

Pola skalarne i wektorowe

Gradient, dywergencja, rotacja

Karol Kołodziej

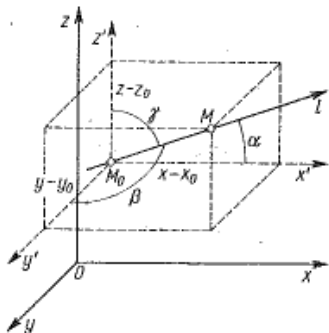
Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

Pochodna kierunkowa

Założmy, że $f(M) = f(x, y, z)$ jest różniczkowalną funkcją rzeczywistą określoną w pewnym obszarze otwartym. Pochodne cząstkowe funkcji $f(M)$ względem x , względem y i względem z :

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(M)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(M)}{\partial z}$$

wyrażają prędkość zmiany funkcji względem osi współrzędnych.

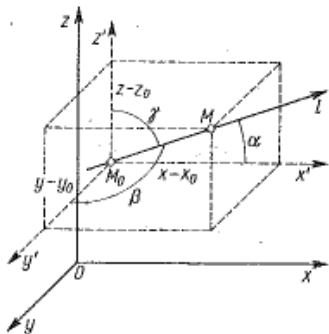


Pochodna kierunkowa

Założmy, że $f(M) = f(x, y, z)$ jest różniczkowalną funkcją rzeczywistą określoną w pewnym obszarze otwartym. Pochodne cząstkowe funkcji $f(M)$ względem x , względem y i względem z :

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(M)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(M)}{\partial z}$$

wyrażają prędkość zmiany funkcji względem osi współrzędnych.



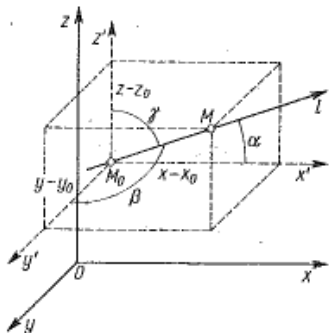
Rozważmy dowolny punkt $M_0(x_0, y_0, z_0)$ rozpatrywanego obszaru i dowolną prostą oś l przechodzącą przez ten punkt. Niech $M(x, y, z) \in l$, a M_0M jest długością odcinka pomiędzy punktami M_0 i M , dodatnią jeśli zwrot wektora $\overrightarrow{M_0M}$ pokrywa się ze zwrotem osi l , a ujemną w przeciwnym przypadku.

Pochodna kierunkowa

Założmy, że $f(M) = f(x, y, z)$ jest różniczkowalną funkcją rzeczywistą określoną w pewnym obszarze otwartym. Pochodne cząstkowe funkcji $f(M)$ względem x , względem y i względem z :

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(M)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(M)}{\partial z}$$

wyrażają prędkość zmiany funkcji względem osi współrzędnych.



Rozważmy dowolny punkt $M_0(x_0, y_0, z_0)$ rozpatrywanego obszaru i dowolną prostą oś l przechodzącą przez ten punkt. Niech $M(x, y, z) \in l$, a M_0M jest długością odcinka pomiędzy punktami M_0 i M , dodatnią jeśli zwrot wektora $\overrightarrow{M_0M}$ pokrywa się ze zwrotem osi l , a ujemną w przeciwnym przypadku.

Pochodna kierunkowa

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0 M},$$

to nazywamy ją *pochodną kierunkową funkcji $f(M)$ w kierunku l* i oznaczamy

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l}.$$

Pochodna ta charakteryzuje prędkość zmiany funkcji $f(M)$ w punkcie M_0 w kierunku l .

Założmy, że funkcja $f(x, y, z)$ ma w rozpatrywanym obszarze ciągłe pochodne cząstkowe, a oś l tworzy z osiami współrzędnych kąty α, β, γ , wtedy pochodna w kierunku l istnieje i wyraża się wzorem:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \cos \gamma.$$

Pochodna kierunkowa

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0 M},$$

to nazywamy ją *pochodną kierunkową funkcji $f(M)$ w kierunku l* i oznaczamy

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l}.$$

Pochodna ta charakteryzuje prędkość zmiany funkcji $f(M)$ w punkcie M_0 w kierunku l .

