna

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$\begin{aligned} m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, e^{-imt} X + eA^0 e^{-imt}\Phi + m\varphi, \\ m\chi + ie^{-imt}\frac{\partial X}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, e^{-imt}\Phi + eA^0 e^{-imt} X - m\chi. \end{aligned}$$

Zredukujmy wyrazy z masą m i pomnóżmy obustronnie przez e^{imt}, wówczas otrzymamy

Granica nierelatywistyczna

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$
\begin{aligned}
m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, e^{-imt}X + eA^0 e^{-imt}\Phi + m\varphi, \\
m\chi + ie^{-imt}\frac{\partial X}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, e^{-imt}\Phi + eA^0 e^{-imt}X - m\chi.
\end{aligned}
$$

Zredukujmy wyrazy z masą m i pomnóżmy obustronnie przez e^{imt}, wówczas otrzymamy

$$
i\frac{\partial \Phi}{\partial t} =
$$

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$
\begin{aligned}
m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, e^{-imt}X + eA^0 e^{-imt}\Phi + m\varphi,\\
m\chi + ie^{-imt}\frac{\partial X}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, e^{-imt}\Phi + eA^0 e^{-imt}X - m\chi.
\end{aligned}
$$

Zredukujmy wyrazy z masą m i pomnóżmy obustronnie przez e^{imt}, wówczas otrzymamy

$$
i\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, X + eA^0\Phi,
$$

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$
\begin{aligned}
m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, e^{-imt} X + eA^0 e^{-imt}\Phi + m\varphi,\\
m\chi + ie^{-imt}\frac{\partial X}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, e^{-imt}\Phi + eA^0 e^{-imt} X - m\chi.
\end{aligned}
$$

Zredukujmy wyrazy z masą m i pomnóżmy obustronnie przez e^{imt}, wówczas otrzymamy

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, X + eA^0\Phi,\\
i\frac{\partial X}{\partial t}
\end{aligned}
$$

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$
\begin{aligned}
m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, e^{-imt}X + eA^0 e^{-imt}\Phi + m\varphi, \\
m\chi + ie^{-imt}\frac{\partial X}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, e^{-imt}\Phi + eA^0 e^{-imt}X - m\chi.
\end{aligned}
$$

Zredukujmy wyrazy z masą m i pomnóżmy obustronnie przez e^{imt}, wówczas otrzymamy

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, X + eA^0\Phi, \\
i\frac{\partial X}{\partial t} &=
\end{aligned}
$$

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$\begin{aligned} m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, e^{-imt}X + eA^0 e^{-imt}\Phi + m\varphi, \\ m\chi + ie^{-imt}\frac{\partial X}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, e^{-imt}\Phi + eA^0 e^{-imt}X - m\chi. \end{aligned}$$

Zredukujmy wyrazy z masą m i pomnóżmy obustronnie przez e^{imt}, wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, X + eA^0\Phi, \\ i\frac{\partial X}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, \Phi + eA^0 X - 2mX, \end{aligned}$$

gdzie po prawej stronie drugiego równania wykorzystaliśmy związek $-2m\chi e^{imt} = -2mX$.

Granica nierelatywistyczna

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$
\begin{aligned}
m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, e^{-imt} X + eA^0 e^{-imt}\Phi + m\varphi, \\
m\chi + ie^{-imt}\frac{\partial X}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, e^{-imt}\Phi + eA^0 e^{-imt} X - m\chi.
\end{aligned}
$$

Zredukujmy wyrazy z masą m i pomnóżmy obustronnie przez e^{imt}, wówczas otrzymamy

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, X + eA^0\Phi, \\
i\frac{\partial X}{\partial t} &= \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, \Phi + eA^0 X - 2mX,
\end{aligned}
$$

gdzie po prawej stronie drugiego równania wykorzystaliśmy związek $-2m\chi e^{imt} = -2mX$.

