

Transformacja Galileusza

Wykład 7

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

Zasada względności Galileusza

W mechanice nierelatywistycznej rozpatrujemy ruch ciał, które w wybranych przez nas układach odniesienia, poruszają się z prędkościami znacznie mniejszymi od prędkości światła w próżni:

$$v \ll c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Prawa Newtona, również w ujęciu lagranżowskim lub hamiltonowskim, które poznamy w dalszym ciągu kursu, są niezmiennicze względem transformacji Galileusza.

Zasada względności Galileusza

W mechanice nierelatywistycznej rozpatrujemy ruch ciał, które w wybranych przez nas układach odniesienia, poruszają się z prędkościami znacznie mniejszymi od prędkości światła w próżni:

$$v \ll c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Prawa Newtona, również w ujęciu lagranżowskim lub hamiltonowskim, które poznamy w dalszym ciągu kursu, są niezmiennicze względem **transformacji Galileusza**.

Przypomnijmy, że układy inercjalne, to układy odniesienia, w których spełniona jest I zasada dynamiki Newtona.

Zasada względności Galileusza

W mechanice nierelatywistycznej rozpatrujemy ruch ciał, które w wybranych przez nas układach odniesienia, poruszają się z prędkościami znacznie mniejszymi od prędkości światła w próżni:

$$v \ll c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Prawa Newtona, również w ujęciu lagranżowskim lub hamiltonowskim, które poznamy w dalszym ciągu kursu, są niezmiennicze względem **transformacji Galileusza**.

Przypomnijmy, że **układy inercjalne**, to układy odniesienia, w których spełniona jest I zasada dynamiki Newtona.

Układy inercjalne poruszają się względem siebie ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Zasada względności Galileusza

W mechanice nierelatywistycznej rozpatrujemy ruch ciał, które w wybranych przez nas układach odniesienia, poruszają się z prędkościami znacznie mniejszymi od prędkości światła w próżni:

$$v \ll c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Prawa Newtona, również w ujęciu lagranżowskim lub hamiltonowskim, które poznamy w dalszym ciągu kursu, są niezmiennicze względem **transformacji Galileusza**.

Przypomnijmy, że układy inercjalne, to układy odniesienia, w których spełniona jest I zasada dynamiki Newtona.

Układy inercjalne poruszają się względem siebie ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Transformacja Galileusza

Transformacja Galileusza wiąże współrzędne i czas $x_i(t)$, t i $x'_i(t')$, t' w dwóch układach inercjalnych w następujący sposób

$$\begin{aligned}t' &= t + a \\x'_i(t') &= a_{ij}x_j(t) + V_i t + b_i, \quad i = 1, 2, 3,\end{aligned}$$

Transformacja Galileusza

Transformacja Galileusza wiąże współrzędne i czas $x_i(t)$, t i $x'_i(t')$, t' w dwóch układach inercjalnych w następujący sposób

$$\begin{aligned}t' &= t + a \\ x'_i(t') &= a_{ij}x_j(t) + V_i t + b_i, \quad i = 1, 2, 3,\end{aligned}$$

gdzie

- stała a opisuje przesunięcie czasu,
- stały wektor $\vec{b}$ opisuje przesunięcie przestrzenne,
- $\vec{V}$ jest stałą prędkością względną obu układów inercjalnych,
- a_{ij} są elementami ortogonalnej macierzy obrotu A , dla której $A^T A = A A^T = I$.

Transformacja Galileusza

Transformacja Galileusza wiąże współrzędne i czas $x_i(t)$, t i $x'_i(t')$, t' w dwóch układach inercjalnych w następujący sposób

$$\begin{aligned}t' &= t + a \\x'_i(t') &= a_{ij}x_j(t) + V_i t + b_i, \quad i = 1, 2, 3,\end{aligned}$$

gdzie

- stała a opisuje przesunięcie czasu,
- stały wektor $\vec{b}$ opisuje przesunięcie przestrzenne,
- $\vec{V}$ jest stałą prędkością względną obu układów inercjalnych,
- a_{ij} są elementami ortogonalnej macierzy obrotu A , dla której $A^T A = A A^T = I$.

W drugim z powyższych wzorów transformacyjnych zastosowaliśmy konwencję sumacyjną, tzn. opuściliśmy symbol sumy po powtarzającym się wskaźniku j w zakresie od 1 do 3.

W drugim z powyższych wzorów transformacyjnych zastosowaliśmy konwencję sumacyjną, tzn. opuściliśmy symbol sumy po powtarzającym się wskaźniku j w zakresie od 1 do 3.

Zadanie 1: Pokazać, że rzeczywista ortogonalna macierz 3×3 ma 3 niezależne elementy.

W drugim z powyższych wzorów transformacyjnych zastosowaliśmy konwencję sumacyjną, tzn. opuściliśmy symbol sumy po powtarzającym się wskaźniku j w zakresie od 1 do 3.

Zadanie 1: Pokazać, że rzeczywista ortogonalna macierz 3×3 ma 3 niezależne elementy.

Transformację Galileusza możemy zapisać wektorowo w następujący sposób

$$\begin{aligned}t &\rightarrow t' = t + a \\ \vec{r} &\rightarrow \vec{r}' = A \vec{r} + \vec{V} t + \vec{b}.\end{aligned}$$

W drugim z powyższych wzorów transformacyjnych zastosowaliśmy konwencję sumacyjną, tzn. opuściliśmy symbol sumy po powtarzającym się wskaźniku j w zakresie od 1 do 3.

Zadanie 1: Pokazać, że rzeczywista ortogonalna macierz 3×3 ma 3 niezależne elementy.

Transformację Galileusza możemy zapisać wektorowo w następujący sposób

$$\begin{aligned}t &\rightarrow t' = t + a \\ \vec{r} &\rightarrow \vec{r}' = A \vec{r} + \vec{V} t + \vec{b}.\end{aligned}$$

Zbiór wszystkich transformacji Galileusza G tworzy dziesięcio-parametrową grupę przekształceń ze względu na złożenie transformacji, które oznaczmy symbolem $\circ$. Dowolny element $g \in G$ możemy sparametryzować następująco

$$G \ni g = g(a, A, \vec{V}, \vec{b}),$$

gdzie

- 1 parametr a opisuje translację w czasie,
- 3 składowe wektora $\vec{b}$ opisują translację w przestrzeni,
- 3 elementy macierzy ortogonalnej A opisują obrót,
- 3 składowe prędkości względnej $\vec{V}$ opisują transformację do innego inercjalnego układu odniesienia.

Zbiór wszystkich transformacji Galileusza G tworzy dziesięcio-parametrową grupę przekształceń ze względu na złożenie transformacji, które oznaczmy symbolem $\circ$. Dowolny element $g \in G$ możemy sparametryzować następująco

$$G \ni g = g(a, A, \vec{V}, \vec{b}),$$

gdzie

- 1 parametr a opisuje translację w czasie,
- 3 składowe wektora $\vec{b}$ opisują translację w przestrzeni,
- 3 elementy macierzy ortogonalnej A opisują obrót,
- 3 składowe prędkości względnej $\vec{V}$ opisują transformację do innego inercjalnego układu odniesienia.

Aby udowodnić to stwierdzenie pokażemy najpierw, że złożenie dwóch transformacji Galileusza g i g' jest również transformacją Galileusza. Niech

$$G \ni g = g(a, A, \vec{V}, \vec{b}), \quad G \ni g' = g'(a', A', \vec{V}', \vec{b}').$$

Aby udowodnić to stwierdzenie pokażemy najpierw, że złożenie dwóch transformacji Galileusza g i g' jest również transformacją Galileusza. Niech

$$G \ni g = g(a, A, \vec{V}, \vec{b}), \quad G \ni g' = g'(a', A', \vec{V}', \vec{b}').$$

Postać złożenia $g' \circ g$ znajdziemy składając wzory określające transformacje g i g' :

$$\begin{aligned} t' &= t + a, \\ x'_i(t') &= a_{ij}x_j(t) + V_i t + b_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ t'' &= t' + a', \\ x''_i(t'') &= a'_{ij}x'_j(t') + V'_i t' + b'_i, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Aby udowodnić to stwierdzenie pokażemy najpierw, że złożenie dwóch transformacji Galileusza g i g' jest również transformacją Galileusza. Niech

$$G \ni g = g(a, A, \vec{V}, \vec{b}), \quad G \ni g' = g'(a', A', \vec{V}', \vec{b}').$$

Postać złożenia $g' \circ g$ znajdziemy składając wzory określające transformacje g i g' :

$$\begin{aligned} t' &= t + a, \\ x'_i(t') &= a_{ij}x_j(t) + V_i t + b_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ t'' &= t' + a', \\ x''_i(t'') &= a'_{ij}x'_j(t') + V'_i t' + b'_i, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$t'' = t' + a' = t + a + a'$$

$$t'' = t' + a' = t + a + a'$$

$x_i''(t'')$

$$\begin{aligned} t'' &= t' + a' = t + a + a' \\ x_i''(t'') &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t'' &= t' + a' = t + a + a' \\x_i''(t'') &= a'_{ij} x'_j(t') + V'_i t' + b'_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t'' &= t' + a' = t + a + a' \\x_i''(t'') &= a'_{ij} x'_j(t') + V'_i t' + b'_i \\&= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t'' &= t' + a' = t + a + a' \\x_i''(t'') &= a'_{ij} x'_j(t') + V'_i t' + b'_i \\&= a'_{ij} (a_{jk} x_k(t) + V_j t + b_j) + V'_i \cdot (t + a) + b'_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t'' &= t' + a' = t + a + a' \\x_i''(t'') &= a'_{ij}x'_j(t') + V'_i t' + b'_i \\&= a'_{ij}(a_{jk}x_k(t) + V_j t + b_j) + V'_i \cdot (t + a) + b'_i \\&= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t'' &= t' + a' = t + a + a' \\x_i''(t'') &= a'_{ij}x'_j(t') + V'_i t' + b'_i \\&= a'_{ij}(a_{jk}x_k(t) + V_j t + b_j) + V'_i \cdot (t + a) + b'_i \\&= a'_{ij}a_{jk}x_k(t) + (a'_{ij}V_j + V'_i) t + a'_{ij}b_j + aV'_i + b'_i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t'' &= t' + a' = t + a + a' \\x_i''(t'') &= a'_{ij}x'_j(t') + V'_i t' + b'_i \\&= a'_{ij}(a_{jk}x_k(t) + V_j t + b_j) + V'_i \cdot (t + a) + b'_i \\&= a'_{ij}a_{jk}x_k(t) + (a'_{ij}V_j + V'_i) t + a'_{ij}b_j + aV'_i + b'_i.\end{aligned}$$

