

Układy fizyczne z tarciem; oscylator harmoniczny

Wykład 5

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

Do tej pory zaniedbywaliśmy siły tarcia, które towarzyszą ruchowi ciał, a w życiu codziennym mamy z nimi do czynienia niemal zawsze.

Zaniedbanie tarcia nie zawsze jest uzasadnione, dlatego wprowadzimy formalizm, który pozwala je uwzględnić.

Do tej pory zaniedbywaliśmy siły tarcia, które towarzyszą ruchowi ciał, a w życiu codziennym mamy z nimi do czynienia niemal zawsze.

Zaniedbanie tarcia nie zawsze jest uzasadnione, dlatego wprowadzimy formalizm, który pozwala je uwzględnić.

Można wyróżnić dwa typy tarcia

- opór ruchu w gazach i cieczach,
- tarcie ciał stałych.

Do tej pory zaniedbywaliśmy siły tarcia, które towarzyszą ruchowi ciał, a w życiu codziennym mamy z nimi do czynienia niemal zawsze.

Zaniedbanie tarcia nie zawsze jest uzasadnione, dlatego wprowadzimy formalizm, który pozwala je uwzględnić.

Można wyróżnić dwa typy tarcia

- opór ruchu w gazach i cieczach,
- tarcie ciał stałych.

W przypadku ruchu ciała w gazach i cieczach wartość siły oporu tarcia $T = |\vec{T}|$ wyraża się wzorem

$$T = c_{\text{op}} A \frac{\rho}{2} v^2,$$

W przypadku ruchu ciała w gazach i cieczach wartość siły oporu tarcia $T = |\vec{T}|$ wyraża się wzorem

$$T = c_{\text{op}} A \frac{\rho}{2} v^2,$$

gdzie

- v – wartość prędkości ciała względem ośrodka,
- ρ – gęstość ośrodka,
- A – pole powierzchni prostopadłej do kierunku ruchu,
- c_{op} – bezwymiarowy współczynnik oporu; zależy m.in. od tzw. liczby Reynoldsa, która charakteryzuje przepływ nieściśliwego płynu lepkiego.

W przypadku ruchu ciała w gazach i cieczach wartość siły oporu tarcia $T = |\vec{T}|$ wyraża się wzorem

$$T = c_{\text{op}} A \frac{\rho}{2} v^2,$$

gdzie

- v – wartość prędkości ciała względem ośrodka,
- ρ – gęstość ośrodka,
- A – pole powierzchni prostopadłej do kierunku ruchu,
- c_{op} – bezwymiarowy współczynnik oporu; zależy m.in. od tzw. liczby Reynoldsa, która charakteryzuje przepływ nieściśliwego płynu lepkiego.

Ruch w gazach i cieczach

Siła tarcia w gazach i cieczach

$$T = c_{\text{op}} A \frac{\rho}{2} v^2.$$

Np. przy budowie samochodów decydującą rolę odgrywa iloczyn

$$c_{\text{op}} A.$$

Dla małych prędkości

$$c_{\text{op}} \sim \frac{\text{const}}{v} \Rightarrow T \sim v.$$

Ruch w gazach i cieczach

Siła tarcia w gazach i cieczach

$$T = c_{\text{op}} A \frac{\rho}{2} v^2.$$

Np. przy budowie samochodów decydującą rolę odgrywa iloczyn

$$c_{\text{op}} A.$$

Dla małych prędkości

$$c_{\text{op}} \sim \frac{\text{const}}{v} \quad \Rightarrow \quad T \sim v.$$

Dla dużych prędkości

$$c_{\text{op}} \sim \text{const} \quad \Rightarrow \quad T \sim v^2.$$

Ruch w gazach i cieczach

Siła tarcia w gazach i cieczach

$$T = c_{\text{op}} A \frac{\rho}{2} v^2.$$

Np. przy budowie samochodów decydującą rolę odgrywa iloczyn

$$c_{\text{op}} A.$$

Dla małych prędkości

$$c_{\text{op}} \sim \frac{\text{const}}{v} \quad \Rightarrow \quad T \sim v.$$

Dla dużych prędkości

$$c_{\text{op}} \sim \text{const} \quad \Rightarrow \quad T \sim v^2.$$

Tarcie ciał stałych

Siłę tarcia ciał stałych, czyli tzw. tarcia coulombowskiego, możemy wyrazić wzorem

$$\vec{T} = -f|\vec{Z}|\frac{\vec{v}}{v},$$

gdzie

- $\vec{Z}$ – siła reakcji podłoża – równa co do wartości sile nacisku ciała na podłoże,
- $\vec{v}$ – prędkość ciała,
- f – bezwymiarowy współczynnik tarcia.

Tarcie ciał stałych

Siłę tarcia ciał stałych, czyli tzw. tarcia coulombowskiego, możemy wyrazić wzorem

$$\vec{T} = -f|\vec{Z}|\frac{\vec{v}}{v},$$

gdzie

- $\vec{Z}$ – siła reakcji podłoża – równa co do wartości sile nacisku ciała na podłoże,
- $\vec{v}$ – prędkość ciała,
- f – bezwymiarowy współczynnik tarcia.

Widzimy, że siła tarcia jest skierowana przeciwnie do wektora prędkości i jest niezależna od wartości prędkości. Założenie to jest spełnione tylko w przybliżeniu.

Siłę tarcia ciał stałych, czyli tzw. tarcia coulombowskiego, możemy wyrazić wzorem

$$\vec{T} = -f|\vec{Z}|\frac{\vec{v}}{v},$$

gdzie

- $\vec{Z}$ – siła reakcji podłoża – równa co do wartości sile nacisku ciała na podłoże,
- $\vec{v}$ – prędkość ciała,
- f – bezwymiarowy współczynnik tarcia.

Widzimy, że siła tarcia jest skierowana przeciwnie do wektora prędkości i jest niezależna od wartości prędkości. Założenie to jest spełnione tylko w przybliżeniu.

Ze względu na niepotencjalny charakter sił tarcia – nie istnieje dla nich również potencjał uogólniony

Ze względu na niepotencjalny charakter sił tarcia – nie istnieje dla nich również potencjał uogólniony – równania Lagrange'a II rodzaju w formie

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

nie mogą być bezpośrednio użyte do opisu układów fizycznych z tarcieniem.

Ze względu na niepotencjalny charakter sił tarcia – nie istnieje dla nich również potencjał uogólniony – równania Lagrange'a II rodzaju w formie

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

nie mogą być bezpośrednio użyte do opisu układów fizycznych z tarciami. Możemy jednak wykorzystać równania

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

które otrzymaliśmy na pośrednim etapie wyprowadzenia równań Lagrange'a II rodzaju z równania d'Alemberta. (Patrz *Wykład 4.*)

Ze względu na niepotencjalny charakter sił tarcia – nie istnieje dla nich również potencjał uogólniony – równania Lagrange'a II rodzaju w formie

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

nie mogą być bezpośrednio użyte do opisu układów fizycznych z tarciami. Możemy jednak wykorzystać równania

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

które otrzymaliśmy na pośrednim etapie wyprowadzenia równań Lagrange'a II rodzaju z równania d'Alemberta. (Patrz *Wykład 4.*)

Siłę uogólnioną Q_j zdefiniowaną wzorem

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

przedstawmy w postaci sumy

$$Q_j = Q_j^V + R_j,$$

Siłę uogólnioną Q_j zdefiniowaną wzorem

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

przedstawmy w postaci sumy

$$Q_j = Q_j^V + R_j,$$

gdzie Q_j^V jest częścią potencjalną, dla której istnieje potencjał uogólniony $V(q, \dot{q}, t)$ taki, że

$$Q_j^V = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j},$$

Siłę uogólnioną Q_j zdefiniowaną wzorem

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

przedstawmy w postaci sumy

$$Q_j = Q_j^V + R_j,$$

gdzie Q_j^V jest częścią potencjalną, dla której istnieje potencjał uogólniony $V(q, \dot{q}, t)$ taki, że

$$Q_j^V = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j},$$

a R_j jest częścią niepotencjalną – opisującą siły tarcia $\vec{T}_i$ działające na poszczególne punkty układu, którą z definicji możemy zapisać w formie

$$R_j = \sum_{i=1}^N \vec{T}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j}.$$

Wstawmy to przedstawienie siły Q_j do naszych równań

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_j} - (Q_j^V + R_j) = 0,$$

a R_j jest częścią niepotencjalną – opisującą siły tarcia $\vec{T}_i$ działające na poszczególne punkty układu, którą z definicji możemy zapisać w formie

$$R_j = \sum_{i=1}^N \vec{T}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j}.$$

Wstawmy to przedstawienie siły Q_j do naszych równań

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_j} - (Q_j^V + R_j) = 0,$$

skąd

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_j} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_j} \right) = R_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

a R_j jest częścią niepotencjalną – opisującą siły tarcia $\vec{T}_i$ działające na poszczególne punkty układu, którą z definicji możemy zapisać w formie

$$R_j = \sum_{i=1}^N \vec{T}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j}.$$

Wstawmy to przedstawienie siły Q_j do naszych równań

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_j} - (Q_j^V + R_j) = 0,$$

skąd

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_j} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_j} \right) = R_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Równania Lagrange'a dla układów z tarciem

Przegrupujmy wyrazy

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_j} = R_j,$$

i wprowadźmy funkcję Lagrange'a $L = T - V$,

Równania Lagrange'a dla układów z tarciem

Przegrupujemy wyrazy

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_j} = R_j,$$

i wprowadźmy funkcję Lagrange'a $L = T - V$, wówczas otrzymamy równania Lagrange'a II rodzaju dla układów z tarciem

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = R_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

Równania Lagrange'a dla układów z tarciem

Przegrupujemy wyrazy

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_j} = R_j,$$

i wprowadźmy funkcję Lagrange'a $L = T - V$, wówczas otrzymamy równania Lagrange'a II rodzaju dla układów z tarciem

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = R_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie uogólnione siły tarcia R_j dane są wzorem

$$R_j = \sum_{i=1}^N \vec{T}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Równania Lagrange'a dla układów z tarciem

Przegrupujmy wyrazy

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_j} = R_j,$$

i wprowadźmy funkcję Lagrange'a $L = T - V$, wówczas otrzymamy równania Lagrange'a II rodzaju dla układów z tarciem

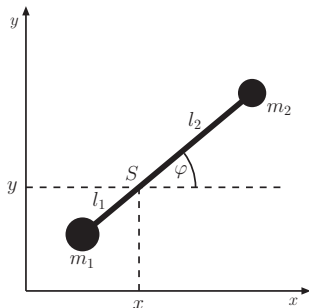
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = R_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie uogólnione siły tarcia R_j dane są wzorem

$$R_j = \sum_{i=1}^N \vec{T}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Równania Lagrange'a dla układów z tarciem

Przykład 1: Hantel o długości $l = l_1 + l_2$, gdzie l_1 i l_2 jest odpowiednio odległością masy m_1 i m_2 od środka masy S , porusza się po poziomej płaszczyźnie xOy . Współczynnik tarcia wynosi f , a pręt łączący obie masy należy potraktować jako nieważki. Znaleźć składową R_φ uogólnionej siły tarcia.