W drugim równaniu

$$i\frac{\partial X}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\, \Phi + eA^0 X - 2mX$$

załóżmy, że $eA^0 \ll 2m$ i skorzystajmy z założenia, że X jest wolnozmienną funkcją czasu, wtedy możemy je zapisać w formie

$$0 \approx \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\, \Phi - 2mX$$

W drugim równaniu

$$i\frac{\partial X}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\, \Phi + eA^0 X - 2mX$$

załóżmy, że $eA^0 \ll 2m$ i skorzystajmy z założenia, że X jest wolnozmienną funkcją czasu, wtedy możemy je zapisać w formie

$$0 \approx \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\, \Phi - 2mX \quad \Rightarrow \quad X \approx \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m}\, \Phi$$

W drugim równaniu

$$i\frac{\partial X}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\, \Phi + eA^0 X - 2mX$$

załóżmy, że $eA^0 \ll 2m$ i skorzystajmy z założenia, że X jest wolnozmienną funkcją czasu, wtedy możemy je zapisać w formie

$$0 \approx \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\, \Phi - 2mX \quad \Rightarrow \quad X \approx \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m}\, \Phi \ll \Phi.$$

Granica nierelatywistyczna

W drugim równaniu

$$i\frac{\partial X}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\, \Phi + eA^0 X - 2mX$$

załóżmy, że $eA^0 \ll 2m$ i skorzystajmy z założenia, że X jest wolnozmienną funkcją czasu, wtedy możemy je zapisać w formie

$$0 \approx \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\, \Phi - 2mX \quad \Rightarrow \quad X \approx \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m} \Phi \ll \Phi.$$

Dlatego funkcje χ i φ nazywamy odpowiednio małą i dużą składową spinora Diraca ψ.

W drugim równaniu

$$i\frac{\partial X}{\partial t} = \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,\Phi + eA^0 X - 2mX$$

załóżmy, że $eA^0 \ll 2m$ i skorzystajmy z założenia, że X jest wolnozmienną funkcją czasu, wtedy możemy je zapisać w formie

$$0 \approx \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,\Phi - 2mX \quad \Rightarrow \quad X \approx \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}}{2m}\,\Phi \ll \Phi.$$

Dlatego funkcje χ i φ nazywamy odpowiednio małą i dużą składową spinora Diraca ψ.

Wstawmy związek $X \approx \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}}{2m}\,\Phi$ do pierwszego równania

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\;X + eA^0\Phi$$

przyjmuje postać

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2}{2m} + eA^0\right]\Phi.$$

Wstawmy związek $X \approx \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}}{2m}\,\Phi$ do pierwszego równania

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,X + eA^0\Phi$$

przyjmuje postać

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \Big[\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2}{2m} + eA^0\Big]\Phi.$$

Jest to równanie Pauliego, które Wolfgang Pauli zaproponował w 1927 r. aby uwzględnić spin elektronu.

Wstawmy związek $X \approx \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}}{2m}\,\Phi$ do pierwszego równania

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,X + eA^0\Phi$$

przyjmuje postać

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2}{2m} + eA^0\right]\Phi.$$

Jest to równanie Pauliego, które Wolfgang Pauli zaproponował w 1927 r. aby uwzględnić spin elektronu. Przypomnijmy, że $\vec{\pi} = -i\vec{\nabla} - e\vec{A} = \vec{p} - e\vec{A}$, a A^0 jest potencjałem skalarnym.

Granica nierelatywistyczna

Wstawmy związek $X \approx \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}}{2m}\,\Phi$ do pierwszego równania

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\;X + eA^0\Phi$$

przyjmuje postać

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Big[\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2}{2m} + eA^0\Big]\Phi.$$

Jest to równanie Pauliego, które Wolfgang Pauli zaproponował w 1927 r. aby uwzględnić spin elektronu. Przypomnijmy, że $\vec{\pi} = -i\vec{\nabla} - e\vec{A} = \vec{p} - e\vec{A}$, a A^0 jest potencjałem skalarnym.

