Bilinear forms

Karol Kołodziej

Institute of Physics
University of Silesia, Katowice
http://kk.us.edu.pl

Równanie Diraca

W ramach kursu *Mechaniki Kwantowej* pokazaliśmy relatywistyczną współzmienniczość równania Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0,$$

gdzie macierze Diraca spełniają relacje antykomutacyjne

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

Równanie Diraca

W ramach kursu *Mechaniki Kwantowej* pokazaliśmy relatywistyczną współzmienniczość równania Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0,$$

gdzie macierze Diraca spełniają relacje antykomutacyjne

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

wraz z własnościami hermitowskości

$$\gamma^{0\,\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\,\dagger} = -\gamma^i$$

Równanie Diraca

W ramach kursu *Mechaniki Kwantowej* pokazaliśmy relatywistyczną współzmienniczość równania Diraca

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0,$$

gdzie macierze Diraca spełniają relacje antykomutacyjne

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

wraz z własnościami hermitowskości

$$\gamma^{0\,\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\,\dagger} = -\gamma^i \qquad \Rightarrow \qquad \gamma^{\mu\,\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0.$$

W ramach kursu *Mechaniki Kwantowej* pokazaliśmy relatywistyczną współzmienniczość równania Diraca

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right) \psi(x) = 0,$$

gdzie macierze Diraca spełniają relacje antykomutacyjne

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

wraz z własnościami hermitowskości

$$\gamma^{0\,\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\,\dagger} = -\gamma^i \qquad \Rightarrow \qquad \gamma^{\mu\,\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0.$$

Relatywistyczna współzmienniczość

Przez relatywistyczną współzmienniczość rozumiemy niezmienniczość względem translacji czasoprzestrzennych i współzmienniczość względem transformacji Lorentza, czyli niejednorodnych transformacji z grupy Poincare'go:

$$x^\mu \;\rightarrow\; x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu,$$

Relatywistyczna współzmienniczość

Przez relatywistyczną współzmienniczość rozumiemy niezmienniczość względem translacji czasoprzestrzennych i współzmienniczość względem transformacji Lorentza, czyli niejednorodnych transformacji z grupy Poincare'go:

$$x^{\mu} \;\rightarrow\; x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu},$$

gdzie $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ jest elementem macierzy transformacji Lorentza, która nie zmienia iloczynu skalarnego czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego:

Relatywistyczna współzmienniczość

Przez relatywistyczną współzmienniczość rozumiemy niezmienniczość względem translacji czasoprzestrzennych i współzmienniczość względem transformacji Lorentza, czyli niejednorodnych transformacji z grupy Poincare'go:

$$x^\mu \;\to\; x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu,$$

gdzie $\Lambda^\mu{}_\nu$ jest elementem macierzy transformacji Lorentza, która nie zmienia iloczynu skalarnego czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego:

$$x \to x' = \Lambda x, \qquad \text{przy} \qquad x' \cdot y' = x \cdot y.$$

Relatywistyczna współzmienniczość

Przez relatywistyczną współzmienniczość rozumiemy niezmienniczość względem translacji czasoprzestrzennych i współzmienniczość względem transformacji Lorentza, czyli niejednorodnych transformacji z grupy Poincare'go:

$$x^\mu \;\rightarrow\; x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu,$$

gdzie $\Lambda^\mu{}_\nu$ jest elementem macierzy transformacji Lorentza, która nie zmienia iloczynu skalarnego czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego:

$$x \rightarrow x' = \Lambda x, \qquad \text{przy} \qquad x' \cdot y' = x \cdot y.$$

Relatywistyczna współzmienniczość

Iloczyn skalarny czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego pozostanie niezmieniony jeśli

$$g_{\mu\,\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\,\sigma},$$

albo w formie macierzowej

$$\Lambda^T\Lambda = I.$$

Iloczyn skalarny czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego pozostanie niezmieniony jeśli

$$g_{\mu\,\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\,\sigma},$$

albo w formie macierzowej

$$\Lambda^T\Lambda = I.$$

Skąd obliczając obustronnie wyznacznik dostaniemy
$\det\left(\Lambda^T\Lambda\right) = \det\left(I\right)$

Iloczyn skalarny czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego pozostanie niezmieniony jeśli

$$g_{\mu\,\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\,\sigma},$$

albo w formie macierzowej

$$\Lambda^T\Lambda = I.$$

Skąd obliczając obustronnie wyznacznik dostaniemy
$\det\left(\Lambda^T\Lambda\right) = \det(I) \quad \Rightarrow \quad [\det(\Lambda)]^2 = 1$

Relatywistyczna współzmienniczość

Iloczyn skalarny czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego pozostanie niezmieniony jeśli

$$g_{\mu\,\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\,\sigma},$$

albo w formie macierzowej

$$\Lambda^T \Lambda = I.$$

Skąd obliczając obustronnie wyznacznik dostaniemy
$\det\left(\Lambda^T\Lambda\right) = \det(I) \quad \Rightarrow \quad [\det(\Lambda)]^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det(\Lambda) = \pm 1$

Iloczyn skalarny czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego pozostanie niezmieniony jeśli

$$g_{\mu\,\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\,\sigma},$$

albo w formie macierzowej

$$\Lambda^T \Lambda = I.$$

Skąd obliczając obustronnie wyznacznik dostaniemy

$\det\left(\Lambda^T\Lambda\right) = \det(I) \quad \Rightarrow \quad [\det(\Lambda)]^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det(\Lambda) = \pm 1$

$\det(\Lambda) = 1 \qquad \Rightarrow$ transformacje właściwe,

Iloczyn skalarny czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego pozostanie niezmieniony jeśli

$$g_{\mu\,\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\,\sigma},$$

albo w formie macierzowej

$$\Lambda^T \Lambda = I.$$

Skąd obliczając obustronnie wyznacznik dostaniemy
$\det\left(\Lambda^T\Lambda\right) = \det(I) \quad \Rightarrow \quad [\det(\Lambda)]^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det(\Lambda) = \pm 1$
$\det(\Lambda) = 1 \quad \Rightarrow$ transformacje właściwe, $\det(\Lambda) = -1 \quad \Rightarrow$ transformacje niewłaściwe.