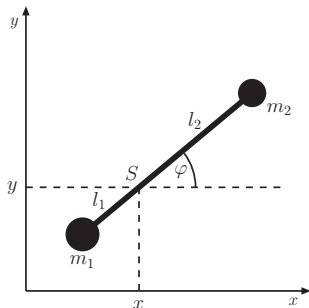


Siła tarcia działająca na poszczególne masy:

$$\vec{T}_i = -f m_i g \frac{\vec{v}_i}{v_i}, \quad i = 1, 2.$$

Równania Lagrange'a dla układów z tarciem

Przykład 1: Hantel o długości $l = l_1 + l_2$, gdzie l_1 i l_2 jest odpowiednio odległością masy m_1 i m_2 od środka masy S , porusza się po poziomej płaszczyźnie xOy . Współczynnik tarcia wynosi f , a pręt łączący obie masy należy potraktować jako nieważki. Znaleźć składową R_φ uogólnionej siły tarcia.



Siła tarcia działająca na poszczególne masy:

$$\vec{T}_i = -fm_i g \frac{\vec{v}_i}{v_i}, \quad i = 1, 2.$$

Równania Lagrange'a dla układów z tarciem

Układ ma 3 stopnie swobody: 2 punkty na płaszczyźnie i jedno równanie więzów na stałą długość hantla. Jako współrzędne niezależne wybieramy x, y i φ , zgodnie z rysunkiem.

Równania Lagrange'a dla układów z tarciem

Układ ma 3 stopnie swobody: 2 punkty na płaszczyźnie i jedno równanie więzów na stałą długość hantla. Jako współrzędne niezależne wybieramy x, y i φ , zgodnie z rysunkiem.

Wektory położenia obu mas mają postać

$$\vec{r}_1 = (x - l_1 \cos \varphi, y - l_1 \sin \varphi)$$

Równania Lagrange'a dla układów z tarciem

Układ ma 3 stopnie swobody: 2 punkty na płaszczyźnie i jedno równanie więzów na stałą długość hantla. Jako współrzędne niezależne wybieramy x, y i φ , zgodnie z rysunkiem.

Wektory położenia obu mas mają postać

$$\vec{r}_1 = (x - l_1 \cos \varphi, y - l_1 \sin \varphi) \Rightarrow$$

Równania Lagrange'a dla układów z tarciem

Układ ma 3 stopnie swobody: 2 punkty na płaszczyźnie i jedno równanie więzów na stałą długość hantla. Jako współrzędne niezależne wybieramy x, y i φ , zgodnie z rysunkiem.

Wektory położenia obu mas mają postać

$$\vec{r}_1 = (x - l_1 \cos \varphi, y - l_1 \sin \varphi) \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi} =$$

Równania Lagrange'a dla układów z tarciem

Układ ma 3 stopnie swobody: 2 punkty na płaszczyźnie i jedno równanie więzów na stałą długość hantla. Jako współrzędne niezależne wybieramy x, y i φ , zgodnie z rysunkiem.

Wektory położenia obu mas mają postać

$$\vec{r}_1 = (x - l_1 \cos \varphi, y - l_1 \sin \varphi) \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi} = (l_1 \sin \varphi, -l_1 \cos \varphi),$$

$$\vec{r}_2 = (x + l_2 \cos \varphi, y + l_2 \sin \varphi)$$

Równania Lagrange'a dla układów z tarciem

Układ ma 3 stopnie swobody: 2 punkty na płaszczyźnie i jedno równanie więzów na stałą długość hantla. Jako współrzędne niezależne wybieramy x, y i φ , zgodnie z rysunkiem.

Wektory położenia obu mas mają postać

$$\vec{r}_1 = (x - l_1 \cos \varphi, y - l_1 \sin \varphi) \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi} = (l_1 \sin \varphi, -l_1 \cos \varphi),$$

$$\vec{r}_2 = (x + l_2 \cos \varphi, y + l_2 \sin \varphi) \Rightarrow$$

Równania Lagrange'a dla układów z tarciem

Układ ma 3 stopnie swobody: 2 punkty na płaszczyźnie i jedno równanie więzów na stałą długość hantla. Jako współrzędne niezależne wybieramy x, y i φ , zgodnie z rysunkiem.

Wektory położenia obu mas mają postać

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= (x - l_1 \cos \varphi, y - l_1 \sin \varphi) \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi} = (l_1 \sin \varphi, -l_1 \cos \varphi), \\ \vec{r}_2 &= (x + l_2 \cos \varphi, y + l_2 \sin \varphi) \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \varphi} =\end{aligned}$$

Równania Lagrange'a dla układów z tarciem

Układ ma 3 stopnie swobody: 2 punkty na płaszczyźnie i jedno równanie więzów na stałą długość hantla. Jako współrzędne niezależne wybieramy x, y i φ , zgodnie z rysunkiem.

Wektory położenia obu mas mają postać

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= (x - l_1 \cos \varphi, y - l_1 \sin \varphi) \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi} = (l_1 \sin \varphi, -l_1 \cos \varphi), \\ \vec{r}_2 &= (x + l_2 \cos \varphi, y + l_2 \sin \varphi) \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \varphi} = (-l_2 \sin \varphi, l_2 \cos \varphi),\end{aligned}$$

Równania Lagrange'a dla układów z tarciem

Układ ma 3 stopnie swobody: 2 punkty na płaszczyźnie i jedno równanie więzów na stałą długość hantla. Jako współrzędne niezależne wybieramy x, y i φ , zgodnie z rysunkiem.

Wektory położenia obu mas mają postać

$$\vec{r}_1 = (x - l_1 \cos \varphi, y - l_1 \sin \varphi) \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi} = (l_1 \sin \varphi, -l_1 \cos \varphi),$$

$$\vec{r}_2 = (x + l_2 \cos \varphi, y + l_2 \sin \varphi) \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \varphi} = (-l_2 \sin \varphi, l_2 \cos \varphi),$$

a odpowiednie siły tarcia są równe

$$\vec{T}_1 = -f m_1 g \frac{(\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi, \dot{y} - l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi)}{\sqrt{(\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} - l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}},$$

Równania Lagrange'a dla układów z tarciem

Układ ma 3 stopnie swobody: 2 punkty na płaszczyźnie i jedno równanie więzów na stałą długość hantla. Jako współrzędne niezależne wybieramy x, y i φ , zgodnie z rysunkiem.

Wektory położenia obu mas mają postać

$$\vec{r}_1 = (x - l_1 \cos \varphi, y - l_1 \sin \varphi) \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi} = (l_1 \sin \varphi, -l_1 \cos \varphi),$$

$$\vec{r}_2 = (x + l_2 \cos \varphi, y + l_2 \sin \varphi) \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \varphi} = (-l_2 \sin \varphi, l_2 \cos \varphi),$$

a odpowiednie siły tarcia są równe

$$\vec{T}_1 = -f m_1 g \frac{(\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi, \dot{y} - l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi)}{\sqrt{(\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} - l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}},$$

Równania Lagrange'a dla układów z tarciem

$$\vec{T}_2 = -fm_2g \frac{(\dot{x} - l_2\dot{\varphi} \sin \varphi, \dot{y} + l_2\dot{\varphi} \cos \varphi)}{\sqrt{(\dot{x} - l_2\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} + l_2\dot{\varphi} \cos \varphi)^2}}.$$

Obliczmy R_φ

$$\begin{aligned} R_\varphi &= \sum_{i=1}^2 \vec{T}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \varphi} = \vec{T}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi} + \vec{T}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \varphi} \\ &= -fg \frac{m_1 (\dot{x} l_1 \sin \varphi + l_1^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi - \dot{y} l_1 \cos \varphi + l_1^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi)}{\sqrt{(\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} - l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}} \\ &\quad - fg \frac{m_2 (-\dot{x} l_2 \sin \varphi + l_2^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + \dot{y} l_2 \cos \varphi + l_2^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi)}{\sqrt{(\dot{x} - l_2 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} + l_2 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}}. \end{aligned}$$

$$\vec{T}_2 = -fm_2g \frac{(\dot{x} - l_2\dot{\varphi} \sin \varphi, \dot{y} + l_2\dot{\varphi} \cos \varphi)}{\sqrt{(\dot{x} - l_2\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} + l_2\dot{\varphi} \cos \varphi)^2}}.$$

Obliczmy R_φ

$$\begin{aligned} R_\varphi &= \sum_{i=1}^2 \vec{T}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \varphi} = \vec{T}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi} + \vec{T}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \varphi} \\ &= -fg \frac{m_1 (\dot{x} l_1 \sin \varphi + l_1^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi - \dot{y} l_1 \cos \varphi + l_1^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi)}{\sqrt{(\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} - l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}} \\ &\quad - fg \frac{m_2 (-\dot{x} l_2 \sin \varphi + l_2^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + \dot{y} l_2 \cos \varphi + l_2^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi)}{\sqrt{(\dot{x} - l_2 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} + l_2 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}}. \end{aligned}$$

Wyrażenie to możemy nieco uprościć do postaci

$$R_{\varphi} = -fg \frac{m_1 (\dot{x} l_1 \sin \varphi - \dot{y} l_1 \cos \varphi + l_1^2 \dot{\varphi}^2)}{\sqrt{(\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} - l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}} - fg \frac{m_2 (-\dot{x} l_2 \sin \varphi + \dot{y} l_2 \cos \varphi + l_2^2 \dot{\varphi}^2)}{\sqrt{(\dot{x} - l_2 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} + l_2 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}},$$

ale, jak widać, wzór na R_{φ} jest bardzo skomplikowany.

Wyrażenie to możemy nieco uprościć do postaci

$$R_{\varphi} = -fg \frac{m_1 (\dot{x} l_1 \sin \varphi - \dot{y} l_1 \cos \varphi + l_1^2 \dot{\varphi}^2)}{\sqrt{(\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} - l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}} - fg \frac{m_2 (-\dot{x} l_2 \sin \varphi + \dot{y} l_2 \cos \varphi + l_2^2 \dot{\varphi}^2)}{\sqrt{(\dot{x} - l_2 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} + l_2 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}},$$

ale, jak widać, wzór na R_{φ} jest bardzo skomplikowany.

Zadanie 1: Obliczyć uogólnione siły tarcia R_x i R_y .

Wyrażenie to możemy nieco uprościć do postaci

$$R_\varphi = -fg \frac{m_1 (\dot{x} l_1 \sin \varphi - \dot{y} l_1 \cos \varphi + l_1^2 \dot{\varphi}^2)}{\sqrt{(\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} - l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}} - fg \frac{m_2 (-\dot{x} l_2 \sin \varphi + \dot{y} l_2 \cos \varphi + l_2^2 \dot{\varphi}^2)}{\sqrt{(\dot{x} - l_2 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} + l_2 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}},$$

ale, jak widać, wzór na R_φ jest bardzo skomplikowany.

Zadanie 1: Obliczyć uogólnione siły tarcia R_x i R_y .

Widzimy, że przeliczenie składowych kartezjańskich sił tarcia na uogólnione siły tarcia jest bardzo żmudne.

Dla uniknięcia skomplikowanych rachunków, w niektórych sytuacjach można wprowadzić funkcję dyssypacji P , która odgrywa podobną rolę do potencjału.

