

Symetrie i prawa zachowania

Wykład 6

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

Największym problem przy badaniu układów mechanicznych nie jest napisanie równań ruchu, ale ich scałkowanie.

Wielkości zachowane występujące w danym układzie pozwalają ograniczyć liczbę niezbędnych całkowań i dostarczają istotnych informacji na temat samego układu.

Największym problem przy badaniu układów mechanicznych nie jest napisanie równań ruchu, ale ich scałkowanie.

Wielkości zachowane występujące w danym układzie pozwalają ograniczyć liczbę niezbędnych całkowań i dostarczają istotnych informacji na temat samego układu.

Np. prawo zachowania energii mówi nam, jaka będzie prędkość wahadła przy przejściu przez najniższy punkt.

Największym problem przy badaniu układów mechanicznych nie jest napisanie równań ruchu, ale ich scałkowanie.

Wielkości zachowane występujące w danym układzie pozwalają ograniczyć liczbę niezbędnych całkowań i dostarczają istotnych informacji na temat samego układu.

Np. prawo zachowania energii mówi nam, jaka będzie prędkość wahadła przy przejściu przez najniższy punkt.

Postaramy się znaleźć wzajemny związek pomiędzy wielkościami zachowanymi a symetriami układu fizycznego.

Największym problem przy badaniu układów mechanicznych nie jest napisanie równań ruchu, ale ich scałkowanie.

Wielkości zachowane występujące w danym układzie pozwalają ograniczyć liczbę niezbędnych całkowań i dostarczają istotnych informacji na temat samego układu.

Np. prawo zachowania energii mówi nam, jaka będzie prędkość wahadła przy przejściu przez najniższy punkt.

Postaramy się znaleźć wzajemny związek pomiędzy wielkościami zachowanymi a symetriami układu fizycznego.

Zaczniemy od definicji **pędu uogólnionego** sprzężonego do współrzędnej q_j

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Zaczniemy od definicji **pędu uogólnionego** sprzężonego do współrzędnej q_j

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Zaczniemy od definicji **pędu uogólnionego** sprzężonego do współrzędnej q_j

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Przykład 1: Znajdźmy pęd uogólniony sprzężony do współrzędnej kartezjańskiej x_j swobodnego punktu materialnego poruszającego się w przestrzeni trójwymiarowej.

Zaczniemy od definicji **pędu uogólnionego** sprzężonego do współrzędnej q_j

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Przykład 1: Znajdźmy pęd uogólniony sprzężony do współrzędnej kartezjańskiej x_j swobodnego punktu materialnego poruszającego się w przestrzeni trójwymiarowej.

Funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) = \frac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}_i.$$

Zaczniemy od definicji **pędu uogólnionego** sprzężonego do współrzędnej q_j

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Przykład 1: Znajdźmy pęd uogólniony sprzężony do współrzędnej kartezjańskiej x_j swobodnego punktu materialnego poruszającego się w przestrzeni trójwymiarowej.

Funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) = \frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i.$$

Pędy uogólnione

Pęd uogólniony sprzężony do x_j

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \frac{1}{2} m 2 \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_j} = m \dot{x}_i \delta_{ij} = m \dot{x}_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

jest j -tą składową zwykłego pędu $\vec{p} = m\vec{v}$.

Pędy uogólnione

Pęd uogólniony sprzężony do x_j

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \frac{1}{2} m 2 \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_j} = m \dot{x}_i \delta_{ij} = m \dot{x}_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

jest j -tą składową zwykłego pędu $\vec{p} = m\vec{v}$.

Przykład 2: Znajdźmy pęd uogólniony sprzężony do kąta wychylenia φ wahadła matematycznego.

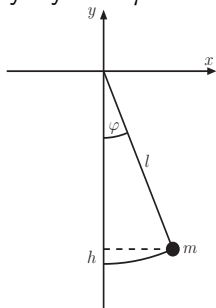
Pędy uogólnione

Pęd uogólniony sprzężony do x_j

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \frac{1}{2} m 2 \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_j} = m \dot{x}_i \delta_{ij} = m \dot{x}_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

jest j -tą składową zwykłego pędu $\vec{p} = m\vec{v}$.

Przykład 2: Znajdźmy pęd uogólniony sprzężony do kąta wychylenia φ wahadła matematycznego.



Funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgh.$$

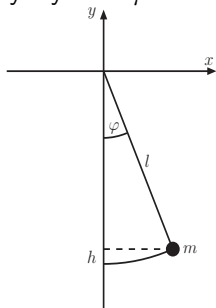
Pędy uogólnione

Pęd uogólniony sprzężony do x_j

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \frac{1}{2} m 2 \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_j} = m \dot{x}_j \delta_{ij} = m \dot{x}_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

jest j -tą składową zwykłego pędu $\vec{p} = m\vec{v}$.

Przykład 2: Znajdźmy pęd uogólniony sprzężony do kąta wychylenia φ wahadła matematycznego.



Funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgh.$$
$$\begin{cases} x = l \sin \varphi \\ y = -l \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{y} = l \dot{\varphi} \sin \varphi \end{cases}$$

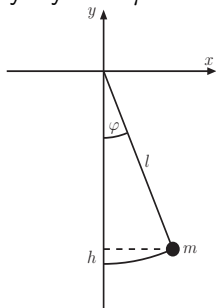
Pędy uogólnione

Pęd uogólniony sprzężony do x_j

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \frac{1}{2} m 2 \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_j} = m \dot{x}_j \delta_{ij} = m \dot{x}_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

jest j -tą składową zwykłego pędu $\vec{p} = m\vec{v}$.

Przykład 2: Znajdźmy pęd uogólniony sprzężony do kąta wychylenia φ wahadła matematycznego.



Funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgh.$$
$$\begin{cases} x = l \sin \varphi \\ y = -l \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{y} = l \dot{\varphi} \sin \varphi \end{cases}$$

Przepiszmy funkcję Lagrange'a uwzględniając podane równania transformacyjne i wstawiając $h = l - l \cos \varphi$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgh \\ &= \frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + l^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) - mg(l - l \cos \varphi). \end{aligned}$$

Stały wyraz $mg l$ w funkcji Lagrange'a jest nieistotny, gdyż zarówno definicja pędu jaki i równania ruchu zawierają tylko pochodne L ,

Przepiszmy funkcję Lagrange'a uwzględniając podane równania transformacyjne i wstawiając $h = l - l \cos \varphi$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgh \\ &= \frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + l^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) - mg(l - l \cos \varphi). \end{aligned}$$

Stały wyraz $mg l$ w funkcji Lagrange'a jest nieistotny, gdyż zarówno definicja pędu jak i równania ruchu zawierają tylko pochodne L , dlatego możemy go pominąć

Przepiszmy funkcję Lagrange'a uwzględniając podane równania transformacyjne i wstawiając $h = l - l \cos \varphi$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgh \\ &= \frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + l^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) - mg(l - l \cos \varphi). \end{aligned}$$

Stały wyraz $mg l$ w funkcji Lagrange'a jest nieistotny, gdyż zarówno definicja pędu jak i równania ruchu zawierają tylko pochodne L , dlatego możemy go pominąć i po skorzystaniu z jedynki trygonometrycznej rozpatrywać funkcję Lagrange'a postaci

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi.$$

Przepiszmy funkcję Lagrange'a uwzględniając podane równania transformacyjne i wstawiając $h = l - l \cos \varphi$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgh \\ &= \frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + l^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) - mg(l - l \cos \varphi). \end{aligned}$$

Stały wyraz $mg l$ w funkcji Lagrange'a jest nieistotny, gdyż zarówno definicja pędu jak i równania ruchu zawierają tylko pochodne L , dlatego możemy go pominąć i po skorzystaniu z jedynki trygonometrycznej rozpatrywać funkcję Lagrange'a postaci

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi.$$

Obliczmy pęd uogólniony sprzężony do φ

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi \right) \\ &= \frac{1}{2} ml^2 2\dot{\varphi} = l \cdot ml\dot{\varphi} = l \cdot mv_\varphi, \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości uwzględniliśmy związek pomiędzy prędkością kątową $\dot{\varphi}$ i prędkością liniową w kierunku kąta φ ,
 $v_\varphi = l\dot{\varphi}$.

Obliczmy pęd uogólniony sprzężony do φ

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi \right) \\ &= \frac{1}{2} ml^2 2\dot{\varphi} = l \cdot ml\dot{\varphi} = l \cdot mv_\varphi, \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości uwzględniliśmy związek pomiędzy prędkością kątową $\dot{\varphi}$ i prędkością liniową w kierunku kąta φ ,
 $v_\varphi = l\dot{\varphi}$.

Widzimy, że pęd uogólniony sprzężony do kąta φ jest momentem pędu wahadła względem punktu zawieszenia nici.

Obliczmy pęd uogólniony sprzężony do φ

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi \right) \\ &= \frac{1}{2} ml^2 2\dot{\varphi} = l \cdot ml\dot{\varphi} = l \cdot mv_\varphi, \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości uwzględniliśmy związek pomiędzy prędkością kątową $\dot{\varphi}$ i prędkością liniową w kierunku kąta φ ,
 $v_\varphi = l\dot{\varphi}$.

Widzimy, że pęd uogólniony sprzężony do kąta φ jest **momentem pędu** wahadła względem punktu zawieszenia nici.

Nadal jest on jednak wielkością czysto mechaniczną.

Obliczmy pęd uogólniony sprzężony do φ

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi \right) \\ &= \frac{1}{2} ml^2 2\dot{\varphi} = l \cdot ml\dot{\varphi} = l \cdot mv_\varphi, \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości uwzględniliśmy związek pomiędzy prędkością kątową $\dot{\varphi}$ i prędkością liniową w kierunku kąta φ ,
 $v_\varphi = l\dot{\varphi}$.

Widzimy, że pęd uogólniony sprzężony do kąta φ jest **momentem pędu** wahadła względem punktu zawieszenia nici.

Nadal jest on jednak wielkością czysto mechaniczną.

Inaczej będzie w przypadku, gdy funkcja Lagrange'a L zawiera potencjał uogólniony zależny od prędkości, co ilustruje kolejny przykład.

Przykład 3: Znajdźmy pęd uogólniony sprzężony do kartezjańskiej współrzędnej x_j wektora położenia cząstki o masie m i ładunku elektrycznym q znajdującej się w polu elektromagnetycznym o potencjale skalarnym $\varphi(\vec{r}, t)$ i potencjale wektorowym $\vec{A}(\vec{r}, t)$.

Inaczej będzie w przypadku, gdy funkcja Lagrange'a L zawiera potencjał uogólniony zależny od prędkości, co ilustruje kolejny przykład.

Przykład 3: Znajdźmy pęd uogólniony sprzężony do kartezjańskiej współrzędnej x_j wektora położenia cząstki o masie m i ładunku elektrycznym q znajdującej się w polu elektromagnetycznym o potencjale skalarnym $\varphi(\vec{r}, t)$ i potencjale wektorowym $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Jak pokazaliśmy wcześniej (Wykład 4) potencjał uogólniony ma w tym przypadku postać

$$V(\vec{r}, \vec{v}, t) = q \left(\varphi(\vec{r}, t) - \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v} \right).$$

Inaczej będzie w przypadku, gdy funkcja Lagrange'a L zawiera potencjał uogólniony zależny od prędkości, co ilustruje kolejny przykład.