Iloczyn skalarny czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego pozostanie niezmieniony jeśli

$$g_{\mu\,\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\,\sigma},$$

albo w formie macierzowej

$$\Lambda^T \Lambda = I.$$

Skąd obliczając obustronnie wyznacznik dostaniemy
$\det\left(\Lambda^T\Lambda\right) = \det(I) \quad \Rightarrow \quad [\det(\Lambda)]^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det(\Lambda) = \pm 1$
$\det(\Lambda) = 1 \quad \Rightarrow$ transformacje właściwe, $\det(\Lambda) = -1 \quad \Rightarrow$ transformacje niewłaściwe.
Transformację niewłaściwą możemy zrealizować przez złożenie transformacji właściwej i odbicia przestrzennego lub czasowego.

Iloczyn skalarny czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego pozostanie niezmieniony jeśli

$$g_{\mu\,\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\,\sigma},$$

albo w formie macierzowej

$$\Lambda^T \Lambda = I.$$

Skąd obliczając obustronnie wyznacznik dostaniemy
$\det\left(\Lambda^T\Lambda\right) = \det(I) \quad \Rightarrow \quad [\det(\Lambda)]^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det(\Lambda) = \pm 1$
$\det(\Lambda) = 1 \quad \Rightarrow$ transformacje właściwe, $\det(\Lambda) = -1 \quad \Rightarrow$ transformacje niewłaściwe.
Transformację niewłaściwą możemy zrealizować przez złożenie transformacji właściwej i odbicia przestrzennego lub czasowego.

Obiekt, który przy transformacjach Lorentza $x \to x' = \Lambda x$ transformuje się wg prawa

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x),$$

Spinory Diraca

Obiekt, który przy transformacjach Lorentza $x \to x' = \Lambda x$ transformuje się wg prawa

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x),$$

gdzie nieosobliwa macierz $S(\Lambda)$ spełnia warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

Spinory Diraca

Obiekt, który przy transformacjach Lorentza $x \to x' = \Lambda x$ transformuje się wg prawa

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x),$$

gdzie nieosobliwa macierz $S(\Lambda)$ spełnia warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

nazywamy spinorem Diraca.

Obiekt, który przy transformacjach Lorentza $x \to x' = \Lambda x$ transformuje się wg prawa

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x),$$

gdzie nieosobliwa macierz $S(\Lambda)$ spełnia warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

nazywamy spinorem Diraca.

Pokazaliśmy, że dla właściwej (ciągłej) transformacji Lorentza macierz $S(\Lambda)$ ma postać:

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}},$$

gdzie macierze $\sigma_{\alpha\beta}$ mają postać:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\left[\gamma_\alpha, \gamma_\beta\right].$$

Spinory Diraca

Obiekt, który przy transformacjach Lorentza $x \to x' = \Lambda x$ transformuje się wg prawa

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x),$$

gdzie nieosobliwa macierz $S(\Lambda)$ spełnia warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

nazywamy spinorem Diraca.

Pokazaliśmy, że dla właściwej (ciągłej) transformacji Lorentza macierz $S(\Lambda)$ ma postać:

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}},$$

gdzie macierze $\sigma_{\alpha\beta}$ mają postać:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\left[\gamma_\alpha, \gamma_\beta\right].$$

Pokazaliśmy również, że naturalne jest założenie, że spinor Diraca ma postać

$$\psi(x) = \left(\begin{array}{c} \xi(x) \\ \eta(x) \end{array} \right),$$

a prawo transformacyjne przybiera postać następującą

$$\psi(x) \to \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = \left(\begin{array}{cc} e^{\vec{\varphi}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}+i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\vec{\varphi}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}+i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \xi(x) \\ \eta(x) \end{array} \right),$$

gdzie dwuskładnikowe spinory Pauliego $\xi(x)$ i $\eta(x)$ przy obrotach o dowolny kąt $\vec{\theta}$ i pchnięciach lorentzowskich opisywanych 3 parametrami $\vec{\varphi}$, przy czym $\mathrm{th}\varphi = \beta = \frac{v}{c}$, transformują się następująco

$$\begin{aligned} \xi(x) \quad &\to \quad \xi'(x') = e^{\vec{\varphi}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}+i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}\xi(x) \\ \eta(x) \quad &\to \quad \eta'(x') = e^{-\vec{\varphi}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}+i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}\eta(x). \end{aligned}$$

Spinory Pauliego

Mówimy przy tym, że reprezentacja grupy Lorentza dla spinu $\frac{1}{2}$, a dokładnie jej grupy nakrywającej $SL(2,\mathbb{C})$, jest przywiedlna (redukowalna) do sumy jej dwóch nierównoważnych reprezentacji $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$. Dlatego spinor Diraca często nazywany jest bispinorem.

Spinory Pauliego

Mówimy przy tym, że reprezentacja grupy Lorentza dla spinu $\frac{1}{2}$, a dokładnie jej grupy nakrywającej $SL(2, \mathbb{C})$, jest przywiedlna (redukowalna) do sumy jej dwóch nierównoważnych reprezentacji $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$. Dlatego spinor Diraca często nazywany jest bispinorem. Więcej na ten temat można znaleźć np. w § 2.3 podręcznika L.H. Ryder *Quantum Field Theory*.