Założmy, że funkcja $f(x, y, z)$ ma w rozpatrywanym obszarze ciągłe pochodne cząstkowe, a oś l tworzy z osiami współrzędnych kąty α, β, γ , wtedy pochodna w kierunku l istnieje i wyraża się wzorem:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \cos \gamma.$$

Dowód. Oznaczmy $M_0M = t$, wtedy

$$x - x_0 = t \cos \alpha, \quad y - y_0 = t \cos \beta, \quad z - z_0 = t \cos \gamma,$$

a funkcję $f(M) = f(x_0, y_0, z_0)$ możemy potraktować jako funkcję złożoną $\varphi(t) = f(x(t), y(t), z(t))$, przy czym dla $t = 0$ mamy $M = M_0$. Obliczmy

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma,$$

co kończy dowód.

Dowód. Oznaczmy $M_0 M = t$, wtedy

$$x - x_0 = t \cos \alpha, \quad y - y_0 = t \cos \beta, \quad z - z_0 = t \cos \gamma,$$

a funkcję $f(M) = f(x_0, y_0, z_0)$ możemy potraktować jako funkcję złożoną $\varphi(t) = f(x(t), y(t), z(t))$, przy czym dla $t = 0$ mamy $M = M_0$. Obliczmy

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma,$$

co kończy dowód.

Jeżeli w każdym punkcie M obszaru przestrzennego, który może być również całą przestrzenią, określona jest pewna wartość skalarna lub pewien wektor o początku w punkcie M , to mówimy odpowiednio o *polu skalarnym* lub *polu wektorowym*.

Jeżeli położenie punktu M jest określone przez współrzędne kartezjańskie xyz , to pole skalarne jest równoznaczne z podaniem funkcji skalarnej $U(x, y, z)$. Będziemy zawsze zakładali, że funkcja ta ma ciągłe pochodne cząstkowe względem wszystkich zmiennych.

Jeżeli w każdym punkcie M obszaru przestrzennego, który może być również całą przestrzenią, określona jest pewna wartość skalarna lub pewien wektor o początku w punkcie M , to mówimy odpowiednio o *polu skalarnym* lub *polu wektorowym*.

Jeżeli położenie punktu M jest określone przez współrzędne kartezjańskie xyz , to pole skalarne jest równoznaczne z podaniem funkcji skalarnej $U(x, y, z)$. Będziemy zawsze zakładali, że funkcja ta ma ciągłe pochodne cząstkowe względem wszystkich zmiennych.

Niech będzie dane pole skalarne $U(M) = U(x, y, z)$. Wektor $\vec{g}$ o współrzędnych

$$\vec{g} = \left[\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right]$$

nazywamy *gradientem* wielkości U i oznaczamy

$$\vec{g} = \text{grad} U.$$

Taka definicja gradientu zależy oczywiście od wyboru współrzędnych, co jest pewną wadą.

Niech będzie dane pole skalarne $U(M) = U(x, y, z)$. Wektor $\vec{g}$ o współrzędnych

$$\vec{g} = \left[\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right]$$

nazywamy *gradientem* wielkości U i oznaczamy

$$\vec{g} = \text{grad} U.$$

Taka definicja gradientu zależy oczywiście od wyboru współrzędnych, co jest pewną wadą.

Gradient

Aby zdefiniować gradient w sposób niezależny od współrzędnych, wykorzystajmy pojęcie pochodnej kierunkowej

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma.$$

Zdefiniujmy wektor $\vec{\lambda}$ w kierunku osi l , $\vec{\lambda} = [\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma]$, wtedy pochodną kierunkową możemy zapisać

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \text{grad} U \cdot \vec{\lambda} = |\text{grad} U| |\vec{\lambda}| \cos \theta,$$

gdzie θ jest kątem pomiędzy wektorami $\text{grad} U$ i $\vec{\lambda}$.