Widzimy, że złożenie transformacji ma postać:

$$\begin{aligned}t'' &= t + a'', \\x_i''(t'') &= a''_{ik}x_k(t) + V''_i t + b''_i, \quad i = 1, 2, 3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t'' &= t' + a' = t + a + a' \\
 x_i''(t'') &= a'_{ij} x'_j(t') + V'_i t' + b'_i \\
 &= a'_{ij} (a_{jk} x_k(t) + V_j t + b_j) + V'_i \cdot (t + a) + b'_i \\
 &= a'_{ij} a_{jk} x_k(t) + (a'_{ij} V_j + V'_i) t + a'_{ij} b_j + a V'_i + b'_i.
 \end{aligned}$$

Widzimy, że złożenie transformacji ma postać:

$$\begin{aligned}
 t'' &= t + a'', \\
 x_i''(t'') &= a''_{ik} x_k(t) + V''_i t + b''_i, \quad i = 1, 2, 3,
 \end{aligned}$$

przy czym $a'' = a' + a$ oraz

$$a''_{ik} = a'_{ij} a_{jk}, \quad V''_i = a'_{ij} V_j + V'_i, \quad b''_i = a'_{ij} b_j + a V'_i + b'_i.$$

$$\begin{aligned}
 t'' &= t' + a' = t + a + a' \\
 x_i''(t'') &= a'_{ij} x'_j(t') + V'_i t' + b'_i \\
 &= a'_{ij} (a_{jk} x_k(t) + V_j t + b_j) + V'_i \cdot (t + a) + b'_i \\
 &= a'_{ij} a_{jk} x_k(t) + (a'_{ij} V_j + V'_i) t + a'_{ij} b_j + a V'_i + b'_i.
 \end{aligned}$$

Widzimy, że złożenie transformacji ma postać:

$$\begin{aligned}
 t'' &= t + a'', \\
 x_i''(t'') &= a''_{ik} x_k(t) + V''_i t + b''_i, \quad i = 1, 2, 3,
 \end{aligned}$$

przy czym $a'' = a' + a$ oraz

$$a''_{ik} = a'_{ij} a_{jk}, \quad V''_i = a'_{ij} V_j + V'_i, \quad b''_i = a'_{ij} b_j + a V'_i + b'_i.$$

Uwzględniając wzory

$$a'' = a' + a, \quad a''_{ik} = a'_{ij}a_{jk}, \quad V''_i = a'_{ij}V_j + V'_i, \quad b''_i = a'_{ij}b_j + aV'_i + b'_i$$

możemy zapisać złożenie transformacji w języku macierzowo-wektorowym:

$$\begin{aligned} g'' &= g' \left(a', A', \vec{V}', \vec{b}' \right) \circ g \left(a, A, \vec{V}, \vec{b} \right) \\ &= g'' \left(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' \right). \end{aligned}$$

Uwzględniając wzory

$$a'' = a' + a, \quad a''_{ik} = a'_{ij}a_{jk}, \quad V''_i = a'_{ij}V_j + V'_i, \quad b''_i = a'_{ij}b_j + aV'_i + b'_i$$

możemy zapisać złożenie transformacji w języku macierzowo-wektorowym:

$$\begin{aligned} g'' &= g' \left(a', A', \vec{V}', \vec{b}' \right) \circ g \left(a, A, \vec{V}, \vec{b} \right) \\ &= g'' \left(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' \right). \end{aligned}$$

Element g'' tej postaci będzie transformacją Galileusza, jeśli macierz $A'' = A'A$ będzie macierzą ortogonalną.

Rzeczywiście, jeśli $A'^T A' = I$ i $A^T A = I$, to

$$A''^T A'' = (A'A)^T A'A = A^T \underbrace{A'^T A'}_I A = A^T A = I,$$

Element g'' tej postaci będzie transformacją Galileusza, jeśli macierz $A'' = A'A$ będzie macierzą ortogonalną.

Rzeczywiście, jeśli $A'^T A' = I$ i $A^T A = I$, to

$$A''^T A'' = (A'A)^T A'A = A^T \underbrace{A'^T A'}_I A = A^T A = I,$$

a zatem dowiedliśmy, że $g'' \in G$.

Element g'' tej postaci będzie transformacją Galileusza, jeśli macierz $A'' = A'A$ będzie macierzą ortogonalną.

Rzeczywiście, jeśli $A'^T A' = I$ i $A^T A = I$, to

$$A''^T A'' = (A'A)^T A'A = A^T \underbrace{A'^T A'}_I A = A^T A = I,$$

a zatem dowiedliśmy, że $g'' \in G$.

Musimy jeszcze dowieść trzech postulatów grupowych.

Element g'' tej postaci będzie transformacją Galileusza, jeśli macierz $A'' = A'A$ będzie macierzą ortogonalną.

Rzeczywiście, jeśli $A'^T A' = I$ i $A^T A = I$, to

$$A''^T A'' = (A'A)^T A'A = A^T \underbrace{A'^T A'}_I A = A^T A = I,$$

a zatem dowiedliśmy, że $g'' \in G$.

Musimy jeszcze dowieść trzech postulatów grupowych.

- Łączność:

$$\bigwedge_{g, g', g'' \in G} (g'' \circ g') \circ g = g'' \circ (g' \circ g).$$

Element g'' tej postaci będzie transformacją Galileusza, jeśli macierz $A'' = A'A$ będzie macierzą ortogonalną.

Rzeczywiście, jeśli $A'^T A' = I$ i $A^T A = I$, to

$$A''^T A'' = (A'A)^T A'A = A^T \underbrace{A'^T A'}_I A = A^T A = I,$$

a zatem dowiedliśmy, że $g'' \in G$.

Musimy jeszcze dowieść trzech postulatów grupowych.

- Łączność:

$$\bigwedge_{g, g', g'' \in G} (g'' \circ g') \circ g = g'' \circ (g' \circ g).$$

Oznaczmy $x \equiv (t, \vec{r})$, wówczas

$$\begin{aligned} \bigwedge_{g, g', g'' \in G} (g'' \circ g') \circ g(x) &= (g'' \circ g')(g(x)) = g''(g'(g(x))) \\ &= g''(g' \circ g(x)) = g'' \circ (g' \circ g)(x). \end{aligned}$$

Widzimy, że spełnienie tego postulatu wynika z łączności odwzorowań.

Oznaczmy $x \equiv (t, \vec{r})$, wówczas

$$\begin{aligned}\bigwedge_{g, g', g'' \in G} (g'' \circ g') \circ g(x) &= (g'' \circ g')(g(x)) = g''(g'(g(x))) \\ &= g''(g' \circ g(x)) = g'' \circ (g' \circ g)(x).\end{aligned}$$

Widzimy, że spełnienie tego postulatu wynika z łączności odwzorowań.

- *Element neutralny:*

$$\bigvee_{e \in G} \bigwedge_{g \in G} e \circ g = g \circ e = g.$$

Oznaczmy $x \equiv (t, \vec{r})$, wówczas

$$\begin{aligned} \bigwedge_{g, g', g'' \in G} (\textcolor{blue}{g''} \circ \textcolor{blue}{g'}) \circ \textcolor{blue}{g}(x) &= (g'' \circ g')(g(x)) = g''(g'(g(x))) \\ &= g''(g' \circ g(x)) = \textcolor{blue}{g''} \circ (\textcolor{blue}{g'} \circ \textcolor{blue}{g})(x). \end{aligned}$$

Widzimy, że spełnienie tego postulatu wynika z łączności odwzorowań.

- *Element neutralny:*

$$\bigvee_{e \in G} \bigwedge_{g \in G} e \circ g = g \circ e = g.$$

Oznaczmy $e \equiv e(a', A', \vec{V}', \vec{b}')$ i skorzystajmy z ogólnej postaci złożenia dwóch transformacji Galileusza

$$e \circ g(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}') = g(a, A, \vec{V}, \vec{b}).$$

Skąd otrzymujemy warunki

$$a' + a = a$$

Oznaczmy $e \equiv e(a', A', \vec{V}', \vec{b}')$ i skorzystajmy z ogólnej postaci złożenia dwóch transformacji Galileusza

$$e \circ g(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}') = g(a, A, \vec{V}, \vec{b}).$$

Skąd otrzymujemy warunki

$$a' + a = a \quad \Leftrightarrow \quad a' = 0,$$

Oznaczmy $e \equiv e(a', A', \vec{V}', \vec{b}')$ i skorzystajmy z ogólnej postaci złożenia dwóch transformacji Galileusza

$$e \circ g(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}') = g(a, A, \vec{V}, \vec{b}).$$

Skąd otrzymujemy warunki

$$a' + a = a \quad \Leftrightarrow \quad a' = 0,$$

$$A'A = A$$

Oznaczmy $e \equiv e(a', A', \vec{V}', \vec{b}')$ i skorzystajmy z ogólnej postaci złożenia dwóch transformacji Galileusza

$$e \circ g(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}') = g(a, A, \vec{V}, \vec{b}).$$

Skąd otrzymujemy warunki

$$a' + a = a \quad \Leftrightarrow \quad a' = 0,$$

$$A'A = A \quad \Leftrightarrow \quad A' = \mathbb{I},$$

Oznaczmy $e \equiv e(a', A', \vec{V}', \vec{b}')$ i skorzystajmy z ogólnej postaci złożenia dwóch transformacji Galileusza

$$e \circ g(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}') = g(a, A, \vec{V}, \vec{b}).$$

