

Równania Lagrange'a I rodzaju

Wykład 9

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

Rozważmy układ N punktów materialnych w trójwymiarowej przestrzeni z więzami różniczkowymi danymi równaniami

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

gdzie współczynniki a_{ij} i a_{it} mogą zależeć od współrzędnych uogólnionych i czasu, ale nie zależą od prędkości

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_{ij}(\underbrace{q_1, q_2, \dots, q_{3N}}_q, t) \equiv a_{ij}(q, t), \\ a_{it} &= a_{it}(\underbrace{q_1, q_2, \dots, q_{3N}}_q, t) \equiv a_{it}(q, t). \end{aligned}$$

Rozważmy układ N punktów materialnych w trójwymiarowej przestrzeni z więzami różniczkowymi danymi równaniami

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

gdzie współczynniki a_{ij} i a_{it} mogą zależeć od współrzędnych uogólnionych i czasu, ale nie zależą od prędkości

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_{ij}(\underbrace{q_1, q_2, \dots, q_{3N}}_q, t) \equiv a_{ij}(q, t), \\ a_{it} &= a_{it}(\underbrace{q_1, q_2, \dots, q_{3N}}_q, t) \equiv a_{it}(q, t). \end{aligned}$$

Nie zakładamy całkowalności rozpatrywanego układu równań różniczkowych. Dlatego związki pomiędzy wektorami położenia poszczególnych punktów a $n = 3N$ współrzędnymi uogólnionymi,

Nie zakładamy całkowalności rozpatrywanego układu równań różniczkowych. Dlatego związki pomiędzy wektorami położenia poszczególnych punktów a $n = 3N$ współzrędnymi uogólnionymi, które traktujemy jako niezależne,

Nie zakładamy całkowalności rozpatrywanego układu równań różniczkowych. Dlatego związki pomiędzy wektorami położenia poszczególnych punktów a $n = 3N$ współrzędnymi uogólnionymi, które traktujemy jako niezależne, dane są równaniami

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Nie zakładamy całkowalności rozpatrywanego układu równań różniczkowych. Dlatego związki pomiędzy wektorami położenia poszczególnych punktów a $n = 3N$ współzrędnymi uogólnionymi, które traktujemy jako niezależne, dane są równaniami

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Odpowiednie przesunięcia wirtualne dane są wzorem

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Nie zakładamy całkowalności rozpatrywanego układu równań różniczkowych. Dlatego związki pomiędzy wektorami położenia poszczególnych punktów a $n = 3N$ współzrędnymi uogólnionymi, które traktujemy jako niezależne, dane są równaniami

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Odpowiednie przesunięcia wirtualne dane są wzorem

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Równania więzów różniczkowych wyrażone przez przesunięcia wirtualne, które są natychmiastowe, przyjmują postać

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{3N} a_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Równania te wprowadzają zależności pomiędzy przesunięciami wirtualnymi δq_j , które przy braku całkowalności nie pozwalają jednak wyeliminować zależnych współrzędnych uogólnionych q_j .

Równania więzów różniczkowych wyrażone przez przesunięcia wirtualne, które są natychmiastowe, przyjmują postać

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{3N} a_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Równania te wprowadzają zależności pomiędzy przesunięciami wirtualnymi δq_j , które przy braku całkowalności nie pozwalają jednak wyeliminować zależnych współrzędnych uogólnionych q_j .

Powtórzmy teraz kilka kolejnych kroków, które zrobiliśmy przy wyprowadzeniu równań Lagrange'a II rodzaju z równania d'Alemberta, ale nie skorzystamy z założenia o niezależności wszystkich współrzędnych uogólnionych q_j .

Równania więzów różniczkowych wyrażone przez przesunięcia wirtualne, które są natychmiastowe, przyjmują postać

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{3N} a_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Równania te wprowadzają zależności pomiędzy przesunięciami wirtualnymi δq_j , które przy braku całkowalności nie pozwalają jednak wyeliminować zależnych współrzędnych uogólnionych q_j . Powtórzmy teraz kilka kolejnych kroków, które zrobiliśmy przy wyprowadzeniu równań Lagrange'a II rodzaju z równania d'Alemberta, ale nie skorzystamy z założenia o niezależności wszystkich współrzędnych uogólnionych q_j .

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozpatrywany układ N punktów materialnych jest opisywany równaniem d'Alemberta

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Drugi wyraz w tym równaniu, który opisuje sumę prac wirtualnych wszystkich sił aktywnych, zapiszemy w formie

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} = \sum_{j=1}^{3N} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right]}_{Q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^{3N} Q_j \delta q_j, \end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozpatrywany układ N punktów materialnych jest opisywany równaniem d'Alemberta

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Drugi wyraz w tym równaniu, który opisuje sumę prac wirtualnych wszystkich sił aktywnych, zapiszemy w formie

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} = \sum_{j=1}^{3N} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right]}_{Q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^{3N} Q_j \delta q_j, \end{aligned}$$

gdzie wstawiliśmy wyrażenie dla $\delta \vec{r}_i$,

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozpatrywany układ N punktów materialnych jest opisywany równaniem d'Alemberta

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Drugi wyraz w tym równaniu, który opisuje sumę prac wirtualnych wszystkich sił aktywnych, zapiszemy w formie

