

Równania Lagrange'a II rodzaju

Wykład 4

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy układ N punktów materialnych z więzami holonomicznymi danymi równaniami

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Po wyleliminowaniu k zależnych współrzędnych związki pomiędzy wektorami położenia poszczególnych punktów a $n = 3N - k$ pozostałymi, niezależnymi współrzędnymi uogólnionymi dane są równaniami

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Rozważmy układ N punktów materialnych z więzami holonomicznymi danymi równaniami

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Po wyleliminowaniu k zależnych współrzędnych związki pomiędzy wektorami położenia poszczególnych punktów a $n = 3N - k$ pozostałymi, niezależnymi współrzędnymi uogólnionymi dane są równaniami

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Obliczmy pochodną czasową związków

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\dot{\vec{r}}_i$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Obliczmy pochodną czasową związków

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\dot{\vec{r}}_i =$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Obliczmy pochodną czasową związków

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

Obliczmy pochodną czasową związków

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &= \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \dot{\vec{r}}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\end{aligned}$$

i zróżniczkujemy obustronnie po $\dot{q}_l$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} =$$

Obliczmy pochodną czasową związków

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &= \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \dot{\vec{r}}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\end{aligned}$$

i zróżniczkujemy obustronnie po $\dot{q}_l$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_l} =$$

Obliczmy pochodną czasową związków

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &= \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \dot{\vec{r}}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\end{aligned}$$

i zróżniczkujemy obustronnie po $\dot{q}_l$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta_{jl} =$$

Obliczmy pochodną czasową związków

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &= \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \dot{\vec{r}}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\end{aligned}$$

i zróżniczkujemy obustronnie po $\dot{q}_l$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta_{jl} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l},$$

Obliczmy pochodną czasową związków

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &= \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \dot{\vec{r}}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\end{aligned}$$

i zróżniczkujemy obustronnie po $\dot{q}_l$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta_{jl} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l},$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ i $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$ nie zależą od $\dot{q}_l$, gdyż różniczkowanie jawnej zależności od czasu nie wprowadza zależności od $\dot{q}_l$.

Obliczmy pochodną czasową związków

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &= \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \dot{\vec{r}}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\end{aligned}$$

i zróżniczkujemy obustronnie po $\dot{q}_l$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta_{jl} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l},$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ i $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$ nie zależą od $\dot{q}_l$, gdyż różniczkowanie jawnej zależności od czasu nie wprowadza zależności od $\dot{q}_l$.

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Różniczkując obustronnie po q_l wzór

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

dostaniemy

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_l} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_l}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Różniczkując obustronnie po q_l wzór

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

dostaniemy

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_l} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_l}.$$

Z drugiej strony, pochodna $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}$ jest funkcją współrzędnych $q_1, q_2, \dots, q_n$ i czasu, więc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_l \partial t}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Różniczkując obustronnie po q_l wzór

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

dostaniemy

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_l} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_l}.$$

Z drugiej strony, pochodna $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}$ jest funkcją współrzędnych $q_1, q_2, \dots, q_n$ i czasu, więc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_l \partial t}.$$

Dla funkcji klasy C^2 odpowiednie pochodne mieszane są równe, więc

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l} \frac{d\vec{r}_i}{dt} =$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Dla funkcji klasy $\mathcal{C}^2$ odpowiednie pochodne mieszane są równe, więc

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right).$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Dla funkcji klasy $\mathcal{C}^2$ odpowiednie pochodne mieszane są równe, więc

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right).$$

Zatem dla dowolnej funkcji klasy $\mathcal{C}^2$ możemy zamieniać kolejność pochodnych

$$\frac{\partial}{\partial q_l} \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_l}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Dla funkcji klasy $\mathcal{C}^2$ odpowiednie pochodne mieszane są równe, więc

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right).$$

Zatem dla dowolnej funkcji klasy $\mathcal{C}^2$ możemy zamieniać kolejność pochodnych

$$\frac{\partial}{\partial q_l} \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_l}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozpatrywany układ jest opisywany równaniem d'Alemberta

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Przesunięcia wirtualne dane są wzorem

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie pominęliśmy znikający wyraz, który pojawiłby się w wyrażeniu na różniczkę zupełną $d\vec{r}_i$

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \delta t = 0, \quad \text{bo} \quad \delta t = 0,$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozpatrywany układ jest opisywany równaniem d'Alemberta

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Przesunięcia wirtualne dane są wzorem

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie pominęliśmy znikający wyraz, który pojawiłby się w wyrażeniu na różniczkę zupełną $d\vec{r}_i$

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \delta t = 0, \quad \text{bo} \quad \delta t = 0,$$

gdyż przesunięcia wirtualne są natychmiastowe.