Skąd otrzymujemy warunki

$$a' + a = a \quad \Leftrightarrow \quad a' = 0,$$

$$A'A = A \quad \Leftrightarrow \quad A' = \mathbb{I},$$

$$A'\vec{V} + \vec{V}' = \mathbb{I}\vec{V} + \vec{V}' = \vec{V}$$

Oznaczmy $e \equiv e(a', A', \vec{V}', \vec{b}')$ i skorzystajmy z ogólnej postaci złożenia dwóch transformacji Galileusza

$$e \circ g(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}') = g(a, A, \vec{V}, \vec{b}).$$

Skąd otrzymujemy warunki

$$a' + a = a \quad \Leftrightarrow \quad a' = 0,$$

$$A'A = A \quad \Leftrightarrow \quad A' = \mathbb{I},$$

$$A'\vec{V} + \vec{V}' = \mathbb{I}\vec{V} + \vec{V}' = \vec{V} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}' = \vec{0},$$

Oznaczmy $e \equiv e(a', A', \vec{V}', \vec{b}')$ i skorzystajmy z ogólnej postaci złożenia dwóch transformacji Galileusza

$$e \circ g(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}') = g(a, A, \vec{V}, \vec{b}).$$

Skąd otrzymujemy warunki

$$a' + a = a \Leftrightarrow a' = 0,$$

$$A'A = A \Leftrightarrow A' = \mathbb{I},$$

$$A'\vec{V} + \vec{V}' = \mathbb{I}\vec{V} + \vec{V}' = \vec{V} \Leftrightarrow \vec{V}' = \vec{0},$$

$$A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' = \mathbb{I}\vec{b} + a\vec{0} + \vec{b}' = \vec{b}$$

Oznaczmy $e \equiv e(a', A', \vec{V}', \vec{b}')$ i skorzystajmy z ogólnej postaci złożenia dwóch transformacji Galileusza

$$e \circ g(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}') = g(a, A, \vec{V}, \vec{b}).$$

Skąd otrzymujemy warunki

$$a' + a = a \Leftrightarrow a' = 0,$$

$$A'A = A \Leftrightarrow A' = \mathbb{I},$$

$$A'\vec{V} + \vec{V}' = \mathbb{I}\vec{V} + \vec{V}' = \vec{V} \Leftrightarrow \vec{V}' = \vec{0},$$

$$A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' = \mathbb{I}\vec{b} + a\vec{0} + \vec{b}' = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b}' = \vec{0},$$

Oznaczmy $e \equiv e(a', A', \vec{V}', \vec{b}')$ i skorzystajmy z ogólnej postaci złożenia dwóch transformacji Galileusza

$$e \circ g(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}') = g(a, A, \vec{V}, \vec{b}).$$

Skąd otrzymujemy warunki

$$a' + a = a \Leftrightarrow a' = 0,$$

$$A'A = A \Leftrightarrow A' = \mathbb{I},$$

$$A'\vec{V} + \vec{V}' = \mathbb{I}\vec{V} + \vec{V}' = \vec{V} \Leftrightarrow \vec{V}' = \vec{0},$$

$$A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' = \mathbb{I}\vec{b} + a\vec{0} + \vec{b}' = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b}' = \vec{0},$$

a więc element neutralny ma postać $e = e(0, \mathbb{I}, \vec{0}, \vec{0})$.

Oznaczmy $e \equiv e(a', A', \vec{V}', \vec{b}')$ i skorzystajmy z ogólnej postaci złożenia dwóch transformacji Galileusza

$$e \circ g(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}') = g(a, A, \vec{V}, \vec{b}).$$

Skąd otrzymujemy warunki

$$a' + a = a \Leftrightarrow a' = 0,$$

$$A'A = A \Leftrightarrow A' = \mathbb{I},$$

$$A'\vec{V} + \vec{V}' = \mathbb{I}\vec{V} + \vec{V}' = \vec{V} \Leftrightarrow \vec{V}' = \vec{0},$$

$$A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' = \mathbb{I}\vec{b} + a\vec{0} + \vec{b}' = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b}' = \vec{0},$$

a więc element neutralny ma postać $e = e(0, \mathbb{I}, \vec{0}, \vec{0})$.

Obliczmy jeszcze

$$g \circ e \left(a + 0, A\mathbb{I}, A\vec{0} + \vec{V}, A\vec{0} + 0 \cdot \vec{V} + \vec{b} \right) = g \left(a, A, \vec{V}, \vec{b} \right).$$

- *Element odwrotny:*

$$\bigwedge_{g \in G} \bigvee_{g^{-1} \in G} g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e.$$

Obliczmy jeszcze

$$g \circ e \left(a + 0, A\mathbb{I}, A\vec{0} + \vec{V}, A\vec{0} + 0 \cdot \vec{V} + \vec{b} \right) = g \left(a, A, \vec{V}, \vec{b} \right).$$

- *Element odwrotny:*

$$\bigwedge_{g \in G} \bigvee_{g^{-1} \in G} g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e.$$

Oznaczmy $g^{-1} \equiv g^{-1} \left(a', A', \vec{V}', \vec{b}' \right)$ i skorzystajmy ponownie z ogólnej postaci złożenia dwóch transformacji Galileusza

$$g^{-1} \circ g \left(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' \right) = e \left(0, \mathbb{I}, \vec{0}, \vec{0} \right),$$

gdzie wstawiliśmy znaną postać elementu neutralnego.

Obliczmy jeszcze

$$g \circ e \left(a + 0, A\mathbb{I}, A\vec{0} + \vec{V}, A\vec{0} + 0 \cdot \vec{V} + \vec{b} \right) = g \left(a, A, \vec{V}, \vec{b} \right).$$

- *Element odwrotny:*

$$\bigwedge_{g \in G} \bigvee_{g^{-1} \in G} g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e.$$

Oznaczmy $g^{-1} \equiv g^{-1} \left(a', A', \vec{V}', \vec{b}' \right)$ i skorzystajmy ponownie z ogólnej postaci złożenia dwóch transformacji Galileusza

$$g^{-1} \circ g \left(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' \right) = e \left(0, \mathbb{I}, \vec{0}, \vec{0} \right),$$

gdzie wstawiliśmy znaną postać elementu neutralnego.

Z równania

$$g^{-1} \circ g \left(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' \right) = e \left(0, \mathbb{I}, \vec{0}, \vec{0} \right)$$

otrzymujemy teraz warunki

$$a' + a = 0$$

Z równania

$$g^{-1} \circ g \left(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' \right) = e \left(0, \mathbb{I}, \vec{0}, \vec{0} \right)$$

otrzymujemy teraz warunki

$$a' + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a' = -a,$$

Z równania

$$g^{-1} \circ g \left(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' \right) = e \left(0, \mathbb{I}, \vec{0}, \vec{0} \right)$$

otrzymujemy teraz warunki

$$a' + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a' = -a,$$

$$A'A = \mathbb{I}$$

Z równania

$$g^{-1} \circ g \left(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' \right) = e \left(0, \mathbb{I}, \vec{0}, \vec{0} \right)$$

otrzymujemy teraz warunki

$$a' + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a' = -a,$$

$$A'A = \mathbb{I} \quad \Leftrightarrow \quad A' = A^{-1} = A^T,$$

Z równania

$$g^{-1} \circ g \left(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' \right) = e \left(0, \mathbb{I}, \vec{0}, \vec{0} \right)$$

otrzymujemy teraz warunki

$$a' + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a' = -a,$$

$$A'A = \mathbb{I} \quad \Leftrightarrow \quad A' = A^{-1} = A^T,$$

$$A'\vec{V} + \vec{V}' = A^T\vec{V} + \vec{V}' = \vec{0}$$

Z równania

$$g^{-1} \circ g \left(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' \right) = e \left(0, \mathbb{I}, \vec{0}, \vec{0} \right)$$

otrzymujemy teraz warunki

$$a' + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a' = -a,$$

$$A'A = \mathbb{I} \quad \Leftrightarrow \quad A' = A^{-1} = A^T,$$

$$A'\vec{V} + \vec{V}' = A^T\vec{V} + \vec{V}' = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}' = -A^T\vec{V},$$

Z równania

$$g^{-1} \circ g \left(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' \right) = e \left(0, \mathbb{I}, \vec{0}, \vec{0} \right)$$

otrzymujemy teraz warunki

$$a' + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a' = -a,$$

$$A'A = \mathbb{I} \quad \Leftrightarrow \quad A' = A^{-1} = A^T,$$

$$A'\vec{V} + \vec{V}' = A^T\vec{V} + \vec{V}' = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}' = -A^T\vec{V},$$

$$A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' = A^T\vec{b} + a(-A^T\vec{V}) + \vec{b}' = \vec{0}$$

Z równania

$$g^{-1} \circ g \left(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' \right) = e \left(0, \mathbb{I}, \vec{0}, \vec{0} \right)$$

otrzymujemy teraz warunki

$$a' + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a' = -a,$$

$$A'A = \mathbb{I} \quad \Leftrightarrow \quad A' = A^{-1} = A^T,$$

$$A'\vec{V} + \vec{V}' = A^T\vec{V} + \vec{V}' = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}' = -A^T\vec{V},$$

$$A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' = A^T\vec{b} + a(-A^T\vec{V}) + \vec{b}' = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{b}' = -A^T\vec{b} + aA^T\vec{V} = A^T(a\vec{V} - \vec{b}),$$

Z równania

$$g^{-1} \circ g \left(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' \right) = e \left(0, \mathbb{I}, \vec{0}, \vec{0} \right)$$

otrzymujemy teraz warunki

$$a' + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a' = -a,$$

$$A'A = \mathbb{I} \quad \Leftrightarrow \quad A' = A^{-1} = A^T,$$

$$A'\vec{V} + \vec{V}' = A^T\vec{V} + \vec{V}' = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}' = -A^T\vec{V},$$

$$A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' = A^T\vec{b} + a(-A^T\vec{V}) + \vec{b}' = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{b}' = -A^T\vec{b} + aA^T\vec{V} = A^T(a\vec{V} - \vec{b}),$$

$$\Rightarrow \quad g^{-1} = g^{-1} \left(-a, A^T, -A^T\vec{V}, A^T(a\vec{V} - \vec{b}) \right).$$