Gradient

Aby zdefiniować gradient w sposób niezależny od współrzędnych, wykorzystajmy pojęcie pochodnej kierunkowej

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma.$$

Zdefiniujmy wektor $\vec{\lambda}$ w kierunku osi l , $\vec{\lambda} = [\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma]$, wtedy pochodną kierunkową możemy zapisać

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \text{grad} U \cdot \vec{\lambda} = |\text{grad} U| |\vec{\lambda}| \cos \theta,$$

gdzie θ jest kątem pomiędzy wektorami $\text{grad} U$ i $\vec{\lambda}$.

Widzimy, że pochodna kierunkowa osiąga maksimum dla $\theta = 0$, a więc w kierunku zgodnym z kierunkiem gradientu. Dlatego gradient możemy zdefiniować następująco.

Gradient

Aby zdefiniować gradient w sposób niezależny od współrzędnych, wykorzystajmy pojęcie pochodnej kierunkowej

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma.$$

Zdefiniujmy wektor $\vec{\lambda}$ w kierunku osi l , $\vec{\lambda} = [\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma]$, wtedy pochodną kierunkową możemy zapisać

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \text{grad} U \cdot \vec{\lambda} = |\text{grad} U| |\vec{\lambda}| \cos \theta,$$

gdzie θ jest kątem pomiędzy wektorami $\text{grad} U$ i $\vec{\lambda}$.

Widzimy, że pochodna kierunkowa osiąga maksimum dla $\theta = 0$, a więc w kierunku zgodnym z kierunkiem gradientu. Dlatego gradient możemy zdefiniować następująco.

Gradientem wielkości skalarnej U w danym punkcie M nazywamy wektor charakteryzujący kierunek i wartość największego wzrostu wielkości U w punkcie M .

Gradient

Aby zdefiniować gradient w sposób niezależny od współrzędnych, wykorzystajmy pojęcie pochodnej kierunkowej

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma.$$

Zdefiniujmy wektor $\vec{\lambda}$ w kierunku osi l , $\vec{\lambda} = [\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma]$, wtedy pochodną kierunkową możemy zapisać

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \text{grad} U \cdot \vec{\lambda} = |\text{grad} U| |\vec{\lambda}| \cos \theta,$$

gdzie θ jest kątem pomiędzy wektorami $\text{grad} U$ i $\vec{\lambda}$.

Widzimy, że pochodna kierunkowa osiąga maksimum dla $\theta = 0$, a więc w kierunku zgodnym z kierunkiem gradientu. Dlatego gradient możemy zdefiniować następująco.

Gradientem wielkości skalarnej U w danym punkcie M nazywamy wektor charakteryzujący kierunek i wartość największego wzrostu wielkości U w punkcie M .

Gradient i powierzchnia $U(x, y, z) = C$

Widzimy, że pole skalarne $U(M)$ generuje pole wektorowe gradientu $\text{grad}U$.

Równanie

$$U(x, y, z) = C$$

określa pewną powierzchnię (bez punktów osobliwych) w przestrzeni trójwymiarowej.

Gradient i powierzchnia $U(x, y, z) = C$

Widzimy, że pole skalarne $U(M)$ generuje pole wektorowe gradientu $\text{grad}U$.

Równanie

$$U(x, y, z) = C$$

określa pewną powierzchnię (bez punktów osobliwych) w przestrzeni trójwymiarowej.

Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$, w którym $U(x_0, y_0, z_0) = C$, należy do tej powierzchni. Rozważmy krzywą

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (\alpha < t < \beta),$$

zawartą w tej powierzchni, tzn. $U(x(t), y(t), z(t)) = C$ dla wszystkich $t \in (\alpha, \beta)$, przechodzącą przez punkt P , przy czym $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ i $z_0 = z(t_0)$.

Gradient i powierzchnia $U(x, y, z) = C$

Widzimy, że pole skalarne $U(M)$ generuje pole wektorowe gradientu $\text{grad} U$.

Równanie

$$U(x, y, z) = C$$

określa pewną powierzchnię (bez punktów osobliwych) w przestrzeni trójwymiarowej.

Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$, w którym $U(x_0, y_0, z_0) = C$, należy do tej powierzchni. Rozważmy krzywą

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (\alpha < t < \beta),$$

zawartą w tej powierzchni, tzn. $U(x(t), y(t), z(t)) = C$ dla wszystkich $t \in (\alpha, \beta)$, przechodzącą przez punkt P , przy czym $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ i $z_0 = z(t_0)$.

Gradient i powierzchnia $U(x, y, z) = C$

Wtedy styczna do tej krzywej w punkcie P leży całkowicie na płaszczyźnie o równaniu

$$\frac{\partial U(P)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial U(P)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial U(P)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

Rzeczywiście, różniczkując równanie $U(x(t), y(t), z(t)) = C$ w punkcie $P(x_0, y_0, z_0)$ otrzymamy

$$\frac{\partial U(P)}{\partial x}\dot{x}(t_0) + \frac{\partial U(P)}{\partial y}\dot{y}(t_0) + \frac{\partial U(P)}{\partial z}\dot{z}(t_0) = 0,$$

gdzie

$$\dot{x}(t_0) = \left. \frac{x(t_0 + \tau) - x(t_0)}{\tau} \right|_{\tau \rightarrow 0}$$

i podobnie dla $\dot{y}(t_0)$ i $\dot{z}(t_0)$,

Gradient i powierzchnia $U(x, y, z) = C$

Wtedy styczna do tej krzywej w punkcie P leży całkowicie na płaszczyźnie o równaniu

$$\frac{\partial U(P)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial U(P)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial U(P)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

Rzeczywiście, różniczkując równanie $U(x(t), y(t), z(t)) = C$ w punkcie $P(x_0, y_0, z_0)$ otrzymamy

$$\frac{\partial U(P)}{\partial x}\dot{x}(t_0) + \frac{\partial U(P)}{\partial y}\dot{y}(t_0) + \frac{\partial U(P)}{\partial z}\dot{z}(t_0) = 0,$$

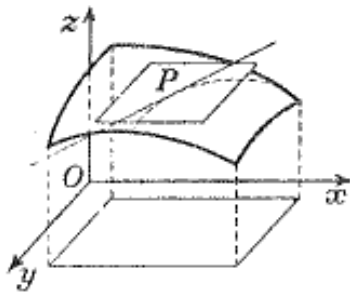
gdzie

$$\dot{x}(t_0) = \left. \frac{x(t_0 + \tau) - x(t_0)}{\tau} \right|_{\tau \rightarrow 0}$$

i podobnie dla $\dot{y}(t_0)$ i $\dot{z}(t_0)$,

Gradient i powierzchnia $U(x, y, z) = C$

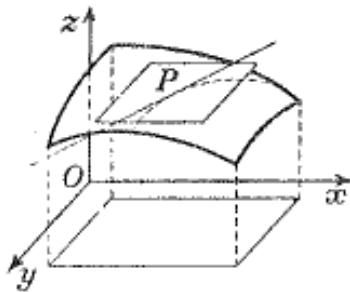
a współrzędne dowolnego punktu stycznej do naszej krzywej w punkcie P wyrażają się wzorami



$$\begin{aligned}x &= x_0 + \dot{x}(t_0)\tau, \\y &= y_0 + \dot{y}(t_0)\tau, \\z &= z_0 + \dot{z}(t_0)\tau, \\-\infty &< \tau < \infty.\end{aligned}$$

Gradient i powierzchnia $U(x, y, z) = C$

a współrzędne dowolnego punktu stycznej do naszej krzywej w punkcie P wyrażają się wzorami



$$\begin{aligned}x &= x_0 + \dot{x}(t_0)\tau, \\y &= y_0 + \dot{y}(t_0)\tau, \\z &= z_0 + \dot{z}(t_0)\tau, \\-\infty &< \tau < \infty.\end{aligned}$$

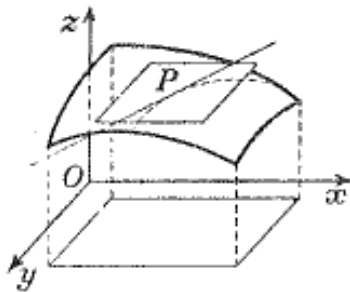
Stąd widać, że współrzędne dowolnego punktu stycznej do krzywej spełniają równanie

$$\frac{\partial U(P)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial U(P)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial U(P)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

z którego wynika również, że wektor $\text{grad}U(P)$ jest ortogonalny do powierzchni $U(x, y, z) = C$ w punkcie P .