Przykład 3: Znajdźmy pęd uogólniony sprzężony do kartezjańskiej współrzędnej x_j wektora położenia cząstki o masie m i ładunku elektrycznym q znajdującej się w polu elektromagnetycznym o potencjale skalarnym $\varphi(\vec{r}, t)$ i potencjale wektorowym $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Jak pokazaliśmy wcześniej (Wykład 4) potencjał uogólniony ma w tym przypadku postać

$$V(\vec{r}, \vec{v}, t) = q \left(\varphi(\vec{r}, t) - \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v} \right).$$

Funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}_i - q(\varphi - A_i \dot{x}_i).$$

Obliczmy pęd uogólniony sprzężony do x_j , $j = 1, 2, 3$,

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \frac{1}{2} m 2 \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_j} + q A_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_j} = m \dot{x}_i \delta_{ij} + q A_i \delta_{ij} = m \dot{x}_j + q A_j,$$

Funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}_i - q(\varphi - A_i \dot{x}_i).$$

Obliczmy pęd uogólniony sprzężony do x_j , $j = 1, 2, 3$,

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \frac{1}{2} m 2 \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_j} + q A_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_j} = m \dot{x}_i \delta_{ij} + q A_i \delta_{ij} = m \dot{x}_j + q A_j,$$

co możemy zapisać wektorowo

$$\vec{p} = m \vec{v} + q \vec{A}.$$

Funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}_i - q (\varphi - A_i \dot{x}_i).$$

Obliczmy pęd uogólniony sprzężony do x_j , $j = 1, 2, 3$,

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \frac{1}{2} m 2 \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_j} + q A_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_j} = m \dot{x}_i \delta_{ij} + q A_i \delta_{ij} = m \dot{x}_j + q A_j,$$

co możemy zapisać wektorowo

$$\vec{p} = m \vec{v} + q \vec{A}.$$

Oprócz części mechanicznej, mamy tu składową związaną z potencjałem wektorowym pola elektromagnetycznego.

Funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}_i - q (\varphi - A_i \dot{x}_i).$$

Obliczmy pęd uogólniony sprzężony do x_j , $j = 1, 2, 3$,

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \frac{1}{2} m 2 \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_j} + q A_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_j} = m \dot{x}_i \delta_{ij} + q A_i \delta_{ij} = m \dot{x}_j + q A_j,$$

co możemy zapisać wektorowo

$$\vec{p} = m \vec{v} + q \vec{A}.$$

Oprócz części mechanicznej, mamy tu składową związaną z potencjałem wektorowym pola elektromagnetycznego.

Współrzędne cykliczne

Jeśli funkcja Lagrange'a zależy tylko od prędkości $\dot{q}_j$, a nie zależy od odpowiedniej współrzędnej uogólnionej q_j , to taką współrzędną nazywamy **współrzedną cykliczną**.

Dla współrzędnej cyklicznej z definicji zachodzi

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

Współrzędne cykliczne

Jeśli funkcja Lagrange'a zależy tylko od prędkości $\dot{q}_j$, a nie zależy od odpowiedniej współrzędnej uogólnionej q_j , to taką współrzędną nazywamy **współrzędną cykliczną**.

Dla współrzędnej cyklicznej z definicji zachodzi

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

a po skorzystaniu z odpowiedniego równania Lagrange'a II rodzaju otrzymamy

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_j}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{const.}$$

Współrzędne cykliczne

Jeśli funkcja Lagrange'a zależy tylko od prędkości $\dot{q}_j$, a nie zależy od odpowiedniej współrzędnej uogólnionej q_j , to taką współrzędną nazywamy **współrzędną cykliczną**.

Dla współrzędnej cyklicznej z definicji zachodzi

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

a po skorzystaniu z odpowiedniego równania Lagrange'a II rodzaju otrzymamy

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_j}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{const.}$$

Widzimy, że pęd uogólniony sprzężony do współrzędnej cyklicznej jest zachowany.

Postarajmy się powiązać ten fakt z pewną symetrią układu fizycznego opisywanego funkcją Lagrange'a L .

Widzimy, że pęd uogólniony sprzężony do współrzędnej cyklicznej jest zachowany.

Postarajmy się powiązać ten fakt z pewną symetrią układu fizycznego opisywanego funkcją Lagrange'a L .

Jeśli funkcja Lagrange'a nie zależy od współrzędnej uogólnionej q_j , to możemy dokonać dowolnego przesunięcia (translacji) tej współrzędnej o stałą wielkość a_j

$$q_j \rightarrow q'_j = q_j + a_j \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_j = \dot{q}'_j$$

Widzimy, że pęd uogólniony sprzężony do współrzędnej cyklicznej jest zachowany.

Postaramy się powiązać ten fakt z pewną symetrią układu fizycznego opisywanego funkcją Lagrange'a L .

Jeśli funkcja Lagrange'a nie zależy od współrzędnej uogólnionej q_j , to możemy dokonać dowolnego przesunięcia (translacji) tej współrzędnej o stałą wielkość a_j

$$q_j \rightarrow q'_j = q_j + a_j \Rightarrow \dot{q}_j = \dot{q}'_j$$

i funkcja Lagrange'a po transformacji będzie miała dokładnie taką samą postać, jak przed transformacją.

Widzimy, że pęd uogólniony sprzężony do współrzędnej cyklicznej jest zachowany.

Postaramy się powiązać ten fakt z pewną symetrią układu fizycznego opisywanego funkcją Lagrange'a L .

Jeśli funkcja Lagrange'a nie zależy od współrzędnej uogólnionej q_j , to możemy dokonać dowolnego przesunięcia (translacji) tej współrzędnej o stałą wielkość a_j

$$q_j \rightarrow q'_j = q_j + a_j \Rightarrow \dot{q}_j = \dot{q}'_j$$

i funkcja Lagrange'a po transformacji będzie miała dokładnie taką samą postać, jak przed transformacją.

Mówimy, że układ ma symetrię translacyjną ze względu na współrzędną q_j .

Widzimy, że **pęd uogólniony sprzężony do współrzędnej cyklicznej jest zachowany.**

Postaramy się powiązać ten fakt z pewną symetrią układu fizycznego opisywanego funkcją Lagrange'a L .

Jeśli funkcja Lagrange'a nie zależy od współrzędnej uogólnionej q_j , to możemy dokonać dowolnego przesunięcia (translacji) tej współrzędnej o stałą wielkość a_j

$$q_j \rightarrow q'_j = q_j + a_j \Rightarrow \dot{q}_j = \dot{q}'_j$$

i funkcja Lagrange'a po transformacji będzie miała dokładnie taką samą postać, jak przed transformacją.

Mówimy, że **układ ma symetrię translacyjną ze względu na współrzędną q_j .**

Widzimy, że prawo zachowania pędu w pewnym kierunku możemy dość prosto powiązać z symetrią układu fizycznego ze względu na translacje w tym samym kierunku.