Widzimy, że przeliczenie składowych kartezjańskich sił tarcia na uogólnione siły tarcia jest bardzo żmudne.

Dla uniknięcia skomplikowanych rachunków, w niektórych sytuacjach można wprowadzić **funkcję dyssypacji P** , która odgrywa podobną rolę do potencjału.

Wiele sił tarcia ma postać

$$\vec{T}_i = -h_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie $h_i(v_i)$ jest dowolną funkcją skalarną wartości wektora prędkości i -tego punktu. Wówczas uogólnione siły tarcia można zapisać w formie

$$R_j = \sum_{i=1}^N \vec{T}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N h_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N h_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i} \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j},$$

Wiele sił tarcia ma postać

$$\vec{T}_i = -h_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie $h_i(v_i)$ jest dowolną funkcją skalarną wartości wektora prędkości i -tego punktu. Wówczas uogólnione siły tarcia można zapisać w formie

$$R_j = \sum_{i=1}^N \vec{T}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N h_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N h_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i} \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j},$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodniony wcześniej wzór

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}.$$

Wiele sił tarcia ma postać

$$\vec{T}_i = -h_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie $h_i(v_i)$ jest dowolną funkcją skalarną wartości wektora prędkości i -tego punktu. Wówczas uogólnione siły tarcia można zapisać w formie

$$R_j = \sum_{i=1}^N \vec{T}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N h_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N h_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i} \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j},$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodniony wcześniej wzór

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}.$$

Zauważmy również, że

$$\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_j} = v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j},$$

co pozwala uprościć wzór na R_j .

$$R_j = - \sum_{i=1}^N h_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i} \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = - \sum_{i=1}^N h_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j}.$$

Zauważmy również, że

$$\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_j} = v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j},$$

co pozwala uprościć wzór na R_j .

$$R_j = - \sum_{i=1}^N h_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i} \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = - \sum_{i=1}^N h_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j}.$$

Jeśli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, tzn. $F'(x) = f(x)$, to

$$\int_0^{a(x)} f(\tilde{x}) d\tilde{x} = F(a(x)) - F(0).$$

Skąd różniczkując obustronnie po x otrzymamy

$$\frac{d}{dx} \int_0^{a(x)} f(\tilde{x}) d\tilde{x} = \frac{d}{dx} [F(a(x)) - F(0)] =$$

Jeśli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, tzn. $F'(x) = f(x)$, to

$$\int_0^{a(x)} f(\tilde{x}) d\tilde{x} = F(a(x)) - F(0).$$

Skąd różniczkując obustronnie po x otrzymamy

$$\frac{d}{dx} \int_0^{a(x)} f(\tilde{x}) d\tilde{x} = \frac{d}{dx} [F(a(x)) - F(0)] = f(a(x)) \frac{da(x)}{dx}.$$

Funkcja dyssypacji

Jeśli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, tzn. $F'(x) = f(x)$, to

$$\int_0^{a(x)} f(\tilde{x}) d\tilde{x} = F(a(x)) - F(0).$$

Skąd różniczkując obustronnie po x otrzymamy

$$\frac{d}{dx} \int_0^{a(x)} f(\tilde{x}) d\tilde{x} = \frac{d}{dx} [F(a(x)) - F(0)] = f(a(x)) \frac{da(x)}{dx}.$$

Zmieniając oznaczenia otrzymamy wzór

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \int_0^{v_i} h_i(\tilde{v}_i) d\tilde{v}_i = h_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j}.$$

Jeśli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, tzn. $F'(x) = f(x)$, to

$$\int_0^{a(x)} f(\tilde{x}) d\tilde{x} = F(a(x)) - F(0).$$

Skąd różniczkując obustronnie po x otrzymamy

$$\frac{d}{dx} \int_0^{a(x)} f(\tilde{x}) d\tilde{x} = \frac{d}{dx} [F(a(x)) - F(0)] = f(a(x)) \frac{da(x)}{dx}.$$

Zmieniając oznaczenia otrzymamy wzór

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \int_0^{v_i} h_i(\tilde{v}_i) d\tilde{v}_i = h_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j}.$$

Funkcja dyssypacji

W takim razie uogólnioną siłę tarcia możemy zapisać:

$$R_j = - \sum_{i=1}^N h_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \int_0^{v_i} h_i(\tilde{v}_i) d\tilde{v}_i = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \int_0^{v_i} h_i(\tilde{v}_i) d\tilde{v}_i.$$

Zdefiniujmy funkcję dyssypacji P dla sił tarcia postaci

$\vec{T}_i = -h_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i}$, gdzie $i = 1, 2, \dots, N$,

$$P \equiv \sum_{i=1}^N \int_0^{v_i} h_i(\tilde{v}_i) d\tilde{v}_i,$$

Funkcja dyssypacji

W takim razie uogólnioną siłę tarcia możemy zapisać:

$$R_j = - \sum_{i=1}^N h_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \int_0^{v_i} h_i(\tilde{v}_i) d\tilde{v}_i = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \int_0^{v_i} h_i(\tilde{v}_i) d\tilde{v}_i.$$

Zdefiniujmy **funkcję dyssypacji** P dla sił tarcia postaci

$\vec{T}_i = -h_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i}$, gdzie $i = 1, 2, \dots, N$,

$$P \equiv \sum_{i=1}^N \int_0^{v_i} h_i(\tilde{v}_i) d\tilde{v}_i,$$

wtedy uogólniona siła tarcia wyraża się wzorem

$$R_j = - \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j}.$$

Funkcja dyssypacji

W takim razie uogólnioną siłę tarcia możemy zapisać:

$$R_j = - \sum_{i=1}^N h_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \int_0^{v_i} h_i(\tilde{v}_i) d\tilde{v}_i = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \int_0^{v_i} h_i(\tilde{v}_i) d\tilde{v}_i.$$

Zdefiniujmy **funkcję dyssypacji** P dla sił tarcia postaci

$\vec{T}_i = -h_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i}$, gdzie $i = 1, 2, \dots, N$,

$$P \equiv \sum_{i=1}^N \int_0^{v_i} h_i(\tilde{v}_i) d\tilde{v}_i,$$

wtedy uogólniona siła tarcia wyraża się wzorem

$$R_j = - \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j}.$$

Przykład 2: Znajdźmy funkcję dyssypacji hantla z *Przykładu 1*.

Siła tarcia działająca na poszczególne masy ma postać

$$\vec{T}_i = -fm_i g \frac{\vec{v}_i}{v_i} \Rightarrow h_i(v_i) = fm_i g, \quad i = 1, 2.$$

Przykład 2: Znajdźmy funkcję dyssypacji hantla z *Przykładu 1*.
Siła tarcia działająca na poszczególne masy ma postać

$$\vec{T}_i = -fm_i g \frac{\vec{v}_i}{v_i} \Rightarrow h_i(v_i) = fm_i g, \quad i = 1, 2.$$

Funkcja dyssypacji ma więc postać

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^2 \int_0^{v_i} h_i(\tilde{v}_i) d\tilde{v}_i = \sum_{i=1}^2 fm_i g \int_0^{v_i} d\tilde{v}_i = fg \sum_{i=1}^2 m_i v_i \\ &= fg (m_1 v_1 + m_2 v_2) = fg \left(m_1 \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2} + m_2 \sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2} \right) \end{aligned}$$

a jeśli wykorzystamy wzory z *Przykładu 1* na v_1 i v_2 ,

Przykład 2: Znajdźmy funkcję dyssypacji hantla z *Przykładu 1*. Siła tarcia działająca na poszczególne masy ma postać

$$\vec{T}_i = -fm_i g \frac{\vec{v}_i}{v_i} \Rightarrow h_i(v_i) = fm_i g, \quad i = 1, 2.$$

Funkcja dyssypacji ma więc postać

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^2 \int_0^{v_i} h_i(\tilde{v}_i) d\tilde{v}_i = \sum_{i=1}^2 fm_i g \int_0^{v_i} d\tilde{v}_i = fg \sum_{i=1}^2 m_i v_i \\ &= fg(m_1 v_1 + m_2 v_2) = fg \left(m_1 \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2} + m_2 \sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2} \right) \end{aligned}$$

a jeśli wykorzystamy wzory z *Przykładu 1* na v_1 i v_2 ,

to otrzymamy

$$P = fg \left(m_1 \sqrt{(\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} - l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2} + m_2 \sqrt{(\dot{x} - l_2 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} + l_2 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2} \right).$$

Teraz łatwo już można obliczyć uogólnione siły tarcia

$$R_x = -\frac{\partial P}{\partial \dot{x}} = -fg \left(m_1 \frac{\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi}{\sqrt{(\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} - l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}} + m_2 \frac{\dot{x} - l_2 \dot{\varphi} \sin \varphi}{\sqrt{(\dot{x} - l_2 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} + l_2 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}} \right),$$

gdzie oba ułamki skróciliśmy przez 2.

to otrzymamy

$$P = fg \left(m_1 \sqrt{(\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} - l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2} + m_2 \sqrt{(\dot{x} - l_2 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} + l_2 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2} \right).$$

Teraz łatwo już można obliczyć uogólnione siły tarcia

$$R_x = -\frac{\partial P}{\partial \dot{x}} = -fg \left(m_1 \frac{\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi}{\sqrt{(\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} - l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}} + m_2 \frac{\dot{x} - l_2 \dot{\varphi} \sin \varphi}{\sqrt{(\dot{x} - l_2 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} + l_2 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}} \right),$$

gdzie oba ułamki skróciliśmy przez 2.

Podobnie obliczamy siły R_y i R_φ

$$P = fg \left(m_1 \sqrt{(\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} - l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2} + m_2 \sqrt{(\dot{x} - l_2 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} + l_2 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2} \right).$$

$$R_y = -\frac{\partial P}{\partial \dot{y}} = -fg \left(m_1 \frac{\dot{y} - l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi}{\sqrt{(\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} - l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}} + m_2 \frac{\dot{y} + l_2 \dot{\varphi} \cos \varphi}{\sqrt{(\dot{x} - l_2 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} + l_2 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}} \right).$$

$$P = fg \left(m_1 \sqrt{(\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} - l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2} + m_2 \sqrt{(\dot{x} - l_2 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} + l_2 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2} \right).$$

$$R_\varphi = -\frac{\partial P}{\partial \dot{\varphi}} = -fg \left(m_1 \frac{(\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi) l_1 \sin \varphi - (\dot{y} - l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi) l_1 \cos \varphi}{\sqrt{(\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} - l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}} + m_2 \frac{-(\dot{x} - l_2 \dot{\varphi} \sin \varphi) l_2 \sin \varphi + (\dot{y} + l_2 \dot{\varphi} \cos \varphi) l_2 \cos \varphi}{\sqrt{(\dot{x} - l_2 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} + l_2 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}} \right).$$

Porządkując wyrażenie na R_φ otrzymamy ostatecznie

$$R_\varphi = -fg \left(m_1 \frac{l_1 (\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi) + l_1^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{(\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} - l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}} + m_2 \frac{l_2 (-\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi) + l_2^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{(\dot{x} - l_2 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} + l_2 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}} \right),$$

a więc taki sam wynik jak w *Przykładzie 1*.