Gradient i powierzchnia $U(x, y, z) = C$

a współrzędne dowolnego punktu stycznej do naszej krzywej w punkcie P wyrażają się wzorami



$$\begin{aligned}x &= x_0 + \dot{x}(t_0)\tau, \\y &= y_0 + \dot{y}(t_0)\tau, \\z &= z_0 + \dot{z}(t_0)\tau, \\-\infty &< \tau < \infty.\end{aligned}$$

Stąd widać, że współrzędne dowolnego punktu stycznej do krzywej spełniają równanie

$$\frac{\partial U(P)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial U(P)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial U(P)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

z którego wynika również, że wektor $\text{grad}U(P)$ jest ortogonalny do powierzchni $U(x, y, z) = C$ w punkcie P .

Gradient, potencjał i siła

Za Hamiltonem możemy zdefiniować wektor nabra $\vec{\nabla}$ o składowych

$$\vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right],$$

przy pomocy którego możemy zapisać

$$\text{grad} U = \vec{\nabla} U.$$

W fizyce zachodzi następujący związek pomiędzy polem sił a potencjałem skalarnym, a ściślej energią potencjalną, $V(\vec{r})$

$$\vec{F} = -\text{grad} V = -\vec{\nabla} V.$$

Gradient, potencjał i siła

Za Hamiltonem możemy zdefiniować wektor nabra $\vec{\nabla}$ o składowych

$$\vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right],$$

przy pomocy którego możemy zapisać

$$\text{grad} U = \vec{\nabla} U.$$

W fizyce zachodzi następujący związek pomiędzy polem sił a potencjałem skalarnym, a ściślej energią potencjalną, $V(\vec{r})$

$$\vec{F} = -\text{grad} V = -\vec{\nabla} V.$$

Zadanie. Znaleźć siłę dla potencjału Keplera

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \text{gdzie} \quad r = |\vec{r}|, \quad \alpha > 0.$$

Gradient, potencjał i siła

Za Hamiltonem możemy zdefiniować wektor nabra $\vec{\nabla}$ o składowych

$$\vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right],$$

przy pomocy którego możemy zapisać

$$\text{grad} U = \vec{\nabla} U.$$

W fizyce zachodzi następujący związek pomiędzy polem sił a potencjałem skalarnym, a ściślej energią potencjalną, $V(\vec{r})$

$$\vec{F} = -\text{grad} V = -\vec{\nabla} V.$$

Zadanie. Znaleźć siłę dla potencjału Keplera

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \text{gdzie} \quad r = |\vec{r}|, \quad \alpha > 0.$$

Dywergencja i rotacja

Dla pola wektorowego $\vec{w}$ o składowych

$$\vec{w} = [w_x, w_y, w_z] = w_i \hat{e}_i,$$

gdzie składowe $w_i = w_i(\vec{r})$, $i = 1, 2, 3$, są klasy $C^{(1)}$, a więc są różniczkowalne i mają ciągłe pierwsze pochodne, definiujemy skalar

$$\operatorname{div} \vec{w} = \vec{\nabla} \cdot \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \frac{\partial w_i}{\partial x_i},$$

który nazywamy *dywergencją pola wektorowego $\vec{w}$* , oraz wektor

$$\operatorname{rot} \vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{w},$$

który nazywamy *rotacją pola wektorowego $\vec{w}$* .