Przyjrzyjmy się bliżej równaniu Pauliego.

Granica nierelatywistyczna

Wstawmy związek $X \approx \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}}{2m}\,\Phi$ do pierwszego równania

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,X + eA^0\Phi$$

przyjmuje postać

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Big[\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2}{2m} + eA^0\Big]\Phi.$$

Jest to równanie Pauliego, które Wolfgang Pauli zaproponował w 1927 r. aby uwzględnić spin elektronu. Przypomnijmy, że $\vec{\pi} = -i\vec{\nabla} - e\vec{A} = \vec{p} - e\vec{A}$, a A^0 jest potencjałem skalarnym. Przyjrzyjmy się bliżej równaniu Pauliego.

Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \, \Phi \; = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \, \Phi =$$

Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2\,\Phi \;=\; (\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\cdot(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\,\Phi = \sigma_i\pi_i\sigma_j\pi_j\Phi =$$

Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2\,\Phi \;=\; (\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\cdot(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\,\Phi = \sigma_i\pi_i\sigma_j\pi_j\Phi = \;(\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k)\,\pi_i\pi_j\Phi,$$

gdzie wykorzystaliśmy związek $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$.

Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \Phi = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \Phi = \sigma_i \pi_i \sigma_j \pi_j \Phi = (\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k) \pi_i \pi_j \Phi,$$

gdzie wykorzystaliśmy związek $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$. Przekształćmy drugi wyraz

$$i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \pi_i \pi_j \Phi =$$

Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2\,\Phi \;=\; (\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\cdot(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\,\Phi = \sigma_i\pi_i\sigma_j\pi_j\Phi = \;\left(\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\right)\pi_i\pi_j\Phi,$$

gdzie wykorzystaliśmy związek $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$. Przekształćmy drugi wyraz

$$i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi \quad = \quad i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\left(-i\partial_i - eA_i\right)\left(-i\partial_j - eA_j\right)\Phi$$

Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2\,\Phi \;=\; (\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\cdot(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\,\Phi = \sigma_i\pi_i\sigma_j\pi_j\Phi = \;\left(\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\right)\pi_i\pi_j\Phi,$$

gdzie wykorzystaliśmy związek $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$. Przekształćmy drugi wyraz

$$\begin{aligned} i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\left(-i\partial_i - eA_i\right)\left(-i\partial_j - eA_j\right)\Phi \\ &= \end{aligned}$$

Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \Phi = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \Phi = \sigma_i \pi_i \sigma_j \pi_j \Phi = (\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k) \pi_i \pi_j \Phi,$$

gdzie wykorzystaliśmy związek $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$. Przekształćmy drugi wyraz

$$\begin{aligned} i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \pi_i \pi_j \Phi &= i\varepsilon_{ijk}\sigma_k (-i\partial_i - eA_i)(-i\partial_j - eA_j)\Phi \\ &= i\varepsilon_{ijk}\sigma_k [i\partial_i (eA_j\Phi) + eA_i i\partial_j \Phi], \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy równości $\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j = 0$ i $\varepsilon_{ijk}A_iA_j = 0$.

Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2\,\Phi \;=\; (\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\cdot(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\,\Phi = \sigma_i\pi_i\sigma_j\pi_j\Phi = \;(\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k)\,\pi_i\pi_j\Phi,$$

gdzie wykorzystaliśmy związek $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$. Przekształćmy drugi wyraz

$$\begin{aligned} i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\,(-i\partial_i - eA_i)\,(-i\partial_j - eA_j)\,\Phi \\ &= i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\,[i\partial_i\,(eA_j\Phi) + eA_i i\partial_j\Phi]\,, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy równości $\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j = 0$ i $\varepsilon_{ijk}A_iA_j = 0$.
Obliczając pochodną iloczynu otrzymamy

$$i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi \;=$$

Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2\,\Phi \;=\; (\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\cdot(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\,\Phi = \sigma_i\pi_i\sigma_j\pi_j\Phi = \;(\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k)\,\pi_i\pi_j\Phi,$$

