

MECHANIKA KLASYCZNA I RELATYWISTYCZNA

Karol Kołodziej

Zestaw 4

1. Funkcja Lagrange'a punktu materialnego dana jest wzorem:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x^2 + y^2, z).$$

Pokazać, że jest ona niezmiennicza przy obrotach względem osi Oz i korzystając z twierdzenia Nöther skonstruować odpowiednią wielkość zachowaną. Zadanie rozwiązać w układzie:

- (a) kartezjańskim,
- (b) cylindrycznym.

Co można powiedzieć o współrzędnej kątowej φ w układzie cylindrycznym?

2. Pokazać, że wektor Lenza

$$\vec{\Lambda} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m\alpha} - \frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem położenia ciała względem centrum, tzn. źródła siły centralnej, $\vec{p} = m\vec{\dot{r}}$ jego pędem, a $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ momentem pędu, jest wielkością zachowaną w potencjale Keplera $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$.

Wskazówka. Znaleźć postać siły korzystając ze związku $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r)$, a następnie pokazać, że $\dot{\vec{\Lambda}} = 0$, wykorzystując fakt, że moment pędu ciała w polu siły centralnej jest zachowany, tzn. $\dot{\vec{L}} = 0$.

3. Korzystając z twierdzenia Noether znaleźć 10 wielkości zachowanych wynikających z symetrii względem przekształceń z grupy Galileusza odosobnionego układu N punktów materialnych, w którym energia potencjalna zależy tylko od wzajemnej odległości poszczególnych punktów.
4. Rozważmy układ N punktów materialnych z k równaniami więzów holonomicznych.
- (a) W przypadku więzów skleronomicznych i jeśli nie dokonujemy transformacji do poruszających się układów odniesienia, równania transformacyjne mają postać

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n), \quad i = 1, \dots, N,$$

gdzie w trójwymiarowej przestrzeni $n = 3N - k$, tzn. że równania transformacyjne nie zawierają jawnej zależności od czasu. Pokazać, że energia kinetyczna jest wówczas jednorodną funkcją kwadratową prędkości uogólnionych $\dot{q}_i$, $i = 1, \dots, n$,

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_{j,l=1}^n a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l,$$

gdzie współczynniki a_{jl} nie zależą od prędkości.

- (b) W przypadku więzów reonomicznych lub jeśli dokonujemy transformacji do poruszających się układów odniesienia, równania transformacyjne

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n, t), \quad i = 1, \dots, N,$$

zależą jawnie od czasu. Pokazać, że wówczas energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$T = a + \sum_{j=1}^n a_j \dot{q}_j + \sum_{j,l=1}^n a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l,$$

gdzie współczynniki a , a_j i a_{jl} nie zależą od prędkości.

5. (a) Niech $F(x_1, \dots, x_n)$ będzie funkcją jednorodną k -tego rzędu, tzn.

$$F(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k F(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

dla wszystkich $x_1, x_2, \dots, x_n$ i dowolnego λ . Pokazać, że

$$\sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j} F(x_1, \dots, x_n) = k F(x_1, \dots, x_n).$$

- (b) Pokazać, że przy spełnieniu warunków określonych w zadaniu 4(a)

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T.$$