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} = \sum_{j=1}^{3N} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right]}_{Q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^{3N} Q_j \delta q_j, \end{aligned}$$

gdzie wstawiliśmy wyrażenie dla $\delta \vec{r}_i$,

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

zamieniliśmy kolejność sumowania i wprowadziliśmy symbol siły uogólnionej Q_j

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

zamieniliśmy kolejność sumowania i wprowadziliśmy symbol **siły uogólnionej** Q_j

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Pierwszy wyraz w równaniu d'Alemberta możemy przekształcić tak jak poprzednio

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} = \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

zamieniliśmy kolejność sumowania i wprowadziliśmy symbol **siły uogólnionej** Q_j

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Pierwszy wyraz w równaniu d'Alemberta możemy przekształcić tak jak poprzednio

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} = \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

gdzie znowu wstawiliśmy wyrażenie na $\delta \vec{r}_i$ i zamieniliśmy kolejność sumowania.

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

zamieniliśmy kolejność sumowania i wprowadziliśmy symbol **siły uogólnionej** Q_j

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Pierwszy wyraz w równaniu d'Alemberta możemy przekształcić tak jak poprzednio

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} = \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

gdzie znowu wstawiliśmy wyrażenie na $\delta \vec{r}_i$ i zamieniliśmy kolejność sumowania.

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Skorzystajmy z wzoru na pochodną iloczynu

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

i wstawmy doń udowodnione wcześniej (patrz *Wykład 4*) wzory

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}, \quad \frac{\partial}{\partial q_l} \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_l}.$$

Skorzystajmy z wzoru na pochodną iloczynu

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

i wstawmy doń udowodnione wcześniej (patrz *Wykład 4*) wzory

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}, \quad \frac{\partial}{\partial q_l} \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_l}.$$

Wówczas otrzymamy

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Skorzystajmy z wzoru na pochodną iloczynu

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

i wstawmy doń udowodnione wcześniej (patrz *Wykład 4*) wzory

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}, \quad \frac{\partial}{\partial q_l} \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_l}.$$

Wówczas otrzymamy

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$
$$=$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j\end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\ &= \end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\&= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\&= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{r}_i^2}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{r}_i^2}{\partial q_j} \right] \delta q_j\end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\&= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\&= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\&= \end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\&= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\&= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\&= \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) \right] \delta q_j\end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\&= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\&= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\&= \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) \right] \delta q_j \\&= \end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\&= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\&= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\&= \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) \right] \delta q_j \\&= \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_j} \right] \delta q_j,\end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\&= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\&= \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\&= \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) \right] \delta q_j \\&= \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_j} \right] \delta q_j,\end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

gdzie wprowadziliśmy wzór na energię kinetyczną układu N punktów materialnych

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2.$$

Wstawmy otrzymane wyniki do równania d'Alemberta

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j - \sum_{j=1}^{3N} Q_j \delta q_j$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

gdzie wprowadziliśmy wzór na energię kinetyczną układu N punktów materialnych

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2.$$

Wstawmy otrzymane wyniki do równania d'Alemberta

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j - \sum_{j=1}^{3N} Q_j \delta q_j \\ &= \end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

gdzie wprowadziliśmy wzór na energię kinetyczną układu N punktów materialnych

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2.$$

Wstawmy otrzymane wyniki do równania d'Alemberta

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j - \sum_{j=1}^{3N} Q_j \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

gdzie wprowadziliśmy wzór na energię kinetyczną układu N punktów materialnych

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2.$$

Wstawmy otrzymane wyniki do równania d'Alemberta

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j - \sum_{j=1}^{3N} Q_j \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Założmy, że istnieje potencjał uogólniony $V(q, \dot{q}, t)$, który wiąże się z siłą uogólnioną Q_j wzorem

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

i wstawmy wyrażenie na Q_j do naszego równania

$$\sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} \right] \delta q_j =$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Założmy, że istnieje potencjał uogólniony $V(q, \dot{q}, t)$, który wiąże się z siłą uogólnioną Q_j wzorem

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

i wstawmy wyrażenie na Q_j do naszego równania

$$\sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} \right] \delta q_j =$$
$$\sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} \right] \delta q_j =$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Założmy, że istnieje potencjał uogólniony $V(q, \dot{q}, t)$, który wiąże się z siłą uogólnioną Q_j wzorem

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

i wstawmy wyrażenie na Q_j do naszego równania

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \\ \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0. \end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Założmy, że istnieje potencjał uogólniony $V(q, \dot{q}, t)$, który wiąże się z siłą uogólnioną Q_j wzorem

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

i wstawmy wyrażenie na Q_j do naszego równania

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \\ \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0 \end{aligned}$$

gdzie wprowadziliśmy funkcję Lagrange'a $L = T - V$.

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Założmy, że istnieje potencjał uogólniony $V(q, \dot{q}, t)$, który wiąże się z siłą uogólnioną Q_j wzorem

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

i wstawmy wyrażenie na Q_j do naszego równania

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \\ \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0 \end{aligned}$$

gdzie wprowadziliśmy funkcję Lagrange'a $L = T - V$.