Porządkując wyrażenie na R_φ otrzymamy ostatecznie

$$R_\varphi = -fg \left(m_1 \frac{l_1 (\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi) + l_1^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{(\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} - l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}} + m_2 \frac{l_2 (-\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi) + l_2^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{(\dot{x} - l_2 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} + l_2 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2}} \right),$$

a więc taki sam wynik jak w *Przykładzie 1*.

Funkcja dyssypacji

Napiszmy równania ruchu hantla. Funkcja Lagrange'a hantla ma postać

$$L = T - \underbrace{V}_0 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}^2,$$

gdzie pierwszy wyraz po prawej stronie jest energią kinetyczną ruchu postępowego środka masy, a kolejne dwa wyrazy reprezentują energię kinetyczną ruchu obrotowego poszczególnych mas.

Funkcja dyssypacji

Napiszmy równania ruchu hantla. Funkcja Lagrange'a hantla ma postać

$$L = T - \underbrace{V}_0 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}^2,$$

gdzie pierwszy wyraz po prawej stronie jest energią kinetyczną ruchu postępowego środka masy, a kolejne dwa wyrazy reprezentują energię kinetyczną ruchu obrotowego poszczególnych mas.

Dla poszczególnych zmiennych otrzymamy równania ruchu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) \dot{x}] = (m_1 + m_2) \ddot{x} = R_x,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) \dot{y}] = (m_1 + m_2) \ddot{y} = R_y,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} [(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\varphi}] = (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \ddot{\varphi} = R_\varphi.$$

Funkcja dyssypacji

Napiszmy równania ruchu hantla. Funkcja Lagrange'a hantla ma postać

$$L = T - \underbrace{V}_0 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}^2,$$

gdzie pierwszy wyraz po prawej stronie jest energią kinetyczną ruchu postępowego środka masy, a kolejne dwa wyrazy reprezentują energię kinetyczną ruchu obrotowego poszczególnych mas.

Dla poszczególnych zmiennych otrzymamy równania ruchu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) \dot{x}] = (m_1 + m_2) \ddot{x} = R_x,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) \dot{y}] = (m_1 + m_2) \ddot{y} = R_y,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} [(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\varphi}] = (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \ddot{\varphi} = R_\varphi.$$

Wstawienie wzorów na siły uogólnione sprawi, że równania ruchu staną się niezmiernie skomplikowane. W związku z czym nie da się ich rozwiązać w sposób analityczny.

Tarcie przekształca energię kinetyczną ruchu ciała makroskopowego w ciepło,

Wstawienie wzorów na siły uogólnione sprawi, że równania ruchu staną się niezmiernie skomplikowane. W związku z czym nie da się ich rozwiązać w sposób analityczny.

Tarcie przekształca energię kinetyczną ruchu ciała makroskopowego w ciepło, a zatem jest ono zjawiskiem makroskopowym.

Wstawienie wzorów na siły uogólnione sprawi, że równania ruchu staną się niezmiernie skomplikowane. W związku z czym nie da się ich rozwiązać w sposób analityczny.

Tarcie przekształca energię kinetyczną ruchu ciała makroskopowego w ciepło, a zatem jest ono zjawiskiem makroskopowym.

W fizyce kwantowej, a więc na poziomie mikroskopowym, nie ma tarcia.

Wstawienie wzorów na siły uogólnione sprawi, że równania ruchu staną się niezmiernie skomplikowane. W związku z czym nie da się ich rozwiązać w sposób analityczny.

Tarcie przekształca energię kinetyczną ruchu ciała makroskopowego w ciepło, a zatem jest ono zjawiskiem makroskopowym.

W fizyce kwantowej, a więc na poziomie mikroskopowym, nie ma tarcia.

Pytanie, jak powstaje tarcie przy przejściu od teorii mikroskopowej do makroskopowej, jest bardzo trudne.

Wstawienie wzorów na siły uogólnione sprawi, że równania ruchu staną się niezmiernie skomplikowane. W związku z czym nie da się ich rozwiązać w sposób analityczny.

Tarcie przekształca energię kinetyczną ruchu ciała makroskopowego w ciepło, a zatem jest ono zjawiskiem makroskopowym.

W fizyce kwantowej, a więc na poziomie mikroskopowym, nie ma tarcia.

Pytanie, jak powstaje tarcie przy przejściu od teorii mikroskopowej do makroskopowej, jest bardzo trudne.

Zasadniczy wpływ na poziom komplikacji tego problemu ma złożoność układów makroskopowych.

Wstawienie wzorów na siły uogólnione sprawi, że równania ruchu staną się niezmiernie skomplikowane. W związku z czym nie da się ich rozwiązać w sposób analityczny.

Tarcie przekształca energię kinetyczną ruchu ciała makroskopowego w ciepło, a zatem jest ono zjawiskiem makroskopowym.

W fizyce kwantowej, a więc na poziomie mikroskopowym, nie ma tarcia.

Pytanie, jak powstaje tarcie przy przejściu od teorii mikroskopowej do makroskopowej, jest bardzo trudne.

Zasadniczy wpływ na poziom komplikacji tego problemu ma złożoność układów makroskopowych.

Żeby lepiej unaocznić to stwierdzenie, przypomnijmy, że liczba cząsteczek w jednym molu substancji, czyli **stała Avogadra**, wynosi

$$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

Żeby lepiej unaocznić to stwierdzenie, przypomnijmy, że liczba cząsteczek w jednym molu substancji, czyli **stała Avogadra**, wynosi

$$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

Oczywiste jest jednak, że **zderzenia cząsteczek trących ciał odbierają im energię kinetyczną i zamieniają ją w drgania.**

Żeby lepiej unaocznić to stwierdzenie, przypomnijmy, że liczba cząsteczek w jednym molu substancji, czyli **stała Avogadra**, wynosi

$$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

Oczywiste jest jednak, że **zderzenia cząsteczek trących ciał odbierają im energię kinetyczną i zamieniają ją w drgania.**

W dalszym ciągu zbadamy wpływ siły tarcia na prosty układ mechaniczny jakim jest jednowymiarowy oscylator harmoniczny.

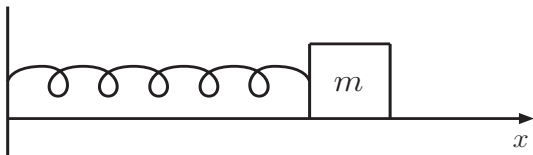
Żeby lepiej unaocznić to stwierdzenie, przypomnijmy, że liczba cząsteczek w jednym molu substancji, czyli stała Avogadra, wynosi

$$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

Oczywiste jest jednak, że zderzenia cząsteczek trących ciał odbierają im energię kinetyczną i zamieniają ją w drgania. W dalszym ciągu zbadamy wpływ siły tarcia na prosty układ mechaniczny jakim jest jednowymiarowy oscylator harmoniczny.

Oscylator harmoniczny

Ciało o masie m ślizga się bez tarcia po podłożu pod wpływem sprężyny przyczepionej do ściany. Sprężyna spełnia prawo Hooke'a $F = -Kx$, gdzie współczynnik sprężystości K jest zadany.

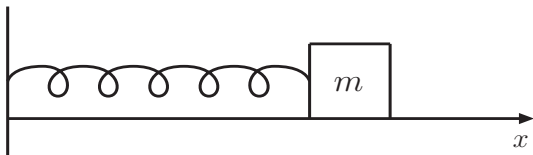


Z II zasady dynamiki Newtona otrzymujemy równanie ruchu

$$m\ddot{x} = -Kx$$

Oscylator harmoniczny

Ciało o masie m ślizga się bez tarcia po podłożu pod wpływem sprężyny przyczepionej do ściany. Sprężyna spełnia prawo Hooke'a $F = -Kx$, gdzie współczynnik sprężystości K jest zadany.

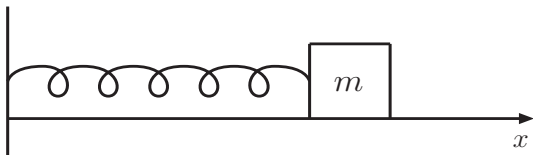


Z II zasady dynamiki Newtona otrzymujemy równanie ruchu

$$m\ddot{x} = -Kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{K}{m}x$$

Oscylator harmoniczny

Ciało o masie m ślizga się bez tarcia po podłożu pod wpływem sprężyny przyczepionej do ściany. Sprężyna spełnia prawo Hooke'a $F = -Kx$, gdzie współczynnik sprężystości K jest zadany.

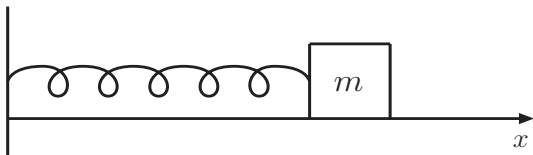


Z II zasady dynamiki Newtona otrzymujemy równanie ruchu

$$m\ddot{x} = -Kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{K}{m}x \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\omega_0^2 x,$$

Oscylator harmoniczny

Ciało o masie m ślizga się bez tarcia po podłożu pod wpływem sprężyny przyczepionej do ściany. Sprężyna spełnia prawo Hooke'a $F = -Kx$, gdzie współczynnik sprężystości K jest zadany.



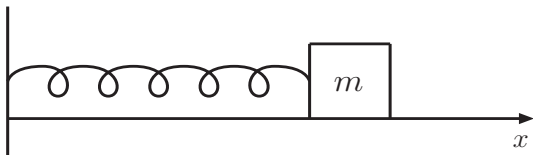
Z II zasady dynamiki Newtona otrzymujemy równanie ruchu

$$m\ddot{x} = -Kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{K}{m}x \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\omega_0^2 x,$$

gdzie oznaczyliśmy $\omega_0^2 \equiv \frac{K}{m}$.

Oscylator harmoniczny

Ciało o masie m ślizga się bez tarcia po podłożu pod wpływem sprężyny przyczepionej do ściany. Sprężyna spełnia prawo Hooke'a $F = -Kx$, gdzie współczynnik sprężystości K jest zadany.



Z II zasady dynamiki Newtona otrzymujemy równanie ruchu

$$m\ddot{x} = -Kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{K}{m}x \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\omega_0^2 x,$$

gdzie oznaczyliśmy $\omega_0^2 \equiv \frac{K}{m}$.

Oscylator harmoniczny

Rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

zwykle przedstawiamy w jednej z następujących postaci:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

Oscylator harmoniczny

Rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

zwykle przedstawiamy w jednej z następujących postaci:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad x(t) = B \cos(\omega_0 t + \beta)$$

Oscylator harmoniczny

Rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

zwykle przedstawiamy w jednej z następujących postaci:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad x(t) = B \cos(\omega_0 t + \beta)$$

lub wykorzystując liczby zespolone

$$x(t) = Ce^{i\omega_0 t} + De^{-i\omega_0 t},$$

Oscylator harmoniczny

Rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

zwykle przedstawiamy w jednej z następujących postaci:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad x(t) = B \cos(\omega_0 t + \beta)$$

lub wykorzystując liczby zespolone

$$x(t) = Ce^{i\omega_0 t} + De^{-i\omega_0 t},$$

gdzie A, α, B, β, C i D są dowolnymi stałymi.

Rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

zwykle przedstawiamy w jednej z następujących postaci:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad x(t) = B \cos(\omega_0 t + \beta)$$

lub wykorzystując liczby zespolone

$$x(t) = Ce^{i\omega_0 t} + De^{-i\omega_0 t},$$

gdzie A, α, B, β, C i D są dowolnymi stałymi.

Zadanie 2. Pokazać, że każda z powyższych funkcji jest rozwiązaniem równania $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$.

Rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

zwykle przedstawiamy w jednej z następujących postaci:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad x(t) = B \cos(\omega_0 t + \beta)$$

lub wykorzystując liczby zespolone

$$x(t) = Ce^{i\omega_0 t} + De^{-i\omega_0 t},$$

gdzie A, α, B, β, C i D są dowolnymi stałymi.

Zadanie 2. Pokazać, że każda z powyższych funkcji jest rozwiązaniem równania $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$.

Tłumiony oscylator harmoniczny

Rozważmy swobodny tłumiony oscylator harmoniczny opisywany równaniem

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0,$$

gdzie wyraz $c\dot{x}$ opisuje tłumienie – opór ruchu proporcjonalny do prędkości.

Tłumiony oscylator harmoniczny

Rozważmy swobodny tłumiony oscylator harmoniczny opisywany równaniem

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0,$$

gdzie wyraz $c\dot{x}$ opisuje tłumienie – opór ruchu proporcjonalny do prędkości.

Przedzielimy obustronnie przez m

$$\ddot{x} + 2\frac{c}{2m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Rozważmy swobodny tłumiony oscylator harmoniczny opisywany równaniem

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0,$$

gdzie wyraz $c\dot{x}$ opisuje tłumienie – opór ruchu proporcjonalny do prędkości.

Przedzielimy obustronnie przez m

$$\ddot{x} + 2\frac{c}{2m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

i oznaczmy

$$\gamma \equiv \frac{c}{2m}, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{K}{m},$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Rozważmy swobodny tłumiony oscylator harmoniczny opisywany równaniem

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0,$$

gdzie wyraz $c\dot{x}$ opisuje tłumienie – opór ruchu proporcjonalny do prędkości.

Przedzielimy obustronnie przez m

$$\ddot{x} + 2\frac{c}{2m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

i oznaczmy

$$\gamma \equiv \frac{c}{2m}, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{K}{m},$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

wówczas otrzymamy równanie ruchu tłumionego oscylatora harmonicznego w formie

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Podstawiając $x(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$,
otrzymamy

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0,$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

wówczas otrzymamy równanie ruchu tłumionego oscylatora harmonicznego w formie

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Podstawiając $x(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, otrzymamy

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0,$$

a po pomnożeniu przez niezerowy czynnik $e^{-\lambda t}$ otrzymamy równanie algebraiczne na wykładnik λ

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

wówczas otrzymamy równanie ruchu tłumionego oscylatora harmonicznego w formie

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Podstawiając $x(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, otrzymamy

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0,$$

a po pomnożeniu przez niezerowy czynnik $e^{-\lambda t}$ otrzymamy równanie algebraiczne na wykładnik λ

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

które możemy łatwo rozwiązać.

Tłumiony oscylator harmoniczny

wówczas otrzymamy równanie ruchu tłumionego oscylatora harmonicznego w formie

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Podstawiając $x(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, otrzymamy

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0,$$

a po pomnożeniu przez niezerowy czynnik $e^{-\lambda t}$ otrzymamy równanie algebraiczne na wykładnik λ

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

które możemy łatwo rozwiązać.

Tłumiony oscylator harmoniczny

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \gamma^2 - \gamma^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$(\lambda + \gamma)^2 = \gamma^2 - \omega_0^2$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \gamma^2 - \gamma^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$(\lambda + \gamma)^2 = \gamma^2 - \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda + \gamma = \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \gamma^2 - \gamma^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$(\lambda + \gamma)^2 = \gamma^2 - \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda + \gamma = \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \gamma^2 - \gamma^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$(\lambda + \gamma)^2 = \gamma^2 - \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda + \gamma = \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

W zbiorze liczb zespolonych oba pierwiastki zawsze istnieją.

Tłumiony oscylator harmoniczny

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \gamma^2 - \gamma^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$(\lambda + \gamma)^2 = \gamma^2 - \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda + \gamma = \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

W zbiorze liczb zespolonych oba pierwiastki zawsze istnieją.

Jeżeli $\lambda_1 \neq \lambda_2$, to rozwiązanie ogólne równania swobodnego oscylatora tłumionego ma postać

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t},$$

gdzie A_1 i A_2 są stałymi dowolnymi.

Tłumiony oscylator harmoniczny

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \gamma^2 - \gamma^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$(\lambda + \gamma)^2 = \gamma^2 - \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda + \gamma = \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

W zbiorze liczb zespolonych oba pierwiastki zawsze istnieją. Jeżeli $\lambda_1 \neq \lambda_2$, to rozwiązanie ogólne równania swobodnego oscylatora tłumionego ma postać

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t},$$

gdzie A_1 i A_2 są stałymi dowolnymi.

Tłumiony oscylator harmoniczny

Rozważmy 3 możliwości.

a) $\gamma^2 < \omega_0^2$ – słabe tłumienie $\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 < 0$

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-(\omega_0^2 - \gamma^2)} = \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2},$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Rozważmy 3 możliwości.

a) $\gamma^2 < \omega_0^2$ – słabe tłumienie $\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 < 0$

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-(\omega_0^2 - \gamma^2)} = \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2},$$

Oznaczmy $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$, wówczas

$$\lambda_1 = -\gamma + i\omega, \quad \lambda_2 = -\gamma - i\omega$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Rozważmy 3 możliwości.

a) $\gamma^2 < \omega_0^2$ – słabe tłumienie $\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 < 0$

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-(\omega_0^2 - \gamma^2)} = \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2},$$

Oznaczmy $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$, wówczas

$$\lambda_1 = -\gamma + i\omega, \quad \lambda_2 = -\gamma - i\omega$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{(-\gamma + i\omega)t} + A_2 e^{(-\gamma - i\omega)t} \\ &= e^{-\gamma t} (A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}). \end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Rozważmy 3 możliwości.

a) $\gamma^2 < \omega_0^2$ – słabe tłumienie $\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 < 0$

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-(\omega_0^2 - \gamma^2)} = \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2},$$

Oznaczmy $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$, wówczas

$$\lambda_1 = -\gamma + i\omega, \quad \lambda_2 = -\gamma - i\omega$$

i rozwiązanie ogólne ma postać

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{(-\gamma + i\omega)t} + A_2 e^{(-\gamma - i\omega)t} \\ &= e^{-\gamma t} (A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}). \end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right]$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\ &= \end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\ &= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right]\end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\ &= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\ &= \end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\ &= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\ &= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t},\end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\ &= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\ &= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t},\end{aligned}$$

$$x(0)$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\ &= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\ &= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t}, \\ x(0) &= \end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\ &= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\ &= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t}, \\ x(0) &= e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \Big|_{t=0}\end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\ &= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\ &= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t}, \\ x(0) &= e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \Big|_{t=0} = A_1 + A_2 = x_0,\end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\ &= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\ &= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t}, \\ x(0) &= e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \Big|_{t=0} = A_1 + A_2 = x_0, \\ \dot{x}(0) &= \end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\ &= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\ &= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t}, \\ x(0) &= e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \Big|_{t=0} = A_1 + A_2 = x_0, \\ \dot{x}(0) &= \end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\&= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\&= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t}, \\x(0) &= e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \Big|_{t=0} = A_1 + A_2 = x_0, \\ \dot{x}(0) &= (-\gamma + i\omega) A_1 - (\gamma + i\omega) A_2\end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\&= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\&= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t}, \\x(0) &= e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \Big|_{t=0} = A_1 + A_2 = x_0, \\ \dot{x}(0) &= (-\gamma + i\omega) A_1 - (\gamma + i\omega) A_2 \\&= \end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\&= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\&= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t}, \\x(0) &= e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \Big|_{t=0} = A_1 + A_2 = x_0, \\ \dot{x}(0) &= (-\gamma + i\omega) A_1 - (\gamma + i\omega) A_2 \\&= \underbrace{-\gamma (A_1 + A_2)}_{x_0} + i\omega (A_1 - A_2) = \dot{x}_0.\end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Założmy następujące warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aby z nich skorzystać, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \right] \\&= -\gamma e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right] + e^{-\gamma t} i\omega \left[A_1 e^{+i\omega t} - A_2 e^{-i\omega t} \right] \\&= (-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t} A_1 e^{+i\omega t} + (-\gamma - i\omega) e^{-\gamma t} A_2 e^{-i\omega t}, \\x(0) &= e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) \Big|_{t=0} = A_1 + A_2 = x_0, \\ \dot{x}(0) &= (-\gamma + i\omega) A_1 - (\gamma + i\omega) A_2 \\&= \underbrace{-\gamma (A_1 + A_2)}_{x_0} + i\omega (A_1 - A_2) = \dot{x}_0.\end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Skąd

$$i\omega(A_1 - A_2) = \dot{x}_0 + \gamma x_0 \Rightarrow A_1 - A_2 = -i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega}.$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ A_1 - A_2 = -i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \end{cases}$$

Skąd

$$i\omega(A_1 - A_2) = \dot{x}_0 + \gamma x_0 \Rightarrow A_1 - A_2 = -i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega}.$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ A_1 - A_2 = -i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \end{cases}$$

otrzymamy stałe A_1 i A_2 :

$$A_1 = \frac{1}{2} \left[x_0 - i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right], \quad A_2 = \frac{1}{2} \left[x_0 + i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right] = A_1^*.$$

Skąd

$$i\omega (A_1 - A_2) = \dot{x}_0 + \gamma x_0 \Rightarrow A_1 - A_2 = -i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega}.$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ A_1 - A_2 = -i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \end{cases}$$

otrzymamy stałe A_1 i A_2 :

$$A_1 = \frac{1}{2} \left[x_0 - i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right], \quad A_2 = \frac{1}{2} \left[x_0 + i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right] = A_1^*.$$

Rozwiązanie przyjmuje postać

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{i\omega t} + (A_1 e^{i\omega t})^*]$$

Rozwiązanie przyjmuje postać

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{i\omega t} + (A_1 e^{i\omega t})^*]$$

=

Rozwiązanie przyjmuje postać

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\gamma t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{i\omega t} + (A_1 e^{i\omega t})^*] \\&= e^{-\gamma t} 2\operatorname{Re}(A_1 e^{i\omega t}),\end{aligned}$$

Rozwiązanie przyjmuje postać

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\gamma t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{i\omega t} + (A_1 e^{i\omega t})^*] \\&= e^{-\gamma t} 2\operatorname{Re} (A_1 e^{i\omega t}),\end{aligned}$$

gdzie

$$2\operatorname{Re} (A_1 e^{i\omega t}) = 2\operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \left(x_0 - i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right) (\cos \omega t + i \sin \omega t) \right]$$