Podobnie, niezmienniczość obrotowa układu fizycznego względem pewnej osi symetrii,

Widzimy, że prawo zachowania pędu w pewnym kierunku możemy dość prosto powiązać z symetrią układu fizycznego ze względu na translacje w tym samym kierunku.

Podobnie, niezmienniczość obrotowa układu fizycznego względem pewnej osi symetrii, która wiąże się z niezmienniczością względem przesunięć kąta obrotu,

Widzimy, że prawo zachowania pędu w pewnym kierunku możemy dość prosto powiązać z symetrią układu fizycznego ze względu na translacje w tym samym kierunku.

Podobnie, niezmienniczość obrotowa układu fizycznego względem pewnej osi symetrii, która wiąże się z niezmienniczością względem przesunięć kąta obrotu, prowadzi do zachowania odpowiedniej składowej momentu pędu.

Widzimy, że prawo zachowania pędu w pewnym kierunku możemy dość prosto powiązać z symetrią układu fizycznego ze względu na translacje w tym samym kierunku.

Podobnie, niezmienniczość obrotowa układu fizycznego względem pewnej osi symetrii, która wiąże się z niezmienniczością względem przesunięć kąta obrotu, prowadzi do zachowania odpowiedniej składowej momentu pędu.

Ilustruje to następujący, rozpatrywany już wcześniej, przykład.

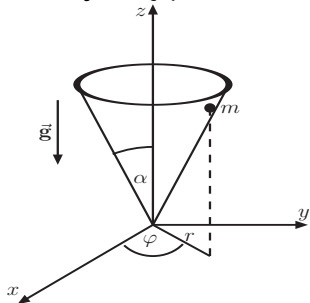
Widzimy, że prawo zachowania pędu w pewnym kierunku możemy dość prosto powiązać z symetrią układu fizycznego ze względu na translacje w tym samym kierunku.

Podobnie, niezmienniczość obrotowa układu fizycznego względem pewnej osi symetrii, która wiąże się z niezmienniczością względem przesunięć kąta obrotu, prowadzi do zachowania odpowiedniej składowej momentu pędu.

Ilustruje to następujący, rozpatrywany już wcześniej, przykład.

Współrzędne cykliczne

Przykład 4: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .

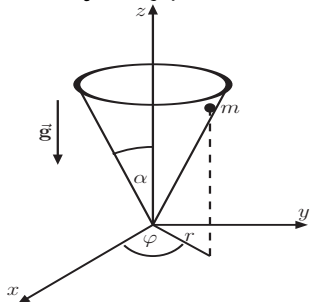


Funkcja Lagrange'a we współrzędnych cylindrycznych ma postać

$$L = \frac{1}{2} m \left[(1 + \operatorname{ctg} \alpha) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

Współrzędne cykliczne

Przykład 4: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .

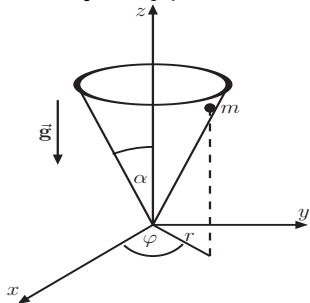


Funkcja Lagrange'a we współrzędnych cylindrycznych ma postać

$$L = \frac{1}{2} m \left[(1 + \operatorname{ctg} \alpha) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

Widzimy, że φ jest współzrędną cykliczną.

Przykład 4: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .



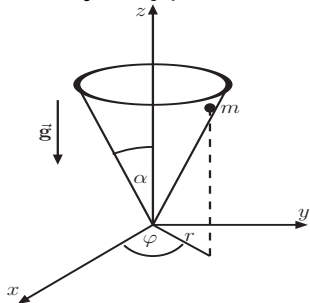
Funkcja Lagrange'a we współrzędnych cylindrycznych ma postać

$$L = \frac{1}{2} m \left[(1 + \operatorname{ctg} \alpha) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

Widzimy, że φ jest współrzędną cykliczną. W takim razie

$$p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{const}, \quad \text{ale} \quad p_{\varphi} = r \cdot m \underbrace{r \dot{\varphi}}_{v_{\varphi}} = L_z = \text{const}.$$

Przykład 4: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .



Funkcja Lagrange'a we współrzędnych cylindrycznych ma postać

$$L = \frac{1}{2} m \left[(1 + \operatorname{ctg} \alpha) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

Widzimy, że φ jest współzrędną cykliczną. W takim razie

$$p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{const}, \quad \text{ale} \quad p_{\varphi} = r \cdot m \underbrace{r \dot{\varphi}}_{v_{\varphi}} = L_z = \text{const}.$$

Dzięki odpowiedniemu wyborowi układu współrzędnych, niezmienniczość obrotowa rozpatrywanego układu fizycznego względem osi Oz została sprowadzona do niezmienniczości ze względu na przesunięcia kąta φ , a równanie Lagrange'a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

które jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu,

Dzięki odpowiedniemu wyborowi układu współrzędnych, niezmienniczość obrotowa rozpatrywanego układu fizycznego względem osi Oz została sprowadzona do niezmienniczości ze względu na przesunięcia kąta φ , a równanie Lagrange'a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

które jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, zostało sprowadzone do równania różniczkowego pierwszego rzędu

$$p_{\varphi} = mr^2 \dot{\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi}}{mr^2}.$$

Dzięki odpowiedniemu wyborowi układu współrzędnych, niezmienniczość obrotowa rozpatrywanego układu fizycznego względem osi Oz została sprowadzona do niezmienniczości ze względu na przesunięcia kąta φ , a równanie Lagrange'a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

które jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, zostało sprowadzone do równania różniczkowego pierwszego rzędu

$$p_{\varphi} = mr^2 \dot{\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi}}{mr^2}.$$

Tym samym liczba całkowań niezbędnych do rozwiązania równania ruchu została zredukowana o jeden.