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Tym razem nie wszystkie przesunięcia wirtualne δq_j , $j = 1, 2, \dots, 3N$, są niezależne, gdyż istnieje pomiędzy nimi k zależności danych równaniami więzów różniczkowych

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Dlatego nie wszystkie współczynniki znikającej kombinacji liniowej

$$\sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

muszą się zerować.

Tym razem nie wszystkie przesunięcia wirtualne δq_j , $j = 1, 2, \dots, 3N$, są niezależne, gdyż istnieje pomiędzy nimi k zależności danych równaniami więzów różniczkowych

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Dlatego nie wszystkie współczynniki znikającej kombinacji liniowej

$$\sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

muszą się zerować.

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Pomnóżmy każde z równań więzów

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

przez dowolny, niezerowy współczynnik λ_i , czyli tzw. mnożnik Lagrange'a. Wówczas otrzymamy układ k równań postaci

$$\lambda_i \sum_{j=1}^{3N} a_{ij} \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N} \lambda_i a_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Pomnóżmy każde z równań więzów

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

przez dowolny, niezerowy współczynnik λ_i , czyli tzw. mnożnik Lagrange'a. Wówczas otrzymamy układ k równań postaci

$$\lambda_i \sum_{j=1}^{3N} a_{ij} \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N} \lambda_i a_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Dodając stronami wszystkie k równań tego układu otrzymamy

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{3N} \lambda_i a_{ij} \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \delta q_j = 0.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Pomnóżmy każde z równań więzów

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

przez dowolny, niezerowy współczynnik λ_i , czyli tzw. mnożnik Lagrange'a. Wówczas otrzymamy układ k równań postaci

$$\lambda_i \sum_{j=1}^{3N} a_{ij} \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N} \lambda_i a_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Dodając stronami wszystkie k równań tego układu otrzymamy

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{3N} \lambda_i a_{ij} \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \delta q_j = 0.$$

Odejmijmy to równanie stronami od równania

$$\sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

Wówczas otrzymamy

$$\sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \right] \delta q_j = 0.$$

Odejmijmy to równanie stronami od równania

$$\sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

Wówczas otrzymamy

$$\sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \right] \delta q_j = 0.$$

Co prawda nie wszystkie przesunięcia wirtualne δq_j są niezależne,

Odejmijmy to równanie stronami od równania

$$\sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

Wówczas otrzymamy

$$\sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \right] \delta q_j = 0.$$

Co prawda nie wszystkie przesunięcia wirtualne δq_j są niezależne, a ściślej mówiąc k spośród nich jest zależnych,

Odejmijmy to równanie stronami od równania

$$\sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

Wówczas otrzymamy

$$\sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \right] \delta q_j = 0.$$

Co prawda nie wszystkie przesunięcia wirtualne δq_j są niezależne, a ściślej mówiąc k spośród nich jest zależnych, ale teraz mamy do dyspozycji k dowolnych mnożników Lagrange'a λ_i ,

Odejmijmy to równanie stronami od równania

$$\sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

Wówczas otrzymamy

$$\sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \right] \delta q_j = 0.$$

Co prawda nie wszystkie przesunięcia wirtualne δq_j są niezależne, a ściślej mówiąc k spośród nich jest zależnych, **ale teraz mamy do dyspozycji k dowolnych mnożników Lagrange'a λ_i ,**

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

które możemy dobrać w taki sposób, żeby wszystkie współczynniki otrzymanej kombinacji liniowej zniknęły.

Zatem otrzymujemy układ równań postaci

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 3N,$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

które możemy dobrać w taki sposób, żeby wszystkie współczynniki otrzymanej kombinacji liniowej zniknęły.

Zatem otrzymujemy układ równań postaci

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 3N,$$

który możemy zapisać ostatecznie w formie równań Lagrange'a I rodzaju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, 3N.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

które możemy dobrać w taki sposób, żeby wszystkie współczynniki otrzymanej kombinacji liniowej zniknęły.

Zatem otrzymujemy układ równań postaci

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 3N,$$

który możemy zapisać ostatecznie w formie **równań Lagrange'a I rodzaju**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, 3N.$$

Jest to układ $3N$ równań różniczkowych drugiego rzędu z $3N + k$ niewiadomymi,

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

które możemy dobrać w taki sposób, żeby wszystkie współczynniki otrzymanej kombinacji liniowej zniknęły.

Zatem otrzymujemy układ równań postaci

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 3N,$$

który możemy zapisać ostatecznie w formie **równań Lagrange'a I rodzaju**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, 3N.$$

Jest to układ $3N$ równań różniczkowych drugiego rzędu z $3N + k$ niewiadomymi, na które składa się

które możemy dobrać w taki sposób, żeby wszystkie współczynniki otrzymanej kombinacji liniowej zniknęły.

Zatem otrzymujemy układ równań postaci

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 3N,$$

który możemy zapisać ostatecznie w formie **równań Lagrange'a I rodzaju**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, 3N.$$

Jest to układ $3N$ równań różniczkowych drugiego rzędu z $3N + k$ niewiadomymi, na które składa się

Uwagi nt. równań Lagrange'a I rodzaju

$3N$ współrzędnych uogólnionych $q_j(t)$ oraz k mnożników Lagrange'a λ_j .

Uwagi nt. równań Lagrange'a I rodzaju

$3N$ współrzędnych uogólnionych $q_j(t)$ oraz k mnożników Lagrange'a λ_j .