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozpatrywany układ jest opisywany równaniem d'Alemberta

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Przesunięcia wirtualne dane są wzorem

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie pominęliśmy znikający wyraz, który pojawiłby się w wyrażeniu na różniczkę zupełną $d\vec{r}_i$

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \delta t = 0, \quad \text{bo} \quad \delta t = 0,$$

gdyż **przesunięcia wirtualne są natychmiastowe.**

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy drugi wyraz w tym równaniu, który opisuje sumę prac wirtualnych wszystkich sił aktywnych.

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} =$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy drugi wyraz w tym równaniu, który opisuje sumę prac wirtualnych wszystkich sił aktywnych.

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left[\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right]}_{Q_j} \delta q_j$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy drugi wyraz w tym równaniu, który opisuje sumę prac wirtualnych wszystkich sił aktywnych.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left[\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right]}_{Q_j} \delta q_j \\ &= \end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy drugi wyraz w tym równaniu, który opisuje sumę prac wirtualnych wszystkich sił aktywnych.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left[\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right]}_{Q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j,\end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy drugi wyraz w tym równaniu, który opisuje sumę prac wirtualnych wszystkich sił aktywnych.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left[\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right]}_{Q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j,\end{aligned}$$

gdzie wstawiliśmy wyrażenie dla $\delta \vec{r}_i$,

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy drugi wyraz w tym równaniu, który opisuje sumę prac wirtualnych wszystkich sił aktywnych.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left[\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right]}_{Q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j,\end{aligned}$$

gdzie wstawiliśmy wyrażenie dla $\delta \vec{r}_i$, zamieniliśmy kolejność sumowania

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy drugi wyraz w tym równaniu, który opisuje sumę prac wirtualnych wszystkich sił aktywnych.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left[\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right]}_{Q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j,\end{aligned}$$

gdzie wstawiliśmy wyrażenie dla $\delta \vec{r}_i$, zamieniliśmy kolejność sumowania i wprowadziliśmy symbol siły uogólnionej Q_j ,

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy drugi wyraz w tym równaniu, który opisuje sumę prac wirtualnych wszystkich sił aktywnych.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left[\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right]}_{Q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j,\end{aligned}$$

gdzie wstawiliśmy wyrażenie dla $\delta \vec{r}_i$, zamieniliśmy kolejność sumowania i wprowadziliśmy symbol **siły uogólnionej** Q_j , która dana jest wzorem

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy drugi wyraz w tym równaniu, który opisuje sumę prac wirtualnych wszystkich sił aktywnych.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left[\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right]}_{Q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j,\end{aligned}$$

gdzie wstawiliśmy wyrażenie dla $\delta \vec{r}_i$, zamieniliśmy kolejność sumowania i wprowadziliśmy symbol **siły uogólnionej** Q_j , która dana jest wzorem

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy pierwszy wyraz w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i =$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy pierwszy wyraz w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} =$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy pierwszy wyraz w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy pierwszy wyraz w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

gdzie znowu wstawiliśmy wyrażenie na $\delta \vec{r}_i$ i zamieniliśmy kolejność sumowania.

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy pierwszy wyraz w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

gdzie znowu wstawiliśmy wyrażenie na $\delta \vec{r}_i$ i zamieniliśmy kolejność sumowania.

Skorzystajmy z wzoru na pochodną iloczynu

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy pierwszy wyraz w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

gdzie znowu wstawiliśmy wyrażenie na $\delta \vec{r}_i$ i zamieniliśmy kolejność sumowania.

Skorzystajmy z wzoru na pochodną iloczynu

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$\Rightarrow$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy pierwszy wyraz w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

gdzie znowu wstawiliśmy wyrażenie na $\delta \vec{r}_i$ i zamieniliśmy kolejność sumowania.

Skorzystajmy z wzoru na pochodną iloczynu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy pierwszy wyraz w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

gdzie znowu wstawiliśmy wyrażenie na $\delta \vec{r}_i$ i zamieniliśmy kolejność sumowania.

Skorzystajmy z wzoru na pochodną iloczynu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Skorzystajmy z udowodnionych wcześniej tożsamości:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \quad \text{i} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l}$$

we wzorze

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Skorzystajmy z udowodnionych wcześniej tożsamości:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \quad \text{i} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l}$$

we wzorze

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}.$$

Zauważmy ponadto, że

$$\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{oraz} \quad \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial q_j}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Skorzystajmy z udowodnionych wcześniej tożsamości:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \quad \text{i} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l}$$

we wzorze

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}.$$

Zauważmy ponadto, że

$$\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{oraz} \quad \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial q_j}.$$

Dlatego

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial q_j}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Skorzystajmy z udowodnionych wcześniej tożsamości:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \quad \text{i} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l}$$

we wzorze

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}.$$

Zauważmy ponadto, że

$$\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{oraz} \quad \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial q_j}.$$

Dlatego

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial q_j}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{q}_j} \delta \vec{q}_j$$
$$=$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial q_j} \right] \delta q_j\end{aligned}$$

