

Problem ruchu dwóch ciał

Prawa Keplera

Wykład 8

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

Rozważymy problem ruchu dwóch ciał odosobnionych o masach m_1 i m_2 .

Równania ruchu wynikają bezpośrednio z II zasady dynamiki Newtona

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t),$$

Rozważmy problem ruchu dwóch ciał odosobnionych o masach m_1 i m_2 .

Równania ruchu wynikają bezpośrednio z II zasady dynamiki Newtona

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t), \end{aligned}$$

Rozważmy problem ruchu dwóch ciał odosobnionych o masach m_1 i m_2 .

Równania ruchu wynikają bezpośrednio z II zasady dynamiki Newtona

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \end{aligned}$$

Rozważymy problem ruchu dwóch ciał odosobnionych o masach m_1 i m_2 .

Równania ruchu wynikają bezpośrednio z II zasady dynamiki Newtona

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t),\end{aligned}$$

Rozważymy problem ruchu dwóch ciał odosobnionych o masach m_1 i m_2 .

Równania ruchu wynikają bezpośrednio z II zasady dynamiki Newtona

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t),\end{aligned}$$

gdzie $\vec{r}_i$ i $\dot{\vec{r}}_i$, $i = 1, 2$, są wektorami położenia i prędkości ciał w dowolnie wybranym układzie odniesienia,

Rozważymy problem ruchu dwóch ciał odosobnionych o masach m_1 i m_2 .

Równania ruchu wynikają bezpośrednio z II zasady dynamiki Newtona

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t),\end{aligned}$$

gdzie $\vec{r}_i$ i $\dot{\vec{r}}_i$, $i = 1, 2$, są wektorami położenia i prędkości ciał w dowolnie wybranym układzie odniesienia, a w drugim równaniu skorzystaliśmy z III zasady dynamiki Newtona.

Rozważymy problem ruchu dwóch ciał odosobnionych o masach m_1 i m_2 .

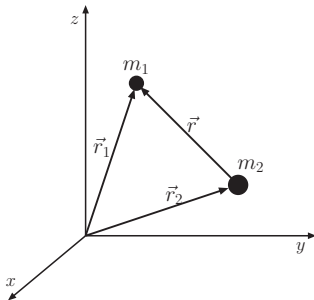
Równania ruchu wynikają bezpośrednio z II zasady dynamiki Newtona

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t),\end{aligned}$$

gdzie $\vec{r}_i$ i $\dot{\vec{r}}_i$, $i = 1, 2$, są wektorami położenia i prędkości ciał w dowolnie wybranym układzie odniesienia, a w drugim równaniu skorzystaliśmy z III zasady dynamiki Newtona.

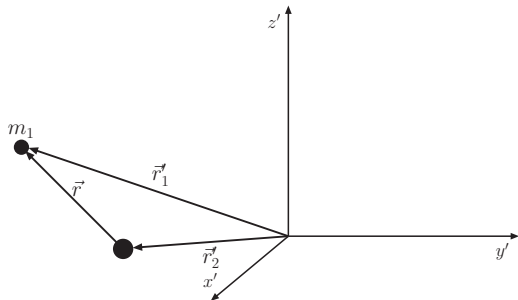
Problem ruchu dwóch ciał

Rozpatrywany układ dwóch ciał możemy obserwować z dowolnie wybranego układu odniesienia.



Problem ruchu dwóch ciał

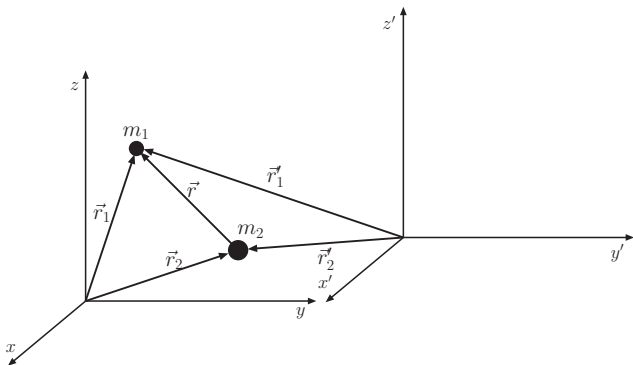
Układ współrzędnych możemy wybrać inaczej, np. możemy przesunąć go równolegle o pewien wektor



Problem ruchu dwóch ciał

Tylko wektor różnicy położeń

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$



Problem ruchu dwóch ciał

Dlatego siła oddziaływania $\vec{F}$ obu ciał może zależeć tylko od względnego położenia $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Podobnie, wykorzystując fakt, że rozpatrywany układ dwóch ciał możemy obserwować z dowolnie wybranego inercyjnego układu odniesienia, dochodzimy do wniosku, że siła $\vec{F}$ może zależeć tylko od względnej prędkości $\dot{\vec{r}} \equiv \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2$ obu ciał i od czasu.

Problem ruchu dwóch ciał

Dlatego siła oddziaływania $\vec{F}$ obu ciał może zależeć tylko od **względnego położenia** $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Podobnie, wykorzystując fakt, że rozpatrywany układ dwóch ciał możemy obserwować z dowolnie wybranego inercjalnego układu odniesienia, dochodzimy do wniosku, że **siła $\vec{F}$ może zależeć tylko od względnej prędkości** $\dot{\vec{r}} \equiv \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2$ obu ciał i od czasu. Zatem równania ruchu przyjmują postać

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t). \end{aligned}$$

Problem ruchu dwóch ciał

Dlatego siła oddziaływania $\vec{F}$ obu ciał może zależeć tylko od **względnej położenia** $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Podobnie, wykorzystując fakt, że rozpatrywany układ dwóch ciał możemy obserwować z dowolnie wybranego inercjalnego układu odniesienia, dochodzimy do wniosku, że **siła $\vec{F}$ może zależeć tylko od względnej prędkości** $\dot{\vec{r}} \equiv \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2$ obu ciał i od czasu. Zatem równania ruchu przyjmują postać

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Dodajmy stronami oba równania

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0$$

Problem ruchu dwóch ciał

Dlatego siła oddziaływania $\vec{F}$ obu ciał może zależeć tylko od **względnej położenia** $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Podobnie, wykorzystując fakt, że rozpatrywany układ dwóch ciał możemy obserwować z dowolnie wybranego inercjalnego układu odniesienia, dochodzimy do wniosku, że **siła $\vec{F}$ może zależeć tylko od względnej prędkości** $\dot{\vec{r}} \equiv \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2$ obu ciał i od czasu. Zatem równania ruchu przyjmują postać

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Dodajmy stronami oba równania

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0$$

i podzielmy obie strony przez $m_1 + m_2$

$$\frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

Problem ruchu dwóch ciał

Dlatego siła oddziaływania $\vec{F}$ obu ciał może zależeć tylko od **względnej położenia** $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Podobnie, wykorzystując fakt, że rozpatrywany układ dwóch ciał możemy obserwować z dowolnie wybranego inercjalnego układu odniesienia, dochodzimy do wniosku, że **siła $\vec{F}$ może zależeć tylko od względnej prędkości** $\dot{\vec{r}} \equiv \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2$ obu ciał i od czasu. Zatem równania ruchu przyjmują postać

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Dodajmy stronami oba równania

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0$$

i podzielmy obie strony przez $m_1 + m_2$

$$\frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

Po lewej stronie otrzymanego równania występuje druga pochodna czasowa wektora

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

który opisuje położenie środka masy rozpatrywanego układu dwóch ciał.

Po lewej stronie otrzymanego równania występuje druga pochodna czasowa wektora

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

który opisuje **położenie środka masy** rozpatrywanego układu dwóch ciał.

Otrzymane równanie przyjmuje więc postać

$$\frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = \ddot{\vec{R}} = 0$$

Po lewej stronie otrzymanego równania występuje druga pochodna czasowa wektora

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

który opisuje **położenie środka masy** rozpatrywanego układu dwóch ciał.

Otrzymane równanie przyjmuje więc postać

$$\frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = \ddot{\vec{R}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{R}} = \text{const.}$$

Problem ruchu dwóch ciał

Po lewej stronie otrzymanego równania występuje druga pochodna czasowa wektora

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

który opisuje **położenie środka masy** rozpatrywanego układu dwóch ciał.

Otrzymane równanie przyjmuje więc postać

$$\frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = \ddot{\vec{R}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{R}} = \text{const.}$$

Wnioskujemy stąd, że **środek masy odosobnionego układu dwóch ciał porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.**

Problem ruchu dwóch ciał

Po lewej stronie otrzymanego równania występuje druga pochodna czasowa wektora

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

który opisuje **położenie środka masy** rozpatrywanego układu dwóch ciał.

Otrzymane równanie przyjmuje więc postać

$$\frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = \ddot{\vec{R}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{R}} = \text{const.}$$

Wnioskujemy stąd, że **środek masy odosobnionego układu dwóch ciał porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.**

Ta konkluzja wiąże się bezpośrednio z symetrią odosobnionego układu punktów materialnych względem transformacji Galileusza, a ściślej z niezmienniczością układu fizycznego przy przejściu do dowolnego innego układu inercjalnego.

Ta konkluzja wiąże się bezpośrednio z symetrią odosobnionego układu punktów materialnych względem [transformacji Galileusza](#), a ściślej z niezmienniczością układu fizycznego przy przejściu do dowolnego innego układu inercjalnego.