Jednoznaczne rozwiązanie równań ruchu jest jednak możliwe, gdyż mamy jeszcze do dyspozycji k równań więzów różniczkowych

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Uwagi nt. równań Lagrange'a I rodzaju

$3N$ współrzędnych uogólnionych $q_j(t)$ oraz k mnożników Lagrange'a λ_j .

Jednoznaczne rozwiązanie równań ruchu jest jednak możliwe, gdyż mamy jeszcze do dyspozycji k równań więzów różniczkowych

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Aby zinterpretować występujący po prawej stronie równań Lagrange'a I rodzaju wyraz

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij},$$

Uwagi nt. równań Lagrange'a I rodzaju

$3N$ współrzędnych uogólnionych $q_j(t)$ oraz k mnożników Lagrange'a λ_j .

Jednoznaczne rozwiązanie równań ruchu jest jednak możliwe, gdyż mamy jeszcze do dyspozycji k równań więzów różniczkowych

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Aby zinterpretować występujący po prawej stronie równań Lagrange'a I rodzaju wyraz

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij},$$

Uwagi nt. równań Lagrange'a I rodzaju

który odróżnia je od równań Lagrange'a II rodzaju, przypomnijmy postać tych ostatnich dla układów z tarciem

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = R_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie po prawej stronie występuje uogólniona siła tarcia R_j .

który odróżnia je od równań Lagrange'a II rodzaju, przypomnijmy postać tych ostatnich dla układów z tarciem

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = R_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie po prawej stronie występuje uogólniona siła tarcia R_j .

W takim razie wyrażenie

$$Z_j \equiv \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, 3N,$$

należy interpretować jako uogólnioną siłę reakcji więzów.

który odróżnia je od równań Lagrange'a II rodzaju, przypomnijmy postać tych ostatnich dla układów z tarciem

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = R_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie po prawej stronie występuje uogólniona siła tarcia R_j .
W takim razie wyrażenie

$$Z_j \equiv \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, 3N,$$

należy interpretować jako **uogólnioną siłę reakcji więzów**.

Uwagi nt. równań Lagrange'a I rodzaju

Równania Lagrange'a I rodzaju są spełnione dla układów z więzami nieholonomicznymi danymi niecałkowalnymi równaniami różniczkowymi

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Można je jednak stosować również dla układów z więzami holonomicznymi danymi równaniami

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

Równania Lagrange'a I rodzaju są spełnione dla układów z więzami nieholonomicznymi danymi niecałkowalnymi równaniami różniczkowymi

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Można je jednak stosować również dla układów z więzami holonomicznymi danymi równaniami

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

które po zróżniczkowaniu przyjmują postać równań różniczkowych

Równania Lagrange'a I rodzaju są spełnione dla układów z więzami nieholonomicznymi danymi niecałkowalnymi równaniami różniczkowymi

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Można je jednak stosować również dla układów z więzami holonomicznymi danymi równaniami

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

które po zróżniczkowaniu przyjmują postać równań różniczkowych

Uwagi nt. równań Lagrange'a I rodzaju

$$df_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} dt \equiv \sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0$$

Wystarczy zatem przyrównać odpowiednie współczynniki przy niezależnych przyrostach dq_j

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} = a_{ij}$$

Uwagi nt. równań Lagrange'a I rodzaju

$$df_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} dt \equiv \sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0$$

Wystarczy zatem przyrównać odpowiednie współczynniki przy niezależnych przyrostach dq_j

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} = a_{ij}$$

i wstawić je do równań Lagrange'a I rodzaju.

Uwagi nt. równań Lagrange'a I rodzaju

$$df_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} dt \equiv \sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0$$

Wystarczy zatem przyrównać odpowiednie współczynniki przy niezależnych przyrostach dq_j

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} = a_{ij}$$

i wstawić je do równań Lagrange'a I rodzaju. Taki sposób postępowania jest jednak na ogół *nieekonomiczny*,

Uwagi nt. równań Lagrange'a I rodzaju

$$df_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} dt \equiv \sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0$$

Wystarczy zatem przyrównać odpowiednie współczynniki przy niezależnych przyrostach dq_j

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} = a_{ij}$$

i wstawić je do równań Lagrange'a I rodzaju. Taki sposób postępowania jest jednak na ogół *nieekonomiczny*, gdyż w przypadku więzów holonomicznych znacznie łatwiej jest skorzystać z równań Lagrange'a II rodzaju.

Uwagi nt. równań Lagrange'a I rodzaju

$$df_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} dt \equiv \sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0$$

Wystarczy zatem przyrównać odpowiednie współczynniki przy niezależnych przyrostach dq_j

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} = a_{ij}$$

i wstawić je do równań Lagrange'a I rodzaju. Taki sposób postępowania jest jednak na ogół *nieekonomiczny*, gdyż w przypadku więzów holonomicznych znacznie łatwiej jest skorzystać z równań Lagrange'a II rodzaju.

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Równań Lagrange'a I rodzaju można użyć w celu wyznaczenia sił reakcji więzów działających na układ.