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\ &= \end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{q}_j} \delta q_j \\&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\&= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) \right] \delta q_j\end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \delta \mathbf{q}_j \\&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \mathbf{q}_j} \right] \delta \mathbf{q}_j \\&= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) \right] \delta \mathbf{q}_j \\&= \end{aligned}$$

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \delta \mathbf{q}_j \\&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \mathbf{q}_j} \right] \delta \mathbf{q}_j \\&= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) \right] \delta \mathbf{q}_j \\&= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_j} \right] \delta \mathbf{q}_j,\end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \delta \mathbf{q}_j \\&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \mathbf{q}_j} \right] \delta \mathbf{q}_j \\&= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) \right] \delta \mathbf{q}_j \\&= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_j} \right] \delta \mathbf{q}_j,\end{aligned}$$

gdzie wyciągnęliśmy pochodne przed sumę po i oraz

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \delta \mathbf{q}_j \\&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \mathbf{q}_j} \right] \delta \mathbf{q}_j \\&= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) \right] \delta \mathbf{q}_j \\&= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_j} \right] \delta \mathbf{q}_j,\end{aligned}$$

gdzie wyciągnęliśmy pochodne przed sumę po i oraz

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

wprowadziliśmy wzór na energię kinetyczną układu N punktów materialnych

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2.$$

Wstawmy otrzymane wyniki do równania d'Alemberta

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i =$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

wprowadziliśmy wzór na energię kinetyczną układu N punktów materialnych

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2.$$

Wstawmy otrzymane wyniki do równania d'Alemberta

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j - \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

wprowadziliśmy wzór na **energię kinetyczną układu N punktów materialnych**

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2.$$

Wstawmy otrzymane wyniki do równania d'Alemberta

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j - \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j$$

=

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

wprowadziliśmy wzór na **energię kinetyczną układu N punktów materialnych**

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2.$$

Wstawmy otrzymane wyniki do równania d'Alemberta

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j - \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

wprowadziliśmy wzór na energię kinetyczną układu N punktów materialnych

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2.$$

Wstawmy otrzymane wyniki do równania d'Alemberta

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j - \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \end{aligned}$$

Ponieważ wszystkie przesunięcia wirtualne δq_j , $j = 1, 2, \dots, n$, są niezależne,

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

wprowadziliśmy wzór na energię kinetyczną układu N punktów materialnych

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2.$$

Wstawmy otrzymane wyniki do równania d'Alemberta

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j - \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \end{aligned}$$

Ponieważ wszystkie przesunięcia wirtualne δq_j , $j = 1, 2, \dots, n$, są niezależne,

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

to wszystkie współczynniki tej kombinacji liniowej muszą zniknąć, a więc

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

W mechanice istotną rolę odgrywają siły zachowawcze, dla których istnieje potencjał $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \equiv V(\vec{r}, t)$, taki że

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}, t)$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

to wszystkie współczynniki tej kombinacji liniowej muszą zniknąć, a więc

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

W mechanice istotną rolę odgrywają siły zachowawcze, dla których istnieje potencjał $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \equiv V(\vec{r}, t)$, taki że

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}, t) = - \left[\frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial V}{\partial y_i}, \frac{\partial V}{\partial z_i} \right]$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

to wszystkie współczynniki tej kombinacji liniowej muszą zniknąć, a więc

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

W mechanice istotną rolę odgrywają siły zachowawcze, dla których istnieje potencjał $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \equiv V(\vec{r}, t)$, taki że

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}, t) = -\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial V}{\partial y_i}, \frac{\partial V}{\partial z_i} \right] \equiv -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

to wszystkie współczynniki tej kombinacji liniowej muszą zniknąć, a więc

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

W mechanice istotną rolę odgrywają siły zachowawcze, dla których istnieje potencjał $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \equiv V(\vec{r}, t)$, taki że

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}, t) = -\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial V}{\partial y_i}, \frac{\partial V}{\partial z_i} \right] \equiv -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}.$$

Dla sił zachowawczych siła uogólniona ma postać

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

to wszystkie współczynniki tej kombinacji liniowej muszą zniknąć, a więc

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

W mechanice istotną rolę odgrywają siły zachowawcze, dla których istnieje potencjał $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \equiv V(\vec{r}, t)$, taki że

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}, t) = -\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial V}{\partial y_i}, \frac{\partial V}{\partial z_i} \right] \equiv -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}.$$

Dla sił zachowawczych siła uogólniona ma postać

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

to wszystkie współczynniki tej kombinacji liniowej muszą zniknąć, a więc

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

W mechanice istotną rolę odgrywają siły zachowawcze, dla których istnieje potencjał $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \equiv V(\vec{r}, t)$, taki że

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}, t) = -\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial V}{\partial y_i}, \frac{\partial V}{\partial z_i} \right] \equiv -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}.$$

Dla sił zachowawczych siła uogólniona ma postać

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V(q, t)}{\partial q_j}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

to wszystkie współczynniki tej kombinacji liniowej muszą zniknąć, a więc

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

W mechanice istotną rolę odgrywają siły zachowawcze, dla których istnieje potencjał $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \equiv V(\vec{r}, t)$, taki że

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}, t) = -\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial V}{\partial y_i}, \frac{\partial V}{\partial z_i} \right] \equiv -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}.$$

Dla sił zachowawczych siła uogólniona ma postać

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V(q, t)}{\partial q_j}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Uwaga: Biorąc ściśle, V jest energią potencjalną.