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$,

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$,

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 =$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t),$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_2 &= \end{aligned}$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Odejmijmy stronami drugie równanie od pierwszego

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Odejmijmy stronami drugie równanie od pierwszego

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) =$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Odejmijmy stronami drugie równanie od pierwszego

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) =$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Odejmijmy stronami drugie równanie od pierwszego

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Odejmijmy stronami drugie równanie od pierwszego

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

Zdefiniujemy masę zredukowaną układu dwóch ciał

$$m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Zdefiniujemy masę zredukowaną układu dwóch ciał

$$m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Wówczas nasze równanie przyjmie postać

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

Zdefiniujemy masę zredukowaną układu dwóch ciał

$$m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Wówczas nasze równanie przyjmie postać

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

Widzimy, że problem ruchu dwóch ciał został sprowadzony do

- ruchu ciała o masie zredukowanej pod wpływem takiej samej siły, którą ciała wzajemnie na siebie oddziałują,

Zdefiniujemy masę zredukowaną układu dwóch ciał

$$m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Wówczas nasze równanie przyjmie postać

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

Widzimy, że problem ruchu dwóch ciał został sprowadzony do

- ruchu ciała o masie zredukowanej pod wpływem takiej samej siły, którą ciała wzajemnie na siebie oddziałują,
- jednostajnego ruchu środka masy.

Zdefiniujemy **masę zredukowaną układu dwóch ciał**

$$m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Wówczas nasze równanie przyjmie postać

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

Widzimy, że problem ruchu dwóch ciał został sprowadzony do

- ruchu ciała o masie zredukowanej pod wpływem takiej samej siły, którą ciała wzajemnie na siebie oddziałują,
- jednostajnego ruchu środka masy.

Przykład 1. Rozważmy ruch układu Słońce–Ziemia. Masa Słońca m_S to około 2×10^{30} kg,

Przykład 1. Rozważmy ruch układu Słońce–Ziemia. Masa Słońca m_S to około 2×10^{30} kg, a masa Ziemi $m_Z \approx 6 \times 10^{24}$ kg,

Przykład 1. Rozważmy ruch układu Słońce–Ziemia. Masa Słońca m_S to około 2×10^{30} kg, a masa Ziemi $m_Z \approx 6 \times 10^{24}$ kg, a zatem

$$m_S \gg m_Z$$

Przykład 1. Rozważmy ruch układu Słońce–Ziemia. Masa Słońca m_S to około 2×10^{30} kg, a masa Ziemi $m_Z \approx 6 \times 10^{24}$ kg, a zatem

$$m_S \gg m_Z \Rightarrow \frac{1}{m_Z} \gg \frac{1}{m_S}$$

Przykład 1. Rozważmy ruch układu Słońce–Ziemia. Masa Słońca m_S to około 2×10^{30} kg, a masa Ziemi $m_Z \approx 6 \times 10^{24}$ kg, a zatem

$$m_S \gg m_Z \Rightarrow \frac{1}{m_Z} \gg \frac{1}{m_S} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{m_S} + \frac{1}{m_Z}$$

Przykład 1. Rozważmy ruch układu Słońce–Ziemia. Masa Słońca m_S to około 2×10^{30} kg, a masa Ziemi $m_Z \approx 6 \times 10^{24}$ kg, a zatem

$$m_S \gg m_Z \Rightarrow \frac{1}{m_Z} \gg \frac{1}{m_S} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{m_S} + \frac{1}{m_Z} \approx \frac{1}{m_Z},$$

Przykład 1. Rozważmy ruch układu Słońce–Ziemia. Masa Słońca m_S to około 2×10^{30} kg, a masa Ziemi $m_Z \approx 6 \times 10^{24}$ kg, a zatem

$$m_S \gg m_Z \Rightarrow \frac{1}{m_Z} \gg \frac{1}{m_S} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{m_S} + \frac{1}{m_Z} \approx \frac{1}{m_Z},$$

skąd wynika, że masa zredukowana układu jest w bardzo dobrym przybliżeniu równa masie Ziemi, $m \approx m_Z$.

Przykład 1. Rozważmy ruch układu Słońce–Ziemia. Masa Słońca m_S to około 2×10^{30} kg, a masa Ziemi $m_Z \approx 6 \times 10^{24}$ kg, a zatem

$$m_S \gg m_Z \Rightarrow \frac{1}{m_Z} \gg \frac{1}{m_S} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{m_S} + \frac{1}{m_Z} \approx \frac{1}{m_Z},$$

skąd wynika, że masa zredukowana układu jest w bardzo dobrym przybliżeniu równa masie Ziemi, $m \approx m_Z$.

Odwróćmy związki definicyjne na wektory określające położenie względne i położenie środka masy

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_S - \vec{r}_Z \\ \vec{R} = \frac{m_S \vec{r}_S + m_Z \vec{r}_Z}{m_S + m_Z} \end{cases}$$

Przykład 1. Rozważmy ruch układu Słońce–Ziemia. Masa Słońca m_S to około 2×10^{30} kg, a masa Ziemi $m_Z \approx 6 \times 10^{24}$ kg, a zatem

$$m_S \gg m_Z \Rightarrow \frac{1}{m_Z} \gg \frac{1}{m_S} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{m_S} + \frac{1}{m_Z} \approx \frac{1}{m_Z},$$

skąd wynika, że masa zredukowana układu jest w bardzo dobrym przybliżeniu równa masie Ziemi, $m \approx m_Z$.

Odwróćmy związki definicyjne na wektory określające położenie względne i położenie środka masy

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_S - \vec{r}_Z \\ \vec{R} = \frac{m_S \vec{r}_S + m_Z \vec{r}_Z}{m_S + m_Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_S = \frac{m_Z}{m_S + m_Z} \vec{r} + \vec{R} \\ \vec{r}_Z = -\frac{m_S}{m_S + m_Z} \vec{r} + \vec{R} \end{cases}$$

Przykład 1. Rozważmy ruch układu Słońce–Ziemia. Masa Słońca m_S to około 2×10^{30} kg, a masa Ziemi $m_Z \approx 6 \times 10^{24}$ kg, a zatem

$$m_S \gg m_Z \Rightarrow \frac{1}{m_Z} \gg \frac{1}{m_S} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{m_S} + \frac{1}{m_Z} \approx \frac{1}{m_Z},$$

skąd wynika, że masa zredukowana układu jest w bardzo dobrym przybliżeniu równa masie Ziemi, $m \approx m_Z$.

Odwróćmy związki definicyjne na wektory określające położenie względne i położenie środka masy

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_S - \vec{r}_Z \\ \vec{R} = \frac{m_S \vec{r}_S + m_Z \vec{r}_Z}{m_S + m_Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_S = \frac{m_Z}{m_S + m_Z} \vec{r} + \vec{R} \\ \vec{r}_Z = -\frac{m_S}{m_S + m_Z} \vec{r} + \vec{R} \end{cases}$$

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor $\vec{R}$ i obliczmy

$$\frac{|\vec{r}_S|}{|\vec{r}_Z|} = \frac{\left| \frac{m_Z}{m_S + m_Z} \vec{r} \right|}{\left| -\frac{m_S}{m_S + m_Z} \vec{r} \right|} =$$

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor $\vec{R}$ i obliczmy

$$\frac{|\vec{r}_S|}{|\vec{r}_Z|} = \frac{\left| \frac{m_Z}{m_S + m_Z} \vec{r} \right|}{\left| -\frac{m_S}{m_S + m_Z} \vec{r} \right|} = \frac{\frac{m_Z}{m_S + m_Z} |\vec{r}|}{\frac{m_S}{m_S + m_Z} |\vec{r}|} =$$

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor $\vec{R}$ i obliczmy

$$\frac{|\vec{r}_S|}{|\vec{r}_Z|} = \frac{\left| \frac{m_Z}{m_S + m_Z} \vec{r} \right|}{\left| -\frac{m_S}{m_S + m_Z} \vec{r} \right|} = \frac{\frac{m_Z}{m_S + m_Z} |\vec{r}|}{\frac{m_S}{m_S + m_Z} |\vec{r}|} = \frac{m_Z}{m_S} \approx$$

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor $\vec{R}$ i obliczmy

$$\frac{|\vec{r}_S|}{|\vec{r}_Z|} = \frac{\left| \frac{m_Z}{m_S + m_Z} \vec{r} \right|}{\left| -\frac{m_S}{m_S + m_Z} \vec{r} \right|} = \frac{\frac{m_Z}{m_S + m_Z} |\vec{r}|}{\frac{m_S}{m_S + m_Z} |\vec{r}|} = \frac{m_Z}{m_S} \approx \frac{6 \times 10^{24} \text{ kg}}{2 \times 10^{30} \text{ kg}} =$$

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor $\vec{R}$ i obliczmy

$$\frac{|\vec{r}_S|}{|\vec{r}_Z|} = \frac{\left| \frac{m_Z}{m_S + m_Z} \vec{r} \right|}{\left| -\frac{m_S}{m_S + m_Z} \vec{r} \right|} = \frac{\frac{m_Z}{m_S + m_Z} |\vec{r}|}{\frac{m_S}{m_S + m_Z} |\vec{r}|} = \frac{m_Z}{m_S} \approx \frac{6 \times 10^{24} \text{ kg}}{2 \times 10^{30} \text{ kg}} = 3 \times 10^{-6}.$$

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor $\vec{R}$ i obliczmy

$$\frac{|\vec{r}_S|}{|\vec{r}_Z|} = \frac{\left| \frac{m_Z}{m_S + m_Z} \vec{r} \right|}{\left| -\frac{m_S}{m_S + m_Z} \vec{r} \right|} = \frac{\frac{m_Z}{m_S + m_Z} |\vec{r}|}{\frac{m_S}{m_S + m_Z} |\vec{r}|} = \frac{m_Z}{m_S} \approx \frac{6 \times 10^{24} \text{ kg}}{2 \times 10^{30} \text{ kg}} = 3 \times 10^{-6}.$$