Mówimy przy tym, że reprezentacja grupy Lorentza dla spinu $\frac{1}{2}$, a dokładnie jej grupy nakrywającej $SL(2, \mathbb{C})$, jest przywiedlna (redukowalna) do sumy jej dwóch nierównoważnych reprezentacji $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$. Dlatego spinor Diraca często nazywany jest bispinorem. Więcej na ten temat można znaleźć np. w § 2.3 podręcznika L.H. Ryder *Quantum Field Theory*.

Spinory Pauliego ξ i η identyfikujemy odpowiednio ze spinorami prawym i lewym, o których będzie mowa w dalszej części kursu,

$$\xi \to \tilde{\varphi}_R, \qquad \eta \to \tilde{\varphi}_L.$$

Zadanie. Pokazać, że przy czystym pchnięciu lorentzowskim, dla którego $\vec{\theta} = 0$, spinor $\varphi_R(x)$ transformuje się następująco

$$\tilde{\varphi}_R(x) \to e^{\vec{\varphi}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}\tilde{\varphi}_R(x) = \left[\mathrm{ch}\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \vec{\sigma}\cdot\hat{k}\,\mathrm{sh}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]\tilde{\varphi}_R(x),$$

gdzie $\hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ jest wektorem jednostkowym w kierunku pchnięcia.

Mówimy przy tym, że reprezentacja grupy Lorentza dla spinu $\frac{1}{2}$, a dokładnie jej grupy nakrywającej $SL(2,\mathbb{C})$, jest przywiedlna (redukowalna) do sumy jej dwóch nierównoważnych reprezentacji $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$. Dlatego spinor Diraca często nazywany jest bispinorem. Więcej na ten temat można znaleźć np. w § 2.3 podręcznika L.H. Ryder *Quantum Field Theory*.

Spinory Pauliego ξ i η identyfikujemy odpowiednio ze spinorami prawym i lewym, o których będzie mowa w dalszej części kursu,

$$\xi \to \tilde{\varphi}_R, \qquad \eta \to \tilde{\varphi}_L.$$

Zadanie. Pokazać, że przy czystym pchnięciu lorentzowskim, dla którego $\vec{\theta}=0$, spinor $\varphi_R(x)$ transformuje się następująco

$$\tilde{\varphi}_R(x) \to e^{\vec{\varphi}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}\tilde{\varphi}_R(x) = \left[\mathrm{ch}\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \vec{\sigma}\cdot\hat{k}\,\mathrm{sh}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]\tilde{\varphi}_R(x),$$

gdzie $\hat{k}=\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ jest wektorem jednostkowym w kierunku pchnięcia.

Pokazaliśmy również jak transformuje się barowany spinor Diraca.
Dla spinora $\psi(x)$ zachodzi

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Pokazaliśmy również jak transformuje się barowany spinor Diraca.
Dla spinora $\psi(x)$ zachodzi

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Dokonajmy sprzężenia diracowskiego

$$\bar{\psi}'(x')$$

Pokazaliśmy również jak transformuje się barowany spinor Diraca.
Dla spinora $\psi(x)$ zachodzi

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Dokonajmy sprzężenia diracowskiego

$$\bar{\psi}'(x') \quad =$$

Pokazaliśmy również jak transformuje się barowany spinor Diraca.
Dla spinora $\psi(x)$ zachodzi

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Dokonajmy sprzężenia diracowskiego

$$\bar{\psi}'(x') \quad = \quad \psi'(x')^{\dagger}\gamma^0$$

Pokazaliśmy również jak transformuje się barowany spinor Diraca.
Dla spinora $\psi(x)$ zachodzi

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Dokonajmy sprzężenia diracowskiego

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'(x')^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger(x) S^\dagger(\Lambda)\gamma^0$$

Pokazaliśmy również jak transformuje się barowany spinor Diraca.
Dla spinora $\psi(x)$ zachodzi

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Dokonajmy sprzężenia diracowskiego

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'(x')^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger(x)S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0$$

Pokazaliśmy również jak transformuje się barowany spinor Diraca.
Dla spinora $\psi(x)$ zachodzi

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Dokonajmy sprzężenia diracowskiego

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x') &= \psi'(x')^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger(x)S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 \\ &=\end{aligned}$$

Pokazaliśmy również jak transformuje się barowany spinor Diraca.
Dla spinora $\psi(x)$ zachodzi

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Dokonajmy sprzężenia diracowskiego

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x') &= \psi'(x')^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger(x)S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 \\ &= \bar{\psi}(x)\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0.\end{aligned}$$

Pokazaliśmy również jak transformuje się barowany spinor Diraca.
Dla spinora $\psi(x)$ zachodzi

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Dokonajmy sprzężenia diracowskiego

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x') &= \psi'(x')^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger(x)S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 \\ &= \bar{\psi}(x)\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0. \end{aligned}$$

Dla ciągłej transformacji Lorentza mamy

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 \left(e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}}\right)^\dagger \gamma^0 =$$

Pokazaliśmy również jak transformuje się barowany spinor Diraca.
Dla spinora $\psi(x)$ zachodzi

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Dokonajmy sprzężenia diracowskiego

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x') &= \psi'(x')^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger(x)S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 \\ &= \bar{\psi}(x)\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0.\end{aligned}$$

Dla ciągłej transformacji Lorentza mamy

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 \left(e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}}\right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 e^{\frac{i}{4}\sigma^\dagger_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}}\gamma^0 =$$