Dzięki odpowiedniemu wyborowi układu współrzędnych, niezmienniczość obrotowa rozpatrywanego układu fizycznego względem osi Oz została sprowadzona do niezmienniczości ze względu na przesunięcia kąta φ , a równanie Lagrange'a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

które jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, zostało sprowadzone do równania różniczkowego pierwszego rzędu

$$p_{\varphi} = mr^2 \dot{\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi}}{mr^2}.$$

Tym samym liczba całkowań niezbędnych do rozwiązania równania ruchu została zredukowana o jeden.

Twierdzenie Noether

Związek pomiędzy prawami zachowania a symetriami układu fizycznego ma charakter uniwersalny, czego dowiodła Emmy Noether (1882–1935).

Zanim sformułujemy twierdzenie Noether przeanalizujemy sytuację, której ono dotyczy.

Twierdzenie Noether

Związek pomiędzy prawami zachowania a symetriami układu fizycznego ma charakter uniwersalny, czego dowiodła Emmy Noether (1882–1935).

Zanim sformułujemy twierdzenie Noether przeanalizujemy sytuację, której ono dotyczy.

Rozważmy transformację współrzędnych układu o n stopniach swobody

$$q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t, \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

Twierdzenie Noether

Związek pomiędzy prawami zachowania a symetriami układu fizycznego ma charakter uniwersalny, czego dowiodła Emmy Noether (1882–1935).

Zanim sformułujemy twierdzenie Noether przeanalizujemy sytuację, której ono dotyczy.

Rozważmy transformację współrzędnych układu o n stopniach swobody

$$q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t, \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

która jest różniczkowalna w sposób ciągły względem ciągłego parametru α i odwracalna

$$q'_i \rightarrow q_i = q_i(q'_1, q'_2, \dots, q'_n, t, \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Twierdzenie Noether

Związek pomiędzy prawami zachowania a symetriami układu fizycznego ma charakter uniwersalny, czego dowiodła Emmy Noether (1882–1935).

Zanim sformułujemy twierdzenie Noether przeanalizujemy sytuację, której ono dotyczy.

Rozważmy transformację współrzędnych układu o n stopniach swobody

$$q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t, \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

która jest różniczkowalna w sposób ciągły względem ciągłego parametru α i odwracalna

$$q'_i \rightarrow q_i = q_i(q'_1, q'_2, \dots, q'_n, t, \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Twierdzenie Noether

Ponadto, dla wygody zakładamy, że

$$q'_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t, \alpha) \Big|_{\alpha=0} = q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

co oznacza, że rozpatrywana transformacja ewoluuje w sposób ciągły wraz z parametrem α od transformacji identycznościowej, która odpowiada $\alpha = 0$.

Twierdzenie Noether

Ponadto, dla wygody zakładamy, że

$$q'_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t, \alpha) \Big|_{\alpha=0} = q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

co oznacza, że rozpatrywana transformacja ewoluuje w sposób ciągły wraz z parametrem α od transformacji identycznościowej, która odpowiada $\alpha = 0$.

Przykładem takiej transformacji jest

- translacja punktu materialnego o stały wektor $\vec{a}$:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \alpha \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}' - \alpha \vec{a},$$

Twierdzenie Noether

Ponadto, dla wygody zakładamy, że

$$q'_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t, \alpha) \Big|_{\alpha=0} = q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

co oznacza, że rozpatrywana transformacja ewoluuje w sposób ciągły wraz z parametrem α od transformacji identycznościowej, która odpowiada $\alpha = 0$.

Przykładem takiej transformacji jest

- translacja punktu materialnego o stały wektor $\vec{a}$:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \alpha \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}' - \alpha \vec{a},$$

przy czym

$$\vec{r}' \Big|_{\alpha=0} = \vec{r},$$

Twierdzenie Noether

Ponadto, dla wygody zakładamy, że

$$q'_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t, \alpha) \Big|_{\alpha=0} = q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

co oznacza, że rozpatrywana transformacja ewoluuje w sposób ciągły wraz z parametrem α od transformacji identycznościowej, która odpowiada $\alpha = 0$.

Przykładem takiej transformacji jest

- translacja punktu materialnego o stały wektor $\vec{a}$:

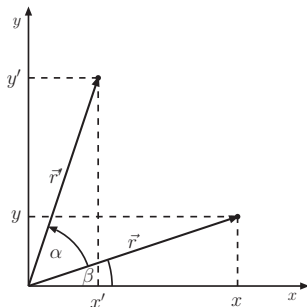
$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \alpha \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}' - \alpha \vec{a},$$

przy czym

$$\vec{r}' \Big|_{\alpha=0} = \vec{r},$$

Twierdzenie Noether

- obrót punktu o kąt α względem osi Oz układu kartezjańskiego:



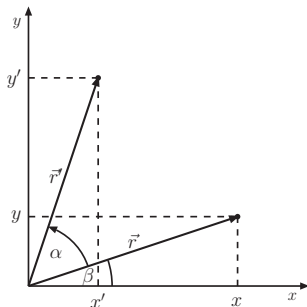
$$\begin{cases} x' = r \cos(\beta + \alpha) \\ y' = r \sin(\beta + \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \beta \\ y = r \sin \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r \cos \beta \cos \alpha - r \sin \beta \sin \alpha = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = r \sin \beta \cos \alpha + r \cos \beta \sin \alpha = x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z' = z \end{cases}$$

Twierdzenie Noether

- obrót punktu o kąt α względem osi Oz układu kartezjańskiego:



$$\begin{cases} x' = r \cos(\beta + \alpha) \\ y' = r \sin(\beta + \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \beta \\ y = r \sin \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r \cos \beta \cos \alpha - r \sin \beta \sin \alpha = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = r \sin \beta \cos \alpha + r \cos \beta \sin \alpha = x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z' = z \end{cases}$$

Obrót odwrotny otrzymamy podstawiając $\alpha \rightarrow -\alpha$

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\ y = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \\ z = z' \end{cases}$$

Obrót odwrotny otrzymamy podstawiając $\alpha \rightarrow -\alpha$

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\ y = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \\ z = z' \end{cases}$$

a dla $\alpha = 0$ otrzymamy transformację identycznościową.

Twierdzenie Noether

Obrót odwrotny otrzymamy podstawiając $\alpha \rightarrow -\alpha$

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\ y = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \\ z = z' \end{cases}$$

a dla $\alpha = 0$ otrzymamy transformację identycznościową.