Z równania

$$g^{-1} \circ g \left(a' + a, A'A, A'\vec{V} + \vec{V}', A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' \right) = e \left(0, \mathbb{I}, \vec{0}, \vec{0} \right)$$

otrzymujemy teraz warunki

$$a' + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a' = -a,$$

$$A'A = \mathbb{I} \quad \Leftrightarrow \quad A' = A^{-1} = A^T,$$

$$A'\vec{V} + \vec{V}' = A^T\vec{V} + \vec{V}' = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}' = -A^T\vec{V},$$

$$A'\vec{b} + a\vec{V}' + \vec{b}' = A^T\vec{b} + a(-A^T\vec{V}) + \vec{b}' = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{b}' = -A^T\vec{b} + aA^T\vec{V} = A^T(a\vec{V} - \vec{b}),$$

$$\Rightarrow \quad g^{-1} = g^{-1} \left(-a, A^T, -A^T\vec{V}, A^T(a\vec{V} - \vec{b}) \right).$$

Aby skończyć dowód obliczmy jeszcze

$$\begin{aligned} g \circ g^{-1} \left(a - a, AA^T, A(-A^T \vec{V}) + \vec{V}, AA^T(a\vec{V} - \vec{b}) - a\vec{V} + \vec{b} \right) \\ = g \circ g^{-1} \left(0, \mathbb{I}, -\mathbb{I}\vec{V} + \vec{V}, \mathbb{I}(a\vec{V} - \vec{b}) - a\vec{V} + \vec{b} \right) = e(0, \mathbb{I}, \vec{0}, \vec{0}). \end{aligned}$$

Zasada względności Galileusza

Prawa fizyki nierelatywistycznej są niezmiennicze względem transformacji Galileusza.

Dotyczy to w szczególności zasad dynamiki Newtona,

Zasada względności Galileusza

Prawa fizyki nierelatywistycznej są niezmiennicze względem transformacji Galileusza.

Dotyczy to w szczególności zasad dynamiki Newtona,
albo prawa powszechnego ciążenia Newtona

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}.$$

Zasada względności Galileusza

Prawa fizyki nierelatywistycznej są niezmiennicze względem transformacji Galileusza.

Dotyczy to w szczególności zasad dynamiki Newtona, albo prawa powszechnego ciążenia Newtona

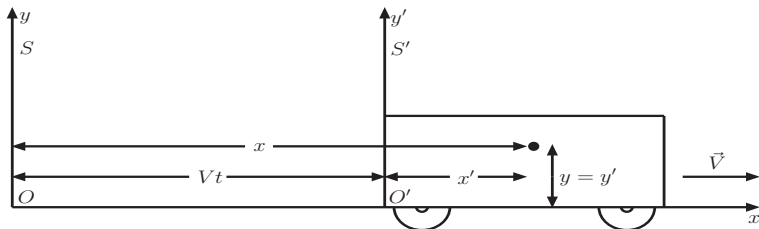
$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}.$$

Transformacja Galileusza

Rozważmy zdarzenie, np. wystrzał kapiszona, które obserwujemy w dwóch różnych, inercjalnych układach odniesienia S i S' . S' porusza się w S ze stałą prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$, a w chwili $t = t' = 0$ początki obu układów pokrywały się.

Transformacja Galileusza

Rozważmy zdarzenie, np. wystrzał kapiszona, które obserwujemy w dwóch różnych, inercjalnych układach odniesienia S i S' . S' porusza się w S ze stałą prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$, a w chwili $t = t' = 0$ początki obu układów pokrywały się.

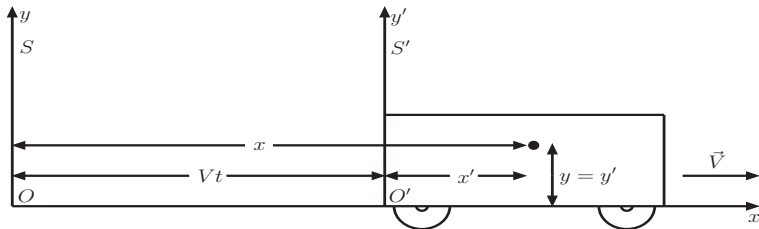


Współrzędne tego zdarzenia w S i w S' powiązane są wzorami:

$$t' = t, \quad x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Transformacja Galileusza

Rozważmy zdarzenie, np. wystrzał kapiszona, które obserwujemy w dwóch różnych, inercjalnych układach odniesienia S i S' . S' porusza się w S ze stałą prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$, a w chwili $t = t' = 0$ początki obu układów pokrywały się.



Współrzędne tego zdarzenia w S i w S' powiązane są wzorami:

$$t' = t, \quad x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Czas w mechanice newtonowskiej ma charakter uniwersalny – płynie tak samo we wszystkich układach odniesienia.

Jeśli prędkość względna obu układów jest skierowana w dowolnym kierunku, to wzory transformacyjne mają postać:

$$t' = t, \quad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V} t.$$

Czas w mechanice newtonowskiej ma charakter uniwersalny – płynie tak samo we wszystkich układach odniesienia.

Jeśli prędkość względna obu układów jest skierowana w dowolnym kierunku, to wzory transformacyjne mają postać:

$$t' = t, \quad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V} t.$$

Różniczkując obustronnie względem czasu otrzymujemy

$$\dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} - \vec{V}.$$

Czas w mechanice newtonowskiej ma charakter uniwersalny – płynie tak samo we wszystkich układach odniesienia.

Jeśli prędkość względna obu układów jest skierowana w dowolnym kierunku, to wzory transformacyjne mają postać:

$$t' = t, \quad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V} t.$$

Różniczkując obustronnie względem czasu otrzymujemy

$$\dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} - \vec{V}.$$

Jest to znana reguła dodawania prędkości:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'.$$

Czas w mechanice newtonowskiej ma charakter uniwersalny – płynie tak samo we wszystkich układach odniesienia.

Jeśli prędkość względna obu układów jest skierowana w dowolnym kierunku, to wzory transformacyjne mają postać:

$$t' = t, \quad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V} t.$$

Różniczkując obustronnie względem czasu otrzymujemy

$$\dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} - \vec{V}.$$

Jest to znana reguła dodawania prędkości:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'.$$

Jako ważny przykład ilustrujący znaczenie symetrii ze względu na transformację Galileusza rozważmy odosobniony układ N punktów materialnych. Energia potencjalna V_{ij} wzajemnego oddziaływania punktów i i j zależy od ich odległości.

Takim układem z dobrym przybliżeniem jest np. układ słoneczny.

Jako ważny przykład ilustrujący znaczenie symetrii ze względu na transformację Galileusza rozważmy odosobniony układ N punktów materialnych. Energia potencjalna V_{ij} wzajemnego oddziaływania punktów i i j zależy od ich odległości.

Takim układem z dobrym przybliżeniem jest np. układ słoneczny.

Funkcja Lagrange'a układu, dana wzorem

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_{i < j} V_{ij} (|\vec{r}_i - \vec{r}_j|),$$

Jako ważny przykład ilustrujący znaczenie symetrii ze względu na transformację Galileusza rozważmy **odosobniony układ N punktów materialnych**. Energia potencjalna V_{ij} wzajemnego oddziaływania punktów i i j zależy od ich odległości.

Takim układem z dobrym przybliżeniem jest np. układ słoneczny.
Funkcja Lagrange'a układu, dana wzorem

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_{i < j} V_{ij} (|\vec{r}_i - \vec{r}_j|),$$

jest niezmiennicza względem ciągłych przekształceń z dziesięcio-parametrowej grupy Galileusza, co prowadzi do zachowania dziesięciu wielkości fizycznych.

Jako ważny przykład ilustrujący znaczenie symetrii ze względu na transformację Galileusza rozważmy **odosobniony układ N punktów materialnych**. Energia potencjalna V_{ij} wzajemnego oddziaływania punktów i i j zależy od ich odległości.

Takim układem z dobrym przybliżeniem jest np. układ słoneczny.
Funkcja Lagrange'a układu, dana wzorem

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_{i < j} V_{ij} (|\vec{r}_i - \vec{r}_j|),$$

jest niezmiennicza względem ciągłych przekształceń z dziesięcio-parametrowej grupy Galileusza, co prowadzi do zachowania dziesięciu wielkości fizycznych.

Przeanalizujmy bliżej to stwierdzenie.

Zacniemy od przesunięcia czasu.

$$t \rightarrow t' = t + a, \quad a = \text{const.}$$

Przeanalizujmy bliżej to stwierdzenie.

Zacniemy od przesunięcia czasu.

$$t \rightarrow t' = t + a, \quad a = \text{const.}$$

Funkcja Lagrange'a L nie zależy jawnie od czasu, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, a siły występujące w układzie są zachowawcze, gdyż istnieje zwykły potencjał (energia potencjalna). Więzów nie ma.

Przeanalizujmy bliżej to stwierdzenie.

Zacniemy od przesunięcia czasu.

$$t \rightarrow t' = t + a, \quad a = \text{const.}$$

Funkcja Lagrange'a L nie zależy jawnie od czasu, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, a siły występujące w układzie są zachowawcze, gdyż istnieje zwykły potencjał (energia potencjalna). Więzów nie ma.

Dlatego całkowita energia układu

$$E = T + V$$

jest zachowana.

Przeanalizujmy bliżej to stwierdzenie.

Zacniemy od przesunięcia czasu.

$$t \rightarrow t' = t + a, \quad a = \text{const.}$$

Funkcja Lagrange'a L nie zależy jawnie od czasu, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, a siły występujące w układzie są zachowawcze, gdyż istnieje zwykły potencjał (energia potencjalna). Więzów nie ma.