Pokazaliśmy również jak transformuje się barowany spinor Diraca.
Dla spinora $\psi(x)$ zachodzi

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Dokonajmy sprzężenia diracowskiego

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x') &= \psi'(x')^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger(x)S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 \\ &= \bar{\psi}(x)\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0. \end{aligned}$$

Dla ciągłej transformacji Lorentza mamy

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0\left(e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}}\right)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0 e^{\frac{i}{4}\sigma^\dagger_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}}\gamma^0 = e^{\frac{i}{4}\gamma^0\sigma^\dagger_{\alpha\beta}\gamma^0\omega^{\alpha\beta}}.$$

Pokazaliśmy również jak transformuje się barowany spinor Diraca.
Dla spinora $\psi(x)$ zachodzi

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Dokonajmy sprzężenia diracowskiego

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x') &= \psi'(x')^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger(x)S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 \\ &= \bar{\psi}(x)\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0.\end{aligned}$$

Dla ciągłej transformacji Lorentza mamy

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0\left(e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}}\right)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0 e^{\frac{i}{4}\sigma^\dagger_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}}\gamma^0 = e^{\frac{i}{4}\gamma^0\sigma^\dagger_{\alpha\beta}\gamma^0\omega^{\alpha\beta}}.$$

Obliczmy wyrażenie w wykładniku

$$\gamma^0 \sigma^\dagger_{\alpha\beta} \gamma^0 \quad =$$

Obliczmy wyrażenie w wykładniku

$$\gamma^0\sigma^\dagger_{\alpha\beta}\gamma^0 = \gamma^0\left(\frac{i}{2}[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]\right)^\dagger\gamma^0 =$$

Obliczmy wyrażenie w wykładniku

$$\gamma^0 \sigma^\dagger_{\alpha\beta} \gamma^0 = \gamma^0 \left(\frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \right)^\dagger \gamma^0 = -\frac{i}{2} \gamma^0 (\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha)^\dagger \gamma^0$$

Obliczmy wyrażenie w wykładniku

$$\gamma^0\sigma^\dagger_{\alpha\beta}\gamma^0 = \gamma^0\left(\frac{i}{2}\left[\gamma_\alpha,\gamma_\beta\right]\right)^\dagger\gamma^0 = -\frac{i}{2}\gamma^0\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta-\gamma_\beta\gamma_\alpha\right)^\dagger\gamma^0$$

$$=$$

Obliczmy wyrażenie w wykładniku

$$\begin{aligned}\gamma^0\sigma^{\dagger}_{\alpha\beta}\gamma^0 &= \gamma^0\left(\frac{i}{2}\left[\gamma_\alpha,\gamma_\beta\right]\right)^{\dagger}\gamma^0 = -\frac{i}{2}\gamma^0\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta-\gamma_\beta\gamma_\alpha\right)^{\dagger}\gamma^0 \\ &= -\frac{i}{2}\gamma^0\left(\gamma^{\dagger}_\beta\gamma^{\dagger}_\alpha-\gamma^{\dagger}_\alpha\gamma^{\dagger}_\beta\right)\gamma^0.\end{aligned}$$

Obliczmy wyrażenie w wykładniku

$$\begin{aligned}\gamma^0\sigma^\dagger_{\alpha\beta}\gamma^0 &= \gamma^0\left(\frac{i}{2}\left[\gamma_\alpha,\gamma_\beta\right]\right)^\dagger\gamma^0 = -\frac{i}{2}\gamma^0\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta-\gamma_\beta\gamma_\alpha\right)^\dagger\gamma^0\\ &= -\frac{i}{2}\gamma^0\left(\gamma^\dagger_\beta\gamma^\dagger_\alpha-\gamma^\dagger_\alpha\gamma^\dagger_\beta\right)\gamma^0.\end{aligned}$$

ale $\gamma^\dagger_\mu = \gamma^0\gamma_\mu\gamma^0$,

Spinory Diraca

Obliczmy wyrażenie w wykładniku

$$\begin{aligned}\gamma^0\sigma^\dagger_{\alpha\beta}\gamma^0 &= \gamma^0\left(\frac{i}{2}\left[\gamma_\alpha,\gamma_\beta\right]\right)^\dagger\gamma^0 = -\frac{i}{2}\gamma^0\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta-\gamma_\beta\gamma_\alpha\right)^\dagger\gamma^0 \\ &= -\frac{i}{2}\gamma^0\left(\gamma^\dagger_\beta\gamma^\dagger_\alpha-\gamma^\dagger_\alpha\gamma^\dagger_\beta\right)\gamma^0.\end{aligned}$$

ale $\gamma^\dagger_\mu = \gamma^0\gamma_\mu\gamma^0$, więc

$$\gamma^0\sigma^\dagger_{\alpha\beta}\gamma^0 = -\frac{i}{2}\gamma^0\left(\gamma^0\gamma_\beta\gamma^0\gamma^0\gamma_\alpha\gamma^0-\gamma^0\gamma_\alpha\gamma^0\gamma^0\gamma_\beta\gamma^0\right)\gamma^0$$