Zapiszmy powyższe równania w formie macierzowej:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{r}' = A \vec{r},$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{r} = A^T \vec{r}',$$

gdzie A^T oznacza macierz transponowaną do macierzy A .

Twierdzenie Noether

Obrót odwrotny otrzymamy podstawiając $\alpha \rightarrow -\alpha$

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\ y = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \\ z = z' \end{cases}$$

a dla $\alpha = 0$ otrzymamy transformację identycznościową.

Zapiszmy powyższe równania w formie macierzowej:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{r}' = A \vec{r},$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{r} = A^T \vec{r}',$$

gdzie A^T oznacza macierz transponowaną do macierzy A .

Twierdzenie Noether

Funkcja Lagrange'a w nowych współrzędnych ma postać

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q(q', t, \alpha), \dot{q}(q', t, \alpha), t) \equiv L'(q', \dot{q}', t, \alpha).$$

Obliczmy pochodną

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right],$$

Twierdzenie Noether

Funkcja Lagrange'a w nowych współrzędnych ma postać

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q(q', t, \alpha), \dot{q}(q', t, \alpha), t) \equiv L'(q', \dot{q}', t, \alpha).$$

Obliczmy pochodną

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right],$$

gdzie skorzystaliśmy z równań Lagrange'a II rodzaju i zamieniliśmy kolejność różniczkowania

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}.$$

Twierdzenie Noether

Funkcja Lagrange'a w nowych współrzędnych ma postać

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q(q', t, \alpha), \dot{q}(q', t, \alpha), t) \equiv L'(q', \dot{q}', t, \alpha).$$

Obliczmy pochodną

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right],$$

gdzie skorzystaliśmy z równań Lagrange'a II rodzaju i zamieniliśmy kolejność różniczkowania

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}.$$

Wyrażenie pod sumą po prawej stronie wzoru na $\frac{\partial L'}{\partial \alpha}$ jest pochodną iloczynu

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right).$$

Twierdzenie Noether

Funkcja Lagrange'a w nowych współrzędnych ma postać

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q(q', t, \alpha), \dot{q}(q', t, \alpha), t) \equiv L'(q', \dot{q}', t, \alpha).$$

Obliczmy pochodną

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right],$$

gdzie skorzystaliśmy z równań Lagrange'a II rodzaju i zamieniliśmy kolejność różniczkowania

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}.$$

Wyrażenie pod sumą po prawej stronie wzoru na $\frac{\partial L'}{\partial \alpha}$ jest pochodną iloczynu

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right).$$

Twierdzenie Noether

Układ fizyczny ma symetrię ze względu na rozpatrywaną transformację, jeśli nowa funkcja Lagrange'a $L'(q', \dot{q}', t, \alpha)$ jest równa wyjściowej funkcji $L(q, \dot{q}, t)$ wyrażonej przez nowe współrzędne

$$L(q, \dot{q}, t) = L'(q', \dot{q}', t, \alpha) = L(q', \dot{q}', t).$$

Biorąc pod uwagę niezmienniczość cechowania równań Lagrange'a II rodzaju, warunek symetrii będzie również spełniony jeśli po prawej stronie tej równości dodamy zupełną pochodną czasową dowolnej różniczkowalnej funkcji współrzędnych, czasu i parametru α

$$L'(q', \dot{q}', t, \alpha) = L(q', \dot{q}', t) + \frac{d}{dt}F(q', t, \alpha).$$

Układ fizyczny ma symetrię ze względu na rozpatrywaną transformację, jeśli nowa funkcja Lagrange'a $L'(q', \dot{q}', t, \alpha)$ jest równa wyjściowej funkcji $L(q, \dot{q}, t)$ wyrażonej przez nowe współrzędne

$$L(q, \dot{q}, t) = L'(q', \dot{q}', t, \alpha) = L(q', \dot{q}', t).$$

Biorąc pod uwagę **niezmienniczość cechowania równań Lagrange'a II rodzaju**, warunek symetrii będzie również spełniony jeśli po prawej stronie tej równości dodamy zupełną pochodną czasową dowolnej różniczkowalnej funkcji współrzędnych, czasu i parametru α

$$L'(q', \dot{q}', t, \alpha) = L(q', \dot{q}', t) + \frac{d}{dt}F(q', t, \alpha).$$

Różniczkując powyższy związek po α otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} L'(q', \dot{q}', t, \alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q', \dot{q}', t) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} F(q', t, \alpha) \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} F(q', t, \alpha),\end{aligned}$$

gdyż ze względu na symetrię

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L(q', \dot{q}', t) = \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q, \dot{q}, t) = 0.$$

Różniczkując powyższy związek po α otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} L' (q', \dot{q}', t, \alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} L (q', \dot{q}', t) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} F (q', t, \alpha) \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} F (q', t, \alpha),\end{aligned}$$

gdyż ze względu na symetrię

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L (q', \dot{q}', t) = \frac{\partial}{\partial \alpha} L (q, \dot{q}, t) = 0.$$

Zamieniając kolejność różniczkowania otrzymamy następujący warunek symetrii

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L' (q', \dot{q}', t, \alpha) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \alpha} F (q', t, \alpha).$$

Różniczkując powyższy związek po α otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} L'(q', \dot{q}', t, \alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q', \dot{q}', t) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} F(q', t, \alpha) \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} F(q', t, \alpha),\end{aligned}$$

gdyż ze względu na symetrię

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L(q', \dot{q}', t) = \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q, \dot{q}, t) = 0.$$

Zamieniając kolejność różniczkowania otrzymamy następujący warunek symetrii

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L'(q', \dot{q}', t, \alpha) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \alpha} F(q', t, \alpha).$$

Wstawmy teraz do warunku symetrii wyprowadzony uprzednio wzór

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right),$$

wówczas otrzymamy równość

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \alpha}.$$

Wstawmy teraz do warunku symetrii wyprowadzony uprzednio wzór

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right),$$

wówczas otrzymamy równość

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \alpha}.$$

Przenieśmy wszystko na lewą stronę równości i wstawmy $\alpha = 0$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) = 0,$$

Wstawmy teraz do warunku symetrii wyprowadzony uprzednio wzór

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right),$$

wówczas otrzymamy równość

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \alpha}.$$

Przenieśmy wszystko na lewą stronę równości i wstawmy $\alpha = 0$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) = 0,$$

a zatem wyrażenie w nawiasie, które oznaczmy J musi być wielkością stałą

$$J \equiv \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \text{const.}$$

W ten sposób udowodniliśmy **twierdzenie Noether**, które brzmi następująco.

a zatem wyrażenie w nawiasie, które oznaczmy J musi być wielkością stałą

$$J \equiv \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \text{const.}$$

W ten sposób udowodniliśmy **twierdzenie Noether**, które brzmi następująco.