Dlatego całkowita energia układu

$$E = T + V$$

jest zachowana.

Transformacja Galileusza

Rozważmy teraz translację przestrzenną, dla której $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A} = \mathbb{I}$,
 $\vec{V} = \vec{0}$.

Wektor położenia każdego punktu układu podlega przesunięciu o stały wektor $\vec{b}$,

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \alpha \vec{b}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Transformacja Galileusza

Rozważmy teraz translację przestrzenną, dla której $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $A = \mathbb{I}$, $\vec{V} = \vec{0}$.

Wektor położenia każdego punktu układu podlega przesunięciu o stały wektor $\vec{b}$,

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \alpha \vec{b}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Transformacja odwrotna ma postać

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i - \alpha \vec{b} \Rightarrow \dot{\vec{r}}'_i = \dot{\vec{r}}_i,$$

Transformacja Galileusza

Rozważmy teraz translację przestrzenną, dla której $\mathbf{a} = 0$, $A = \mathbb{I}$, $\vec{V} = \vec{0}$.

Wektor położenia każdego punktu układu podlega przesunięciu o stały wektor $\vec{b}$,

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \alpha \vec{b}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Transformacja odwrotna ma postać

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i - \alpha \vec{b} \Rightarrow \dot{\vec{r}}'_i = \dot{\vec{r}}_i,$$

a wektor różnicy położzeń, od którego długości zależy energia potencjalna zmieni się następująco

$$\vec{r}_i - \vec{r}_j = (\vec{r}'_i - \alpha \vec{b}) - (\vec{r}'_j - \alpha \vec{b}) = \vec{r}'_i - \vec{r}'_j.$$

Transformacja Galileusza

Rozważmy teraz translację przestrzenną, dla której $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $A = \mathbb{I}$, $\vec{V} = \vec{0}$.

Wektor położenia każdego punktu układu podlega przesunięciu o stały wektor $\vec{b}$,

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \alpha \vec{b}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Transformacja odwrotna ma postać

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i - \alpha \vec{b} \Rightarrow \dot{\vec{r}}'_i = \dot{\vec{r}}_i,$$

a wektor różnicy położzeń, od którego długości zależy energia potencjalna zmienia się następująco

$$\vec{r}_i - \vec{r}_j = (\vec{r}'_i - \alpha \vec{b}) - (\vec{r}'_j - \alpha \vec{b}) = \vec{r}'_i - \vec{r}'_j.$$

W takim razie, wyjściowa funkcja Lagrange'a przyjmie postać

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_{i < j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = L(\vec{r}', \dot{\vec{r}}'),$$

a zatem układ ma symetrię ze względu na translacje przestrzenne.

W takim razie, wyjściowa funkcja Lagrange'a przyjmie postać

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_{i < j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = L(\vec{r}', \dot{\vec{r}}'),$$

a zatem układ ma symetrię ze względu na translacje przestrzenne.

Znajdźmy odpowiednią wielkość zachowaną wynikającą z twierdzenia Noether.

W takim razie, wyjściowa funkcja Lagrange'a przyjmie postać

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_{i < j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = L(\vec{r}', \dot{\vec{r}}'),$$

a zatem układ ma symetrię ze względu na translacje przestrzenne.

Znajdźmy odpowiednią wielkość zachowaną wynikającą z twierdzenia Noether. Przypomnijmy ogólny wzór

$$J \equiv \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \text{const.}$$

W takim razie, wyjściowa funkcja Lagrange'a przyjmie postać

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_{i < j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = L(\vec{r}', \dot{\vec{r}}'),$$

a zatem układ ma symetrię ze względu na translacje przestrzenne.

Znajdźmy odpowiednią wielkość zachowaną wynikającą z twierdzenia Noether. Przypomnijmy ogólny wzór

$$J \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \text{const.}$$

Teraz $n = 3N$, gdyż nie ma więzów,

W takim razie, wyjściowa funkcja Lagrange'a przyjmie postać

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_{i < j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = L(\vec{r}', \dot{\vec{r}}'),$$

a zatem układ ma symetrię ze względu na translacje przestrzenne.

Znajdźmy odpowiednią wielkość zachowaną wynikającą z twierdzenia Noether. Przypomnijmy ogólny wzór

$$J \equiv \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \text{const.}$$

Teraz $n = 3N$, gdyż nie ma więzów, a we współrzędnych kartezyjskich $q_i = x_i$, więc

W takim razie, wyjściowa funkcja Lagrange'a przyjmie postać

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_{i < j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = L(\vec{r}', \dot{\vec{r}}'),$$

a zatem układ ma symetrię ze względu na translacje przestrzenne.

Znajdźmy odpowiednią wielkość zachowaną wynikającą z twierdzenia Noether. Przypomnijmy ogólny wzór

$$J \equiv \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \text{const.}$$

Teraz $n = 3N$, gdyż nie ma więzów, a we współrzędnych kartezjańskich $q_i = x_i$, więc

$$J = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \text{const},$$

gdzie wprowadziliśmy skrótową notację

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha}.$$

$$J = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \text{const},$$

gdzie wprowadziliśmy skrótową notację

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha}.$$

Ponieważ funkcja Lagrange'a ma symetrię ze względu na translacje przestrzenne, to w tym przypadku $F \equiv 0$.

$$J = \sum_{i=1}^{3N} \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \text{const},$$

gdzie wprowadziliśmy skrótową notację

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha}.$$

Ponieważ funkcja Lagrange'a ma symetrię ze względu na translacje przestrzenne, to w tym przypadku $F \equiv 0$. Obliczmy

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} =$$

$$J = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \text{const},$$

gdzie wprowadziliśmy skrótową notację

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha}.$$

Ponieważ funkcja Lagrange'a ma symetrię ze względu na translacje przestrzenne, to w tym przypadku $F \equiv 0$. Obliczmy

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \dot{\vec{r}}_j^2 =$$

$$J = \sum_{i=1}^{3N} \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \text{const},$$

gdzie wprowadziliśmy skrótową notację

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha}.$$

Ponieważ funkcja Lagrange'a ma symetrię ze względu na translacje przestrzenne, to w tym przypadku $F \equiv 0$. Obliczmy

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \dot{\vec{r}}_j^2 = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j 2 \dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{\vec{r}}_i} =$$

$$J = \sum_{i=1}^{3N} \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \text{const},$$

gdzie wprowadziliśmy skrótową notację

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha}.$$

Ponieważ funkcja Lagrange'a ma symetrię ze względu na translacje przestrzenne, to w tym przypadku $F \equiv 0$. Obliczmy

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \dot{\vec{r}}_j^2 = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j 2 \dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{r}}_j \delta_{ij} =$$

$$J = \sum_{i=1}^{3N} \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \text{const},$$

gdzie wprowadziliśmy skrótową notację

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha}.$$

Ponieważ funkcja Lagrange'a ma symetrię ze względu na translacje przestrzenne, to w tym przypadku $F \equiv 0$. Obliczmy

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \dot{\vec{r}}_j^2 = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j 2 \dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{r}}_j \delta_{ij} = m_i \dot{\vec{r}}_i.$$

$$J = \sum_{i=1}^{3N} \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \text{const},$$

gdzie wprowadziliśmy skrótową notację

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha}.$$

Ponieważ funkcja Lagrange'a ma symetrię ze względu na translacje przestrzenne, to w tym przypadku $F \equiv 0$. Obliczmy

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \dot{\vec{r}}_j^2 = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j 2 \dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{r}}_j \delta_{ij} = m_i \dot{\vec{r}}_i.$$

Transformacja Galileusza

Obliczmy jeszcze

$$\left. \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial (\vec{r}_i' - \alpha \vec{b})}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = -\vec{b}.$$

Transformacja Galileusza

Obliczmy jeszcze

$$\left. \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial (\vec{r}_i' - \alpha \vec{b})}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = -\vec{b}.$$

Zatem, wielkość zachowana w przypadku symetrii ze względu na translacje przestrzenne ma postać

$$J = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \left. \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} =$$

Obliczmy jeszcze

$$\left. \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial (\vec{r}_i' - \alpha \vec{b})}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = -\vec{b}.$$

Zatem, wielkość zachowana w przypadku symetrii ze względu na translacje przestrzenne ma postać

$$J = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \left. \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (-\vec{b}) =$$

Obliczmy jeszcze

$$\left. \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial (\vec{r}_i' - \alpha \vec{b})}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = -\vec{b}.$$

Zatem, wielkość zachowana w przypadku symetrii ze względu na translacje przestrzenne ma postać

$$J = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \left. \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (-\vec{b}) = -\vec{b} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i =$$

Transformacja Galileusza

Obliczmy jeszcze

$$\left. \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial (\vec{r}_i' - \alpha \vec{b})}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = -\vec{b}.$$

Zatem, wielkość zachowana w przypadku symetrii ze względu na translacje przestrzenne ma postać

$$J = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \left. \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (-\vec{b}) = -\vec{b} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = -\vec{b} \cdot \vec{P},$$

Transformacja Galileusza

Obliczmy jeszcze

$$\left. \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial (\vec{r}'_i - \alpha \vec{b})}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = -\vec{b}.$$

Zatem, wielkość zachowana w przypadku symetrii ze względu na translacje przestrzenne ma postać

$$J = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \left. \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (-\vec{b}) = -\vec{b} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = -\vec{b} \cdot \vec{P},$$

gdzie wprowadziliśmy całkowity pęd układu:

$$\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i.$$

Transformacja Galileusza

Obliczmy jeszcze

$$\left. \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial (\vec{r}'_i - \alpha \vec{b})}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = -\vec{b}.$$

Zatem, wielkość zachowana w przypadku symetrii ze względu na translacje przestrzenne ma postać

$$J = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \left. \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (-\vec{b}) = -\vec{b} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = -\vec{b} \cdot \vec{P},$$

gdzie wprowadziliśmy całkowity pęd układu:

$$\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i.$$

Ponieważ $J = -\vec{b} \cdot \vec{P} = \text{const}$, a wektor przesunięcia przestrzennego $\vec{b}$ jest stały, to wnioskujemy, że niezmienniczość translacyjna odosobnionego układu N punktów materialnych prowadzi do zachowania całkowitego pędu układu

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \text{const.}$$

Zbadajmy zachowanie funkcji Lagrange'a naszego układu przy obrotach, które są reprezentowane przez dowolną, stałą macierz ortogonalną A .