Obliczmy wyrażenie w wykładniku

$$\gamma^0\sigma^\dagger_{\alpha\beta}\gamma^0 = \gamma^0\left(\frac{i}{2}[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]\right)^\dagger\gamma^0 = -\frac{i}{2}\gamma^0\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta-\gamma_\beta\gamma_\alpha\right)^\dagger\gamma^0$$
$$= -\frac{i}{2}\gamma^0\left(\gamma^\dagger_\beta\gamma^\dagger_\alpha-\gamma^\dagger_\alpha\gamma^\dagger_\beta\right)\gamma^0.$$

ale $\gamma^\dagger_\mu=\gamma^0\gamma_\mu\gamma^0$, więc

$$\gamma^0\sigma^\dagger_{\alpha\beta}\gamma^0 = -\frac{i}{2}\gamma^0\left(\gamma^0\gamma_\beta\gamma^0\gamma^0\gamma_\alpha\gamma^0-\gamma^0\gamma_\alpha\gamma^0\gamma^0\gamma_\beta\gamma^0\right)\gamma^0$$
$$= \frac{i}{2}[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]$$

Obliczmy wyrażenie w wykładniku

$$\begin{aligned}\gamma^0\sigma^\dagger_{\alpha\beta}\gamma^0 &= \gamma^0\left(\frac{i}{2}[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]\right)^\dagger\gamma^0 = -\frac{i}{2}\gamma^0\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta-\gamma_\beta\gamma_\alpha\right)^\dagger\gamma^0\\ &= -\frac{i}{2}\gamma^0\left(\gamma^\dagger_\beta\gamma^\dagger_\alpha-\gamma^\dagger_\alpha\gamma^\dagger_\beta\right)\gamma^0.\end{aligned}$$

ale $\gamma^\dagger_\mu = \gamma^0\gamma_\mu\gamma^0$, więc

$$\begin{aligned}\gamma^0\sigma^\dagger_{\alpha\beta}\gamma^0 &= -\frac{i}{2}\gamma^0\left(\gamma^0\gamma_\beta\gamma^0\gamma^0\gamma_\alpha\gamma^0-\gamma^0\gamma_\alpha\gamma^0\gamma^0\gamma_\beta\gamma^0\right)\gamma^0\\ &= \frac{i}{2}[\gamma_\alpha,\gamma_\beta] = \sigma_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

W takim razie dla ciągłej transformacji Lorentza zachodzi

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = e^{+\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}} = S^{-1}(\Lambda).$$

Obliczmy wyrażenie w wykładniku

$$\begin{aligned}\gamma^0\sigma^\dagger_{\alpha\beta}\gamma^0 &= \gamma^0\left(\frac{i}{2}\left[\gamma_\alpha,\gamma_\beta\right]\right)^\dagger\gamma^0 = -\frac{i}{2}\gamma^0\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta-\gamma_\beta\gamma_\alpha\right)^\dagger\gamma^0 \\ &= -\frac{i}{2}\gamma^0\left(\gamma^\dagger_\beta\gamma^\dagger_\alpha-\gamma^\dagger_\alpha\gamma^\dagger_\beta\right)\gamma^0.\end{aligned}$$

ale $\gamma^\dagger_\mu=\gamma^0\gamma_\mu\gamma^0$, więc

$$\begin{aligned}\gamma^0\sigma^\dagger_{\alpha\beta}\gamma^0 &= -\frac{i}{2}\gamma^0\left(\gamma^0\gamma_\beta\gamma^0\gamma^0\gamma_\alpha\gamma^0-\gamma^0\gamma_\alpha\gamma^0\gamma^0\gamma_\beta\gamma^0\right)\gamma^0 \\ &= \frac{i}{2}\left[\gamma_\alpha,\gamma_\beta\right] = \sigma_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

W takim razie dla ciągłej transformacji Lorentza zachodzi

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = e^{+\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}} = S^{-1}(\Lambda).$$

Macierze γ^μ określone związkami komutacyjnymi

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

rozpinają tzw. algebrę Clifforda.

Zdefiniujmy macierz γ_5:

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

Macierze Diraca

Macierze γ^μ określone związkami komutacyjnymi

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

rozpinają tzw. algebrę Clifforda.
Zdefiniujmy macierz γ_5:

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

Zadanie. Pokazać, że

$$\gamma_5^2 = \mathbb{I}, \qquad \gamma_5^\dagger = \gamma_5, \qquad \{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0.$$

Macierze Diraca

Macierze γ^μ określone związkami komutacyjnymi

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

rozpinają tzw. algebrę Clifforda.
Zdefiniujmy macierz γ_5:

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

Zadanie. Pokazać, że

$$\gamma_5^2 = \mathbb{I}, \qquad \gamma_5^\dagger = \gamma_5, \qquad \{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0.$$

Zadanie. Znaleźć postać macierzy γ_5 w reprezentacji Diraca i w reprezentacji Weyla.

Macierze γ^μ określone związkami komutacyjnymi

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

rozpinają tzw. algebrę Clifforda.
Zdefiniujmy macierz γ_5:

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

Zadanie. Pokazać, że

$$\gamma_5^2 = \mathbb{I}, \qquad \gamma_5^\dagger = \gamma_5, \qquad \{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0.$$

Zadanie. Znaleźć postać macierzy γ_5 w reprezentacji Diraca i w reprezentacji Weyla.