Nasze równania przyjmują teraz postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Uwaga: Biorąc ściśle, V jest energią potencjalną.

Nasze równania przyjmują teraz postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Ponieważ $V(q, t)$ nie zależy od prędkości, to $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$, więc

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Uwaga: Biorąc ściśle, V jest energią potencjalną.

Nasze równania przyjmują teraz postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Ponieważ $V(q, t)$ nie zależy od prędkości, to $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$, więc

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Zdefiniujmy funkcję Lagrange'a

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t),$$

która jest różnicą energii kinetycznej i potencjalnej,

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Uwaga: Biorąc ściśle, V jest energią potencjalną.
Nasze równania przyjmują teraz postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Ponieważ $V(q, t)$ nie zależy od prędkości, to $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$, więc

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Zdefiniujmy funkcję Lagrange'a

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t),$$

która jest różnicą energii kinetycznej i potencjalnej,

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

wówczas otrzymamy równania Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Są one równaniami różniczkowymi drugiego rzędu, gdyż zawierają drugie pochodne.

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

wówczas otrzymamy równania Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Są one równaniami różniczkowymi drugiego rzędu, gdyż zawierają drugie pochodne.

Dla odpowiednio regularnych energii potencjalnych $V(q, t)$ posiadają one jednoznaczne rozwiązania przy warunkach początkowych na współrzędne i prędkości uogólnione

$$q_j(0) = q_{j0}, \quad \dot{q}_j(0) = \dot{q}_{j0}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

wówczas otrzymamy **równania Lagrange'a II rodzaju**:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Są one równaniami różniczkowymi drugiego rzędu, gdyż zawierają drugie pochodne.

Dla odpowiednio regularnych energii potencjalnych $V(q, t)$ posiadają one jednoznaczne rozwiązania przy warunkach początkowych na współrzędne i prędkości uogólnione

$$q_j(0) = q_{j0}, \quad \dot{q}_j(0) = \dot{q}_{j0}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Równania Lagrange'a II rodzaju są spełnione dla **więzów holonomicznych**.

wówczas otrzymamy **równania Lagrange'a II rodzaju**:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Są one równaniami różniczkowymi drugiego rzędu, gdyż zawierają drugie pochodne.

Dla odpowiednio regularnych energii potencjalnych $V(q, t)$ posiadają one jednoznaczne rozwiązania przy warunkach początkowych na współrzędne i prędkości uogólnione

$$q_j(0) = q_{j0}, \quad \dot{q}_j(0) = \dot{q}_{j0}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Równania Lagrange'a II rodzaju są spełnione dla **więzów holonomicznych**.

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do równań

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Równania Lagrange'a moglibyśmy również otrzymać zakładając istnienie tzw. **potencjału uogólnionego** $V(q, \dot{q}, t)$, zależnego od prędkości, który wiąże się z siłą uogólnioną Q_j wzorem

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do równań

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Równania Lagrange'a moglibyśmy również otrzymać zakładając istnienie tzw. **potencjału uogólnionego** $V(q, \dot{q}, t)$, zależnego od prędkości, który wiąże się z siłą uogólnioną Q_j wzorem

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}.$$

Po wstawieniu otrzymamy równania

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do równań

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Równania Lagrange'a moglibyśmy również otrzymać zakładając istnienie tzw. **potencjału uogólnionego** $V(q, \dot{q}, t)$, zależnego od prędkości, który wiąże się z siłą uogólnioną Q_j wzorem

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}.$$

Po wstawieniu otrzymamy równania

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

a wprowadzając funkcję Lagrange'a

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t),$$

dostaniemy równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

a wprowadzając funkcję Lagrange'a

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t),$$

dostaniemy równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Znaczenie potencjałów uogólnionych w fizyce teoretycznej ilustruje następujący przykład.

a wprowadzając funkcję Lagrange'a

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t),$$

dostaniemy równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Znaczenie potencjałów uogólnionych w fizyce teoretycznej ilustruje następujący przykład.