Jeśli funkcja Lagrange'a jest niezmiennicza względem różniczkowalnej w sposób ciągły transformacji współrzędnych

$$q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t, \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

przy czym $q'_i|_{\alpha=0} = q_i$ i są spełnione równania ruchu, to wielkość J określona powyżej jest stałą ruchu.

a zatem wyrażenie w nawiasie, które oznaczmy J musi być wielkością stałą

$$J \equiv \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \text{const.}$$

W ten sposób udowodniliśmy **twierdzenie Noether**, które brzmi następująco.

Jeśli funkcja Lagrange'a jest niezmiennicza względem różniczkowalnej w sposób ciągły trasformacji współrzędnych

$$q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t, \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

przy czym $q'_i|_{\alpha=0} = q_i$ i są spełnione równania ruchu, to wielkość J określona powyżej jest stałą ruchu.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Noether nie jest prawdziwe, tzn., że istnieją wielkości zachowane, którym nie odpowiadają ciągłe przekształcenia symetrii. Na przykład wektor Lenza

$$\vec{\Lambda} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m\alpha} - \frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem położenia ciała względem centrum potencjału,

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Noether nie jest prawdziwe, tzn., że istnieją wielkości zachowane, którym nie odpowiadają ciągłe przekształcenia symetrii. Na przykład wektor Lenza

$$\vec{\Lambda} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m\alpha} - \frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem położenia ciała względem centrum potencjału, $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ jego pędem,

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Noether nie jest prawdziwe, tzn., że istnieją wielkości zachowane, którym nie odpowiadają ciągłe przekształcenia symetrii. Na przykład wektor Lenza

$$\vec{\Lambda} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m\alpha} - \frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem położenia ciała względem centrum potencjału, $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ jego pędem, a $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ momentem pędu,

Twierdzenie Noether

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Noether nie jest prawdziwe, tzn., że istnieją wielkości zachowane, którym nie odpowiadają ciągłe przekształcenia symetrii. Na przykład wektor Lenza

$$\vec{\Lambda} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m\alpha} - \frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem położenia ciała względem centrum potencjału, $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ jego pędem, a $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ momentem pędu, jest wielkością zachowaną w potencjale Keplera $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, jednak nie odpowiada mu żadne ciągłe przekształcenie symetrii, o których mowa w udowodnionej przez nas wersji twierdzenia Noether.

Uwaga. Wektor Lenza można jednak powiązać z tzw. *symetrią dynamiczną* ze względu na obroty w przestrzeni rozszerzonej o dodatkowy wymiar $x_4 = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2m|E|}}$. Więcej informacji na ten temat można znaleźć w rozdziale VII §4 podręcznika G. Białkowskiego.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Noether nie jest prawdziwe, tzn., że istnieją wielkości zachowane, którym nie odpowiadają ciągłe przekształcenia symetrii. Na przykład wektor Lenza

$$\vec{\Lambda} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m\alpha} - \frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem położenia ciała względem centrum potencjału, $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ jego pędem, a $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ momentem pędu, jest wielkością zachowaną w potencjale Keplera $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, jednak nie odpowiada mu żadne ciągłe przekształcenie symetrii, o których mowa w udowodnionej przez nas wersji twierdzenia Noether.

Uwaga. Wektor Lenza można jednak powiązać z tzw. *symetrią dynamiczną* ze względu na obroty w przestrzeni rozszerzonej o dodatkowy wymiar $x_4 = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2m|E|}}$. Więcej informacji na ten temat można znaleźć w rozdziale VII §4 podręcznika G. Białkowskiego.

Zadanie. Udowodnić, że $\vec{\Lambda} = \text{const.}$

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Noether nie jest prawdziwe, tzn., że istnieją wielkości zachowane, którym nie odpowiadają ciągłe przekształcenia symetrii. Na przykład wektor Lenza

$$\vec{\Lambda} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m\alpha} - \frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem położenia ciała względem centrum potencjału, $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ jego pędem, a $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ momentem pędu, jest wielkością zachowaną w potencjale Keplera $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, jednak nie odpowiada mu żadne ciągłe przekształcenie symetrii, o których mowa w udowodnionej przez nas wersji twierdzenia Noether.

Uwaga. Wektor Lenza można jednak powiązać z tzw. *symetrią dynamiczną* ze względu na obroty w przestrzeni rozszerzonej o dodatkowy wymiar $x_4 = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2m|E|}}$. Więcej informacji na ten temat można znaleźć w rozdziale VII §4 podręcznika G. Białkowskiego.