Macierze Diraca

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a, gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$\Gamma^S = \mathbb{I}$$

Macierze Diraca

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a, gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$\Gamma^S = \mathbb{I} \qquad \text{(1 macierz)}$$

Macierze Diraca

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a, gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$\Gamma^S = \mathbb{I} \qquad (1 \text{ macierz})$$

$$\Gamma^V_\mu = \gamma_\mu$$

Macierze Diraca

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a, gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$\begin{aligned} \Gamma^S &= \mathbb{I} && \text{(1 macierz)} \\ \Gamma^V_\mu &= \gamma_\mu && \text{(4 macierze)} \end{aligned}$$

Macierze Diraca

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a, gdzie $a = S, V, T, A, P,$ zdefiniowanych następująco

$$
\begin{aligned}
\Gamma^S &= \mathbb{I} && \text{(1 macierz)} \\
\Gamma^V_\mu &= \gamma_\mu && \text{(4 macierze)} \\
\Gamma^T_{\mu\nu} &= \sigma_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

Macierze Diraca

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a, gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$\begin{aligned} \Gamma^S &= \mathbb{I} & &(1\ \text{macierz}) \\ \Gamma^V_\mu &= \gamma_\mu & &(4\ \text{macierze}) \\ \Gamma^T_{\mu\nu} &= \sigma_{\mu\nu} & &(6\ \text{macierzy}) \end{aligned}$$

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a, gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$
\begin{aligned}
\Gamma^S &= \mathbb{I} && \text{(1 macierz)} \\
\Gamma^V_\mu &= \gamma_\mu && \text{(4 macierze)} \\
\Gamma^T_{\mu\nu} &= \sigma_{\mu\nu} && \text{(6 macierzy)} \\
\Gamma^A_\mu &= \gamma_5\gamma_\mu
\end{aligned}
$$

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a, gdzie $a = S, V, T, A, P,$ zdefiniowanych następująco

$$
\begin{aligned}
\Gamma^S &= \mathbb{I} && \text{(1 macierz)} \\
\Gamma^V_\mu &= \gamma_\mu && \text{(4 macierze)} \\
\Gamma^T_{\mu\nu} &= \sigma_{\mu\nu} && \text{(6 macierzy)} \\
\Gamma^A_\mu &= \gamma_5\gamma_\mu && \text{(4 macierze)}
\end{aligned}
$$

Macierze Diraca

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a, gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$
\begin{aligned}
\Gamma^S &= \mathbb{I} && \text{(1 macierz)} \\
\Gamma^V_\mu &= \gamma_\mu && \text{(4 macierze)} \\
\Gamma^T_{\mu\nu} &= \sigma_{\mu\nu} && \text{(6 macierzy)} \\
\Gamma^A_\mu &= \gamma_5\gamma_\mu && \text{(4 macierze)} \\
\Gamma^P &= \gamma_5
\end{aligned}
$$

Macierze Diraca

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a, gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$
\begin{array}{ll}
\Gamma^S = \mathbb{I} & (1 \text{ macierz}) \\
\Gamma^V_\mu = \gamma_\mu & (4 \text{ macierze}) \\
\Gamma^T_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} & (6 \text{ macierzy}) \\
\Gamma^A_\mu = \gamma_5\gamma_\mu & (4 \text{ macierze}) \\
\Gamma^P = \gamma_5 & (1 \text{ macierz})
\end{array}
$$

Macierze Diraca

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a, gdzie $a = S, V, T, A, P,$ zdefiniowanych następująco

$$\begin{aligned}
&\Gamma^S = \mathbb{I} && (1 \text{ macierz}) \\
&\Gamma^V_\mu = \gamma_\mu && (4 \text{ macierze}) \\
&\Gamma^T_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} && (6 \text{ macierzy}) \\
&\Gamma^A_\mu = \gamma_5\gamma_\mu && (4 \text{ macierze}) \\
&\Gamma^P = \gamma_5 && (1 \text{ macierz}) \\
&\text{Razem :}
\end{aligned}$$

Macierze Diraca

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a, gdzie $a = S, V, T, A, P,$ zdefiniowanych następująco

$$
\begin{array}{ll}
\Gamma^S = \mathbb{I} & \text{(1 macierz)} \\
\Gamma^V_\mu = \gamma_\mu & \text{(4 macierze)} \\
\Gamma^T_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} & \text{(6 macierzy)} \\
\Gamma^A_\mu = \gamma_5\gamma_\mu & \text{(4 macierze)} \\
\Gamma^P = \gamma_5 & \text{(1 macierz)} \\
\text{Razem :} & \text{16 macierzy}
\end{array}
$$

Macierze Diraca

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a, gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$
\begin{array}{ll}
\Gamma^S = \mathbb{I} & \text{(1 macierz)} \\
\Gamma^V_\mu = \gamma_\mu & \text{(4 macierze)} \\
\Gamma^T_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} & \text{(6 macierzy)} \\
\Gamma^A_\mu = \gamma_5\gamma_\mu & \text{(4 macierze)} \\
\Gamma^P = \gamma_5 & \text{(1 macierz)} \\
\text{Razem :} & \text{16 macierzy}
\end{array}
$$

Użycie skrótów S, V, T, A, P stanie się jasne w dalszym ciągu wykładu.

Macierze Diraca

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a, gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$
\begin{array}{ll}
\Gamma^S = \mathbb{I} & (1 \text{ macierz}) \\
\Gamma^V_\mu = \gamma_\mu & (4 \text{ macierze}) \\
\Gamma^T_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} & (6 \text{ macierzy}) \\
\Gamma^A_\mu = \gamma_5\gamma_\mu & (4 \text{ macierze}) \\
\Gamma^P = \gamma_5 & (1 \text{ macierz}) \\
\text{Razem :} & 16 \text{ macierzy}
\end{array}
$$

Użycie skrótów S, V, T, A, P stanie się jasne w dalszym ciągu wykładu.