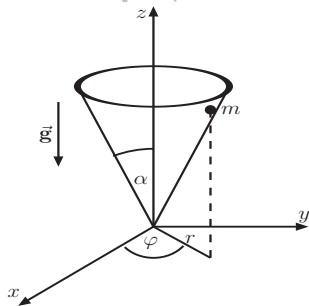
Czasem udaje się to zrobić bez konieczności całkowania równań, co ilustruje następujący przykład.

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Równań Lagrange'a I rodzaju można użyć w celu wyznaczenia sił reakcji więzów działających na układ.

Czasem udaje się to zrobić bez konieczności całkowania równań, co ilustruje następujący przykład.

Przykład 1: Znaleźć siły reakcji więzów działające na punkt materialny o masie m poruszający się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .

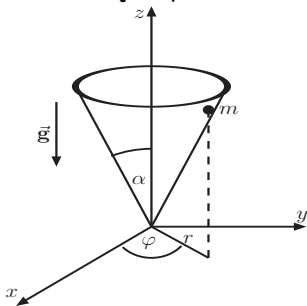


Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Równań Lagrange'a I rodzaju można użyć w celu wyznaczenia sił reakcji więzów działających na układ.

Czasem udaje się to zrobić bez konieczności całkowania równań, co ilustruje następujący przykład.

Przykład 1: Znaleźć siły reakcji więzów działające na punkt materialny o masie m poruszający się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .



Funkcja Lagrange'a ma postać

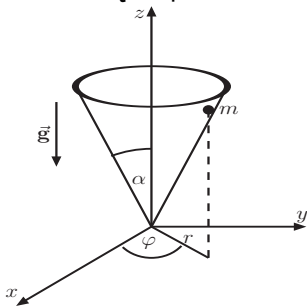
$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - mgz \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz. \end{aligned}$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Równań Lagrange'a I rodzaju można użyć w celu wyznaczenia sił reakcji więzów działających na układ.

Czasem udaje się to zrobić bez konieczności całkowania równań, co ilustruje następujący przykład.

Przykład 1: Znaleźć siły reakcji więzów działające na punkt materialny o masie m poruszający się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .



Funkcja Lagrange'a ma postać

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - mgz \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz. \end{aligned}$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Równanie więzów we współrzędnych cylindrycznych ma postać

$$f(r, \varphi, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

ale teraz nie eliminujemy zależnej współrzędnej.

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Równanie więzów we współrzędnych cylindrycznych ma postać

$$f(r, \varphi, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

ale teraz nie eliminujemy zależnej współrzędnej.

Ponieważ mamy tylko jedno równanie więzów, to suma po prawej stronie równań Lagrange'a I rodzaju redukuje się do pojedynczego wyrazu i przyjmują one postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \equiv \lambda a_j$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Równanie więzów we współrzędnych cylindrycznych ma postać

$$f(r, \varphi, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

ale teraz nie eliminujemy zależnej współrzędnej.

Ponieważ mamy tylko jedno równanie więzów, to suma po prawej stronie równań Lagrange'a I rodzaju redukuje się do pojedynczego wyrazu i przyjmują one postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \equiv \lambda a_j = \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, 3,$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Równanie więzów we współrzędnych cylindrycznych ma postać

$$f(r, \varphi, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

ale teraz nie eliminujemy zależnej współrzędnej.

Ponieważ mamy tylko jedno równanie więzów, to suma po prawej stronie równań Lagrange'a I rodzaju redukuje się do pojedynczego wyrazu i przyjmują one postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \equiv \lambda a_j = \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, 3,$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że dla więzów holonomicznych

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \quad \Rightarrow \quad a_j = \frac{\partial f}{\partial q_j}.$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Równanie więzów we współrzędnych cylindrycznych ma postać

$$f(r, \varphi, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

ale teraz nie eliminujemy zależnej współrzędnej.

Ponieważ mamy tylko jedno równanie więzów, to suma po prawej stronie równań Lagrange'a I rodzaju redukuje się do pojedynczego wyrazu i przyjmują one postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \equiv \lambda a_j = \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, 3,$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że dla więzów holonomicznych

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \quad \Rightarrow \quad a_j = \frac{\partial f}{\partial q_j}.$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Dla punktu na powierzchni stożka danej równaniem

$$f(r, \varphi, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

identyfikujemy

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

i równania Lagrange'a I rodzaju przyjmują postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda a_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r}$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Dla punktu na powierzchni stożka danej równaniem

$$f(r, \varphi, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

identyfikujemy

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

i równania Lagrange'a I rodzaju przyjmują postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda a_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Dla punktu na powierzchni stożka danej równaniem

$$f(r, \varphi, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

identyfikujemy

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

i równania Lagrange'a I rodzaju przyjmują postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda a_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = Z_r,$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Dla punktu na powierzchni stożka danej równaniem

$$f(r, \varphi, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

identyfikujemy

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

i równania Lagrange'a I rodzaju przyjmują postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda a_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = Z_r,$$
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Dla punktu na powierzchni stożka danej równaniem

$$f(r, \varphi, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

identyfikujemy

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

i równania Lagrange'a I rodzaju przyjmują postać

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= \lambda a_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = Z_r, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \end{aligned}$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Dla punktu na powierzchni stożka danej równaniem