Widzimy, że rozmiary orbit Słońca i Ziemi w ruchu względnym mają się do siebie jak

$$\frac{|\vec{r}_S|}{|\vec{r}_Z|} \approx 3 \times 10^{-6},$$

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor $\vec{R}$ i obliczmy

$$\frac{|\vec{r}_S|}{|\vec{r}_Z|} = \frac{\left| \frac{m_Z}{m_S + m_Z} \vec{r} \right|}{\left| -\frac{m_S}{m_S + m_Z} \vec{r} \right|} = \frac{\frac{m_Z}{m_S + m_Z} |\vec{r}|}{\frac{m_S}{m_S + m_Z} |\vec{r}|} = \frac{m_Z}{m_S} \approx \frac{6 \times 10^{24} \text{ kg}}{2 \times 10^{30} \text{ kg}} = 3 \times 10^{-6}.$$

Widzimy, że rozmiary orbit Słońca i Ziemi w ruchu względnym mają się do siebie jak

$$\frac{|\vec{r}_S|}{|\vec{r}_Z|} \approx 3 \times 10^{-6},$$

a zatem jeśli średnia odległość Ziemi od Słońca wynosi
 $150 \times 10^6 \text{ km}$,

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor $\vec{R}$ i obliczmy

$$\frac{|\vec{r}_S|}{|\vec{r}_Z|} = \frac{\left| \frac{m_Z}{m_S + m_Z} \vec{r} \right|}{\left| -\frac{m_S}{m_S + m_Z} \vec{r} \right|} = \frac{\frac{m_Z}{m_S + m_Z} |\vec{r}|}{\frac{m_S}{m_S + m_Z} |\vec{r}|} = \frac{m_Z}{m_S} \approx \frac{6 \times 10^{24} \text{ kg}}{2 \times 10^{30} \text{ kg}} = 3 \times 10^{-6}.$$

Widzimy, że rozmiary orbit Słońca i Ziemi w ruchu względnym mają się do siebie jak

$$\frac{|\vec{r}_S|}{|\vec{r}_Z|} \approx 3 \times 10^{-6},$$

a zatem jeśli średnia odległość Ziemi od Słońca wynosi $150 \times 10^6 \text{ km}$, to rozmiary orbity Słońca względem środka masy układu Słońce-Ziemia są rzędu 450 km .

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor $\vec{R}$ i obliczmy

$$\frac{|\vec{r}_S|}{|\vec{r}_Z|} = \frac{\left| \frac{m_Z}{m_S + m_Z} \vec{r} \right|}{\left| -\frac{m_S}{m_S + m_Z} \vec{r} \right|} = \frac{\frac{m_Z}{m_S + m_Z} |\vec{r}|}{\frac{m_S}{m_S + m_Z} |\vec{r}|} = \frac{m_Z}{m_S} \approx \frac{6 \times 10^{24} \text{ kg}}{2 \times 10^{30} \text{ kg}} = 3 \times 10^{-6}.$$

Widzimy, że rozmiary orbit Słońca i Ziemi w ruchu względnym mają się do siebie jak

$$\frac{|\vec{r}_S|}{|\vec{r}_Z|} \approx 3 \times 10^{-6},$$

a zatem jeśli średnia odległość Ziemi od Słońca wynosi $150 \times 10^6 \text{ km}$, to rozmiary orbity Słońca względem środka masy układu Słońce-Ziemia są rzędu 450 km .

Widzimy, że orbita ta leży głęboko we wnętrzu Słońca.

Podobnie jest w przypadku względnego ruchu Słońca i każdej z pozostałych planet, nie wyłączając Jowisza.

Widzimy, że orbita ta leży głęboko we wnętrzu Słońca.
Podobnie jest w przypadku względnego ruchu Słońca i każdej z pozostałych planet, nie wyłączając Jowisza.

Periodyczne zmiany położenia gwiazd spowodowane przez towarzyszące im planety są wykorzystywane do poszukiwania planet pozasłonecznych.

Widzimy, że orbita ta leży głęboko we wnętrzu Słońca.
Podobnie jest w przypadku względnego ruchu Słońca i każdej z pozostałych planet, nie wyłączając Jowisza.

Periodyczne zmiany położenia gwiazd spowodowane przez towarzyszące im planety są wykorzystywane do poszukiwania planet pozasłonecznych.

Jednak lepsze efekty przynosi badanie drobnych zmian jasności gwiazd spowodowane tranzytem planet na tle ich tarcz.

Widzimy, że orbita ta leży głęboko we wnętrzu Słońca.
Podobnie jest w przypadku względnego ruchu Słońca i każdej z pozostałych planet, nie wyłączając Jowisza.

Periodyczne zmiany położenia gwiazd spowodowane przez towarzyszące im planety są wykorzystywane do poszukiwania planet pozasłonecznych.

Jednak lepsze efekty przynosi badanie drobnych zmian jasności gwiazd spowodowane tranzytem planet na tle ich tarcz.

W mechanice ważną rolę odgrywają **siły centralne**, czyli siły skierowane do określonego punktu, tzw. centrum siły.

W mechanice ważną rolę odgrywają **siły centralne**, czyli siły skierowane do określonego punktu, tzw. centrum siły.

Siłę centralną $\vec{F}(\vec{r}, t)$ możemy zapisać następująco

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = f(r, t) \frac{\vec{r}}{r}, \quad \text{gdzie } r = |\vec{r}|,$$

W mechanice ważną rolę odgrywają **siły centralne**, czyli siły skierowane do określonego punktu, tzw. centrum siły.

Siłę centralną $F(\vec{r}, t)$ możemy zapisać następująco

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r}, \quad \text{gdzie } r = |\vec{r}|,$$

a $f(\vec{r}, t)$ jest dowolną funkcją skalarną.

W mechanice ważną rolę odgrywają **siły centralne**, czyli siły skierowane do określonego punktu, tzw. centrum siły.

Siłę centralną $\vec{F}(\vec{r}, t)$ możemy zapisać następująco

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r}, \quad \text{gdzie } r = |\vec{r}|,$$

a $f(\vec{r}, t)$ jest dowolną funkcją skalarną.

Udowodnimy teraz kilka twierdzeń dotyczących ruchu ciała pod wpływem siły centralnej.

W mechanice ważną rolę odgrywają **siły centralne**, czyli siły skierowane do określonego punktu, tzw. centrum siły.

Siłę centralną $\vec{F}(\vec{r}, t)$ możemy zapisać następująco

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r}, \quad \text{gdzie } r = |\vec{r}|,$$

a $f(\vec{r}, t)$ jest dowolną funkcją skalarną.

Udowodnimy teraz kilka twierdzeń dotyczących ruchu ciała pod wpływem siły centralnej.

Twierdzenie 1. Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

W mechanice ważną rolę odgrywają **siły centralne**, czyli siły skierowane do określonego punktu, tzw. centrum siły.

Siłę centralną $\vec{F}(\vec{r}, t)$ możemy zapisać następująco

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r}, \quad \text{gdzie } r = |\vec{r}|,$$

a $f(\vec{r}, t)$ jest dowolną funkcją skalarną.

Udowodnimy teraz kilka twierdzeń dotyczących ruchu ciała pod wpływem siły centralnej.

Twierdzenie 1. Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Dowód. Obliczmy

$$\dot{\vec{L}} =$$

Dowód. Obliczmy

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) =$$

Dowód. Obliczmy

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} =$$

Dowód. Obliczmy

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t)$$

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \\ &= \end{aligned}$$

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \\ &= \vec{r} \times \left(f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r} \right)\end{aligned}$$

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \\ &= \vec{r} \times \left(f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_0\end{aligned}$$

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \\ &= \vec{r} \times \left(f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_0 = 0\end{aligned}$$

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \\ &= \vec{r} \times \left(f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_0 = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}\end{aligned}$$

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \\ &= \vec{r} \times \left(f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_0 = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}\end{aligned}$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \\ &= \vec{r} \times \left(f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_0 = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}\end{aligned}$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Dowód. Oznaczmy $\vec{r} = x_i \hat{e}_i$ i obliczmy iloczyn skalarny

$$\vec{r} \cdot \vec{L} =$$

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \\ &= \vec{r} \times \left(f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_0 = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}\end{aligned}$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Dowód. Oznaczmy $\vec{r} = x_i \hat{e}_i$ i obliczmy iloczyn skalarny

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = x_i L_i =$$

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \\ &= \vec{r} \times \left(f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_0 = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}\end{aligned}$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Dowód. Oznaczmy $\vec{r} = x_i \hat{e}_i$ i obliczmy iloczyn skalarny

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = x_i L_i = x_i (\vec{r} \times \vec{p})_i =$$

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \\ &= \vec{r} \times \left(f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_0 = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}\end{aligned}$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Dowód. Oznaczmy $\vec{r} = x_i \hat{e}_i$ i obliczmy iloczyn skalarny

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = x_i L_i = x_i (\vec{r} \times \vec{p})_i = x_i \epsilon_{ijk} x_j p_k =$$

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \\ &= \vec{r} \times \left(f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_0 = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}\end{aligned}$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Dowód. Oznaczmy $\vec{r} = x_i \hat{e}_i$ i obliczmy iloczyn skalarny

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{L}} = x_i \dot{L}_i = x_i (\vec{r} \times \dot{\vec{p}})_i = x_i \varepsilon_{ijk} x_j \dot{p}_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j \dot{p}_k + \frac{1}{2} \varepsilon_{jik} x_j x_i \dot{p}_k,$$

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \\ &= \vec{r} \times \left(f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_0 = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}\end{aligned}$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Dowód. Oznaczmy $\vec{r} = x_i \hat{e}_i$ i obliczmy iloczyn skalarny

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{L}} = x_i \dot{L}_i = x_i (\vec{r} \times \dot{\vec{p}})_i = x_i \varepsilon_{ijk} x_j \dot{p}_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j \dot{p}_k + \frac{1}{2} \varepsilon_{jik} x_j x_i \dot{p}_k,$$

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przystawmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k =$$

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przystawmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k = 0$$

gdzie w ostatnim wyrażeniu zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przekształćmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k = 0 \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{L}.$$

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przystawmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k = 0 \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{L}.$$

Twierdzenie 3. Pole siły centralnej $\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy $f(\vec{r}, t) = f(r, t)$.

