

# MECHANIKA KLASYCZNA I RELATYWISTYCZNA

## Pytania egzaminacyjne

### 1. Pytania podstawowe

- 1.1. Klasyfikacja więzów.
- 1.2. Zasada d'Alemberta i równanie d'Alemberta; zasada równowagi.
- 1.3. Równania Lagrange'a II rodzaju.
- 1.4. Siły uogólnione i potencjał uogólniony.
- 1.5. Równania Lagrange'a II rodzaju dla układu  $N$  punktów materialnych z tarcie.
- 1.6. Drgania swobodne jednowymiarowego, tłumionego oscylatora harmonicznego.
- 1.7. Drgania wymuszone jednowymiarowego, tłumionego oscylatora harmonicznego; rezonans.
- 1.8. Współrzędne cykliczne a prawa zachowania.
- 1.9. Symetrie układu fizycznego a prawa zachowania; twierdzenie Noether.
- 1.10. Zasada zachowania energii.
- 1.11. Pokazać, że ruch odosobnionego układu dwóch ciał można sprowadzić do ruchu jednego ciała o masie zredukowanej i jednostajnego ruchu środka masy układu.
- 1.12. Ruch punktu materialnego w nieinercjalnym układzie odniesienia.
- 1.13. Energia kinetyczna bryły sztywnej.
- 1.14. Moment pędu bryły sztywnej.
- 1.15. Równania ruchu bryły sztywnej.
- 1.16. Równania Hamiltona.
- 1.17. Postulaty szczególnej teorii względności i ich konsekwencje. Dylatacja czasu, skrócenie Fitzgeralda–Lorentza.
- 1.18. Prawa transformacji Lorentza dla zdarzenia  $(ct, x, y, z)$  obserwowanego z dwóch różnych, inercjalnych układów odniesienia  $S$  i  $S'$ , przy czym  $S'$  porusza się w  $S$  ze stałą prędkością  $\vec{V} = (V, 0, 0)$ . Jaką postać przyjmują wzory transformacyjne w granicy nierelatywistycznej?
- 1.19. Prawa transformacji Lorentza dla prędkości przy przejściu pomiędzy dwoma różnymi, inercjalnymi układami odniesienia  $S$  i  $S'$ , przy czym  $S'$  porusza się w  $S$  ze stałą prędkością  $\vec{V} = (V, 0, 0)$ . Jaką postać przyjmują wzory transformacyjne w granicy nierelatywistycznej?
- 1.20. Czeropędność i czeropęd; relatywistyczna energia i relatywistyczny pęd. Znaleźć odpowiednie granice nierelatywistyczne.
- 1.21. Kwadrat normy czterowektora pędu i wynikający stąd relatywistycznie niezmienny związek pomiędzy energią i pędem.

### 2. Pytania trudniejsze

- 2.1. Warunki całkowalności więzów różniczkowych.
- 2.2. Wyprowadzić równanie d'Alemberta dla układu  $N$  punktów materialnych z II zasady dynamiki Newtona.

- 2.3. Wyprowadzić równania Lagrange’a II rodzaju z równania d’Alemberta.
- 2.4. Pokazać, że siłę Lorentza  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  działającą na cząstkę o masie  $m$  i ładunku elektrycznym  $q$  w polu elektromagnetycznym o natężeniu  $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}$  i indukcji  $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t)$  gdzie  $\varphi(\vec{r}, t)$  i  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  są odpowiednio potencjałami skalarnym i wektorowym, można wyprowadzić z potencjału uogólnionego postaci  $V(\vec{r}, \vec{v}, t) = q(\varphi(\vec{r}, t) - \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v})$ .
- 2.5. Pokazać niezmienniczość równań Lagrange’a II rodzaju przy transformacjach punktowych:  $q_i \rightarrow Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_n, t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
- 2.6. Pokazać niezmienniczość równań Lagrange’a II rodzaju przy transformacji cechowania funkcji Lagrange’a  $L(q, \dot{q}, t) = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ :

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}F(q, t),$$

gdzie  $F(q, t) = F(q_1, \dots, q_n, t)$  jest dowolną różniczkowalną funkcją współrzędnych uogólnionych i czasu.