gdzie wykorzystaliśmy związek $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$. Przekształćmy drugi wyraz

$$\begin{aligned} i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\,(-i\partial_i - eA_i)\,(-i\partial_j - eA_j)\,\Phi \\ &= i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\,[i\partial_i\,(eA_j\Phi) + eA_i i\partial_j\Phi]\,, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy równości $\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j = 0$ i $\varepsilon_{ijk}A_iA_j = 0$. Obliczając pochodną iloczynu otrzymamy

$$\begin{aligned} i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= i\sigma_k\varepsilon_{kij}\,[ie\,(\partial_iA_j)\,\Phi + ieA_j\partial_i\Phi + ieA_i\partial_j\Phi] \\ &= -e\sigma_k\varepsilon_{kij}\,(\partial_iA_j)\,\Phi - e\sigma_k\varepsilon_{kji}A_i\partial_j\Phi + e\sigma_k\varepsilon_{kji}A_i\partial_j\Phi, \end{aligned}$$

Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2\,\Phi \;=\; (\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\cdot(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\,\Phi = \sigma_i\pi_i\sigma_j\pi_j\Phi = \;\left(\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\right)\pi_i\pi_j\Phi,$$

gdzie wykorzystaliśmy związek $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$. Przekształćmy drugi wyraz

$$\begin{aligned} i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\left(-i\partial_i - eA_i\right)\left(-i\partial_j - eA_j\right)\Phi \\ &= i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\left[i\partial_i\left(eA_j\Phi\right) + eA_i i\partial_j\Phi\right], \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy równości $\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j = 0$ i $\varepsilon_{ijk}A_iA_j = 0$. Obliczając pochodną iloczynu otrzymamy

$$\begin{aligned} i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= i\sigma_k\varepsilon_{kij}\left[ie\left(\partial_iA_j\right)\Phi + ieA_j\partial_i\Phi + ieA_i\partial_j\Phi\right] \\ &= -e\sigma_k\varepsilon_{kij}\left(\partial_iA_j\right)\Phi - e\sigma_k\varepsilon_{kji}A_i\partial_j\Phi + e\sigma_k\varepsilon_{kji}A_i\partial_j\Phi, \end{aligned}$$

gdzie w przedostatnim wyrazie zamieniliśmy $i \leftrightarrow j$.

Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2\,\Phi \;=\; (\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\cdot(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\,\Phi = \sigma_i\pi_i\sigma_j\pi_j\Phi = \;(\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k)\,\pi_i\pi_j\Phi,$$

gdzie wykorzystaliśmy związek $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$. Przekształćmy drugi wyraz

$$\begin{aligned} i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\,(-i\partial_i - eA_i)\,(-i\partial_j - eA_j)\,\Phi \\ &= i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\,[i\partial_i\,(eA_j\Phi) + eA_i i\partial_j\Phi]\,, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy równości $\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j = 0$ i $\varepsilon_{ijk}A_iA_j = 0$. Obliczając pochodną iloczynu otrzymamy

$$\begin{aligned} i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= i\sigma_k\varepsilon_{kij}\,[ie\,(\partial_i A_j)\,\Phi + ieA_j\partial_i\Phi + ieA_i\partial_j\Phi] \\ &= -e\sigma_k\varepsilon_{kij}\,(\partial_i A_j)\,\Phi - e\sigma_k\varepsilon_{kji}A_i\partial_j\Phi + e\sigma_k\varepsilon_{kji}A_i\partial_j\Phi, \end{aligned}$$

gdzie w przedostatnim wyrazie zamieniliśmy $i \leftrightarrow j$.