$$f(r, \varphi, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

identyfikujemy

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

i równania Lagrange'a I rodzaju przyjmują postać

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= \lambda a_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = Z_r, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \lambda a_\varphi \end{aligned}$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Dla punktu na powierzchni stożka danej równaniem

$$f(r, \varphi, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

identyfikujemy

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

i równania Lagrange'a I rodzaju przyjmują postać

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= \lambda a_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = Z_r, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \lambda a_\varphi = \lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Dla punktu na powierzchni stożka danej równaniem

$$f(r, \varphi, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

identyfikujemy

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

i równania Lagrange'a I rodzaju przyjmują postać

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= \lambda a_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = Z_r, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \lambda a_\varphi = \lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned}$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Dla punktu na powierzchni stożka danej równaniem

$$f(r, \varphi, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

identyfikujemy

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

i równania Lagrange'a I rodzaju przyjmują postać

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= \lambda a_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = Z_r, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \lambda a_\varphi = \lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 = Z_\varphi, \end{aligned}$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Dla punktu na powierzchni stożka danej równaniem

$$f(r, \varphi, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

identyfikujemy

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

i równania Lagrange'a I rodzaju przyjmują postać

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= \lambda a_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = Z_r, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \lambda a_\varphi = \lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 = Z_\varphi, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} &= \lambda a_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = -\lambda = Z_z, \end{aligned}$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Dla punktu na powierzchni stożka danej równaniem

$$f(r, \varphi, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

identyfikujemy

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

i równania Lagrange'a I rodzaju przyjmują postać

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= \lambda a_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = Z_r, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \lambda a_\varphi = \lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 = Z_\varphi, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} &= \end{aligned}$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Dla punktu na powierzchni stożka danej równaniem

$$f(r, \varphi, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

identyfikujemy

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

i równania Lagrange'a I rodzaju przyjmują postać

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= \lambda a_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = Z_r, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \lambda a_\varphi = \lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 = Z_\varphi, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} &= \lambda a_z \end{aligned}$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Dla punktu na powierzchni stożka danej równaniem

$$f(r, \varphi, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

identyfikujemy

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

i równania Lagrange'a I rodzaju przyjmują postać

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= \lambda a_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = Z_r, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \lambda a_\varphi = \lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 = Z_\varphi, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} &= \lambda a_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Dla punktu na powierzchni stożka danej równaniem

$$f(r, \varphi, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

identyfikujemy

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

i równania Lagrange'a I rodzaju przyjmują postać

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= \lambda a_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = Z_r, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \lambda a_\varphi = \lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 = Z_\varphi, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} &= \lambda a_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = -\lambda \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Dla punktu na powierzchni stożka danej równaniem

$$f(r, \varphi, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

identyfikujemy

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

i równania Lagrange'a I rodzaju przyjmują postać

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= \lambda a_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = Z_r, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \lambda a_\varphi = \lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 = Z_\varphi, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} &= \lambda a_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = -\lambda \operatorname{tg} \alpha = Z_z. \end{aligned}$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Dla punktu na powierzchni stożka danej równaniem

$$f(r, \varphi, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

identyfikujemy

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

i równania Lagrange'a I rodzaju przyjmują postać

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= \lambda a_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = Z_r, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \lambda a_\varphi = \lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 = Z_\varphi, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} &= \lambda a_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = -\lambda \operatorname{tg} \alpha = Z_z. \end{aligned}$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Obliczmy potrzebne pochodne funkcji Lagrange'a i napiszmy równania ruchu

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) - mgz.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} =$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Obliczmy potrzebne pochodne funkcji Lagrange'a i napiszmy równania ruchu

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) - mgz.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Obliczmy potrzebne pochodne funkcji Lagrange'a i napiszmy równania ruchu

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) - mgz.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} =$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Obliczmy potrzebne pochodne funkcji Lagrange'a i napiszmy równania ruchu

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) - mgz.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r},$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Obliczmy potrzebne pochodne funkcji Lagrange'a i napiszmy równania ruchu

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) - mgz.$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} =$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Obliczmy potrzebne pochodne funkcji Lagrange'a i napiszmy równania ruchu

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) - mgz.$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2,$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Obliczmy potrzebne pochodne funkcji Lagrange'a i napiszmy równania ruchu

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz. \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2, \\ \Rightarrow \quad m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= \lambda, \end{aligned} \tag{1}$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Obliczmy potrzebne pochodne funkcji Lagrange'a i napiszmy równania ruchu

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2,$$

$$\Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \lambda, \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi},$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Obliczmy potrzebne pochodne funkcji Lagrange'a i napiszmy równania ruchu

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2,$$

$$\Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \lambda, \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} =$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Obliczmy potrzebne pochodne funkcji Lagrange'a i napiszmy równania ruchu

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2,$$

$$\Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \lambda, \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi},$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Obliczmy potrzebne pochodne funkcji Lagrange'a i napiszmy równania ruchu

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2,$$

$$\Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \lambda, \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Obliczmy potrzebne pochodne funkcji Lagrange'a i napiszmy równania ruchu

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2,$$

$$\Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \lambda, \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\Rightarrow mr(2\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0, \quad (2)$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Obliczmy potrzebne pochodne funkcji Lagrange'a i napiszmy równania ruchu

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2,$$

$$\Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \lambda, \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\Rightarrow mr(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Obliczmy potrzebne pochodne funkcji Lagrange'a i napiszmy równania ruchu