Rozwiązanie przyjmuje postać

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\gamma t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{i\omega t} + (A_1 e^{i\omega t})^*] \\&= e^{-\gamma t} 2\operatorname{Re}(A_1 e^{i\omega t}),\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}2\operatorname{Re}(A_1 e^{i\omega t}) &= 2\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}\left(x_0 - i\frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega}\right)(\cos\omega t + i\sin\omega t)\right] \\&= \end{aligned}$$

Rozwiązanie przyjmuje postać

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\gamma t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{i\omega t} + (A_1 e^{i\omega t})^*] \\&= e^{-\gamma t} 2\operatorname{Re} (A_1 e^{i\omega t}),\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}2\operatorname{Re} (A_1 e^{i\omega t}) &= 2\operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \left(x_0 - i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right) (\cos \omega t + i \sin \omega t) \right] \\&= x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \sin \omega t.\end{aligned}$$

Rozwiązanie przyjmuje postać

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\gamma t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{i\omega t} + (A_1 e^{i\omega t})^*] \\&= e^{-\gamma t} 2\operatorname{Re} (A_1 e^{i\omega t}),\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}2\operatorname{Re} (A_1 e^{i\omega t}) &= 2\operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \left(x_0 - i \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right) (\cos \omega t + i \sin \omega t) \right] \\&= x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \sin \omega t.\end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

W takim razie, rozwiązanie w przypadku słabego tłumienia przyjmuje postać

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \sin \omega t \right].$$

Podstawmy

$$x_0 = a \sin \alpha, \quad \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} = a \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \text{tg } \alpha = \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0 + \gamma x_0}.$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

W takim razie, rozwiązanie w przypadku słabego tłumienia przyjmuje postać

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \sin \omega t \right].$$

Podstawmy

$$x_0 = a \sin \alpha, \quad \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} = a \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0 + \gamma x_0}.$$

Podnosząc obustronnie do kwadratu i dodając stronami dwa pierwsze równania otrzymamy

$$a^2 = x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right)^2}.$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

W takim razie, rozwiązanie w przypadku słabego tłumienia przyjmuje postać

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \sin \omega t \right].$$

Podstawmy

$$x_0 = a \sin \alpha, \quad \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} = a \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0 + \gamma x_0}.$$

Podnosząc obustronnie do kwadratu i dodając stronami dwa pierwsze równania otrzymamy

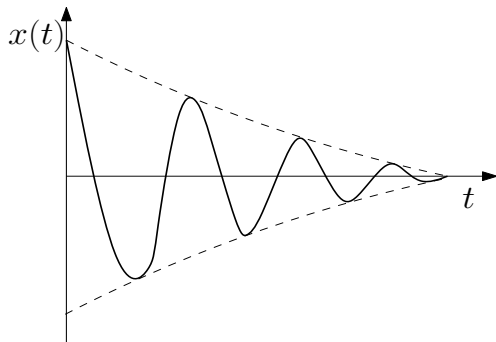
$$a^2 = x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\omega} \right)^2}.$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

Wtedy $x(t)$ możemy zapisać w formie

$$x(t) = e^{-\gamma t} (a \sin \alpha \cos \omega t + a \cos \alpha \sin \omega t) = a e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha).$$

Otrzymaliśmy tłumione drgania, których amplituda maleje eksponencjalnie, a częstość $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ jest nieco mniejsza od częstości oscylatora swobodnego.

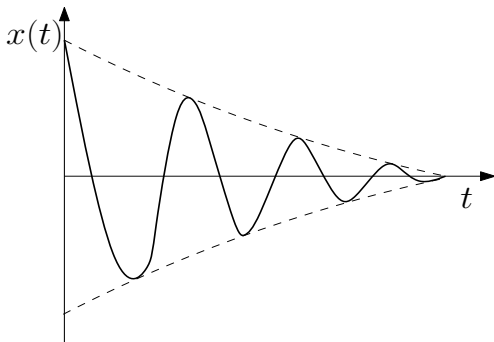


Tłumiony oscylator harmoniczny

Wtedy $x(t)$ możemy zapisać w formie

$$x(t) = e^{-\gamma t} (a \sin \alpha \cos \omega t + a \cos \alpha \sin \omega t) = ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha).$$

Otrzymaliśmy tłumione drgania, których amplituda maleje eksponencjalnie, a częstość $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ jest nieco mniejsza od częstości oscylatora swobodnego.



Tłumiony oscylator harmoniczny

b) $\gamma^2 > \omega_0^2$ – silne tłumienie $\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 > 0$

Rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}.$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

b) $\gamma^2 > \omega_0^2$ – silne tłumienie $\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 > 0$

Rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}.$$

Nie opisuje ono drgań periodycznych.

Tłumiony oscylator harmoniczny

b) $\gamma^2 > \omega_0^2$ – silne tłumienie $\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 > 0$

Rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}.$$

Nie opisuje ono drgań periodycznych.

Przyjmijmy warunki początkowe w formie $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

Tłumiony oscylator harmoniczny

b) $\gamma^2 > \omega_0^2$ – silne tłumienie $\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 > 0$

Rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}.$$

Nie opisuje ono drgań periodycznych.

Przyjmijmy warunki początkowe w formie $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

Obliczmy najpierw

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & - \left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right) A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\ & - \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right) A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}, \end{aligned}$$

b) $\gamma^2 > \omega_0^2$ – silne tłumienie $\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 > 0$

Rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}.$$

Nie opisuje ono drgań periodycznych.

Przyjmijmy warunki początkowe w formie $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

Obliczmy najpierw

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & - \left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right) A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\ & - \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right) A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}, \end{aligned}$$

a następnie

$$\begin{aligned}x(0) &= A_1 + A_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_2 = -A_1, \\ \dot{x}(0) &= -\left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right) A_1 - \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right) A_2 = \\ &= \left[-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} + \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right] A_1 = \dot{x}_0,\end{aligned}$$

skąd

$$A_1 = \frac{\dot{x}_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}.$$

a następnie

$$\begin{aligned}x(0) = A_1 + A_2 = 0 &\Rightarrow A_2 = -A_1, \\ \dot{x}(0) = -\left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right) A_1 - \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right) A_2 = \\ = \left[-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} + \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right] A_1 = \dot{x}_0,\end{aligned}$$

skąd

$$A_1 = \frac{\dot{x}_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}.$$

Rozwiązanie szczególne ma zatem postać

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\ &= \end{aligned}$$

Rozwiązanie szczególne ma zatem postać

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\&= A_1 \left[e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right]\end{aligned}$$

Rozwiązanie szczególne ma zatem postać

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\&= A_1 \left[e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right] \\&= \end{aligned}$$

Rozwiązanie szczególne ma zatem postać

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\&= A_1 \left[e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right] \\&= A_1 e^{-\gamma t} \left(e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right)\end{aligned}$$

Rozwiązanie szczególne ma zatem postać

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\&= A_1 \left[e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right] \\&= A_1 e^{-\gamma t} \left(e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right)\end{aligned}$$

=

Rozwiązanie szczególne ma zatem postać

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\&= A_1 \left[e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right] \\&= A_1 e^{-\gamma t} \left(e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right) \\&= \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \frac{e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}}{2}\end{aligned}$$

Rozwiązanie szczególne ma zatem postać

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\&= A_1 \left[e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right] \\&= A_1 e^{-\gamma t} \left(e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right) \\&= \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \frac{e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}}{2} \\&= \end{aligned}$$

Rozwiązanie szczególne ma zatem postać

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\&= A_1 \left[e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right] \\&= A_1 e^{-\gamma t} \left(e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right) \\&= \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \frac{e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}}{2} \\&= \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \sinh \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t.\end{aligned}$$

Rozwiązanie szczególne ma zatem postać

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\&= A_1 \left[e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right] \\&= A_1 e^{-\gamma t} \left(e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right) \\&= \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \frac{e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}}{2} \\&= \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \sinh \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t.\end{aligned}$$

c) $\gamma^2 = \omega_0^2$ – aperiodyczny przypadek graniczny

$$\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$$

$$x(t) = A_1 e^{-\gamma t} + A_2 e^{-\gamma t} = (A_1 + A_2) e^{-\gamma t} = \tilde{A}_1 e^{-\gamma t}.$$

To rozwiązanie zawiera tylko jedną stałą dowolną, a więc nie jest rozwiązaniem ogólnym, które musi zawierać dwie stałe dowolne.

c) $\gamma^2 = \omega_0^2$ – aperiodyczny przypadek graniczny

$$\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$$

$$x(t) = A_1 e^{-\gamma t} + A_2 e^{-\gamma t} = (A_1 + A_2) e^{-\gamma t} = \tilde{A}_1 e^{-\gamma t}.$$

To rozwiązanie zawiera tylko jedną stałą dowolną, a więc nie jest rozwiązaniem ogólnym, które musi zawierać dwie stałe dowolne.

Jeżeli λ jest pierwiastkiem dwukrotnym równania charakterystycznego, to rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = \tilde{A}_1 e^{\lambda t} + \tilde{A}_2 t e^{\lambda t}.$$

c) $\gamma^2 = \omega_0^2$ – aperiodyczny przypadek graniczny

$$\Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$$

$$x(t) = A_1 e^{-\gamma t} + A_2 e^{-\gamma t} = (A_1 + A_2) e^{-\gamma t} = \tilde{A}_1 e^{-\gamma t}.$$

To rozwiązanie zawiera tylko jedną stałą dowolną, a więc nie jest rozwiązaniem ogólnym, które musi zawierać dwie stałe dowolne.

Jeżeli λ jest pierwiastkiem dwukrotnym równania charakterystycznego, to rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = \tilde{A}_1 e^{\lambda t} + \tilde{A}_2 t e^{\lambda t}.$$

Aby się przekonać, że tak jest, sprawdźmy, że

$$x(t) = \tilde{A}_1 e^{-\gamma t} + \tilde{A}_2 t e^{-\gamma t}$$

jest rozwiązaniem rozpatrywanego równania

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

jeżeli $\gamma^2 = \omega_0^2$.