Macierze Diraca

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a, $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

1. $\forall_a \, (\Gamma^a)^2 = \pm\mathbb{I}$,

Macierze Diraca

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a, $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

1. $\forall_a \left(\Gamma^a\right)^2 = \pm\mathbb{I}$,
2. $\forall_{a \neq S} \, \exists_b \left\{\Gamma^a, \Gamma^b\right\} = 0$,

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a, $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

1. $\forall_a \, (\Gamma^a)^2 = \pm\mathbb{I}$,
2. $\forall_{a \neq S} \, \exists_b \, \left\{\Gamma^a, \Gamma^b\right\} = 0$,
3. $\forall_{a \neq S} \, \mathrm{Tr} \, \Gamma^a = 0$,

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a, $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

1. $\forall_a \, (\Gamma^a)^2 = \pm\mathbb{I}$,
2. $\forall_{a \neq S} \, \exists_b \, \left\{\Gamma^a, \Gamma^b\right\} = 0$,
3. $\forall_{a \neq S} \, \mathrm{Tr} \, \Gamma^a = 0$,
4. $\forall_{a \neq b} \, \exists_{c \neq S} \, \Gamma^a \Gamma^b = \alpha \Gamma^c$, gdzie $\alpha = \pm 1, \pm i$,

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a, $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

1. $\forall_a \, (\Gamma^a)^2 = \pm\mathbb{I}$,
2. $\forall_{a \neq S} \, \exists_b \, \left\{\Gamma^a, \Gamma^b\right\} = 0$,
3. $\forall_{a \neq S} \, \mathrm{Tr} \, \Gamma^a = 0$,
4. $\forall_{a \neq b} \, \exists_{c \neq S} \, \Gamma^a \Gamma^b = \alpha \Gamma^c$, gdzie $\alpha = \pm 1, \pm i$,
5. Macierze Γ^a, $a = S, V, T, A, P$, są liniowo niezależne,

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a, $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

1. $\forall_a \left(\Gamma^a\right)^2 = \pm\mathbb{I}$,
2. $\forall_{a\neq S}\ \exists_b\ \left\{\Gamma^a, \Gamma^b\right\} = 0$,
3. $\forall_{a\neq S}\ \mathrm{Tr}\ \Gamma^a = 0$,
4. $\forall_{a\neq b}\ \exists_{c\neq S}\ \Gamma^a\Gamma^b = \alpha\Gamma^c$, gdzie $\alpha = \pm 1, \pm i$,
5. Macierze Γ^a, $a = S, V, T, A, P$, są liniowo niezależne,
6. Zachodzą następujące tożsamości:

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a, $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

1. $\forall_a \left(\Gamma^a\right)^2 = \pm\mathbb{I}$,
2. $\forall_{a \neq S} \; \exists_b \; \left\{\Gamma^a, \Gamma^b\right\} = 0$,
3. $\forall_{a \neq S} \; \mathrm{Tr}\; \Gamma^a = 0$,
4. $\forall_{a \neq b} \; \exists_{c \neq S} \; \Gamma^a \Gamma^b = \alpha \Gamma^c$, gdzie $\alpha = \pm 1, \pm i$,
5. Macierze Γ^a, $a = S, V, T, A, P$, są liniowo niezależne,
6. Zachodzą następujące tożsamości: $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbb{I}$,

Macierze Diraca

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a, $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

1. $\forall_a \, (\Gamma^a)^2 = \pm\mathbb{I}$,
2. $\forall_{a \neq S} \, \exists_b \, \left\{\Gamma^a, \Gamma^b\right\} = 0$,
3. $\forall_{a \neq S} \, \mathrm{Tr} \, \Gamma^a = 0$,
4. $\forall_{a \neq b} \, \exists_{c \neq S} \, \Gamma^a \Gamma^b = \alpha \Gamma^c$, gdzie $\alpha = \pm 1, \pm i$,
5. Macierze Γ^a, $a = S, V, T, A, P$, są liniowo niezależne,
6. Zachodzą następujące tożsamości: $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbb{I}$, $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu$,

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a, $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

1. $\forall_a \, (\Gamma^a)^2 = \pm\mathbb{I}$,
2. $\forall_{a\neq S} \, \exists_b \, \left\{\Gamma^a, \Gamma^b\right\} = 0$,
3. $\forall_{a\neq S} \, \mathrm{Tr} \, \Gamma^a = 0$,
4. $\forall_{a\neq b} \, \exists_{c\neq S} \, \Gamma^a\Gamma^b = \alpha\Gamma^c$, gdzie $\alpha = \pm 1, \pm i$,
5. Macierze Γ^a, $a = S, V, T, A, P$, są liniowo niezależne,
6. Zachodzą następujące tożsamości: $\gamma^\mu\gamma_\mu = 4\mathbb{I}$, $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu$, $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 4g^{\nu\rho}\mathbb{I}$,

Macierze Diraca

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a, $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

1. $\forall_a \, (\Gamma^a)^2 = \pm \mathbb{I}$,
2. $\forall_{a \neq S} \, \exists_b \, \left\{ \Gamma^a, \Gamma^b \right\} = 0$,
3. $\forall_{a \neq S} \, \mathrm{Tr} \, \Gamma^a = 0$,
4. $\forall_{a \neq b} \, \exists_{c \neq S} \, \Gamma^a \Gamma^b = \alpha \Gamma^c, \quad$ gdzie $\alpha = \pm 1, \pm i$,
5. Macierze Γ^a, $a = S, V, T, A, P$, są liniowo niezależne,
6. Zachodzą następujące tożsamości: $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbb{I}$, $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu$, $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho}\mathbb{I}$, $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu$.

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a, $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

1. $\forall_a \, (\Gamma^a)^2 = \pm\mathbb{I}$,
2. $\forall_{a \neq S} \, \exists_b \, \left\{\Gamma^a, \Gamma^b\right\} = 0$,
3. $\forall_{a \neq S} \, \mathrm{Tr}\, \Gamma^a = 0$,
4. $\forall_{a \neq b} \, \exists_{c \neq S} \, \Gamma^a \Gamma^b = \alpha \Gamma^c$, gdzie $\alpha = \pm 1, \pm i$,
5. Macierze Γ^a, $a = S, V, T, A, P$, są liniowo niezależne,
6. Zachodzą następujące tożsamości: $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbb{I}$, $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu$, $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho}\mathbb{I}$, $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu$.