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2,$$
$$\Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \lambda, \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$
$$\Rightarrow mr(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} =$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Obliczmy potrzebne pochodne funkcji Lagrange'a i napiszmy równania ruchu

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2,$$
$$\Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \lambda, \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$
$$\Rightarrow mr(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z},$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Obliczmy potrzebne pochodne funkcji Lagrange'a i napiszmy równania ruchu

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2, \\ \Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \lambda, \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \\ \Rightarrow mr(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z}, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = -mg,$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Obliczmy potrzebne pochodne funkcji Lagrange'a i napiszmy równania ruchu

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2, \\ \Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \lambda, \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \\ \Rightarrow mr(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z}, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = -mg, \\ \Rightarrow m(\ddot{z} + g) = -\lambda \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Obliczmy potrzebne pochodne funkcji Lagrange'a i napiszmy równania ruchu

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2,$$
$$\Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \lambda, \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$
$$\Rightarrow mr(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z}, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = -mg,$$
$$\Rightarrow m(\ddot{z} + g) = -\lambda \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Skorzystajmy z równania więzów

$$r - z \operatorname{tg} \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = r \operatorname{ctg} \alpha \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} = \ddot{r} \operatorname{ctg} \alpha$$

i wstawmy je do równania (3)

$$m(\ddot{z} + g) = -\lambda \operatorname{tg} \alpha,$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Skorzystajmy z równania więzów

$$r - z \operatorname{tg} \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = r \operatorname{ctg} \alpha \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} = \ddot{r} \operatorname{ctg} \alpha$$

i wstawmy je do równania (3)

$$m(\ddot{z} + g) = -\lambda \operatorname{tg} \alpha,$$

wówczas otrzymamy

$$m(\ddot{r} \operatorname{ctg} \alpha + g) = -\lambda \operatorname{tg} \alpha.$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Skorzystajmy z równania więzów

$$r - z \operatorname{tg} \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = r \operatorname{ctg} \alpha \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} = \ddot{r} \operatorname{ctg} \alpha$$

i wstawmy je do równania (3)

$$m(\ddot{z} + g) = -\lambda \operatorname{tg} \alpha,$$

wówczas otrzymamy

$$m(\ddot{r} \operatorname{ctg} \alpha + g) = -\lambda \operatorname{tg} \alpha.$$

Dodając to równanie stronami do równania (1) pomnożonego przez $\operatorname{tg} \alpha$

$$m(\ddot{r} \operatorname{tg} \alpha - r \dot{\varphi}^2 \operatorname{tg} \alpha) = \lambda \operatorname{tg} \alpha$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Skorzystajmy z równania więzów

$$r - z \operatorname{tg} \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = r \operatorname{ctg} \alpha \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} = \ddot{r} \operatorname{ctg} \alpha$$

i wstawmy je do równania (3)

$$m(\ddot{z} + g) = -\lambda \operatorname{tg} \alpha,$$

wówczas otrzymamy

$$m(\ddot{r} \operatorname{ctg} \alpha + g) = -\lambda \operatorname{tg} \alpha.$$

Dodając to równanie stronami do równania (1) pomnożonego przez $\operatorname{tg} \alpha$

$$m(\ddot{r} \operatorname{tg} \alpha - r \dot{\varphi}^2 \operatorname{tg} \alpha) = \lambda \operatorname{tg} \alpha$$

dostaniemy równanie

$$m \left[\ddot{r} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) - r \dot{\varphi}^2 \operatorname{tg} \alpha + g \right] = \lambda \operatorname{tg} \alpha - \lambda \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

które po przedzieleniu przez m pokrywa się z jednym z równań wyprowadzonych już wcześniej. Drugie równanie opisujące ruch punktu po powierzchni stożka otrzymamy z równania (2):

$$mr (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0.$$

dostaniemy równanie

$$m \left[\ddot{r} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) - r \dot{\varphi}^2 \operatorname{tg} \alpha + g \right] = \lambda \operatorname{tg} \alpha - \lambda \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

które po przedzieleniu przez m pokrywa się z jednym z równań wyprowadzonych już wcześniej. Drugie równanie opisujące ruch punktu po powierzchni stożka otrzymamy z równania (2):

$$mr (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad r = 0 \quad \text{lub} \quad 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0.$$

dostaniemy równanie

$$m \left[\ddot{r} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) - r \dot{\varphi}^2 \operatorname{tg} \alpha + g \right] = \lambda \operatorname{tg} \alpha - \lambda \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

które po przedzieleniu przez m pokrywa się z jednym z równań wyprowadzonych już wcześniej. Drugie równanie opisujące ruch punktu po powierzchni stożka otrzymamy z równania (2):

$$mr (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad r = 0 \quad \text{lub} \quad 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0.$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Aby uniknąć całkowania równań ruchu, wykorzystamy fakt, że φ jest współrzędną cykliczną

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi}}{mr^2}.$$

i wyznaczymy $\ddot{r}$ z równania

$$m(\ddot{r} \operatorname{ctg} \alpha + g) = -\lambda \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \ddot{r} = -\left(\frac{\lambda}{m} \operatorname{tg} \alpha + g\right) \operatorname{tg} \alpha.$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Aby uniknąć całkowania równań ruchu, wykorzystamy fakt, że φ jest współzrzedną cykliczną