Tłumiony oscylator harmoniczny

W tym celu obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\gamma\tilde{A}_1e^{-\gamma t} + \tilde{A}_2e^{-\gamma t} - \gamma\tilde{A}_2te^{-\gamma t}, \\ \ddot{x}(t) &= \gamma^2\tilde{A}_1e^{-\gamma t} - 2\gamma\tilde{A}_2e^{-\gamma t} + \gamma^2\tilde{A}_2te^{-\gamma t}\end{aligned}$$

i sprawdźmy, czy jest spełnione równanie

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2x = 0.$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

W tym celu obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\gamma\tilde{A}_1e^{-\gamma t} + \tilde{A}_2e^{-\gamma t} - \gamma\tilde{A}_2te^{-\gamma t}, \\ \ddot{x}(t) &= \gamma^2\tilde{A}_1e^{-\gamma t} - 2\gamma\tilde{A}_2e^{-\gamma t} + \gamma^2\tilde{A}_2te^{-\gamma t}\end{aligned}$$

i sprawdźmy, czy jest spełnione równanie

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2x = 0.$$

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2x &= (\gamma^2\tilde{A}_1 - 2\gamma\tilde{A}_2 + \gamma^2\tilde{A}_2t)e^{-\gamma t} \\ &+ 2\gamma(-\gamma\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 - \gamma\tilde{A}_2t)e^{-\gamma t} + \gamma^2(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2t)e^{-\gamma t} = \\ &(\gamma^2 - 2\gamma^2 + \gamma^2)\tilde{A}_1e^{-\gamma t} + (-2\gamma + 2\gamma)\tilde{A}_2e^{-\gamma t} \\ &+ (\gamma^2 - 2\gamma^2 + \gamma^2)\tilde{A}_2te^{-\gamma t} = 0.\end{aligned}$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

W tym celu obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\gamma\tilde{A}_1e^{-\gamma t} + \tilde{A}_2e^{-\gamma t} - \gamma\tilde{A}_2te^{-\gamma t}, \\ \ddot{x}(t) &= \gamma^2\tilde{A}_1e^{-\gamma t} - 2\gamma\tilde{A}_2e^{-\gamma t} + \gamma^2\tilde{A}_2te^{-\gamma t}\end{aligned}$$

i sprawdźmy, czy jest spełnione równanie

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2x = 0.$$

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2x &= (\gamma^2\tilde{A}_1 - 2\gamma\tilde{A}_2 + \gamma^2\tilde{A}_2t)e^{-\gamma t} \\ &+ 2\gamma(-\gamma\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 - \gamma\tilde{A}_2t)e^{-\gamma t} + \gamma^2(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2t)e^{-\gamma t} = \\ &(\gamma^2 - 2\gamma^2 + \gamma^2)\tilde{A}_1e^{-\gamma t} + (-2\gamma + 2\gamma)\tilde{A}_2e^{-\gamma t} \\ &+ (\gamma^2 - 2\gamma^2 + \gamma^2)\tilde{A}_2te^{-\gamma t} = 0.\end{aligned}$$

Przyjmijmy warunki początkowe $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, wtedy

$$x(0) = x(t) = \tilde{A}_1 e^0 + \tilde{A}_2 \cdot 0 e^0 = \tilde{A}_1 = 0,$$

$$\dot{x}(0) = -\gamma \tilde{A}_1 e^0 + \tilde{A}_2 e^0 - \gamma \tilde{A}_2 \cdot 0 e^0 = \tilde{A}_2 = \dot{x}_0.$$

Wtedy rozwiązanie szczególne ma postać

$$x(t) = \dot{x}_0 t e^{-\gamma t}.$$

Przyjmijmy warunki początkowe $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, wtedy

$$x(0) = x(t) = \tilde{A}_1 e^0 + \tilde{A}_2 \cdot 0 e^0 = \tilde{A}_1 = 0,$$

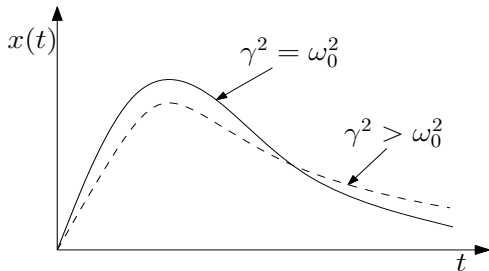
$$\dot{x}(0) = -\gamma \tilde{A}_1 e^0 + \tilde{A}_2 e^0 - \gamma \tilde{A}_2 \cdot 0 e^0 = \tilde{A}_2 = \dot{x}_0.$$

Wtedy rozwiązanie szczególne ma postać

$$x(t) = \dot{x}_0 t e^{-\gamma t}.$$

Tłumiony oscylator harmoniczny

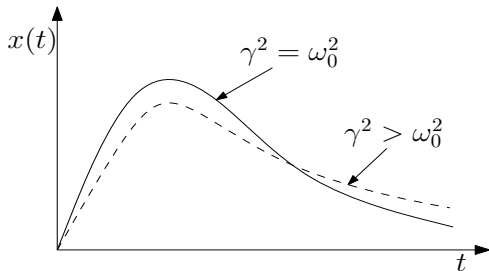
Zilustrujmy przypadek silnego tłumienia ($\gamma^2 > \omega_0^2$) i aperiodyczny przypadek graniczny ($\gamma^2 = \omega_0^2$) wykresem.



Widzimy, że w aperiodycznym przypadku granicznym wychylenia maleją przy $t \rightarrow \infty$ szybciej niż w przypadku silnego tłumienia.

Tłumiony oscylator harmoniczny

Zilustrujmy przypadek silnego tłumienia ($\gamma^2 > \omega_0^2$) i aperiodyczny przypadek graniczny ($\gamma^2 = \omega_0^2$) wykresem.

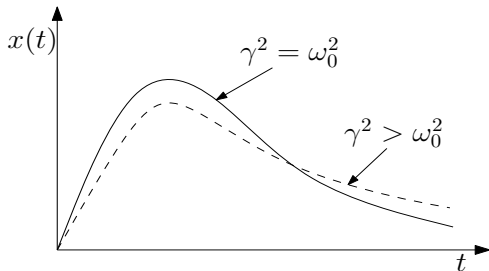


Widzimy, że w aperiodycznym przypadku granicznym wychylenia maleją przy $t \rightarrow \infty$ szybciej niż w przypadku silnego tłumienia.

Dlatego *wskazówkowe przyrządy pomiarowe* pracują właśnie w tym reżimie.

Tłumiony oscylator harmoniczny

Zilustrujmy przypadek silnego tłumienia ($\gamma^2 > \omega_0^2$) i aperiodyczny przypadek graniczny ($\gamma^2 = \omega_0^2$) wykresem.



Widzimy, że w aperiodycznym przypadku granicznym wychylenia maleją przy $t \rightarrow \infty$ szybciej niż w przypadku silnego tłumienia. Dlatego wskazówkowe przyrządy pomiarowe pracują właśnie w tym reżimie.

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego opisywane są równaniem

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \cos \Omega t.$$

Podzielmy przez m

$$\ddot{x} + 2\frac{c}{2m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego opisywane są równaniem

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \cos \Omega t.$$

Podzielmy przez m

$$\ddot{x} + 2\frac{c}{2m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

i oznaczmy

$$\gamma \equiv \frac{c}{2m}, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{K}{m}, \quad f_0 \equiv \frac{F_0}{m},$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego opisywane są równaniem

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \cos \Omega t.$$

Podzielmy przez m

$$\ddot{x} + 2\frac{c}{2m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

i oznaczmy

$$\gamma \equiv \frac{c}{2m}, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{K}{m}, \quad f_0 \equiv \frac{F_0}{m},$$

wówczas otrzymamy równanie

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t.$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego opisywane są równaniem

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \cos \Omega t.$$

Podzielmy przez m

$$\ddot{x} + 2\frac{c}{2m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

i oznaczmy

$$\gamma \equiv \frac{c}{2m}, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{K}{m}, \quad f_0 \equiv \frac{F_0}{m},$$

wówczas otrzymamy równanie

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t.$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Rozwiązanie ogólne $x(t)$ takiego równania niejednorodnego jest sumą

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t)$$

rozwiązania ogólnego równania jednorodnego

$$\ddot{x}_0 + 2\gamma\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Rozwiązanie ogólne $x(t)$ takiego równania niejednorodnego jest sumą

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t)$$

rozwiązania ogólnego równania jednorodnego

$$\ddot{x}_0 + 2\gamma\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$$

i szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego

$$\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = f_0 \cos \Omega t.$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Rozwiązanie ogólne $x(t)$ takiego równania niejednorodnego jest sumą

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t)$$

rozwiązania ogólnego równania jednorodnego

$$\ddot{x}_0 + 2\gamma\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$$

i szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego

$$\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = f_0 \cos \Omega t.$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Poszukajmy rozwiązania **szczególnego** $x_1(t)$ w formie

$$x_1(t) = B \cos \Omega t + C \sin \Omega t.$$

Obliczmy pochodne

$$\dot{x}_1(t) =$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Poszukajmy rozwiązania **szczególnego** $x_1(t)$ w formie

$$x_1(t) = B \cos \Omega t + C \sin \Omega t.$$

Obliczmy pochodne

$$\dot{x}_1(t) = -B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t,$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Poszukajmy rozwiązania **szczególnego** $x_1(t)$ w formie

$$x_1(t) = B \cos \Omega t + C \sin \Omega t.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t, \\ \ddot{x}_1(t) & \end{aligned}$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Poszukajmy rozwiązania **szczególnego** $x_1(t)$ w formie

$$x_1(t) = B \cos \Omega t + C \sin \Omega t.$$

Obliczmy pochodne

$$\dot{x}_1(t) = -B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t,$$

$$\ddot{x}_1(t) =$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Poszukajmy rozwiązania **szczególnego** $x_1(t)$ w formie

$$x_1(t) = B \cos \Omega t + C \sin \Omega t.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t, \\ \ddot{x}_1(t) &= -B\Omega^2 \cos \Omega t - C\Omega^2 \sin \Omega t\end{aligned}$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Poszukajmy rozwiązania **szczególnego** $x_1(t)$ w formie

$$x_1(t) = B \cos \Omega t + C \sin \Omega t.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t, \\ \ddot{x}_1(t) &= -B\Omega^2 \cos \Omega t - C\Omega^2 \sin \Omega t\end{aligned}$$

i wstawmy do równania $\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = f_0 \cos \Omega t$:

$$\begin{aligned}-B\Omega^2 \cos \Omega t - C\Omega^2 \sin \Omega t + 2\gamma(-B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t) \\ + \omega_0^2 (B \cos \Omega t + C \sin \Omega t) = f_0 \cos \Omega t.\end{aligned}$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Poszukajmy rozwiązania **szczególnego** $x_1(t)$ w formie

$$x_1(t) = B \cos \Omega t + C \sin \Omega t.$$

Obliczmy pochodne

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t, \\ \ddot{x}_1(t) &= -B\Omega^2 \cos \Omega t - C\Omega^2 \sin \Omega t\end{aligned}$$

i wstawmy do równania $\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = f_0 \cos \Omega t$:

$$\begin{aligned}-B\Omega^2 \cos \Omega t - C\Omega^2 \sin \Omega t + 2\gamma(-B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t) \\ + \omega_0^2 (B \cos \Omega t + C \sin \Omega t) = f_0 \cos \Omega t.\end{aligned}$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Porównując współczynniki przy $\sin \Omega t$ i $\cos \Omega t$ po obu stronach równania:

$$\begin{aligned} -B\Omega^2 \cos \Omega t - C\Omega^2 \sin \Omega t + 2\gamma(-B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t) \\ + \omega_0^2(B \cos \Omega t + C \sin \Omega t) = f_0 \cos \Omega t \end{aligned}$$

otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} -\Omega^2 B + 2\gamma\Omega C + \omega_0^2 B &= f_0, \\ -\Omega^2 C - 2\gamma\Omega B + \omega_0^2 C &= 0 \Rightarrow C(\omega_0^2 - \Omega^2) = 2\gamma\Omega B. \end{aligned}$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Porównując współczynniki przy $\sin \Omega t$ i $\cos \Omega t$ po obu stronach równania:

$$\begin{aligned} & -B\Omega^2 \cos \Omega t - C\Omega^2 \sin \Omega t + 2\gamma(-B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t) \\ & + \omega_0^2 (B \cos \Omega t + C \sin \Omega t) = f_0 \cos \Omega t \end{aligned}$$

otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} -\Omega^2 B + 2\gamma\Omega C + \omega_0^2 B &= f_0, \\ -\Omega^2 C - 2\gamma\Omega B + \omega_0^2 C &= 0 \Rightarrow C(\omega_0^2 - \Omega^2) = 2\gamma\Omega B. \end{aligned}$$