Transformacja Galileusza

Ponieważ $J = -\vec{b} \cdot \vec{P} = \text{const}$, a wektor przesunięcia przestrzennego $\vec{b}$ jest stały, to wnioskujemy, że niezmienniczość translacyjna odosobnionego układu N punktów materialnych prowadzi do zachowania całkowitego pędu układu

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \text{const.}$$

Zbadajmy zachowanie funkcji Lagrange'a naszego układu przy obrotach, które są reprezentowane przez dowolną, stałą macierz ortogonalną A . Teraz z kolei $\vec{a} = 0$, $\vec{V} = \vec{b} = \vec{0}$.

$$\vec{r}'_i = A \vec{r}_i \Rightarrow \vec{r}_i = A^T \vec{r}'_i \Rightarrow \dot{\vec{r}}_i = A^T \dot{\vec{r}}'_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Ponieważ $J = -\vec{b} \cdot \vec{P} = \text{const}$, a wektor przesunięcia przestrzennego $\vec{b}$ jest stały, to wnioskujemy, że niezmienniczość translacyjna odosobnionego układu N punktów materialnych prowadzi do zachowania całkowitego pędu układu

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \text{const.}$$

Zbadajmy zachowanie funkcji Lagrange'a naszego układu przy obrotach, które są reprezentowane przez dowolną, stałą macierz ortogonalną A . Teraz z kolei $\vec{a} = 0$, $\vec{V} = \vec{b} = \vec{0}$.

$$\vec{r}'_i = A \vec{r}_i \Rightarrow \vec{r}_i = A^T \vec{r}'_i \Rightarrow \dot{\vec{r}}_i = A^T \dot{\vec{r}}'_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Pomińmy na chwilę indeks numerujący punkty układu i obliczmy

$$\vec{r}^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = x_j x_j =$$

Pomińmy na chwilę indeks numerujący punkty układu i obliczmy

$$\vec{r}^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = x_i x_i = A_{ij}^T x'_j A_{ik}^T x'_k =$$

Pomińmy na chwilę indeks numerujący punkty układu i obliczmy

$$\vec{r}^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = x_i x_i = A_{ij}^T x'_j A_{ik}^T x'_k = A_{ji} A_{ik}^T x'_j x'_k =$$

Pomińmy na chwilę indeks numerujący punkty układu i obliczmy

$$\vec{r}^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = x_i x_i = A_{ij}^T x'_j A_{ik}^T x'_k = A_{ji} A_{ik}^T x'_j x'_k = \left(A A^T \right)_{jk} x'_j x'_k$$

Pomińmy na chwilę indeks numerujący punkty układu i obliczmy

$$\begin{aligned} \vec{r}^2 &= \vec{r} \cdot \vec{r} = x_i x_i = A_{ij}^T x'_j A_{ik}^T x'_k = A_{ji} A_{ik}^T x'_j x'_k = (AA^T)_{jk} x'_j x'_k \\ &= \end{aligned}$$

Pomińmy na chwilę indeks numerujący punkty układu i obliczmy

$$\begin{aligned}\vec{r}^2 &= \vec{r} \cdot \vec{r} = x_i x_i = A_{ij}^T x'_j A_{ik}^T x'_k = A_{ji} A_{ik}^T x'_j x'_k = (AA^T)_{jk} x'_j x'_k \\ &= \mathbb{I}_{jk} x'_j x'_k =\end{aligned}$$

Pomińmy na chwilę indeks numerujący punkty układu i obliczmy

$$\begin{aligned}\vec{r}^2 &= \vec{r} \cdot \vec{r} = x_i x_i = A_{ij}^T x'_j A_{ik}^T x'_k = A_{ji} A_{ik}^T x'_j x'_k = (AA^T)_{jk} x'_j x'_k \\ &= \mathbb{I}_{jk} x'_j x'_k = \delta_{jk} x'_j x'_k =\end{aligned}$$

Pomińmy na chwilę indeks numerujący punkty układu i obliczmy

$$\begin{aligned}\vec{r}^2 &= \vec{r} \cdot \vec{r} = x_i x_i = A_{ij}^T x'_j A_{ik}^T x'_k = A_{ji} A_{ik}^T x'_j x'_k = (AA^T)_{jk} x'_j x'_k \\ &= \mathbb{I}_{jk} x'_j x'_k = \delta_{jk} x'_j x'_k = x'_j x'_j =\end{aligned}$$

Pomińmy na chwilę indeks numerujący punkty układu i obliczmy

$$\begin{aligned}\vec{r}^2 &= \vec{r} \cdot \vec{r} = x_i x_i = A_{ij}^T x'_j A_{ik}^T x'_k = A_{ji} A_{ik}^T x'_j x'_k = (AA^T)_{jk} x'_j x'_k \\ &= \mathbb{I}_{jk} x'_j x'_k = \delta_{jk} x'_j x'_k = x'_j x'_j = \vec{r}' \cdot \vec{r}' =\end{aligned}$$

Pomińmy na chwilę indeks numerujący punkty układu i obliczmy

$$\begin{aligned}\vec{r}^2 &= \vec{r} \cdot \vec{r} = x_i x_i = A_{ij}^T x'_j A_{ik}^T x'_k = A_{ji} A_{ik}^T x'_j x'_k = (AA^T)_{jk} x'_j x'_k \\ &= \mathbb{I}_{jk} x'_j x'_k = \delta_{jk} x'_j x'_k = x'_j x'_j = \vec{r}' \cdot \vec{r}' = \vec{r}'^2,\end{aligned}$$

Pomińmy na chwilę indeks numerujący punkty układu i obliczmy

$$\begin{aligned}\vec{r}^2 &= \vec{r} \cdot \vec{r} = x_i x_i = A_{ij}^T x'_j A_{ik}^T x'_k = A_{ji} A_{ik}^T x'_j x'_k = (A A^T)_{jk} x'_j x'_k \\ &= \mathbb{I}_{jk} x'_j x'_k = \delta_{jk} x'_j x'_k = x'_j x'_j = \vec{r}' \cdot \vec{r}' = \vec{r}'^2,\end{aligned}$$

skąd wnioskujemy, że długość wektora położenia nie ulega zmianie przy obrocie.

$$|\vec{r}_i| = \sqrt{\vec{r}_i^2} =$$

Pomińmy na chwilę indeks numerujący punkty układu i obliczmy

$$\begin{aligned}\vec{r}^2 &= \vec{r} \cdot \vec{r} = x_i x_i = A_{ij}^T x'_j A_{ik}^T x'_k = A_{ji} A_{ik}^T x'_j x'_k = (AA^T)_{jk} x'_j x'_k \\ &= \mathbb{I}_{jk} x'_j x'_k = \delta_{jk} x'_j x'_k = x'_j x'_j = \vec{r}' \cdot \vec{r}' = \vec{r}'^2,\end{aligned}$$

skąd wnioskujemy, że długość wektora położenia nie ulega zmianie przy obrocie.

$$|\vec{r}_i| = \sqrt{\vec{r}_i^2} = \sqrt{\vec{r}'_i^2} = |\vec{r}'_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Pomińmy na chwilę indeks numerujący punkty układu i obliczmy

$$\begin{aligned}\vec{r}^2 &= \vec{r} \cdot \vec{r} = x_i x_i = A_{ij}^T x'_j A_{ik}^T x'_k = A_{ji} A_{ik}^T x'_j x'_k = (A A^T)_{jk} x'_j x'_k \\ &= \mathbb{I}_{jk} x'_j x'_k = \delta_{jk} x'_j x'_k = x'_j x'_j = \vec{r}' \cdot \vec{r}' = \vec{r}'^2,\end{aligned}$$

skąd wnioskujemy, że długość wektora położenia nie ulega zmianie przy obrocie.

$$|\vec{r}_i| = \sqrt{\vec{r}_i^2} = \sqrt{\vec{r}'_i^2} = |\vec{r}'_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Dokładnie tak samo można udowodnić, że

$$\vec{r}_i^2 = \vec{r}'_i^2 \quad \text{i} \quad |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = |\vec{r}'_i - \vec{r}'_j|.$$

Pomińmy na chwilę indeks numerujący punkty układu i obliczmy

$$\begin{aligned}\vec{r}^2 &= \vec{r} \cdot \vec{r} = x_i x_i = A_{ij}^T x'_j A_{ik}^T x'_k = A_{ji} A_{ik}^T x'_j x'_k = (A A^T)_{jk} x'_j x'_k \\ &= \mathbb{I}_{jk} x'_j x'_k = \delta_{jk} x'_j x'_k = x'_j x'_j = \vec{r}' \cdot \vec{r}' = \vec{r}'^2,\end{aligned}$$

skąd wnioskujemy, że długość wektora położenia nie ulega zmianie przy obrocie.

$$|\vec{r}_i| = \sqrt{\vec{r}_i^2} = \sqrt{\vec{r}'_i^2} = |\vec{r}'_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Dokładnie tak samo można udowodnić, że

$$\dot{\vec{r}}_i^2 = \dot{\vec{r}}'_i{}^2 \quad \text{i} \quad |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = |\vec{r}'_i - \vec{r}'_j|.$$

Wnioskujemy stąd, że funkcja Lagrange'a

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_{i < j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = L(\vec{r}', \dot{\vec{r}}')$$

ma symetrię przy dowolnym obrocie w trójwymiarowej przestrzeni. Dla ustalenia uwagi rozważmy obrót względem osi Oz , przy którym współrzędne kartezjańskie i -tego punktu przekształcają się następująco

$$\begin{cases} x'_i = x_i \cos \alpha - y_i \sin \alpha \\ y'_i = x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha \\ z'_i = z_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i = x'_i \cos \alpha + y'_i \sin \alpha \\ y_i = -x'_i \sin \alpha + y'_i \cos \alpha \\ z_i = z'_i \end{cases}$$