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi}}{mr^2}.$$

i wyznaczymy $\ddot{r}$ z równania

$$m(\ddot{r} \operatorname{ctg} \alpha + g) = -\lambda \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \ddot{r} = -\left(\frac{\lambda}{m} \operatorname{tg} \alpha + g\right) \operatorname{tg} \alpha.$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Wstawmy $\dot{\varphi}$ i $\ddot{r}$ do równania (1)

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \lambda \quad \Rightarrow \quad m \left[- \left(\frac{\lambda}{m} \operatorname{tg} \alpha + g \right) \operatorname{tg} \alpha - r \left(\frac{p_{\varphi}}{mr^2} \right)^2 \right] = \lambda$$
$$\Rightarrow \quad -(\lambda \operatorname{tg} \alpha + mg) \operatorname{tg} \alpha - \frac{p_{\varphi}^2}{mr^3} = \lambda$$

Przenieśmy wyrazy zawierające λ na jedną stronę równania

$$\lambda(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = -mg \operatorname{tg} \alpha - \frac{p_{\varphi}^2}{mr^3}$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Wstawmy $\dot{\varphi}$ i $\ddot{r}$ do równania (1)

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \lambda \quad \Rightarrow \quad m \left[- \left(\frac{\lambda}{m} \operatorname{tg} \alpha + g \right) \operatorname{tg} \alpha - r \left(\frac{p_{\varphi}}{mr^2} \right)^2 \right] = \lambda$$
$$\Rightarrow \quad -(\lambda \operatorname{tg} \alpha + mg) \operatorname{tg} \alpha - \frac{p_{\varphi}^2}{mr^3} = \lambda$$

Przenieśmy wyrazy zawierające λ na jedną stronę równania

$$\lambda(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = -mg \operatorname{tg} \alpha - \frac{p_{\varphi}^2}{mr^3}$$

skąd otrzymujemy λ w funkcji odległości od osi symetrii stożka r

$$\lambda(r) = - \frac{mg \operatorname{tg} \alpha + \frac{p_{\varphi}^2}{mr^3}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

Zastosowanie równań Lagrange'a I rodzaju

Wstawmy $\dot{\varphi}$ i $\ddot{r}$ do równania (1)

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \lambda \quad \Rightarrow \quad m \left[- \left(\frac{\lambda}{m} \operatorname{tg} \alpha + g \right) \operatorname{tg} \alpha - r \left(\frac{p_{\varphi}}{mr^2} \right)^2 \right] = \lambda$$
$$\Rightarrow \quad -(\lambda \operatorname{tg} \alpha + mg) \operatorname{tg} \alpha - \frac{p_{\varphi}^2}{mr^3} = \lambda$$

Przenieśmy wyrazy zawierające λ na jedną stronę równania

$$\lambda(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = -mg \operatorname{tg} \alpha - \frac{p_{\varphi}^2}{mr^3}$$

skąd otrzymujemy λ w funkcji odległości od osi symetrii stożka r

$$\lambda(r) = - \frac{mg \operatorname{tg} \alpha + \frac{p_{\varphi}^2}{mr^3}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

Znaczenie równań Lagrange'a I rodzaju

a siły reakcji więzów działające na punkt materialny poruszający się po powierzchni stożka mają postać

$$Z_r = \lambda(r), \quad Z_\varphi = 0, \quad Z_z = -\lambda(r) \operatorname{tg} \alpha.$$

Podsumujmy znaczenie równań Lagrange'a I rodzaju.

- Są spełnione nie tylko dla więzów holonomicznych, ale również dla więzów nieholonomicznych zadanych w postaci niecałkowalnych równań różniczkowych.
- Umożliwiają znalezienie sił reakcji więzów, często bez konieczności całkowania równań ruchu.

Znaczenie równań Lagrange'a I rodzaju

a siły reakcji więzów działające na punkt materialny poruszający się po powierzchni stożka mają postać

$$Z_r = \lambda(r), \quad Z_\varphi = 0, \quad Z_z = -\lambda(r) \operatorname{tg} \alpha.$$

Podsumujmy znaczenie równań Lagrange'a I rodzaju.

- Są spełnione nie tylko dla więzów holonomicznych, ale również dla więzów nieholonomicznych zadanych w postaci niecałkowalnych równań różniczkowych.
- Umożliwiają znalezienie sił reakcji więzów, często bez konieczności całkowania równań ruchu.

Poza tym nie odgrywają większej roli w mechanice.

Znaczenie równań Lagrange'a I rodzaju

a siły reakcji więzów działające na punkt materialny poruszający się po powierzchni stożka mają postać

$$Z_r = \lambda(r), \quad Z_\varphi = 0, \quad Z_z = -\lambda(r) \operatorname{tg} \alpha.$$

Podsumujmy znaczenie równań Lagrange'a I rodzaju.

- Są spełnione nie tylko dla więzów holonomicznych, ale również dla więzów nieholonomicznych zadanych w postaci niecałkowalnych równań różniczkowych.
- Umożliwiają znalezienie sił reakcji więzów, często bez konieczności całkowania równań ruchu.

Poza tym nie odgrywają większej roli w mechanice.