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przystawmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k = 0 \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{L}.$$

Twierdzenie 3. Pole siły centralnej $\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy $f(\vec{r}, t) = f(r, t)$.

Dowód. Pole sił jest zachowawcze, gdy jego rotacja znika, tzn. $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) = 0$.

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przystawmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k = 0 \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{L}.$$

Twierdzenie 3. Pole siły centralnej $\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy $f(\vec{r}, t) = f(r, t)$.

Dowód. Pole sił jest zachowawcze, gdy jego rotacja znika, tzn. $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) = 0$. Obliczmy i -tą składową rotacji

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \right]_i =$$

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przetawmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k = 0 \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{L}.$$

Twierdzenie 3. Pole siły centralnej $\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy $f(\vec{r}, t) = f(r, t)$.

Dowód. Pole sił jest zachowawcze, gdy jego rotacja znika, tzn. $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) = 0$. Obliczmy i -tą składową rotacji

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} F_k(\vec{r}, t) =$$

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przetawmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k = 0 \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{L}.$$

Twierdzenie 3. Pole siły centralnej $\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy $f(\vec{r}, t) = f(r, t)$.

Dowód. Pole sił jest zachowawcze, gdy jego rotacja znika, tzn. $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) = 0$. Obliczmy i -tą składową rotacji

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} F_k(\vec{r}, t) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(f(\vec{r}, t) \frac{x_k}{r} \right).$$

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przetawmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k = 0 \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{L}.$$

Twierdzenie 3. Pole siły centralnej $\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy $f(\vec{r}, t) = f(r, t)$.

Dowód. Pole sił jest zachowawcze, gdy jego rotacja znika, tzn. $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) = 0$. Obliczmy i -tą składową rotacji

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} F_k(\vec{r}, t) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(f(\vec{r}, t) \frac{x_k}{r} \right).$$

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \right]_i =$$

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k + \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \varepsilon_{ijk} \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{\delta_{jk}}.$$

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k + \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \varepsilon_{ijk} \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{\delta_{jk}}.$$

Ostatni wyraz znika, gdyż ε_{ijk} jest niezerowy tylko jeśli wszystkie indeksy są różne, a wtedy z definicji $\delta_{jk} = 0$.

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k + \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \varepsilon_{ijk} \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{\delta_{jk}}.$$

Ostatni wyraz znika, gdyż ε_{ijk} jest niezerowy tylko jeśli wszystkie indeksy są różne, a wtedy z definicji $\delta_{jk} = 0$.

W takim razie

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \right]_i =$$

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k + \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \underbrace{\varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{\delta_{jk}}.$$

Ostatni wyraz znika, gdyż ε_{ijk} jest niezerowy tylko jeśli wszystkie indeksy są różne, a wtedy z definicji $\delta_{jk} = 0$.

W takim razie

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k =$$

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k + \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \underbrace{\varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{\delta_{jk}}.$$

Ostatni wyraz znika, gdyż ε_{ijk} jest niezerowy tylko jeśli wszystkie indeksy są różne, a wtedy z definicji $\delta_{jk} = 0$.

W takim razie

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k = \varepsilon_{ijk} \left[\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) \right]_j x_k$$

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k + \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \underbrace{\varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{\delta_{jk}}.$$

Ostatni wyraz znika, gdyż ε_{ijk} jest niezerowy tylko jeśli wszystkie indeksy są różne, a wtedy z definicji $\delta_{jk} = 0$.

W takim razie

$$\begin{aligned} \left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \right]_i &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k = \varepsilon_{ijk} \left[\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) \right]_j x_k \\ &= \end{aligned}$$

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k + \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \underbrace{\varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{\delta_{jk}}.$$

Ostatni wyraz znika, gdyż ε_{ijk} jest niezerowy tylko jeśli wszystkie indeksy są różne, a wtedy z definicji $\delta_{jk} = 0$.

W takim razie

$$\begin{aligned} \left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \right]_i &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k = \varepsilon_{ijk} \left[\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) \right]_j x_k \\ &= \left[\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) \times \vec{r} \right]_i = \end{aligned}$$

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k + \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \underbrace{\varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{\delta_{jk}}.$$

Ostatni wyraz znika, gdyż ε_{ijk} jest niezerowy tylko jeśli wszystkie indeksy są różne, a wtedy z definicji $\delta_{jk} = 0$.

W takim razie

$$\begin{aligned} \left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \right]_i &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k = \varepsilon_{ijk} \left[\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) \right]_j x_k \\ &= \left[\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) \times \vec{r} \right]_i = 0. \end{aligned}$$

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k + \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \underbrace{\varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{\delta_{jk}}.$$

Ostatni wyraz znika, gdyż ε_{ijk} jest niezerowy tylko jeśli wszystkie indeksy są różne, a wtedy z definicji $\delta_{jk} = 0$.

W takim razie

$$\begin{aligned} \left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \right]_i &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k = \varepsilon_{ijk} \left[\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) \right]_j x_k \\ &= \left[\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) \times \vec{r} \right]_i = 0. \end{aligned}$$

Ostatnia równość oznacza, że

$$\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) \sim \vec{r}.$$

Ponieważ gradient funkcji $f(\vec{r}, t)$ nie ma składowych w kierunku kątów θ i φ , to musi zachodzić równość

$$f(\vec{r}, t) = f(r, t).$$

Ostatnia równość oznacza, że

$$\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) \sim \vec{r}.$$

Ponieważ gradient funkcji $f(\vec{r}, t)$ nie ma składowych w kierunku kątów θ i φ , to musi zachodzić równość

$$f(\vec{r}, t) = f(r, t).$$

To oznacza, że potencjał, a ściślej energia potencjalna, siły centralnej może zależeć tylko od odległości od centrum siły

$$V(\vec{r}, t) = V(r, t).$$

Ostatnia równość oznacza, że

$$\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) \sim \vec{r}.$$

Ponieważ gradient funkcji $f(\vec{r}, t)$ nie ma składowych w kierunku kątów θ i φ , to musi zachodzić równość

$$f(\vec{r}, t) = f(r, t).$$

To oznacza, że potencjał, a ściślej energia potencjalna, siły centralnej może zależeć tylko od odległości od centrum siły

$$V(\vec{r}, t) = V(r, t).$$

W dalszym ciągu ograniczymy się do stacjonarnych, tzn. niezależnych jawnie od czasu, sił centralnych postaci

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \frac{\vec{r}}{r},$$

dla których energia potencjalna $V(r)$ wiąże się z siłą wzorem

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{dV(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r}.$$

W dalszym ciągu ograniczymy się do stacjonarnych, tzn. niezależnych jawnie od czasu, sił centralnych postaci

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \frac{\vec{r}}{r},$$

dla których energia potencjalna $V(r)$ wiąże się z siłą wzorem

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{dV(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Ponieważ siła grawitacyjna jest centralna i stacjonarna,

W dalszym ciągu ograniczymy się do stacjonarnych, tzn. niezależnych jawnie od czasu, sił centralnych postaci

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \frac{\vec{r}}{r},$$

dla których energia potencjalna $V(r)$ wiąże się z siłą wzorem

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{dV(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Ponieważ siła grawitacyjna jest centralna i stacjonarna, to możemy rozpatrywać ruch ciała o masie zredukowanej m w polu siły o energii potencjalnej $V(r)$, której źródłem jest drugie ciało.

W dalszym ciągu ograniczymy się do stacjonarnych, tzn. niezależnych jawnie od czasu, sił centralnych postaci

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \frac{\vec{r}}{r},$$

dla których energia potencjalna $V(r)$ wiąże się z siłą wzorem

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{dV(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Ponieważ siła grawitacyjna jest centralna i stacjonarna, to możemy rozpatrywać ruch ciała o masie zredukowanej m w polu siły o energii potencjalnej $V(r)$, której źródłem jest drugie ciało.

Ruch w polu siły centralnej

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.

Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - V(r)$$

Ruch w polu siły centralnej

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.

Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r).$$

Ruch w polu siły centralnej

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.

Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - V(r) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r).$$

Ze względu na symetrię obrotową użyjemy współrzędnych biegunowych

$$\begin{cases} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases}$$

Ruch w polu siły centralnej

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.

Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - V(r) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r).$$

Ze względu na symetrię obrotową użyjemy współrzędnych biegunowych

$$\begin{cases} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \end{cases}$$

Ruch w polu siły centralnej

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.

Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - V(r) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r).$$

Ze względu na symetrię obrotową użyjemy współrzędnych biegunowych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \\ \dot{y} = \end{cases}$$

Ruch w polu siły centralnej

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.

Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - V(r) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r).$$

Ze względu na symetrię obrotową użyjemy współrzędnych biegunowych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \end{cases}$$

Ruch w polu siły centralnej

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.

Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - V(r) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r).$$

Ze względu na symetrię obrotową użyjemy współrzędnych biegunowych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \end{cases}$$

Ruch w polu siły centralnej

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.

Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - V(r) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r).$$

Ze względu na symetrię obrotową użyjemy współrzędnych biegunowych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \end{cases}$$

Ruch w polu siły centralnej

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.

Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - V(r) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r).$$

Ze względu na symetrię obrotową użyjemy współrzędnych biegunowych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi. \end{cases}$$

Ruch w polu siły centralnej

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.

Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - V(r) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r).$$

Ze względu na symetrię obrotową użyjemy współrzędnych biegunowych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi. \end{cases}$$

Wstawiając wzory na $\dot{x}$ i $\dot{y}$ do L otrzymujemy

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r).$$

Ruch w polu siły centralnej

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.

Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - V(r) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r).$$

Ze względu na symetrię obrotową użyjemy współrzędnych biegunowych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi. \end{cases}$$

Wstawiając wzory na $\dot{x}$ i $\dot{y}$ do L otrzymujemy

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r).$$

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.

Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana,

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.

Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V$$

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.

Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + V(r)$$

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.

Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + V(r) = \text{const.}$$

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.

Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = \text{const.}$$

Ponadto zauważmy, że φ jest współrzędną cykliczną, tzn. że odpowiedni pęd jest zachowany:

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.

Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = \text{const.}$$

Ponadto zauważmy, że φ jest współrzędną cykliczną, tzn. że odpowiedni pęd jest zachowany:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.

Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = \text{const.}$$

Ponadto zauważmy, że φ jest współrzędną cykliczną, tzn. że odpowiedni pęd jest zachowany:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} =$$

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.

Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = \text{const.}$$

Ponadto zauważmy, że φ jest współrzędną cykliczną, tzn. że odpowiedni pęd jest zachowany:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{dp_{\varphi}}{dt} = 0$$

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.

Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = \text{const.}$$

Ponadto zauważmy, że φ jest współrzędną cykliczną, tzn. że odpowiedni pęd jest zachowany:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{dp_{\varphi}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$$

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.

Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = \text{const.}$$

Ponadto zauważmy, że φ jest współrzędną cykliczną, tzn. że odpowiedni pęd jest zachowany:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{dp_{\varphi}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}$$

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.

Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = \text{const.}$$

Ponadto zauważmy, że φ jest współrzędną cykliczną, tzn. że odpowiedni pęd jest zachowany:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{dp_{\varphi}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$$

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.

Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = \text{const.}$$

Ponadto zauważmy, że φ jest współrzędną cykliczną, tzn. że odpowiedni pęd jest zachowany:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{dp_{\varphi}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$$

Zauważmy, że pęd p_φ jest składową momentu pędu ciała względem centrum siły, prostopadłą do płaszczyzny, w której odbywa się ruch.
Rzeczywiście

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$$

Zauważmy, że pęd p_φ jest składową momentu pędu ciała względem centrum siły, prostopadłą do płaszczyzny, w której odbywa się ruch. Rzeczywiście

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = rmr\dot{\varphi}$$

Zauważmy, że pęd p_φ jest składową momentu pędu ciała względem centrum siły, prostopadłą do płaszczyzny, w której odbywa się ruch. Rzeczywiście

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = rmr\dot{\varphi} = rmv$$

Zauważmy, że pęd p_φ jest składową momentu pędu ciała względem centrum siły, prostopadłą do płaszczyzny, w której odbywa się ruch. Rzeczywiście

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = rmr\dot{\varphi} = rmv = |\vec{r} \times \vec{p}|,$$

Zauważmy, że pęd p_φ jest składową momentu pędu ciała względem centrum siły, prostopadłą do płaszczyzny, w której odbywa się ruch. Rzeczywiście

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = rmr\dot{\varphi} = rmv = |\vec{r} \times \vec{p}|,$$

gdzie $v = r\dot{\varphi}$ jest prędkością liniową w ruchu obrotowym ciała względem centrum siły.

Fakt ten znajduje odzwierciedlenie w drugim prawie Keplera, które mówi, że

w równych odstępach czasu promień wodzący planety, poprowadzony od Słońca, zakreśla równe pola.

Zauważmy, że pęd p_φ jest składową momentu pędu ciała względem centrum siły, prostopadłą do płaszczyzny, w której odbywa się ruch. Rzeczywiście

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = rmr\dot{\varphi} = rmv = |\vec{r} \times \vec{p}|,$$

gdzie $v = r\dot{\varphi}$ jest prędkością liniową w ruchu obrotowym ciała względem centrum siły.

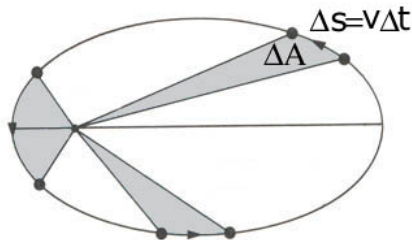
Fakt ten znajduje odzwierciedlenie w **drugim prawie Keplera**, które mówi, że

w równych odstępach czasu promień wodzący planety, poprowadzony od Słońca, zakreśla równe pola.

II prawo Keplera

Fakt ten wyraża równanie

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{const.}$$



Rzeczywiście, przy $\Delta t \rightarrow 0$ pole trójkąta zakreślanego przez promień wynosi

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| dt = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times \vec{p}| dt,$$

skąd

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times \vec{p}| = \frac{p_\varphi}{2m} = \text{const.}$$

Ruch w polu siły centralnej

Przekształćmy wzór na p_φ .

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$$

Ruch w polu siły centralnej

Przekształćmy wzór na p_φ .

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$$

Ruch w polu siły centralnej

Przekształćmy wzór na p_φ .

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \Rightarrow dt = \frac{mr^2}{p_\varphi} d\varphi.$$

Wstawiając wyrażenie $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$ do wzoru na energię ciała

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r)$$

Ruch w polu siły centralnej

Przekształćmy wzór na p_φ .

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \Rightarrow dt = \frac{mr^2}{p_\varphi} d\varphi.$$

Wstawiając wyrażenie $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$ do wzoru na energię ciała

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r)$$

otrzymujemy

$$\frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^2} \right) = E - V(r)$$

Ruch w polu siły centralnej

Przekształćmy wzór na p_φ .

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \Rightarrow dt = \frac{mr^2}{p_\varphi} d\varphi.$$

Wstawiając wyrażenie $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$ do wzoru na energię ciała

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r)$$

otrzymujemy

$$\frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^2} \right) = E - V(r) \Rightarrow \dot{r}^2 = \frac{1}{m^2} \left[2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right].$$

Ruch w polu siły centralnej

Przekształćmy wzór na p_φ .

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \Rightarrow dt = \frac{mr^2}{p_\varphi} d\varphi.$$

Wstawiając wyrażenie $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$ do wzoru na energię ciała

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r)$$

otrzymujemy

$$\frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^2} \right) = E - V(r) \Rightarrow \dot{r}^2 = \frac{1}{m^2} \left[2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right].$$

Skąd również możemy wyznaczyć dt

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{1}{m} \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}$$

Ruch w polu siły centralnej

Przekształćmy wzór na p_φ .

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \Rightarrow dt = \frac{mr^2}{p_\varphi} d\varphi.$$

Wstawiając wyrażenie $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$ do wzoru na energię ciała

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r)$$

otrzymujemy

$$\frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^2} \right) = E - V(r) \Rightarrow \dot{r}^2 = \frac{1}{m^2} \left[2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right].$$

Skąd również możemy wyznaczyć dt

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{1}{m} \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}} \Rightarrow dt = \pm \frac{m dr}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Ruch w polu siły centralnej

Przekształćmy wzór na p_φ .

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \Rightarrow dt = \frac{mr^2}{p_\varphi} d\varphi.$$

Wstawiając wyrażenie $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$ do wzoru na energię ciała

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r)$$

otrzymujemy

$$\frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^2} \right) = E - V(r) \Rightarrow \dot{r}^2 = \frac{1}{m^2} \left[2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right].$$

Skąd również możemy wyznaczyć dt

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{1}{m} \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}} \Rightarrow dt = \pm \frac{m dr}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Otrzymaliśmy dwa wzory na dt :

$$dt = \frac{mr^2}{p_\varphi} d\varphi \quad \text{i} \quad dt = \pm \frac{m dr}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Otrzymaliśmy dwa wzory na dt :

$$dt = \frac{mr^2}{p_\varphi} d\varphi \quad \text{ i } \quad dt = \pm \frac{m dr}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Porównajmy oba wzory

$$\frac{mr^2}{p_\varphi} d\varphi = \pm \frac{m dr}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Ruch w polu siły centralnej

Otrzymaliśmy dwa wzory na dt :

$$dt = \frac{mr^2}{p_\varphi} d\varphi \quad \text{ i } \quad dt = \pm \frac{m dr}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Porównajmy oba wzory

$$\frac{mr^2}{p_\varphi} d\varphi = \pm \frac{m dr}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Stąd możemy wyznaczyć $d\varphi$

$$d\varphi = \pm p_\varphi \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Otrzymaliśmy dwa wzory na dt :

$$dt = \frac{mr^2}{p_\varphi} d\varphi \quad \text{ i } \quad dt = \pm \frac{m dr}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Porównajmy oba wzory

$$\frac{mr^2}{p_\varphi} d\varphi = \pm \frac{m dr}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Stąd możemy wyznaczyć $d\varphi$

$$d\varphi = \pm p_\varphi \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Całkując obustronnie równanie

$$d\varphi = \pm p_\varphi \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}$$

dostaniemy

$$\varphi = \pm \int \frac{p_\varphi dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}},$$

Całkując obustronnie równanie

$$d\varphi = \pm p_\varphi \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}$$

dostaniemy

$$\varphi = \pm \int \frac{p_\varphi dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}},$$

gdzie celowo nie wyłączyliśmy stałego czynnika p_φ przed całkę.