Przykład 1: Na cząstkę o masie m i ładunku elektrycznym q znajdującą się w polu elektromagnetycznym o natężeniu pola elektrycznego $\vec{E}$ i indukcji magnetycznej $\vec{B}$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t),$$

gdzie $\varphi(\vec{r}, t)$ i $\vec{A}(\vec{r}, t)$ są odpowiednio potencjałami skalarnym i wektorowym,

Przykład 1: Na cząstkę o masie m i ładunku elektrycznym q znajdującą się w polu elektromagnetycznym o natężeniu pola elektrycznego $\vec{E}$ i indukcji magnetycznej $\vec{B}$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t),$$

gdzie $\varphi(\vec{r}, t)$ i $\vec{A}(\vec{r}, t)$ są odpowiednio potencjałami skalarnym i wektorowym, *działa siła Lorentza*

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right).$$

Przykład 1: Na cząstkę o masie m i ładunku elektrycznym q znajdującą się w polu elektromagnetycznym o natężeniu pola elektrycznego $\vec{E}$ i indukcji magnetycznej $\vec{B}$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t),$$

gdzie $\varphi(\vec{r}, t)$ i $\vec{A}(\vec{r}, t)$ są odpowiednio potencjałami skalarnym i wektorowym, **działa siła Lorentza**

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right).$$

Dla siły Lorentza nie istnieje potencjał.

Przykład 1: Na cząstkę o masie m i ładunku elektrycznym q znajdującą się w polu elektromagnetycznym o natężeniu pola elektrycznego $\vec{E}$ i indukcji magnetycznej $\vec{B}$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t),$$

gdzie $\varphi(\vec{r}, t)$ i $\vec{A}(\vec{r}, t)$ są odpowiednio potencjałami skalarnym i wektorowym, **działa siła Lorentza**

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right).$$

Dla siły Lorentza nie istnieje potencjał. Można ją jednak wyprowadzić z potencjału uogólnionego postaci

Przykład 1: Na cząstkę o masie m i ładunku elektrycznym q znajdującą się w polu elektromagnetycznym o natężeniu pola elektrycznego $\vec{E}$ i indukcji magnetycznej $\vec{B}$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t),$$

gdzie $\varphi(\vec{r}, t)$ i $\vec{A}(\vec{r}, t)$ są odpowiednio potencjałami skalarnym i wektorowym, **działa siła Lorentza**

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right).$$

Dla siły Lorentza nie istnieje potencjał. Można ją jednak wyprowadzić **z potencjału uogólnionego postaci**

$$V(\vec{r}, \vec{v}, t) = q \left(\varphi(\vec{r}, t) - \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v} \right).$$

Najpierw pokażemy, że w przypadku, gdy położenie punktu opisujemy współrzędnymi kartezjańskimi (x_1, x_2, x_3) , siły uogólnione

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

pokrywają się ze składowymi kartezjańskimi siły $\vec{F}_i$.

$$V(\vec{r}, \vec{v}, t) = q \left(\varphi(\vec{r}, t) - \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v} \right).$$

Najpierw pokażemy, że w przypadku, gdy położenie punktu opisujemy współzrędnymi kartezjańskimi (x_1, x_2, x_3) , siły uogólnione

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

pokrywają się ze składowymi kartezjańskimi siły $\vec{F}_i$.

Dla prostoty dowód przeprowadzimy dla przypadku jednego punktu materialnego.

$$V(\vec{r}, \vec{v}, t) = q \left(\varphi(\vec{r}, t) - \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v} \right).$$

Najpierw pokażemy, że w przypadku, gdy położenie punktu opisujemy współzrędnymi kartezjańskimi (x_1, x_2, x_3) , siły uogólnione

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

pokrywają się ze składowymi kartezjańskimi siły $\vec{F}_i$.

Dla prostoty dowód przeprowadzimy dla przypadku jednego punktu materialnego.

Rzeczywiście, dla $N = 1$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ i $q_j = x_j$ otrzymamy

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} = F_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j}$$

Rzeczywiście, dla $N = 1$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ i $q_j = x_j$ otrzymamy

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} = F_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = F_i \delta_{ij}$$

Rzeczywiście, dla $N = 1$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ i $q_j = x_j$ otrzymamy

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} = F_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = F_i \delta_{ij} = F_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $N = 1$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ i $q_j = x_j$ otrzymamy

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} = F_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = F_i \delta_{ij} = F_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Zatem i -ta składowa siły Lorentza powinna wyrazić się wzorem

$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

Rzeczywiście, dla $N = 1$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ i $q_j = x_j$ otrzymamy

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} = F_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = F_i \delta_{ij} = F_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Zatem i -ta składowa siły Lorentza powinna wyrazić się wzorem

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i} \\ &= \end{aligned}$$

Rzeczywiście, dla $N = 1$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ i $q_j = x_j$ otrzymamy

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} = F_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = F_i \delta_{ij} = F_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Zatem i -ta składowa siły Lorentza powinna wyrazić się wzorem

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} [q(\varphi - A_j \dot{x}_j)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [q(\varphi - A_j \dot{x}_j)] \end{aligned}$$

Rzeczywiście, dla $N = 1$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ i $q_j = x_j$ otrzymamy

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} = F_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = F_i \delta_{ij} = F_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Zatem i -ta składowa siły Lorentza powinna wyrazić się wzorem