Zadanie. Udowodnić, że $\vec{\Lambda} = \text{const.}$

Zasada zachowania energii

Twierdzenie Noether w wersji przez nas udowodnionej nie obejmuje transformacji czasu. Dlatego rozpatrzmy teraz oddzielnie przypadek symetrii względem translacji czasu

$$t \rightarrow t' = t + a, \quad a = \text{const.}$$

Funkcja Lagrange'a będzie symetryczna względem takich transformacji jeśli

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t + a) \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Zasada zachowania energii

Twierdzenie Noether w wersji przez nas udowodnionej nie obejmuje transformacji czasu. Dlatego rozpatrzmy teraz oddzielnie przypadek symetrii względem translacji czasu

$$t \rightarrow t' = t + a, \quad a = \text{const.}$$

Funkcja Lagrange'a będzie symetryczna względem takich transformacji jeśli

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t + a) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Obliczmy zupełną pochodną czasową funkcji L

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right).$$

Zasada zachowania energii

Twierdzenie Noether w wersji przez nas udowodnionej nie obejmuje transformacji czasu. Dlatego rozpatrzemy teraz oddzielnie przypadek symetrii względem translacji czasu

$$t \rightarrow t' = t + a, \quad a = \text{const.}$$

Funkcja Lagrange'a będzie symetryczna względem takich transformacji jeśli

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t + a) \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Obliczmy zupełną pochodną czasową funkcji L

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right).$$

Zasada zachowania energii

Skorzystajmy z równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

Wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j. \end{aligned}$$

Zasada zachowania energii

Skorzystajmy z równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

Wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j. \end{aligned}$$

Skąd wynika, że

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right) = 0 \Leftrightarrow h \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \text{const.}$$

Zasada zachowania energii

Skorzystajmy z równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

Wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j. \end{aligned}$$

Skąd wynika, że

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \text{const.}$$

Zasada zachowania energii

Zachowaną wielkość h nazywamy funkcją energii.

Dla układów zachowawczych istnieje potencjał, niezależny od prędkości, więc

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}.$$

Wtedy

$$h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L$$

Zasada zachowania energii

Zachowaną wielkość h nazywamy funkcją energii.

Dla układów zachowawczych istnieje potencjał, niezależny od prędkości, więc

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}.$$

Wtedy

$$h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L$$

Dla więzów skleronomicznych i jeśli nie wykonujemy transformacji do poruszających się układów odniesienia, związki pomiędzy wektorami położenia punktów, $i = 1, 2, \dots, N$, a współrzędnymi uogólnionymi mają postać

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

Zasada zachowania energii

Zachowaną wielkość h nazywamy funkcją energii.

Dla układów zachowawczych istnieje potencjał, niezależny od prędkości, więc

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}.$$

Wtedy

$$h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L$$

Dla więzów skleronomicznych i jeśli nie wykonujemy transformacji do poruszających się układów odniesienia, związki pomiędzy wektorami położenia punktów, $i = 1, 2, \dots, N$, a współrzędnymi uogólnionymi mają postać

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

Zasada zachowania energii

i energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \sum_{l=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l \\ &= \sum_{j,l=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right)}_{a_{jl}} \dot{q}_j \dot{q}_l = \sum_{j,l=1}^n a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l, \end{aligned}$$

gdzie współczynniki a_{jl} nie zależą od prędkości uogólnionych. Ponadto zauważmy, że $a_{jl} = a_{lj}$. Obliczmy

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{k,l=1}^n a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l \right) \dot{q}_j = \sum_{j,k,l=1}^n a_{kl} \frac{\partial (\dot{q}_k \dot{q}_l)}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j,$$

Zasada zachowania energii

i energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \sum_{l=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l \\ &= \sum_{j,l=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right)}_{a_{jl}} \dot{q}_j \dot{q}_l = \sum_{j,l=1}^n a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l, \end{aligned}$$

gdzie współczynniki a_{jl} nie zależą od prędkości uogólnionych. Ponadto zauważmy, że $a_{jl} = a_{lj}$. Obliczmy

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{k,l=1}^n a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l \right) \dot{q}_j = \sum_{j,k,l=1}^n a_{kl} \frac{\partial (\dot{q}_k \dot{q}_l)}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j,$$

Zasada zachowania energii

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j &= \sum_{j,k,l=1}^n a_{kl} \left(\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_l + \dot{q}_k \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j \\ &= \sum_{j,k,l=1}^n a_{kl} (\delta_{kj} \dot{q}_l + \dot{q}_k \delta_{lj}) \dot{q}_j \\ &= \sum_{j,l=1}^n a_{jl} \dot{q}_l \dot{q}_j + \sum_{j,k=1}^n a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j.\end{aligned}$$

Zamieńmy wskaźnik sumacyjny k na l i skorzystajmy z symetrii współczynników w ostatniej sumie, $a_{lj} = a_{jl}$, wtedy widzimy, że

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j,l=1}^n a_{jl} \dot{q}_l \dot{q}_j + \sum_{j,k=1}^n a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j = 2T.$$

W takim razie wielkość zachowana h jest równa

$$h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = 2T - (T - V) = T + V = E.$$

Zasada zachowania energii

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j &= \sum_{j,k,l=1}^n a_{kl} \left(\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_l + \dot{q}_k \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j \\ &= \sum_{j,k,l=1}^n a_{kl} (\delta_{kj} \dot{q}_l + \dot{q}_k \delta_{lj}) \dot{q}_j \\ &= \sum_{j,l=1}^n a_{jl} \dot{q}_l \dot{q}_j + \sum_{j,k=1}^n a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j.\end{aligned}$$

Zamieńmy wskaźnik sumacyjny k na l i skorzystajmy z symetrii współczynników w ostatniej sumie, $a_{lj} = a_{jl}$, wtedy widzimy, że

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j,l=1}^n a_{jl} \dot{q}_l \dot{q}_j + \sum_{j,k=1}^n a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j = 2T.$$

W takim razie wielkość zachowana h jest równa

$$h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = 2T - (T - V) = T + V = E.$$

Zasada zachowania energii

W ten sposób dowiedliśmy, że

- funkcja energii h jest wielkością zachowaną jeśli funkcja Lagrange'a nie zależy jawnie od czasu,
- dla układów podlegających siłom zachowawczym i więzom skleronomicznym funkcja energii h jest równa całkowitej energii układu

$$h = E = T + V = \text{const.}$$

W przypadku więzów reonomicznych, które mogą wykonywać pracę nad układem, całkowita energia nie musi być zachowana.

Zasada zachowania energii

W ten sposób dowiedliśmy, że

- funkcja energii h jest wielkością zachowaną jeśli funkcja Lagrange'a nie zależy jawnie od czasu,
- dla układów podlegających siłom zachowawczym i więzom skleronomicznym funkcja energii h jest równa całkowitej energii układu

$$h = E = T + V = \text{const.}$$

W przypadku więzów reonomicznych, które mogą wykonywać pracę nad układem, całkowita energia nie musi być zachowana.