Równanie Pauliego

Dwa ostatnie wyrazy redukują się, dlatego

$$i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi \quad = \quad -e\sigma_k\varepsilon_{kij}\left(\partial_i A_j\right)\Phi =$$

Równanie Pauliego

Dwa ostatnie wyrazy redukują się, dlatego

$$i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi \quad = \quad -e\sigma_k\varepsilon_{kij}\left(\partial_i A_j\right)\Phi = -e\sigma_k\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_k\Phi$$

Dwa ostatnie wyrazy redukują się, dlatego

$$
\begin{aligned}
i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= -e\sigma_k\varepsilon_{kij}\left(\partial_i A_j\right)\Phi = -e\sigma_k\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_k\Phi \\
&=
\end{aligned}
$$

Równanie Pauliego

Dwa ostatnie wyrazy redukują się, dlatego

$$
\begin{aligned}
i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= -e\sigma_k\varepsilon_{kij}\left(\partial_i A_j\right)\Phi = -e\sigma_k\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_k\Phi \\
&= -e\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\Phi =
\end{aligned}
$$

Równanie Pauliego

Dwa ostatnie wyrazy redukują się, dlatego

$$\begin{aligned} i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= -e\sigma_k\varepsilon_{kij}\left(\partial_i A_j\right)\Phi = -e\sigma_k\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_k\Phi \\ &= -e\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\Phi = -e\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\,\Phi, \end{aligned}$$

Dwa ostatnie wyrazy redukują się, dlatego

$$\begin{aligned} i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= -e\sigma_k\varepsilon_{kij}\left(\partial_i A_j\right)\Phi = -e\sigma_k\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_k\Phi \\ &= -e\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\Phi = -e\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\,\Phi, \end{aligned}$$

gdzie wprowadziliśmy wektor indukcji magnetycznej $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$.

Równanie Pauliego

Dwa ostatnie wyrazy redukują się, dlatego

$$\begin{aligned} i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= -e\sigma_k\varepsilon_{kij}\left(\partial_i A_j\right)\Phi = -e\sigma_k\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_k\Phi \\ &= -e\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\Phi = -e\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\,\Phi, \end{aligned}$$

gdzie wprowadziliśmy wektor indukcji magnetycznej $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$.
Zatem

$$\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\right)^2\Phi = \left(\delta_{ij}+i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\right)\pi_i\pi_j\Phi =$$

Równanie Pauliego

Dwa ostatnie wyrazy redukują się, dlatego

$$\begin{aligned} i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= -e\sigma_k\varepsilon_{kij}\left(\partial_i A_j\right)\Phi = -e\sigma_k\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_k\Phi \\ &= -e\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\Phi = -e\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\,\Phi, \end{aligned}$$

gdzie wprowadziliśmy wektor indukcji magnetycznej $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$. Zatem

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2\,\Phi = \left(\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\right)\pi_i\pi_j\Phi = \vec{\pi}^2\Phi - e\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\,\Phi.$$

Równanie Pauliego

Dwa ostatnie wyrazy redukują się, dlatego

$$\begin{aligned} i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= -e\sigma_k\varepsilon_{kij}\left(\partial_i A_j\right)\Phi = -e\sigma_k\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_k\Phi \\ &= -e\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\Phi = -e\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\,\Phi, \end{aligned}$$

gdzie wprowadziliśmy wektor indukcji magnetycznej $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$. Zatem

$$\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\right)^2\Phi = \left(\delta_{ij}+i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\right)\pi_i\pi_j\Phi = \vec{\pi}^2\Phi - e\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\,\Phi.$$

Równanie Pauliego

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2}{2m} + eA^0\right]\Phi$$

możemy przepisać w formie

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[\frac{\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2}{2m} - \frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + eA^0\right]\Phi.$$

Równanie Pauliego

Równanie Pauliego

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \Big[\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2}{2m} + eA^0\Big]\Phi$$

możemy przepisać w formie

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[\frac{\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2}{2m} - \frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + eA^0\right]\Phi.$$

Drugi wyraz po prawej stronie równania możemy zapisać jako

$$-\frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} \equiv -\vec{\mu}_s\cdot\vec{B},$$

Równanie Pauliego

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2}{2m} + eA^0\right]\Phi$$

możemy przepisać w formie

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[\frac{\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2}{2m} - \frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + eA^0\right]\Phi.$$

Drugi wyraz po prawej stronie równania możemy zapisać jako

$$-\frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} \equiv -\vec{\mu}_s\cdot\vec{B},$$

gdzie wprowadziliśmy spinowy moment magnetyczny elektronu $\vec{\mu}_s$.