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} [q(\varphi - A_j \dot{x}_j)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [q(\varphi - A_j \dot{x}_j)] \\ &= \end{aligned}$$

Rzeczywiście, dla $N = 1$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ i $q_j = x_j$ otrzymamy

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} = F_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = F_i \delta_{ij} = F_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Zatem i -ta składowa siły Lorentza powinna wyrazić się wzorem

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} [q(\varphi - A_j \dot{x}_j)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [q(\varphi - A_j \dot{x}_j)] \\ &= -q \underbrace{\frac{d}{dt} \left(A_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_i} \right)}_{A_j \delta_{ij} = A_i} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j, \end{aligned}$$

Rzeczywiście, dla $N = 1$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ i $q_j = x_j$ otrzymamy

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} = F_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = F_i \delta_{ij} = F_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Zatem i -ta składowa siły Lorentza powinna wyrazić się wzorem

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} [q(\varphi - A_j \dot{x}_j)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [q(\varphi - A_j \dot{x}_j)] \\ &= -q \frac{d}{dt} \underbrace{\left(A_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_i} \right)}_{A_j \delta_{ij} = A_i} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_i &= -q \frac{dA_i}{dt} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_i &= -q \frac{dA_i}{dt} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\&= -q \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_i &= -q \frac{dA_i}{dt} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\ &= -q \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_i &= -q \frac{dA_i}{dt} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\&= -q \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\&= q \underbrace{\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)}_{E_i} + q \dot{x}_j \underbrace{\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right)}_{(\vec{v} \times \vec{B})_i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_i &= -q \frac{dA_i}{dt} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\&= -q \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\&= q \underbrace{\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)}_{E_i} + q \dot{x}_j \underbrace{\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right)}_{(\vec{v} \times \vec{B})_i} \\&= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_i &= -q \frac{dA_i}{dt} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\&= -q \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\&= q \underbrace{\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)}_{E_i} + q \dot{x}_j \underbrace{\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right)}_{(\vec{v} \times \vec{B})_i} \\&= q \left[E_i + (\vec{v} \times \vec{B})_i \right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_i &= -q \frac{dA_i}{dt} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\&= -q \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\&= q \underbrace{\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)}_{E_i} + q \dot{x}_j \underbrace{\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right)}_{(\vec{v} \times \vec{B})_i} \\&= q \left[E_i + (\vec{v} \times \vec{B})_i \right].\end{aligned}$$

Aby skończyć dowód musimy pokazać, że

$$(\vec{v} \times \vec{B})_i = \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right).$$

$$\begin{aligned}F_i &= -q \frac{dA_i}{dt} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\&= -q \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \\&= q \underbrace{\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)}_{E_i} + q \dot{x}_j \underbrace{\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right)}_{(\vec{v} \times \vec{B})_i} \\&= q \left[E_i + (\vec{v} \times \vec{B})_i \right].\end{aligned}$$

Aby skończyć dowód musimy pokazać, że

$$(\vec{v} \times \vec{B})_i = \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right).$$

Rzeczywiście

$$(\vec{v} \times \vec{B})_i = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k$$

Rzeczywiście

$$(\vec{v} \times \vec{B})_i = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m}$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\ &= \end{aligned}$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\ &= \dot{x}_j (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial A_n}{\partial x_m}\end{aligned}$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \end{aligned}$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right),\end{aligned}$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right),\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności tensora antysymetrycznego

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} =$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right),\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności tensora antysymetrycznego

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kmn} =$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right),\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności tensora antysymetrycznego

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}.$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\&= \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right),\end{aligned}$$

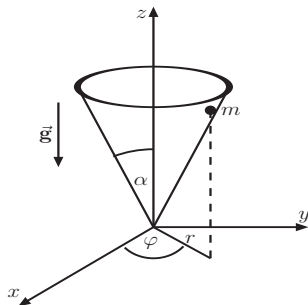
gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności tensora antysymetrycznego

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}.$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Zilustrujmy zastosowanie równań Lagrange'a II rodzaju na rozpatrywanych wcześniej przykładach.

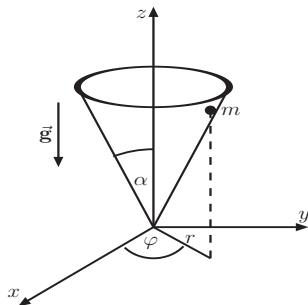
Przykład 2: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .



Równania Lagrange'a II rodzaju

Zilustrujmy zastosowanie równań Lagrange'a II rodzaju na rozpatrywanych wcześniej przykładach.

Przykład 2: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .



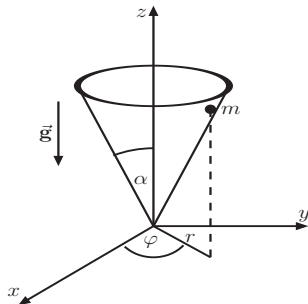
Funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = T - V$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Zilustrujmy zastosowanie równań Lagrange'a II rodzaju na rozpatrywanych wcześniej przykładach.