Wnioskujemy stąd, że funkcja Lagrange'a

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_{i < j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = L(\vec{r}', \dot{\vec{r}}')$$

ma symetrię przy dowolnym obrocie w trójwymiarowej przestrzeni. Dla ustalenia uwagi rozważmy obrót względem osi Oz , przy którym współrzędne kartezjańskie i -tego punktu przekształcają się następująco

$$\begin{cases} x'_i = x_i \cos \alpha - y_i \sin \alpha \\ y'_i = x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha \\ z'_i = z_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i = x'_i \cos \alpha + y'_i \sin \alpha \\ y_i = -x'_i \sin \alpha + y'_i \cos \alpha \\ z_i = z'_i \end{cases}$$

Wielkość zachowana ma w tym przypadku postać

$$J = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0}$$

Przed chwilą pokazaliśmy, że

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = m_i \dot{y}_i, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = m_i \dot{z}_i.$$

Wielkość zachowana ma w tym przypadku postać

$$J = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0}$$

Przed chwilą pokazaliśmy, że

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = m_i \dot{y}_i, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = m_i \dot{z}_i.$$

Obliczmy pochodne po kącie α

$$\begin{cases} x_i = x'_i \cos \alpha + y'_i \sin \alpha \\ y_i = -x'_i \sin \alpha + y'_i \cos \alpha \\ z_i = z'_i \end{cases}$$

Wielkość zachowana ma w tym przypadku postać

$$J = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0}$$

Przed chwilą pokazaliśmy, że

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = m_i \dot{y}_i, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = m_i \dot{z}_i.$$

Obliczmy pochodne po kącie α

$$\begin{cases} x_i = x'_i \cos \alpha + y'_i \sin \alpha \\ y_i = -x'_i \sin \alpha + y'_i \cos \alpha \\ z_i = z'_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} = -x'_i \sin \alpha + y'_i \cos \alpha \\ \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} = -x'_i \cos \alpha - y'_i \sin \alpha \\ \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} = 0 \end{cases}$$

Wielkość zachowana ma w tym przypadku postać

$$J = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0}$$

Przed chwilą pokazaliśmy, że

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = m_i \dot{y}_i, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = m_i \dot{z}_i.$$

Obliczmy pochodne po kącie α

$$\begin{cases} x_i = x'_i \cos \alpha + y'_i \sin \alpha \\ y_i = -x'_i \sin \alpha + y'_i \cos \alpha \\ z_i = z'_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} = -x'_i \sin \alpha + y'_i \cos \alpha \\ \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} = -x'_i \cos \alpha - y'_i \sin \alpha \\ \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} = 0 \end{cases}$$

Wielkość zachowana ma w tym przypadku postać

$$J = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0}$$
$$=$$

Wielkość zachowana ma w tym przypadku postać

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^N [m_i \dot{x}_i (-x'_i \sin \alpha + y'_i \cos \alpha)] \end{aligned}$$

Wielkość zachowana ma w tym przypadku postać

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^N [m_i \dot{x}_i (-x'_i \sin \alpha + y'_i \cos \alpha) \\ &\quad + m_i \dot{y}_i (-x'_i \cos \alpha - y'_i \sin \alpha) + m_i \dot{z}_i \cdot 0] \Big|_{\alpha=0} \end{aligned}$$

Wielkość zachowana ma w tym przypadku postać

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^N [m_i \dot{x}_i (-x'_i \sin \alpha + y'_i \cos \alpha) \\ &\quad + m_i \dot{y}_i (-x'_i \cos \alpha - y'_i \sin \alpha) + m_i \dot{z}_i \cdot 0] \Big|_{\alpha=0} \\ &= \end{aligned}$$

Wielkość zachowana ma w tym przypadku postać

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^N [m_i \dot{x}_i (-x'_i \sin \alpha + y'_i \cos \alpha) \\ &\quad + m_i \dot{y}_i (-x'_i \cos \alpha - y'_i \sin \alpha) + m_i \dot{z}_i \cdot 0] \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^N (m_i \dot{x}_i y_i - m_i \dot{y}_i x_i) \end{aligned}$$

Wielkość zachowana ma w tym przypadku postać

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^N [m_i \dot{x}_i (-x'_i \sin \alpha + y'_i \cos \alpha) \\ &\quad + m_i \dot{y}_i (-x'_i \cos \alpha - y'_i \sin \alpha) + m_i \dot{z}_i \cdot 0] \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^N (m_i \dot{x}_i y_i - m_i \dot{y}_i x_i) = - \sum_{i=1}^N (x_i p_{iy} - y_i p_{ix}) \end{aligned}$$

Wielkość zachowana ma w tym przypadku postać

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^N [m_i \dot{x}_i (-x'_i \sin \alpha + y'_i \cos \alpha) \\ &\quad + m_i \dot{y}_i (-x'_i \cos \alpha - y'_i \sin \alpha) + m_i \dot{z}_i \cdot 0] \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^N (m_i \dot{x}_i y_i - m_i \dot{y}_i x_i) = - \sum_{i=1}^N (x_i p_{iy} - y_i p_{ix}) = - \sum_{i=1}^N L_{iz} \end{aligned}$$

Wielkość zachowana ma w tym przypadku postać

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^N [m_i \dot{x}_i (-x'_i \sin \alpha + y'_i \cos \alpha) \\ &\quad + m_i \dot{y}_i (-x'_i \cos \alpha - y'_i \sin \alpha) + m_i \dot{z}_i \cdot 0] \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^N (m_i \dot{x}_i y_i - m_i \dot{y}_i x_i) = - \sum_{i=1}^N (x_i p_{iy} - y_i p_{ix}) = - \sum_{i=1}^N L_{iz} \\ &= \end{aligned}$$

Wielkość zachowana ma w tym przypadku postać

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^N [m_i \dot{x}_i (-x'_i \sin \alpha + y'_i \cos \alpha) \\ &\quad + m_i \dot{y}_i (-x'_i \cos \alpha - y'_i \sin \alpha) + m_i \dot{z}_i \cdot 0] \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^N (m_i \dot{x}_i y_i - m_i \dot{y}_i x_i) = - \sum_{i=1}^N (x_i p_{iy} - y_i p_{ix}) = - \sum_{i=1}^N L_{iz} \\ &= -L_z = \text{const}, \end{aligned}$$

Wielkość zachowana ma w tym przypadku postać

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^N [m_i \dot{x}_i (-x'_i \sin \alpha + y'_i \cos \alpha) \\ &\quad + m_i \dot{y}_i (-x'_i \cos \alpha - y'_i \sin \alpha) + m_i \dot{z}_i \cdot 0] \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^N (m_i \dot{x}_i y_i - m_i \dot{y}_i x_i) = - \sum_{i=1}^N (x_i p_{iy} - y_i p_{ix}) = - \sum_{i=1}^N L_{iz} \\ &= -L_z = \text{const}, \end{aligned}$$

gdzie uwzględniliśmy, że $x'_i|_{\alpha=0} = x_i$, $y'_i|_{\alpha=0} = y_i$ oraz

$$L_{iz} = (\vec{r}_i \times \vec{p}_i)_z = x_i p_{iy} - y_i p_{ix}$$

Wielkość zachowana ma w tym przypadku postać

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^N [m_i \dot{x}_i (-x'_i \sin \alpha + y'_i \cos \alpha) \\ &\quad + m_i \dot{y}_i (-x'_i \cos \alpha - y'_i \sin \alpha) + m_i \dot{z}_i \cdot 0] \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^N (m_i \dot{x}_i y_i - m_i \dot{y}_i x_i) = - \sum_{i=1}^N (x_i p_{iy} - y_i p_{ix}) = - \sum_{i=1}^N L_{iz} \\ &= -L_z = \text{const}, \end{aligned}$$

gdzie uwzględniliśmy, że $x'_i|_{\alpha=0} = x_i$, $y'_i|_{\alpha=0} = y_i$ oraz
 $L_{iz} = (\vec{r}_i \times \vec{p}_i)_z = x_i p_{iy} - y_i p_{ix}$

i wprowadziliśmy z-ową składową całkowitego momentu pędu układu N punktów materialnych

$$L_z \equiv \sum_{i=1}^N L_{iz}.$$

Tym samym pokazaliśmy, że niezmienniczość funkcji Lagrange'a odosobnionego układu N punktów materialnych przy obrotach względem osi Oz prowadzi do zachowania składowej L_z wektora całkowitego momentu pędu.

i wprowadziliśmy z-ową składową całkowitego momentu pędu układu N punktów materialnych

$$L_z \equiv \sum_{i=1}^N L_{iz}.$$

Tym samym pokazaliśmy, że niezmienniczość funkcji Lagrange'a odosobnionego układu N punktów materialnych przy obrotach względem osi Oz prowadzi do zachowania składowej L_z wektora całkowitego momentu pędu.

W analogiczny sposób można pokazać, że symetria układu N punktów przy obrotach względem osi Ox prowadzi do zachowania składowej L_x , a przy obrotach względem osi Oy – do zachowania składowej L_y całkowitego momentu pędu.

i wprowadziliśmy z-ową składową całkowitego momentu pędu układu N punktów materialnych

$$L_z \equiv \sum_{i=1}^N L_{iz}.$$

Tym samym pokazaliśmy, że niezmienniczość funkcji Lagrange'a odosobnionego układu N punktów materialnych przy obrotach względem osi Oz prowadzi do zachowania składowej L_z wektora całkowitego momentu pędu.

W analogiczny sposób można pokazać, że symetria układu N punktów przy obrotach względem osi Ox prowadzi do zachowania składowej L_x , a przy obrotach względem osi Oy – do zachowania składowej L_y całkowitego momentu pędu.