Równanie Pauliego

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \Big[\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2}{2m} + eA^0\Big]\Phi$$

możemy przepisać w formie

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[\frac{\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2}{2m} - \frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + eA^0\right]\Phi.$$

Drugi wyraz po prawej stronie równania możemy zapisać jako

$$-\frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} \equiv -\vec{\mu}_s\cdot\vec{B},$$

gdzie wprowadziliśmy spinowy moment magnetyczny elektronu $\vec{\mu}_s$.

Równanie Pauliego

Spinowy moment magnetyczny elektronu możemy przepisać w formie

$$\vec{\mu}_s = \frac{e}{2m}\vec{\sigma} = 2\,\left(\frac{e}{2m}\right)\frac{1}{2}\vec{\sigma}$$

Równanie Pauliego

Spinowy moment magnetyczny elektronu możemy przepisać w formie

$$\vec{\mu}_s = \frac{e}{2m}\vec{\sigma} = 2\,\left(\frac{e}{2m}\right)\frac{1}{2}\vec{\sigma} \equiv g\left(\frac{e}{2m}\right)\vec{S},$$

Równanie Pauliego

Spinowy moment magnetyczny elektronu możemy przepisać w formie

$$\vec{\mu}_s = \frac{e}{2m}\vec{\sigma} = 2\left(\frac{e}{2m}\right)\frac{1}{2}\vec{\sigma} \equiv g\left(\frac{e}{2m}\right)\vec{S},$$

gdzie stosunek $\frac{e}{2m}$ nazywamy magnetonem Bohra,

Równanie Pauliego

Spinowy moment magnetyczny elektronu możemy przepisać w formie

$$\vec{\mu}_s = \frac{e}{2m}\vec{\sigma} = 2\,\left(\frac{e}{2m}\right)\frac{1}{2}\vec{\sigma} \equiv g\left(\frac{e}{2m}\right)\vec{S},$$

gdzie stosunek $\frac{e}{2m}$ nazywamy magnetonem Bohra, g jest stosunkiem żyromagnetycznym, nazywanym też czynnikiem Landégo,

Równanie Pauliego

Spinowy moment magnetyczny elektronu możemy przepisać w formie

$$\vec{\mu}_s = \frac{e}{2m}\vec{\sigma} = 2\,\left(\frac{e}{2m}\right)\frac{1}{2}\vec{\sigma} \equiv g\left(\frac{e}{2m}\right)\vec{S},$$

gdzie stosunek $\frac{e}{2m}$ nazywamy magnetonem Bohra, g jest stosunkiem żyromagnetycznym, nazywanym też czynnikiem Landégo, a $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ jest operatorem spinu elektronu w jednostkach $\hbar = 1$.

Równanie Pauliego

Spinowy moment magnetyczny elektronu możemy przepisać w formie

$$\vec{\mu}_s = \frac{e}{2m}\vec{\sigma} = 2\,\left(\frac{e}{2m}\right)\frac{1}{2}\vec{\sigma} \equiv g\left(\frac{e}{2m}\right)\vec{S},$$

gdzie stosunek $\frac{e}{2m}$ nazywamy magnetonem Bohra, g jest stosunkiem żyromagnetycznym, nazywanym też czynnikiem Landégo, a $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ jest operatorem spinu elektronu w jednostkach $\hbar = 1$.