Przykład 2: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .



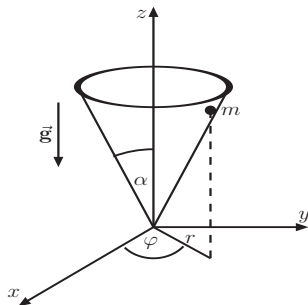
Funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - mgz$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Zilustrujmy zastosowanie równań Lagrange'a II rodzaju na rozpatrywanych wcześniej przykładach.

Przykład 2: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .



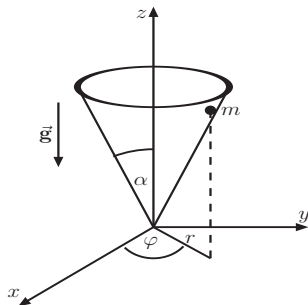
Funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - mgz$$
$$=$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Zilustrujmy zastosowanie równań Lagrange'a II rodzaju na rozpatrywanych wcześniej przykładach.

Przykład 2: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .



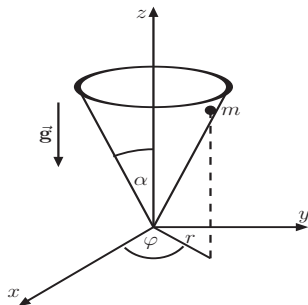
Funkcja Lagrange'a ma postać

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - mgz \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz, \end{aligned}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Zilustrujmy zastosowanie równań Lagrange'a II rodzaju na rozpatrywanych wcześniej przykładach.

Przykład 2: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .



Funkcja Lagrange'a ma postać

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - mgz \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz, \end{aligned}$$

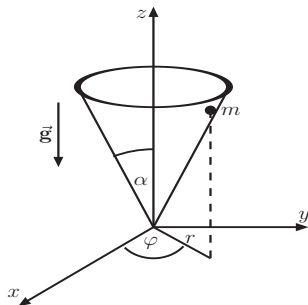
a równanie więzów ma postać

$$z = r \operatorname{ctg} \alpha .$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Zilustrujmy zastosowanie równań Lagrange'a II rodzaju na rozpatrywanych wcześniej przykładach.

Przykład 2: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .



Funkcja Lagrange'a ma postać

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - mgz \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz, \end{aligned}$$

a równanie więzów ma postać

$$z = r \operatorname{ctg} \alpha .$$

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{cases}$$

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \end{cases}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \end{cases}$$

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} \end{cases}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{z} = \dot{r} \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \end{cases}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{z} \end{cases}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{z} = \end{cases}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{z} = \dot{r} \operatorname{ctg} \alpha. \end{cases}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Użyjemy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{z} = \dot{r} \operatorname{ctg} \alpha. \end{cases}$$

Wstawmy te wzory do funkcji Lagrange'a

$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$. Podnosząc do kwadratu wzory na $\dot{x}$, $\dot{y}$ i $\dot{z}$ i przegrupowując wyrazy otrzymamy

Równania Lagrange'a II rodzaju

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{z} = \dot{r} \operatorname{ctg} \alpha. \end{cases}$$

Wstawmy te wzory do funkcji Lagrange'a

$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$. Podnosząc do kwadratu wzory na $\dot{x}$, $\dot{y}$ i $\dot{z}$ i przegrupowując wyrazy otrzymamy

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}m & \left[\dot{r}^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + \operatorname{ctg}^2 \alpha) + r^2 \dot{\varphi}^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \right. \\ & \left. - 2\dot{r}r\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + 2\dot{r}r\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{z} = \dot{r} \operatorname{ctg} \alpha. \end{cases}$$

Wstawmy te wzory do funkcji Lagrange'a

$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$. Podnosząc do kwadratu wzory na $\dot{x}$, $\dot{y}$ i $\dot{z}$ i przegrupowując wyrazy otrzymamy

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + \operatorname{ctg}^2 \alpha) + r^2 \dot{\varphi}^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \right. \\ &\quad \left. - 2\dot{r}r\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + 2\dot{r}r\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha \\ &= \end{aligned}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{z} = \dot{r} \operatorname{ctg} \alpha. \end{cases}$$

Wstawmy te wzory do funkcji Lagrange'a

$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$. Podnosząc do kwadratu wzory na $\dot{x}$, $\dot{y}$ i $\dot{z}$ i przegrupowując wyrazy otrzymamy

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + \operatorname{ctg}^2 \alpha) + r^2 \dot{\varphi}^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \right. \\ &\quad \left. - 2\dot{r}r\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + 2\dot{r}r\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha \\ &= \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{z} = \dot{r} \operatorname{ctg} \alpha. \end{cases}$$