Dywergencja i rotacja

Dla pola wektorowego $\vec{w}$ o składowych

$$\vec{w} = [w_x, w_y, w_z] = w_i \hat{e}_i,$$

gdzie składowe $w_i = w_i(\vec{r})$, $i = 1, 2, 3$, są klasy $C^{(1)}$, a więc są różniczkowalne i mają ciągłe pierwsze pochodne, definiujemy skalar

$$\operatorname{div} \vec{w} = \vec{\nabla} \cdot \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \frac{\partial w_i}{\partial x_i},$$

który nazywamy *dywergencją pola wektorowego $\vec{w}$* , oraz wektor

$$\operatorname{rot} \vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{w},$$

który nazywamy *rotacją pola wektorowego $\vec{w}$* .

Pole wektorowe, w którym $\operatorname{div} \vec{w} = 0$ nazywamy *beźródłowym*, a pole w którym $\operatorname{rot} \vec{w} = 0$ nazywamy *bezwirowym*.

Dywergencja i rotacja

Dla pola wektorowego $\vec{w}$ o składowych

$$\vec{w} = [w_x, w_y, w_z] = w_i \hat{e}_i,$$

gdzie składowe $w_i = w_i(\vec{r})$, $i = 1, 2, 3$, są klasy $C^{(1)}$, a więc są różniczkowalne i mają ciągłe pierwsze pochodne, definiujemy skalar

$$\operatorname{div} \vec{w} = \vec{\nabla} \cdot \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \frac{\partial w_i}{\partial x_i},$$

który nazywamy *dywergencją pola wektorowego $\vec{w}$* , oraz wektor

$$\operatorname{rot} \vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{w},$$

który nazywamy *rotacją pola wektorowego $\vec{w}$* .

Pole wektorowe, w którym $\operatorname{div} \vec{w} = 0$ nazywamy *beźródłowym*, a pole w którym $\operatorname{rot} \vec{w} = 0$ nazywamy *bezwiowym*.

Potencjał pola wektorowego

Zadanie. Pokazać, że wektor $\text{rot } \vec{w}$ ma następujące składowe

$$\text{rot } \vec{w} = \left[\frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3}, \frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1}, \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right].$$

Nie każde pole wektorowe ma potencjał.

Założmy, że pole wektorowe $\vec{w}$ ma potencjał V i jego składowe są klasy $C^{(1)}$. Zachodzi związek

$$\vec{w} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \hat{e}_i,$$

a zatem

$$w_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Zróżniczkujemy te związki po $\partial/\partial x_j$

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Potencjał pola wektorowego

Jeśli składowe $w_i = -\partial V / \partial x_i$ są klasy $C(1)$, to odpowiednie pochodne mieszane potencjału V

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i \neq j.$$

Stąd wynika, że zachodzi

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} = 0,$$

jeśli tylko $i \neq j$, a to oznacza, że

$$\text{rot} \vec{w} = \left[\frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3}, \frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1}, \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right] = 0.$$

Potencjał pola wektorowego

Jeśli składowe $w_i = -\partial V / \partial x_i$ są klasy $C(1)$, to odpowiednie pochodne mieszane potencjału V

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i \neq j.$$

Stąd wynika, że zachodzi

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} = 0,$$

jeśli tylko $i \neq j$, a to oznacza, że

$$\text{rot} \vec{w} = \left[\frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3}, \frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1}, \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right] = 0.$$

Znikanie rotacji pola wektorowego $\vec{w}$ jest warunkiem *koniecznym* aby miało ono potencjał, tzn. aby było zachowawcze.

Potencjał pola wektorowego

Jeśli składowe $w_i = -\partial V / \partial x_i$ są klasy $C(1)$, to odpowiednie pochodne mieszane potencjału V

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i \neq j.$$

Stąd wynika, że zachodzi

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} = 0,$$

jeśli tylko $i \neq j$, a to oznacza, że

$$\text{rot} \vec{w} = \left[\frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3}, \frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1}, \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right] = 0.$$

Znikanie rotacji pola wektorowego $\vec{w}$ jest warunkiem *koniecznym* aby miało ono potencjał, tzn. aby było zachowawcze.