Całkując obustronnie równanie

$$d\varphi = \pm p_\varphi \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}$$

dostaniemy

$$\varphi = \pm \int \frac{p_\varphi dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}},$$

gdzie celowo nie wyłączyliśmy stałego czynnika p_φ przed całkę.

Żeby wykonać całkowanie musimy wstawić jawną postać funkcji $V(r)$.

Całkując obustronnie równanie

$$d\varphi = \pm p_\varphi \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}$$

dostaniemy

$$\varphi = \pm \int \frac{p_\varphi dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}},$$

gdzie celowo nie wyłączyliśmy stałego czynnika p_φ przed całkę. Żeby wykonać całkowanie musimy wstawić jawną postać funkcji $V(r)$.

Od czasów Newtona wiemy, że energia potencjalna oddziaływania dwóch ciał o masach m_1 i m_2 wynosi

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r},$$

ale **Johannes Kepler (1571–1630)**, który sformułował prawa ruchu planet, nie znał prawa powszechnego ciążenia Newtona.

Od czasów Newtona wiemy, że energia potencjalna oddziaływania dwóch ciał o masach m_1 i m_2 wynosi

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r},$$

ale **Johannes Kepler (1571–1630)**, który sformułował prawa ruchu planet, nie znał prawa powszechnego ciążenia Newtona.

Dlatego przyjęł

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r},$$

Od czasów Newtona wiemy, że energia potencjalna oddziaływania dwóch ciał o masach m_1 i m_2 wynosi

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r},$$

ale **Johannes Kepler (1571–1630)**, który sformułował prawa ruchu planet, nie znał prawa powszechnego ciążenia Newtona.

Dlatego przyjął

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \text{gdzie } \alpha = \text{const.} > 0.$$

Od czasów Newtona wiemy, że energia potencjalna oddziaływania dwóch ciał o masach m_1 i m_2 wynosi

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r},$$

ale **Johannes Kepler (1571–1630)**, który sformułował prawa ruchu planet, nie znał prawa powszechnego ciążenia Newtona.

Dlatego przyjął

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \text{gdzie } \alpha = \text{const.} > 0.$$

Wstawiając potencjał Keplera do naszej całki otrzymamy

$$\varphi = \pm \int \frac{p_\varphi dr}{r^2 \sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Od czasów Newtona wiemy, że energia potencjalna oddziaływania dwóch ciał o masach m_1 i m_2 wynosi

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r},$$

ale **Johannes Kepler (1571–1630)**, który sformułował prawa ruchu planet, nie znał prawa powszechnego ciążenia Newtona. Dlatego przyjął

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \text{gdzie } \alpha = \text{const.} > 0.$$

Wstawiając **potencjał Keplera** do naszej całki otrzymamy

$$\varphi = \pm \int \frac{p_\varphi \, dr}{r^2 \sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Wciągnijmy stałą p_φ pod pierwiastek

$$\varphi = \pm \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2 r} - \frac{1}{r^2}}}$$

i podstawmy

$$u = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{dr}{r^2},$$

Wciągnijmy stałą p_φ pod pierwiastek

$$\varphi = \pm \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2 r} - \frac{1}{r^2}}}$$

i podstawmy

$$u = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{dr}{r^2},$$

wtedy dostaniemy

$$\varphi = \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2} u - u^2}}.$$

Wciągniemy stałą p_φ pod pierwiastek

$$\varphi = \pm \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2 r} - \frac{1}{r^2}}}$$

i podstawmy

$$u = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{dr}{r^2},$$

wtedy dostaniemy

$$\varphi = \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2} u - u^2}}.$$

Sprowadźmy trójmian kwadratowy pod pierwiastkiem do postaci kanonicznej

$$\varphi = \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + 2\frac{m\alpha}{p_\varphi^2} u - u^2}} = \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{m^2\alpha^2}{p_\varphi^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}}$$

Sprowadźmy trójmian kwadratowy pod pierwiastkiem do postaci kanonicznej

$$\varphi = \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + 2\frac{m\alpha}{p_\varphi^2} u - u^2}} = \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{m^2\alpha^2}{p_\varphi^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}}$$

=

Sprowadźmy trójmian kwadratowy pod pierwiastkiem do postaci kanonicznej

$$\begin{aligned}\varphi &= \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + 2\frac{m\alpha}{p_\varphi^2} u - u^2}} = \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{m^2\alpha^2}{p_\varphi^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}} \\ &= \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}{p_\varphi^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}}\end{aligned}$$

Sprowadźmy trójmian kwadratowy pod pierwiastkiem do postaci kanonicznej

$$\begin{aligned}\varphi &= \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + 2\frac{m\alpha}{p_\varphi^2} u - u^2}} = \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{m^2\alpha^2}{p_\varphi^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}} \\&= \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}{p_\varphi^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}} \\&= \end{aligned}$$

Sprowadźmy trójmian kwadratowy pod pierwiastkiem do postaci kanonicznej

$$\begin{aligned}\varphi &= \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + 2\frac{m\alpha}{p_\varphi^2} u - u^2}} = \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{m^2\alpha^2}{p_\varphi^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}} \\&= \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}{p_\varphi^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}} \\&= \mp \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \int \frac{du}{\sqrt{1 - \left[\frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)\right]^2}}.\end{aligned}$$

Sprowadźmy trójkian kwadratowy pod pierwiastkiem do postaci kanonicznej

$$\begin{aligned}\varphi &= \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + 2\frac{m\alpha}{p_\varphi^2} u - u^2}} = \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{m^2\alpha^2}{p_\varphi^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}} \\&= \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}{p_\varphi^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}} \\&= \mp \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \int \frac{du}{\sqrt{1 - \left[\frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)\right]^2}}.\end{aligned}$$

Podstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2} \right) \Rightarrow dx = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} du$$

Podstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2} \right) \Rightarrow dx = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} du$$

wówczas nasza całka przyjmuje prostą postać

$$\varphi = \mp \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

Podstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2} \right) \Rightarrow dx = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} du$$

wówczas nasza całka przyjmuje prostą postać

$$\varphi = \mp \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pm \arccos x + \varphi_0 ,$$

Podstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mE p_\varphi^2 + m^2 \alpha^2}} \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2} \right) \Rightarrow dx = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mE p_\varphi^2 + m^2 \alpha^2}} du$$

wówczas nasza całka przyjmuje prostą postać

$$\varphi = \mp \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pm \arccos x + \varphi_0 ,$$

gdzie stałą dowolną oznaczyliśmy φ_0 .

Podstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2} \right) \Rightarrow dx = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} du$$

wówczas nasza całka przyjmuje prostą postać

$$\varphi = \mp \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pm \arccos x + \varphi_0 ,$$

gdzie stałą dowolną oznaczyliśmy φ_0 .

Przepiszmy to równanie w formie

$$\pm \arccos x = \varphi - \varphi_0$$

Podstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2} \right) \Rightarrow dx = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} du$$

wówczas nasza całka przyjmuje prostą postać

$$\varphi = \mp \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pm \arccos x + \varphi_0 ,$$

gdzie stałą dowolną oznaczyliśmy φ_0 .

Przepiszmy to równanie w formie

$$\pm \arccos x = \varphi - \varphi_0$$

i obliczmy obustronnie cosinus,

Podstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2} \right) \Rightarrow dx = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} du$$

wówczas nasza całka przyjmuje prostą postać

$$\varphi = \mp \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pm \arccos x + \varphi_0 ,$$

gdzie stałą dowolną oznaczyliśmy φ_0 .

Przepiszmy to równanie w formie

$$\pm \arccos x = \varphi - \varphi_0$$

i obliczmy obustronnie cosinus,

wówczas dostaniemy

$$\cos(\pm \arccos x) = x = \cos(\varphi - \varphi_0),$$

gdzie skorzystaliśmy z parzystości funkcji cosinus.

wówczas dostaniemy

$$\cos(\pm \arccos x) = x = \cos(\varphi - \varphi_0),$$

gdzie skorzystaliśmy z parzystości funkcji cosinus.

Wstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2} \right) =$$

wówczas dostaniemy

$$\cos(\pm \arccos x) = x = \cos(\varphi - \varphi_0),$$

gdzie skorzystaliśmy z parzystości funkcji cosinus.

Wstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2} \right) = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \left(\frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2} \right),$$

wówczas dostaniemy

$$\cos(\pm \arccos x) = x = \cos(\varphi - \varphi_0),$$

gdzie skorzystaliśmy z parzystości funkcji cosinus.

Wstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2} \right) = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \left(\frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2} \right),$$

wówczas otrzymamy równanie

$$\frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \left(\frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2} \right) = \cos(\varphi - \varphi_0),$$

wówczas dostaniemy

$$\cos(\pm \arccos x) = x = \cos(\varphi - \varphi_0),$$

gdzie skorzystaliśmy z parzystości funkcji cosinus.

Wstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2} \right) = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \left(\frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2} \right),$$

wówczas otrzymamy równanie

$$\frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \left(\frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2} \right) = \cos(\varphi - \varphi_0),$$

z którego najpierw wyznaczmy $\frac{1}{r}$

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{2mEp_{\varphi}^2 + m^2\alpha^2}}{p_{\varphi}^2} \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{m\alpha}{p_{\varphi}^2}$$

z którego najpierw wyznaczmy $\frac{1}{r}$

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{2mEp_{\varphi}^2 + m^2\alpha^2}}{p_{\varphi}^2} \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{m\alpha}{p_{\varphi}^2}$$
$$=$$

z którego najpierw wyznaczmy $\frac{1}{r}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}{p_\varphi^2} \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{m\alpha}{p_\varphi^2} \\ &= \frac{m\alpha}{p_\varphi^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2mEp_\varphi^2}{m^2\alpha^2} \cos(\varphi - \varphi_0)} \right),\end{aligned}$$

z którego najpierw wyznaczmy $\frac{1}{r}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{\sqrt{2mEp_{\varphi}^2 + m^2\alpha^2}}{p_{\varphi}^2} \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{m\alpha}{p_{\varphi}^2} \\ &= \frac{m\alpha}{p_{\varphi}^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2mEp_{\varphi}^2}{m^2\alpha^2} \cos(\varphi - \varphi_0)} \right),\end{aligned}$$

a następnie, odwracając, obliczymy r

$$r = \frac{\frac{p_{\varphi}^2}{m\alpha}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2} \cos(\varphi - \varphi_0)}}.$$

z którego najpierw wyznaczmy $\frac{1}{r}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{\sqrt{2mEp_{\varphi}^2 + m^2\alpha^2}}{p_{\varphi}^2} \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{m\alpha}{p_{\varphi}^2} \\ &= \frac{m\alpha}{p_{\varphi}^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2mEp_{\varphi}^2}{m^2\alpha^2}} \cos(\varphi - \varphi_0) \right),\end{aligned}$$

a następnie, odwracając, obliczymy r

$$r = \frac{\frac{p_{\varphi}^2}{m\alpha}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} \cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$p \equiv \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} = \text{const},$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$p \equiv \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} = \text{const}, \quad \varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = \text{const}.$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$p \equiv \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} = \text{const}, \quad \varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = \text{const}.$$

i wybierzmy dla prostoty $\varphi_0 = 0$,

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$p \equiv \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} = \text{const}, \quad \varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = \text{const}.$$

i wybierzmy dla prostoty $\varphi_0 = 0$, wówczas otrzymamy wzór na odległość r ciała od centrum siły w zależności od kąta biegunowego φ

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$p \equiv \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} = \text{const}, \quad \varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = \text{const}.$$

i wybierzmy dla prostoty $\varphi_0 = 0$, wówczas otrzymamy wzór na odległość r ciała od centrum siły w zależności od kąta biegunowego φ

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$p \equiv \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} = \text{const}, \quad \varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = \text{const}.$$

i wybierzmy dla prostoty $\varphi_0 = 0$, wówczas otrzymamy wzór na odległość r ciała od centrum siły w zależności od kąta biegunowego φ

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Jest to równanie **krzywej stożkowej** zapisane we współrzędnych biegunowych.

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$p \equiv \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} = \text{const}, \quad \varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = \text{const}.$$

i wybierzmy dla prostoty $\varphi_0 = 0$, wówczas otrzymamy wzór na odległość r ciała od centrum siły w zależności od kąta biegunowego φ

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Jest to równanie **krzywej stożkowej** zapisane we współrzędnych biegunowych. Jedno z ognisk krzywej leży w początku układu, a mimośród jest równy ε .

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$p \equiv \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} = \text{const}, \quad \varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = \text{const}.$$

i wybierzmy dla prostoty $\varphi_0 = 0$, wówczas otrzymamy wzór na odległość r ciała od centrum siły w zależności od kąta biegunowego φ

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Jest to równanie **krzywej stożkowej** zapisane we współrzędnych biegunowych. Jedno z ognisk krzywej leży w początku układu, a **mimośród** jest równy ε .

Wartość mimośrodów determinuje rodzaj krzywej.

Rozważmy możliwe przypadki.

Wartość mimośrodów determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0$

Wartość mimośrodów determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \Rightarrow r(\varphi) = p = \text{const.}$

Wartość mimośrodów determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \Rightarrow r(\varphi) = p = \text{const.} \Rightarrow$

Wartość mimośrodów determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \Rightarrow r(\varphi) = p = \text{const.} \Rightarrow \text{okrąg}$

Wartość mimośrodów determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

• $\varepsilon = 0 \Rightarrow r(\varphi) = p = \text{const.} \Rightarrow \text{okrąg}$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 0$$

Wartość mimośrodów determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

• $\varepsilon = 0 \Rightarrow r(\varphi) = p = \text{const.} \Rightarrow \text{okrąg}$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2} = -1$$

Wartość mimośrodów determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

• $\varepsilon = 0 \Rightarrow r(\varphi) = p = \text{const.} \Rightarrow \text{okrąg}$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2} = -1 \Leftrightarrow E = -\frac{m\alpha^2}{2p_{\varphi}^2}.$$

Wartość mimośrodów determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

• $\varepsilon = 0 \Rightarrow r(\varphi) = p = \text{const.} \Rightarrow \text{okrąg}$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2} = -1 \Leftrightarrow E = -\frac{m\alpha^2}{2p_{\varphi}^2}.$$

Taka sytuacja jest oczywiście bardzo mało prawdopodobna.

Wartość mimośrodów determinuje rodzaj krzywej.

Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \Rightarrow r(\varphi) = p = \text{const.} \Rightarrow \text{okrąg}$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2} = -1 \Leftrightarrow E = -\frac{m\alpha^2}{2p_\varphi^2}.$$

Taka sytuacja jest oczywiście bardzo mało prawdopodobna.

- $0 < \varepsilon < 1$

Wartość mimośrodów determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \Rightarrow r(\varphi) = p = \text{const.} \Rightarrow \text{okrąg}$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2} = -1 \Leftrightarrow E = -\frac{m\alpha^2}{2p_{\varphi}^2}.$$

Taka sytuacja jest oczywiście bardzo mało prawdopodobna.

- $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow$

Wartość mimośrodów determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \Rightarrow r(\varphi) = p = \text{const.} \Rightarrow \text{okrąg}$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2} = -1 \Leftrightarrow E = -\frac{m\alpha^2}{2p_{\varphi}^2}.$$

Taka sytuacja jest oczywiście bardzo mało prawdopodobna.

- $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow \text{elipsa}$

Wartość mimośrodów determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \Rightarrow r(\varphi) = p = \text{const.} \Rightarrow \text{okrąg}$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2} = -1 \Leftrightarrow E = -\frac{m\alpha^2}{2p_{\varphi}^2}.$$

Taka sytuacja jest oczywiście bardzo mało prawdopodobna.

- $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow \text{elipsa}$

$$0 < \sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} < 1$$

Wartość mimośrodu determinuje rodzaj krzywej.

Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \Rightarrow r(\varphi) = p = \text{const.} \Rightarrow \text{okrąg}$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2} = -1 \Leftrightarrow E = -\frac{m\alpha^2}{2p_{\varphi}^2}.$$

Taka sytuacja jest oczywiście bardzo mało prawdopodobna.

- $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow \text{elipsa}$

$$0 < \sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2} < 0$$

Wartość mimośrodów determinuje rodzaj krzywej.

Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \Rightarrow r(\varphi) = p = \text{const.} \Rightarrow \text{okrąg}$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2} = -1 \Leftrightarrow E = -\frac{m\alpha^2}{2p_{\varphi}^2}.$$

Taka sytuacja jest oczywiście bardzo mało prawdopodobna.

- $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow \text{elipsa}$

$$0 < \sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2} < 0 \Leftrightarrow -\frac{m\alpha^2}{2p_{\varphi}^2} < E < 0.$$

Wartość mimośrodów determinuje rodzaj krzywej.

Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \Rightarrow r(\varphi) = p = \text{const.} \Rightarrow \text{okrąg}$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2} = -1 \Leftrightarrow E = -\frac{m\alpha^2}{2p_{\varphi}^2}.$$

Taka sytuacja jest oczywiście bardzo mało prawdopodobna.

- $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow \text{elipsa}$

$$0 < \sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2} < 0 \Leftrightarrow -\frac{m\alpha^2}{2p_{\varphi}^2} < E < 0.$$

- $\varepsilon = 1 \Rightarrow$

- $\varepsilon = 1 \Rightarrow$ *parabola*

- $\varepsilon = 1 \Rightarrow$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 1$$

- $\varepsilon = 1 \Rightarrow$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 1 \Leftrightarrow E = 0.$$

- $\varepsilon = 1 \Rightarrow$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 1 \Leftrightarrow E = 0.$$

Taka sytuacja również jest bardzo mało prawdopodobna.

- $\varepsilon = 1 \Rightarrow$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 1 \Leftrightarrow E = 0.$$

Taka sytuacja również jest bardzo mało prawdopodobna.

- $\varepsilon > 1$

- $\varepsilon = 1 \Rightarrow$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 1 \Leftrightarrow E = 0.$$

Taka sytuacja również jest bardzo mało prawdopodobna.

- $\varepsilon > 1 \Rightarrow$

- $\varepsilon = 1 \Rightarrow$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 1 \Leftrightarrow E = 0.$$

Taka sytuacja również jest bardzo mało prawdopodobna.