Nierelatywistyczne równanie Pauliego przewiduje wartość

$$g = 2,$$

Równanie Pauliego

Spinowy moment magnetyczny elektronu możemy przepisać w formie

$$\vec{\mu}_s = \frac{e}{2m}\vec{\sigma} = 2\left(\frac{e}{2m}\right)\frac{1}{2}\vec{\sigma} \equiv g\left(\frac{e}{2m}\right)\vec{S},$$

gdzie stosunek $\frac{e}{2m}$ nazywamy magnetonem Bohra, g jest stosunkiem żyromagnetycznym, nazywanym też czynnikiem Landégo, a $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ jest operatorem spinu elektronu w jednostkach $\hbar = 1$.

Nierelatywistyczne równanie Pauliego przewiduje wartość

$$g = 2,$$

co dobrze - z dokładnością do małej poprawki - zgadza się z obserwacjami dla cząstek takich jak elektron i mion, czyli cząstek o spinie $\frac{1}{2}$ bez struktury wewnętrznej.

Równanie Pauliego

Spinowy moment magnetyczny elektronu możemy przepisać w formie

$$\vec{\mu}_s = \frac{e}{2m}\vec{\sigma} = 2\,\left(\frac{e}{2m}\right)\frac{1}{2}\vec{\sigma} \equiv g\left(\frac{e}{2m}\right)\vec{S},$$

gdzie stosunek $\frac{e}{2m}$ nazywamy magnetonem Bohra, g jest stosunkiem żyromagnetycznym, nazywanym też czynnikiem Landégo, a $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ jest operatorem spinu elektronu w jednostkach $\hbar = 1$.
Nierelatywistyczne równanie Pauliego przewiduje wartość

$$g = 2,$$

co dobrze - z dokładnością do małej poprawki - zgadza się z obserwacjami dla cząstek takich jak elektron i mion, czyli cząstek o spinie $\frac{1}{2}$ bez struktury wewnętrznej.
Dla protonu i neutronu, które są cząstkami złożonymi, jest inaczej.

Równanie Pauliego

Spinowy moment magnetyczny elektronu możemy przepisać w formie

$$\vec{\mu}_s = \frac{e}{2m}\vec{\sigma} = 2\,\left(\frac{e}{2m}\right)\frac{1}{2}\vec{\sigma} \equiv g\left(\frac{e}{2m}\right)\vec{S},$$

gdzie stosunek $\frac{e}{2m}$ nazywamy magnetonem Bohra, g jest stosunkiem żyromagnetycznym, nazywanym też czynnikiem Landégo, a $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ jest operatorem spinu elektronu w jednostkach $\hbar = 1$.

Nierelatywistyczne równanie Pauliego przewiduje wartość

$$g = 2,$$

co dobrze - z dokładnością do małej poprawki - zgadza się z obserwacjami dla cząstek takich jak elektron i mion, czyli cząstek o spinie $\frac{1}{2}$ bez struktury wewnętrznej.

Dla protonu i neutronu, które są cząstkami złożonymi, jest inaczej.

Równanie Pauliego

W jednorodnym polu magnetycznym $\vec{B}$, którego potencjał możemy zapisać w formie

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r},$$

wyraz

$$\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 \Phi$$

po prawej stronie równania Pauliego możemy przekształcić. W tym celu rozważmy

$$\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 \Phi = \left(p_i - eA_i\right)\left(p_i - eA_i\right)\Phi = (p_i p_i + e^2 A_i A_i)\Phi$$

$$-i\hbar\partial_i(-eA_i\Phi) - eA_i(-i\hbar\partial_i\Phi) =$$

Równanie Pauliego

W jednorodnym polu magnetycznym $\vec{B}$, którego potencjał możemy zapisać w formie

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r},$$

wyraz

$$\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 \Phi$$

po prawej stronie równania Pauliego możemy przekształcić. W tym celu rozważmy

$$\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 \Phi = \left(p_i - eA_i\right)\left(p_i - eA_i\right)\Phi = (p_i p_i + e^2 A_i A_i)\Phi$$
$$-i\hbar\partial_i(-eA_i\Phi) - eA_i(-i\hbar\partial_i\Phi) = (\vec{p}^2 + e^2\vec{A}^2)\Phi + 2ie\hbar A_i\partial_i\Phi,$$