Transformacja Galileusza

Na koniec rozważmy tzw. czystą transformację Galileusza, opisującą przejście do innego inercyjnego układu odniesienia poruszającego się względem układu wyjściowego ze stałą prędkością $\vec{V}$. Teraz mamy $a = 0$, $A = \mathbb{I}$, $\vec{b} = \vec{0}$ i transformacja ma postać

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \alpha \vec{V} t, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Transformacja Galileusza

Na koniec rozważmy tzw. czystą transformację Galileusza, opisującą przejście do innego inercyjnego układu odniesienia poruszającego się względem układu wyjściowego ze stałą prędkością $\vec{V}$. Teraz mamy $\vec{a} = 0$, $A = \mathbb{I}$, $\vec{b} = \vec{0}$ i transformacja ma postać

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \alpha \vec{V} t, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Transformacja odwrotna ma postać

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i - \alpha \vec{V} t \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}'_i - \alpha \vec{V},$$

Transformacja Galileusza

Na koniec rozważmy tzw. czystą transformację Galileusza, opisującą przejście do innego inercyjnego układu odniesienia poruszającego się względem układu wyjściowego ze stałą prędkością $\vec{V}$. Teraz mamy $\vec{a} = 0$, $A = \mathbb{I}$, $\vec{b} = \vec{0}$ i transformacja ma postać

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \alpha \vec{V} t, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Transformacja odwrotna ma postać

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i - \alpha \vec{V} t \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}'_i - \alpha \vec{V},$$

Wektor różnicy położen przekształci się następująco

$$\vec{r}_i - \vec{r}_j = (\vec{r}'_i - \alpha \vec{V} t) - (\vec{r}'_j - \alpha \vec{V} t) = \vec{r}'_i - \vec{r}'_j.$$

Transformacja Galileusza

Na koniec rozważmy tzw. czystą transformację Galileusza, opisującą przejście do innego inercjalnego układu odniesienia poruszającego się względem układu wyjściowego ze stałą prędkością $\vec{V}$. Teraz mamy $\vec{a} = 0$, $A = \mathbb{I}$, $\vec{b} = \vec{0}$ i transformacja ma postać

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \alpha \vec{V} t, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Transformacja odwrotna ma postać

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i - \alpha \vec{V} t \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}'_i - \alpha \vec{V},$$

Wektor różnicy położenia przekształci się następująco

$$\vec{r}_i - \vec{r}_j = (\vec{r}'_i - \alpha \vec{V} t) - (\vec{r}'_j - \alpha \vec{V} t) = \vec{r}'_i - \vec{r}'_j.$$

Transformacja Galileusza

Funkcja Lagrange'a zmieni się następująco

$$\begin{aligned} L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\vec{r}}_i - \alpha \vec{V} \right)^2 - \sum_{i < j} V_{ij} \left(\left| \vec{r}_i - \vec{r}_j \right| \right) \\ &= L(\vec{r}', \dot{\vec{r}}') + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(-2\alpha \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{V} + \alpha^2 \vec{V}^2 \right). \end{aligned}$$

Na pierwszy rzut oka mamy wrażenie, że L nie ma symetrii przy czystej transformacji Galileusza.

Transformacja Galileusza

Funkcja Lagrange'a zmieni się następująco

$$\begin{aligned} L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}}_i - \alpha \vec{V})^2 - \sum_{i < j} V_{ij} (|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \\ &= L(\vec{r}', \dot{\vec{r}}') + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (-2\alpha \dot{\vec{r}}'_i \cdot \vec{V} + \alpha^2 \vec{V}^2). \end{aligned}$$

Na pierwszy rzut oka mamy wrażenie, że L nie ma symetrii przy czystej transformacji Galileusza.

Zauważmy jednak, że dodatkowe wyrazy po prawej stronie równości można przedstawić jako pochodną zupełną po czasie z następującej funkcji

$$F(\vec{r}', t, \alpha) \equiv \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (-2\alpha \vec{r}'_i \cdot \vec{V} + \alpha^2 \vec{V}^2 t),$$

co łatwo sprawdzić obliczając pochodną $\frac{dF}{dt}$.

Transformacja Galileusza

Funkcja Lagrange'a zmieni się następująco

$$\begin{aligned} L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}}_i - \alpha \vec{V})^2 - \sum_{i < j} V_{ij} (|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \\ &= L(\vec{r}', \dot{\vec{r}}') + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (-2\alpha \dot{\vec{r}}'_i \cdot \vec{V} + \alpha^2 \vec{V}^2). \end{aligned}$$

Na pierwszy rzut oka mamy wrażenie, że L nie ma symetrii przy czystej transformacji Galileusza.

Zauważmy jednak, że dodatkowe wyrazy po prawej stronie równości można przedstawić jako pochodną zupełną po czasie z następującej funkcji

$$F(\vec{r}', t, \alpha) \equiv \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (-2\alpha \vec{r}'_i \cdot \vec{V} + \alpha^2 \vec{V}^2 t),$$

co łatwo sprawdzić obliczając pochodną $\frac{dF}{dt}$.

Znajdźmy odpowiednią wielkość zachowaną

$$J = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \text{const}$$

Poprzednio pokazaliśmy już, że

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m_i \dot{\vec{r}}_i.$$

Transformacja Galileusza

Znajdźmy odpowiednią wielkość zachowaną

$$J = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \text{const}$$

Poprzednio pokazaliśmy już, że

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m_i \dot{\vec{r}}_i.$$

Teraz obliczmy

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial (\vec{r}_i' - \alpha \vec{V} t)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = -\vec{V} t,$$

Transformacja Galileusza

Znajdźmy odpowiednią wielkość zachowaną

$$J = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \text{const}$$

Poprzednio pokazaliśmy już, że

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m_i \dot{\vec{r}}_i.$$

Teraz obliczmy

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial (\vec{r}'_i - \alpha \vec{V} t)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = -\vec{V} t,$$

Transformacja Galileusza

oraz

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(-2\alpha \vec{r}_i' \cdot \vec{V} + \alpha^2 \vec{V}^2 t \right) \right|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(-2\vec{r}_i' \cdot \vec{V} + 2\alpha \vec{V}^2 t \right) \Big|_{\alpha=0} = -\vec{V} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i.\end{aligned}$$

Wielkość $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$ po prawej stronie możemy powiązać z wektorem położenia środka masy układu

$$\vec{R} \equiv \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = M \vec{R},$$

gdzie $M \equiv \sum_{i=1}^N m_i$ jest masą układu N punktów.

oraz

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(-2\alpha \vec{r}_i' \cdot \vec{V} + \alpha^2 \vec{V}^2 t \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(-2\vec{r}_i' \cdot \vec{V} + 2\alpha \vec{V}^2 t \right) \Big|_{\alpha=0} = -\vec{V} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i.\end{aligned}$$

Wielkość $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$ po prawej stronie możemy powiązać z wektorem położenia środka masy układu

$$\vec{R} \equiv \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = M \vec{R},$$

gdzie $M \equiv \sum_{i=1}^N m_i$ jest masą układu N punktów.

Transformacja Galileusza

Zatem, wielkość zachowana w przypadku symetrii ze względu na czyste transformacje Galileusza ma postać

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (-\vec{V}t) - (-\vec{V} \cdot M\vec{R}) \\ &= (-\vec{V}t) \cdot \vec{P} + \vec{V} \cdot M\vec{R} = \vec{V} \cdot (M\vec{R} - \vec{P}t) = \text{const.} \end{aligned}$$

Ponieważ prędkość względna obu układów inercjalnych $\vec{V}$ jest stała, to

$$M\vec{R} - \vec{P}t = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = \frac{\vec{P}}{M} t + \vec{R}_0,$$

Transformacja Galileusza

Zatem, wielkość zachowana w przypadku symetrii ze względu na czyste transformacje Galileusza ma postać

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (-\vec{V}t) - (-\vec{V} \cdot M\vec{R}) \\ &= (-\vec{V}t) \cdot \vec{P} + \vec{V} \cdot M\vec{R} = \vec{V} \cdot (M\vec{R} - \vec{P}t) = \text{const.} \end{aligned}$$

Ponieważ prędkość względna obu układów inercjalnych $\vec{V}$ jest stała, to

$$M\vec{R} - \vec{P}t = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = \frac{\vec{P}}{M} t + \vec{R}_0,$$

gdzie stała $\vec{R}_0 = \text{const}/M$ ma interpretację początkowego położenia środka masy układu,

Transformacja Galileusza

Zatem, wielkość zachowana w przypadku symetrii ze względu na czyste transformacje Galileusza ma postać

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (-\vec{V}t) - (-\vec{V} \cdot M\vec{R}) \\ &= (-\vec{V}t) \cdot \vec{P} + \vec{V} \cdot M\vec{R} = \vec{V} \cdot (M\vec{R} - \vec{P}t) = \text{const.} \end{aligned}$$

Ponieważ prędkość względna obu układów inercjalnych $\vec{V}$ jest stała, to

$$M\vec{R} - \vec{P}t = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = \frac{\vec{P}}{M} t + \vec{R}_0,$$

gdzie stała $\vec{R}_0 = \text{const}/M$ ma interpretację początkowego położenia środka masy układu,

a stała $\vec{P}/M$ jest jego stałą prędkością.

Widzimy, że konsekwencją symetrii odosobnionego układu N punktów materialnych względem czystych transformacji Galileusza jest to, że jego środek masy porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

a stała $\vec{P}/M$ jest jego stałą prędkością.

Widzimy, że konsekwencją symetrii odosobnionego układu N punktów materialnych względem czystych transformacji Galileusza jest to, że jego środek masy porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Podsumowując:

- przesunięcia w czasie
⇒ zasada zachowania energii
- przesunięcia w przestrzeni (w 3 kierunkach)
⇒ zasada zachowania pędu (3 składowe)
- obroty w przestrzeni (3 kąty obrotu)
⇒ zasada zachowania momentu pędu (3 składowe)
- transformacje do innego, inercjalnego układu odniesienia (3 składowe względnej prędkości $\vec{V}$)
⇒ środek masy odosobnionego układu ciał porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym (3 składowe pewnej wielkości opisującej ruch środka masy)