W takim razie, jeśli $\Omega \neq \omega_0$, to

$$C = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} B,$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Porównując współczynniki przy $\sin \Omega t$ i $\cos \Omega t$ po obu stronach równania:

$$\begin{aligned} -B\Omega^2 \cos \Omega t - C\Omega^2 \sin \Omega t + 2\gamma(-B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t) \\ + \omega_0^2 (B \cos \Omega t + C \sin \Omega t) = f_0 \cos \Omega t \end{aligned}$$

otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} -\Omega^2 B + 2\gamma\Omega C + \omega_0^2 B &= f_0, \\ -\Omega^2 C - 2\gamma\Omega B + \omega_0^2 C &= 0 \Rightarrow C(\omega_0^2 - \Omega^2) = 2\gamma\Omega B. \end{aligned}$$

W takim razie, jeśli $\Omega \neq \omega_0$, to

$$C = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} B,$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

a po wstawieniu do pierwszego równania otrzymamy

$$(\omega_0^2 - \Omega^2) B + \frac{(2\gamma\Omega)^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} B = f_0,$$

a więc

$$B = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} f_0, \quad C = \frac{2\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} f_0.$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

a po wstawieniu do pierwszego równania otrzymamy

$$(\omega_0^2 - \Omega^2) B + \frac{(2\gamma\Omega)^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} B = f_0,$$

a więc

$$B = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} f_0, \quad C = \frac{2\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} f_0.$$

Podstawmy $B \equiv A \cos \varphi$ i $C \equiv A \sin \varphi$, wtedy

$$A = \sqrt{B^2 + C^2} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{C}{B} = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

a po wstawieniu do pierwszego równania otrzymamy

$$(\omega_0^2 - \Omega^2) B + \frac{(2\gamma\Omega)^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} B = f_0,$$

a więc

$$B = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} f_0, \quad C = \frac{2\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} f_0.$$

Podstawmy $B \equiv A \cos \varphi$ i $C \equiv A \sin \varphi$, wtedy

$$A = \sqrt{B^2 + C^2} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{C}{B} = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Rozwiązanie szczególne $x_1(t)$ przybiera postać

$$x_1(t) = A \cos \varphi \cos \Omega t + A \sin \varphi \sin \Omega t = A \cos(\Omega t - \varphi).$$

Zauważmy, że jeśli $\Omega = \omega_0$, to

$$C(\omega_0^2 - \Omega^2) = 2\gamma\Omega B = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Rozwiązanie szczególne $x_1(t)$ przybiera postać

$$x_1(t) = A \cos \varphi \cos \Omega t + A \sin \varphi \sin \Omega t = A \cos(\Omega t - \varphi).$$

Zauważmy, że jeśli $\Omega = \omega_0$, to

$$C(\omega_0^2 - \Omega^2) = 2\gamma\Omega B = 0 \Rightarrow B = 0.$$

a z równania

$$-\Omega^2 B + 2\gamma\Omega C + \omega_0^2 B = f_0 \Rightarrow 2\gamma\Omega C = f_0 \Rightarrow C = \frac{f_0}{2\gamma\Omega},$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Rozwiązanie szczególne $x_1(t)$ przybiera postać

$$x_1(t) = A \cos \varphi \cos \Omega t + A \sin \varphi \sin \Omega t = A \cos(\Omega t - \varphi).$$

Zauważmy, że jeśli $\Omega = \omega_0$, to

$$C(\omega_0^2 - \Omega^2) = 2\gamma\Omega B = 0 \Rightarrow B = 0.$$

a z równania

$$-\Omega^2 B + 2\gamma\Omega C + \omega_0^2 B = f_0 \Rightarrow 2\gamma\Omega C = f_0 \Rightarrow C = \frac{f_0}{2\gamma\Omega},$$

co jest szczególnym przypadkiem wzorów

$$B = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} f_0, \quad C = \frac{2\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} f_0.$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Rozwiązanie szczególne $x_1(t)$ przybiera postać

$$x_1(t) = A \cos \varphi \cos \Omega t + A \sin \varphi \sin \Omega t = A \cos(\Omega t - \varphi).$$

Zauważmy, że jeśli $\Omega = \omega_0$, to

$$C(\omega_0^2 - \Omega^2) = 2\gamma\Omega B = 0 \Rightarrow B = 0.$$

a z równania

$$-\Omega^2 B + 2\gamma\Omega C + \omega_0^2 B = f_0 \Rightarrow 2\gamma\Omega C = f_0 \Rightarrow C = \frac{f_0}{2\gamma\Omega},$$

co jest szczególnym przypadkiem wzorów

$$B = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} f_0, \quad C = \frac{2\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} f_0.$$

Związki

$$B = A \cos \varphi = 0 \quad \text{i} \quad C = A \sin \varphi = \frac{f_0}{2\gamma\Omega}$$

możemy spełnić wybierając

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad C = A = \frac{f_0}{2\gamma\Omega}$$

i nasze rozwiązanie ma taką samą postać jak dla $\Omega \neq \omega_0$:

$$x_1(t) = A \cos \frac{\pi}{2} \cos \Omega t + A \sin \frac{\pi}{2} \sin \Omega t = A \cos \left(\Omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Związki

$$B = A \cos \varphi = 0 \quad \text{ i } \quad C = A \sin \varphi = \frac{f_0}{2\gamma\Omega}$$

możemy spełnić wybierając

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad C = A = \frac{f_0}{2\gamma\Omega}$$

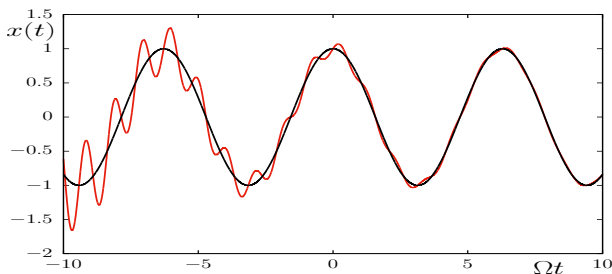
i nasze rozwiązanie ma taką samą postać jak dla $\Omega \neq \omega_0$:

$$x_1(t) = A \cos \frac{\pi}{2} \cos \Omega t + A \sin \frac{\pi}{2} \sin \Omega t = A \cos \left(\Omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

W przypadku słabego tłumienia ($\omega_0^2 > \gamma^2$) otrzymamy następujące rozwiązanie ogólne

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) = ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha) + A \cos(\Omega t - \varphi).$$

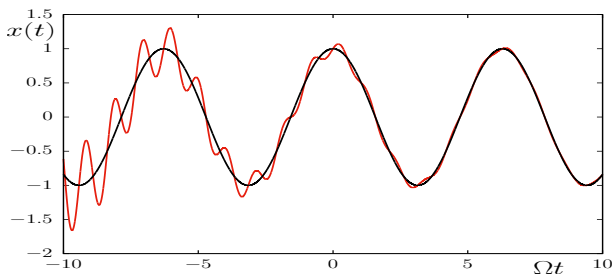


Oscylacje wokół wiodącego wyrazu $A \cos(\Omega t - \varphi)$ maleją przy tym eksponencjalnie.

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

W przypadku słabego tłumienia ($\omega_0^2 > \gamma^2$) otrzymamy następujące rozwiązanie ogólne

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) = ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha) + A \cos(\Omega t - \varphi).$$



Oscylacje wokół wiodącego wyrazu $A \cos(\Omega t - \varphi)$ maleją przy tym eksponencjalnie.

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Po długim czasie pozostanie tylko tzw. **składowa stacjonarna drgania**

$$x(t) = A \cos(\Omega t - \varphi).$$

Znajdźmy częstotliwość rezonansową, która odpowiada maksimum amplitudy

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}.$$

Po długim czasie pozostanie tylko tzw. **składowa stacjonarna drgania**

$$x(t) = A \cos(\Omega t - \varphi).$$

Znajdźmy częstość rezonansową, która odpowiada maksimum amplitudy

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}.$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Oznaczmy wyrażenie podpierwiastkowe w mianowniku wzoru na A przez

$$f(\Omega^2) \equiv (\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2$$

i przyrównajmy jego pochodną do zera

$$\frac{df(\Omega^2)}{d\Omega^2} = 2(\Omega^2 - \omega_0^2) + 4\gamma^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2 = 0.$$

Drgania wymuszone oscylatora tłumionego

Oznaczmy wyrażenie podpierwiastkowe w mianowniku wzoru na A przez

$$f(\Omega^2) \equiv (\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2$$

i przyrównajmy jego pochodną do zera

$$\frac{df(\Omega^2)}{d\Omega^2} = 2(\Omega^2 - \omega_0^2) + 4\gamma^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2 = 0.$$

Otrzymujemy stąd częstość rezonansową

$$\Omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \quad \Rightarrow \quad \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2},$$

Oznaczmy wyrażenie podpierwiastkowe w mianowniku wzoru na A przez

$$f(\Omega^2) \equiv (\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2$$

i przyrównajmy jego pochodną do zera

$$\frac{df(\Omega^2)}{d\Omega^2} = 2(\Omega^2 - \omega_0^2) + 4\gamma^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2 = 0.$$

Otrzymujemy stąd częstość rezonansową

$$\Omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \quad \Rightarrow \quad \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2},$$

której odpowiada amplituda rezonansowa

$$\begin{aligned} A_{\max} &= A(\Omega_R) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2)^2 + 4\gamma^2(\omega_0^2 - 2\gamma^2)}} = \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{4\gamma^4 + 4\gamma^2\omega_0^2 - 8\gamma^4}} = \frac{f_0}{\sqrt{4\gamma^2\omega_0^2 - 4\gamma^4}} = \\ &= \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{f_0}{2\gamma\omega}, \end{aligned}$$

gdzie, tak jak poprzednio, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

której odpowiada amplituda rezonansowa

$$\begin{aligned} A_{\max} &= A(\Omega_R) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2)^2 + 4\gamma^2(\omega_0^2 - 2\gamma^2)}} = \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{4\gamma^4 + 4\gamma^2\omega_0^2 - 8\gamma^4}} = \frac{f_0}{\sqrt{4\gamma^2\omega_0^2 - 4\gamma^4}} = \\ &= \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{f_0}{2\gamma\omega}, \end{aligned}$$

gdzie, tak jak poprzednio, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Rezonans jest zjawiskiem występującym powszechnie w przyrodzie.

której odpowiada amplituda rezonansowa

$$\begin{aligned} A_{\max} &= A(\Omega_R) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2)^2 + 4\gamma^2(\omega_0^2 - 2\gamma^2)}} = \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{4\gamma^4 + 4\gamma^2\omega_0^2 - 8\gamma^4}} = \frac{f_0}{\sqrt{4\gamma^2\omega_0^2 - 4\gamma^4}} = \\ &= \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{f_0}{2\gamma\omega}, \end{aligned}$$

gdzie, tak jak poprzednio, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Rezonans jest zjawiskiem występującym powszechnie w przyrodzie.