W jednorodnym polu magnetycznym $\vec{B}$, którego potencjał możemy zapisać w formie

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r},$$

wyraz

$$\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 \Phi$$

po prawej stronie równania Pauliego możemy przekształcić. W tym celu rozważmy

$$\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 \Phi = (p_i - eA_i)(p_i - eA_i)\Phi = (p_i p_i + e^2 A_i A_i)\Phi$$
$$-i\hbar\partial_i(-eA_i\Phi) - eA_i(-i\hbar\partial_i\Phi) = (\vec{p}^2 + e^2\vec{A}^2)\Phi + 2ie\hbar A_i\partial_i\Phi,$$

gdzie wykorzystaliśmy równość

$$\partial_i A_i = \frac{1}{2}\partial_i(\vec{B}\times\vec{r})_i = \frac{1}{2}\partial_i(\varepsilon_{ijk}B_j x_k) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}B_j\partial_i x_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}B_j\delta_{ik} = 0.$$

Dalej zauważmy, że

$$\begin{aligned} 2ie\hbar A_i\partial_i &= -2eA_i p_i = -2e\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}B_j x_k p_i = -e\varepsilon_{jki}x_k p_i B_j \\ &= -e(\vec{r}\times\vec{p})_j B_j = -e\vec{L}\cdot\vec{B}, \end{aligned}$$

a zatem równanie Pauliego w jednorodnym polu magnetycznym przybiera postać

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2m}\left(\vec{L}+2\vec{S}\right)\cdot\vec{B} + \frac{e^2}{2m}\vec{A}^2 + eA^0\right]\Phi.$$

gdzie wykorzystaliśmy równość

$$\partial_i A_i = \frac{1}{2}\partial_i(\vec{B}\times\vec{r})_i = \frac{1}{2}\partial_i(\varepsilon_{ijk}B_j x_k) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}B_j\partial_i x_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}B_j\delta_{ik} = 0.$$

Dalej zauważmy, że

$$\begin{aligned} 2ie\hbar A_i\partial_i &= -2eA_i p_i = -2e\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}B_j x_k p_i = -e\varepsilon_{jki}x_k p_i B_j \\ &= -e(\vec{r}\times\vec{p})_j B_j = -e\vec{L}\cdot\vec{B}, \end{aligned}$$

a zatem równanie Pauliego w jednorodnym polu magnetycznym przybiera postać

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2m}\left(\vec{L}+2\vec{S}\right)\cdot\vec{B} + \frac{e^2}{2m}\vec{A}^2 + eA^0\right]\Phi.$$

Równanie Pauliego

Wyraz

$$-\frac{e}{2m}\vec{L}\cdot\vec{B} \equiv -\vec{\mu}_o\cdot\vec{B}$$

opisuje oddziaływanie momentu magnetycznego elektronu związanego z jego orbitalnym momentem pędu z zewnętrznym polem magnetycznym.

Całkowity moment magnetyczny $\vec{\mu}$, poprzez który elektron oddziaływuje z zewnętrznym polem magnetycznym jest sumą momentu orbitalnego i spinowego

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_o + \vec{\mu}_s = -\frac{e}{2m}(\vec{L} + 2\vec{S}).$$

Notatki odręczne

Równanie Pauliego

Wyraz

$$-\frac{e}{2m}\vec{L}\cdot\vec{B} \equiv -\vec{\mu}_o\cdot\vec{B}$$

opisuje oddziaływanie momentu magnetycznego elektronu związanego z jego orbitalnym momentem pędu z zewnętrznym polem magnetycznym.
Całkowity moment magnetyczny $\vec{\mu}$, poprzez który elektron oddziaływuje z zewnętrznym polem magnetycznym jest sumą momentu orbitalnego i spinowego

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_o + \vec{\mu}_s = -\frac{e}{2m}(\vec{L} + 2\vec{S}).$$

Notatki odręczne