- 2.7. Funkcja dyssypacji dla sił tarcia postaci

$$\vec{T}_i = -h_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad v_i = |\vec{v}_i|.$$

- 2.8. Zasada zachowania energii – wyprowadzenie.
- 2.9. Udowodnić twierdzenie Noether.
- 2.10. Równania Lagrange’a I rodzaju – wyprowadzenie z równania d’Alemberta.
- 2.11. Wyprowadzić równania Lagrange’a II rodzaju z zasady Hamiltona stacjonarnego działania.
- 2.12. Równania Hamiltona – wyprowadzenie. Kiedy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu; kiedy jest równa całkowitej energii układu?
- 2.13. Pęd kanonicznie sprzężony i funkcja Hamiltona dla cząstki o ładunku  $q$  i masie  $m$  w polu elektromagnetycznym o potencjale uogólnionym  $V = q(\varphi(\vec{r}, t) - \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v})$ .
- 2.14. Nawiasy Poissona – definicja; podać i udowodnić podstawowe własności.
- 2.15. Ruch ciała w polu siły centralnej. Udowodnić, że moment pędu ciała względem centrum siły jest zachowany, a ruch odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora momentu pędu.
- 2.16. Czasoprzestrzeń Minkowskiego. Kontra- i kowariantny czterowektor położenia, iloczyn skalarny, interwał dwóch zdarzeń.
- 2.17. Pokazać niezmienniczość iloczynu skalarnego czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego przy transformacji Lorentza polegającej na przejściu pomiędzy układami inercjalnymi  $S$  i  $S'$ , przy czym  $S'$  porusza się w  $S$  ze stałą prędkością  $\vec{V} = (V, 0, 0)$ .
- 2.18. Ogólna definicja transformacji Lorentza. Jakie związki muszą spełniać elementy macierzy transformacji? Jak transformują się składowe kontra- i kowariantne czterowektora położenia w czasoprzestrzeni Minkowskiego?
- 2.19. Czasoprzestrzeń Minkowskiego – stożek świetlny.
- 2.20. Wiązka protonów zderza się z protonami tarczy. Znaleźć związek pomiędzy energią całkowitą dwóch zderzających się protonów w układzie laboratoryjnym, w którym tarcza spoczywa z ich energią całkowitą w układzie środka masy.

2.21. Czteropęd cząstki bezmasowej, czterowektor falowy i efekt Dopplera dla światła.

### 3. Pytania trudne

3.1. Transformacje Galileusza. W jaki sposób wiążą się współrzędne i czas  $x_i(t)$ ,  $t$  i  $x'_i(t')$ ,  $t'$  w dwóch układach inercjalnych poruszających się z prędkością względną  $\vec{v}$ ,  $|\vec{v}| \ll c$ . Dopuszczamy przy tym możliwość obrotu, przesunięcia czasu i przesunięcia przestrzennego. Pokazać, że transformacje Galileusza tworzą grupę dziesięcioparametrową.

3.2. Pokazać, że niezmienniczość funkcji Lagrange'a odosobnionego układu  $N$  punktów materialnych, których energia potencjalna wzajemnego oddziaływania zależy od ich odległości

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_{i < j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

względem

- i. transformacji czasu prowadzi do zachowania energii,
- ii. translacji przestrzennej prowadzi do zachowania pędu,
- iii. obrotów prowadzi do zachowania momentu pędu,
- iv. czystej transformacji Galileusza (transformacji do układu poruszającego się ze stałą prędkością  $\vec{v}$ ) prowadzi do zachowania pewnej wielkości opisującej ruch środka masy układu.

3.3. Ruch ciała o masie  $m$  w potencjale Keplera  $V(r) = -\alpha/r$ , gdzie  $\alpha = \text{const.} > 0$ .

3.4. Efekt Comptona. Znaleźć wzrost długości fali promieniowania rentgenowskiego w wyniku rozpraszania na spoczywających elektronach.

3.5. Pokazać, że dla siły zdefiniowanej wzorem  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$  spełniony jest relatywistyczny związek pomiędzy przyrostem energii kinetycznej ciała a wykonaną nad nim pracą. Założyć, że masa ciała nie zmienia się w czasie.

3.6. Ruch w polu stałej siły  $\vec{F} = d\vec{p}/dt = \text{const.}$  Znaleźć zależność  $\vec{x}(t)$  przy założeniu, że w chwili  $t = 0$  ciało spoczywa w początku układu, czyli  $\vec{x}(0) = \vec{0}$  i  $\vec{v}(0) = \vec{0}$ , a masa ciała nie zależy od czasu.