- $\varepsilon > 1 \Rightarrow$ *hiperbola*

- $\varepsilon = 1 \Rightarrow$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 1 \Leftrightarrow E = 0.$$

Taka sytuacja również jest bardzo mało prawdopodobna.

- $\varepsilon > 1 \Rightarrow$ *hiperbola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} > 1$$

- $\varepsilon = 1 \Rightarrow$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 1 \Leftrightarrow E = 0.$$

Taka sytuacja również jest bardzo mało prawdopodobna.

- $\varepsilon > 1 \Rightarrow$ *hiperbola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} > 1 \Leftrightarrow E > 0.$$

- $\varepsilon = 1 \Rightarrow$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 1 \Leftrightarrow E = 0.$$

Taka sytuacja również jest bardzo mało prawdopodobna.

- $\varepsilon > 1 \Rightarrow$ *hiperbola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} > 1 \Leftrightarrow E > 0.$$

Orbita ciała poruszającego się w potencjale Keplera będzie najprawdopodobniej

- $\varepsilon = 1 \Rightarrow$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 1 \Leftrightarrow E = 0.$$

Taka sytuacja również jest bardzo mało prawdopodobna.

- $\varepsilon > 1 \Rightarrow$ *hiperbola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} > 1 \Leftrightarrow E > 0.$$

Orbita ciała poruszającego się w potencjale Keplera będzie najprawdopodobniej *elipsą* – orbita zamknięta,

- $\varepsilon = 1 \Rightarrow$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 1 \Leftrightarrow E = 0.$$

Taka sytuacja również jest bardzo mało prawdopodobna.

- $\varepsilon > 1 \Rightarrow$ *hiperbola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} > 1 \Leftrightarrow E > 0.$$

Orbita ciała poruszającego się w potencjale Keplera będzie najprawdopodobniej *elipsą* – orbita zamknięta, albo *hiperbolą* – orbita otwarta.

- $\varepsilon = 1 \Rightarrow$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 1 \Leftrightarrow E = 0.$$

Taka sytuacja również jest bardzo mało prawdopodobna.

- $\varepsilon > 1 \Rightarrow$ *hiperbola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} > 1 \Leftrightarrow E > 0.$$

Orbita ciała poruszającego się w potencjale Keplera będzie najprawdopodobniej *elipsą* – orbita zamknięta, albo *hiperbolą* – orbita otwarta.

Rozważmy orbitę planety w Układzie Słonecznym, która jest elipsą, zgodnie z I prawem Keplera.

Elipsa to zbiór punktów, których suma odległości od dwóch wybranych punktów F_1 i F_2 , zwanych ogniskami, jest stała. To znaczy, że dla dowolnego punktu $P(x, y)$ należącego do elipsy zachodzi

$$F_1P + F_2P = \text{const.}$$

Wyberzmy półosie elipsy tak, aby miały długości a i b , przy czym $a > b$, a punkty F_1 i F_2 umieścmy na osi Ox układu kartezjańskiego.

Rozważmy orbitę planety w Układzie Słonecznym, która jest elipsą, zgodnie z I prawem Keplera.

Elipsa to zbiór punktów, których suma odległości od dwóch wybranych punktów F_1 i F_2 , zwanych ogniskami, jest stała. To znaczy, że dla dowolnego punktu $P(x, y)$ należącego do elipsy zachodzi

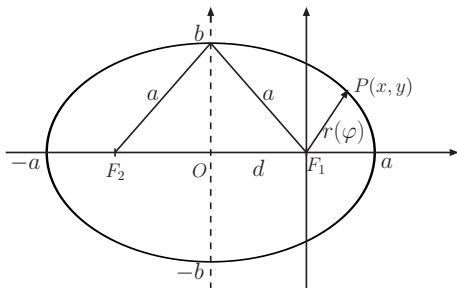
$$F_1P + F_2P = \text{const.}$$

Wyberzmy półosie elipsy tak, aby miały długości a i b , przy czym $a > b$, a punkty F_1 i F_2 umieścimy na osi Ox układu kartezjańskiego.

Orbita eliptyczna

W układzie, którego oś Oy zaznaczono linią przerywaną, punkty te są symetryczne względem początku O , tzn. mają współrzędne $F_1(d, 0)$ i $F_2(-d, 0)$. Wtedy oczywiście zachodzi

$$F_1P + F_2P = a - d + a + d = 2a.$$



Zadanie. Pokazać, że w tym układzie równanie elipsy ma postać

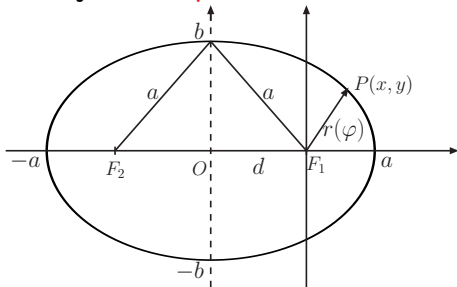
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Orbita eliptyczna

Natomiast równanie

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \text{gdzie } 0 < \varepsilon < 1,$$

określa elipsę, której jedno z ognisk F_1 leży w początku układu biegunowego. W Układzie Słonecznym w ognisku tym znajduje się Słońce. Punkt orbity planety znajdujący się najbliżej F_1 to **peryhelium**, a punkt najdalszy, znajdujący się na drugim końcu dłuższej osi, to **aphelium**.



W układzie kartezjańskim, którego oś Oy zaznaczono linią ciągłą, równanie elipsy ma postać

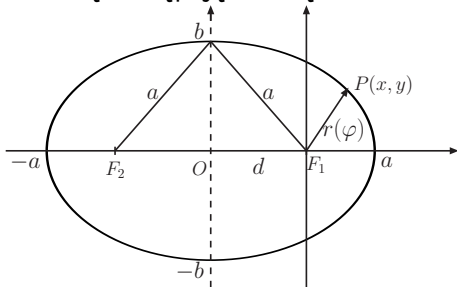
$$\frac{(x + d)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Orbita eliptyczna

Zauważmy, że pomiędzy równaniami

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \frac{(x + d)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

zachodzą następujące związki



$$a - d = r(0) = \frac{p}{1 + \varepsilon},$$

$$a + d = r(\pi) = \frac{p}{1 - \varepsilon},$$

$$b^2 + d^2 = a^2.$$

Orbita eliptyczna

Dodajmy stronami równania

$$a - d = \frac{p}{1 + \varepsilon},$$

$$a + d = \frac{p}{1 - \varepsilon}$$

i podzielmy obustronnie przez 2, wtedy otrzymamy

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}.$$

Z kolei z pierwszego równania wynika, że

$$d = a - \frac{p}{1 + \varepsilon} = \frac{p}{1 + \varepsilon} \left(\frac{1}{1 - \varepsilon} - 1 \right) = \frac{p}{1 + \varepsilon} \frac{1 - 1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2},$$

a więc $d = a\varepsilon$. Natomiast równanie $b^2 + d^2 = a^2$ daje

$$b^2 = a^2 - d^2 = a^2(1 - \varepsilon^2) = \frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}(1 - \varepsilon^2) \Rightarrow b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

III prawo Keplera

Możemy teraz łatwo udowodnić III prawo Keplera:

Stosunek kwadratu okresu obiegu planety wokół Słońca do sześciannu wielkiej półosi jej orbity jest stały dla wszystkich planet w Układzie Słonecznym. Co wyraża się równaniem

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const.}$$

Rzeczywiście okres obiegu planety wokół Słońca wynosi

$$T = \frac{A}{\frac{dA}{dt}} = \frac{\pi ab}{\frac{p_\varphi}{2m}} = \frac{2\pi abm}{p_\varphi}.$$

Podnieśmy obustronnie do kwadratu

$$T^2 = \left(\frac{2\pi abm}{p_\varphi} \right)^2 = \frac{4\pi^2 m^2}{p_\varphi^2} a^2 b^2.$$

III prawo Keplera

Możemy teraz łatwo udowodnić III prawo Keplera:

Stosunek kwadratu okresu obiegu planety wokół Słońca do sześciannu wielkiej półosi jej orbity jest stały dla wszystkich planet w Układzie Słonecznym. Co wyraża się równaniem

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const.}$$

Rzeczywiście okres obiegu planety wokół Słońca wynosi

$$T = \frac{A}{\frac{dA}{dt}} = \frac{\pi ab}{\frac{p_\varphi}{2m}} = \frac{2\pi abm}{p_\varphi}.$$

Podnieśmy obustronnie do kwadratu

$$T^2 = \left(\frac{2\pi abm}{p_\varphi} \right)^2 = \frac{4\pi^2 m^2}{p_\varphi^2} a^2 b^2.$$

III prawo Keplera

Uwzględniając znalezione wcześniej związki

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$$

oraz

$$p = \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} \quad \Rightarrow \quad p_\varphi^2 = pm\alpha$$

otrzymamy

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m^2}{p_\varphi^2} a^2 b^2 = \frac{4\pi^2 m^2}{pm\alpha} a^4 (1 - \varepsilon^2) = \frac{4\pi^2 m^2}{m\alpha} \frac{a^4}{\frac{p}{1 - \varepsilon^2}} = \frac{4\pi^2 m}{\alpha} a^3.$$

Skąd, uwzględniając, że $\alpha = Gm_S m_P$ oraz $m \approx m_P$ otrzymamy

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{\alpha} \approx \frac{4\pi^2 m_P}{Gm_S m_P} = \frac{4\pi^2}{Gm_S} = \text{const.},$$

gdzie stała po prawej stronie równania jest w przybliżeniu taka sama dla wszystkich planet Układu Słonecznego.