Jak transformuje się forma biliniowa postaci $\bar{\psi}(x)\Gamma^a\psi(x)$ dla $a = S, V, T, A, P$ przy transformacji Lorentza $x \rightarrow \Lambda x$?

$$\bar{\psi}'(x')\Gamma^a\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\Gamma^a S(\Lambda)\psi(x).$$

Jak transformuje się forma biliniowa postaci $\bar{\psi}(x)\Gamma^a\psi(x)$ dla $a = S, V, T, A, P$ przy transformacji Lorentza $x \;\rightarrow\; \Lambda x$?

$$\bar{\psi}'(x')\Gamma^a\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\Gamma^a S(\Lambda)\psi(x).$$

Na przykład forma

$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') =$

Jak transformuje się forma biliniowa postaci $\bar{\psi}(x)\Gamma^a\psi(x)$ dla $a = S, V, T, A, P$ przy transformacji Lorentza $x \;\to\; \Lambda x$?

$$\bar{\psi}'(x')\Gamma^a\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\Gamma^a S(\Lambda)\psi(x).$$

Na przykład forma

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) =$$

Jak transformuje się forma biliniowa postaci $\bar{\psi}(x)\Gamma^a\psi(x)$ dla $a = S, V, T, A, P$ przy transformacji Lorentza $x \;\rightarrow\; \Lambda x$?

$$\bar{\psi}'(x')\Gamma^a\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\Gamma^a S(\Lambda)\psi(x).$$

Na przykład forma

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$$

Macierze Diraca

Jak transformuje się forma biliniowa postaci $\bar{\psi}(x)\Gamma^a\psi(x)$ dla $a = S, V, T, A, P$ przy transformacji Lorentza $x \rightarrow \Lambda x$?

$$\bar{\psi}'(x')\Gamma^a\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\Gamma^a S(\Lambda)\psi(x).$$

Na przykład forma

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$$

transformuje się jak wektor.

Jak transformuje się forma biliniowa postaci $\bar{\psi}(x)\Gamma^a\psi(x)$ dla $a = S, V, T, A, P$ przy transformacji Lorentza $x \to \Lambda x$?

$$\bar{\psi}'(x')\Gamma^a\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\Gamma^a S(\Lambda)\psi(x).$$

Na przykład forma

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$$

transformuje się jak wektor. Dlatego odpowiednią macierz Γ^a oznaczyliśmy symbolem V.

Jak transformuje się forma biliniowa postaci $\bar{\psi}(x)\Gamma^a\psi(x)$ dla $a = S, V, T, A, P$ przy transformacji Lorentza $x \rightarrow \Lambda x$?

$$\bar{\psi}'(x')\Gamma^a\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\Gamma^a S(\Lambda)\psi(x).$$

Na przykład forma

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$$

transformuje się jak wektor. Dlatego odpowiednią macierz Γ^a oznaczyliśmy symbolem V.

Zadanie. Udowodnić własności transformacyjne pozostałych form biliniowych

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x), \qquad \text{skalar } (S),$$

Zadanie. Udowodnić własności transformacyjne pozostałych form biliniowych

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x), \qquad \text{skalar } (S),$$
$$\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x),$$

Macierze Diraca

Zadanie. Udowodnić własności transformacyjne pozostałych form biliniowych

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x), \qquad \text{skalar } (S),$$
$$\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x), \qquad \text{tensor } (T),$$

Zadanie. Udowodnić własności transformacyjne pozostałych form biliniowych

$$
\begin{aligned}
&\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x), && \text{skalar } (S),\\
&\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x), && \text{tensor } (T),\\
&\bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma^{\mu}\psi'(x') = \det\Lambda\, \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^{\nu}\psi(x),
\end{aligned}
$$

Zadanie. Udowodnić własności transformacyjne pozostałych form biliniowych

$$\begin{aligned}
&\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x), && \text{skalar } (S),\\
&\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x), && \text{tensor } (T),\\
&\bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma^{\mu}\psi'(x') = \det\Lambda\, \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^{\nu}\psi(x), && \text{pseudowektor } (A),
\end{aligned}$$

Zadanie. Udowodnić własności transformacyjne pozostałych form biliniowych

$$
\begin{array}{ll}
\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x), & \text{skalar } (S), \\
\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x), & \text{tensor } (T), \\
\bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma^{\mu}\psi'(x') = \det\Lambda\ \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^{\nu}\psi(x), & \text{pseudowektor } (A), \\
\bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \det\Lambda\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x), &
\end{array}
$$

Zadanie. Udowodnić własności transformacyjne pozostałych form biliniowych

$$\begin{array}{ll}
\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x), & \text{skalar } (S), \\
\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x), & \text{tensor } (T), \\
\bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma^{\mu}\psi'(x') = \det\Lambda\ \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^{\nu}\psi(x), & \text{pseudowektor } (A), \\
\bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \det\Lambda\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x), & \text{pseudoskalar } (P).
\end{array}$$

Notatki odręczne

Zadanie. Udowodnić własności transformacyjne pozostałych form biliniowych

$$
\begin{array}{ll}
\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x), & \text{skalar } (S), \\
\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x), & \text{tensor } (T), \\
\bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma^{\mu}\psi'(x') = \det\Lambda\ \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^{\nu}\psi(x), & \text{pseudowektor } (A), \\
\bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \det\Lambda\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x), & \text{pseudoskalar } (P).
\end{array}
$$

Notatki odręczne