Wstawmy te wzory do funkcji Lagrange'a

$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$. Podnosząc do kwadratu wzory na $\dot{x}$, $\dot{y}$ i $\dot{z}$ i przegrupowując wyrazy otrzymamy

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + \operatorname{ctg}^2 \alpha) + r^2 \dot{\varphi}^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \right. \\ &\quad \left. - 2\dot{r}r\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + 2\dot{r}r\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha \\ &= \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych cylindrycznych r i φ mają postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 .$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych cylindrycznych r i φ mają postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w pierwszym równaniu

Równania Lagrange'a II rodzaju

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych cylindrycznych r i φ mają postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial r}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych cylindrycznych r i φ mają postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial r} =$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych cylindrycznych r i φ mają postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - mg \operatorname{ctg} \alpha,$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych cylindrycznych r i φ mają postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - mg \operatorname{ctg} \alpha,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych cylindrycznych r i φ mają postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - mg \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} =$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych cylindrycznych r i φ mają postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - mg \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right)$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych cylindrycznych r i φ mają postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\varphi}^2 - mg \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right),$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych cylindrycznych r i φ mają postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= m r \dot{\varphi}^2 - mg \operatorname{ctg} \alpha, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m \dot{r} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right), \end{aligned}$$

a następnie obliczmy różnicę

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - m r \dot{\varphi}^2 + m g \operatorname{ctg} \alpha = 0 .$$

a następnie obliczmy różnicę

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - mr\dot{\varphi}^2 + mg \operatorname{ctg} \alpha = 0 .$$

Po przedzieleniu przez m i pomnożeniu przez $\operatorname{tg} \alpha$ równanie to przyjmuje postać

$$\ddot{r} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) - r\dot{\varphi}^2 \operatorname{tg} \alpha + g = 0 .$$

a następnie obliczmy różnicę

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - mr\dot{\varphi}^2 + mg \operatorname{ctg} \alpha = 0 .$$

Po przedzieleniu przez m i pomnożeniu przez $\operatorname{tg} \alpha$ równanie to przyjmuje postać

$$\ddot{r} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) - r\dot{\varphi}^2 \operatorname{tg} \alpha + g = 0 .$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} =$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr \dot{r} \dot{\varphi} + mr^2 \ddot{\varphi},$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr \dot{r} \dot{\varphi} + mr^2 \ddot{\varphi},$$

a więc otrzymujemy równanie

$$2mr \dot{r} \dot{\varphi} + mr^2 \ddot{\varphi} = 0.$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr \dot{r} \dot{\varphi} + mr^2 \ddot{\varphi},$$

a więc otrzymujemy równanie

$$2mr \dot{r} \dot{\varphi} + mr^2 \ddot{\varphi} = 0.$$

Dzieląc obustronnie przez m otrzymamy

$$r (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) = 0.$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr \dot{r} \dot{\varphi} + mr^2 \ddot{\varphi},$$

a więc otrzymujemy równanie

$$2mr \dot{r} \dot{\varphi} + mr^2 \ddot{\varphi} = 0.$$

Dzieląc obustronnie przez m otrzymamy

$$r (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) = 0.$$

Ponieważ przypadek $r = 0$ jest nieciekawym fizycznie, ostatecznie otrzymujemy drugie równanie w formie

$$2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0.$$

Ponieważ przypadek $r = 0$ jest nieciekawym fizycznie, ostatecznie otrzymujemy drugie równanie w formie

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0.$$

Otrzymaliśmy dokładnie takie same równania ruchu dla punktu na powierzchni stożka, jak wówczas gdy startowaliśmy z równania d'Alemberta, czy z równania Newtona, uzupełnionego o założenia co do natury sił reakcji więzów.

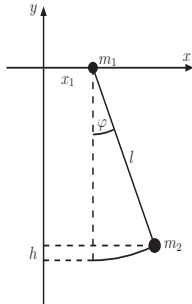
Ponieważ przypadek $r = 0$ jest nieciekawym fizycznie, ostatecznie otrzymujemy drugie równanie w formie

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0.$$

Otrzymaliśmy dokładnie takie same równania ruchu dla punktu na powierzchni stożka, jak wówczas gdy startowaliśmy z równania d'Alemberta, czy z równania Newtona, uzupełnionego o założenia co do natury sił reakcji więzów.

Równania Lagrange'a II rodzaju

Przykład 3: Wychodząc z równań Lagrange'a II rodzaju wyprowadzić równania ruchu dla wahadła matematycznego z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox .

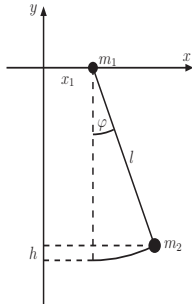


Funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = T - V$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Przykład 3: Wychodząc z równań Lagrange'a II rodzaju wyprowadzić równania ruchu dla wahadła matematycznego z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox .

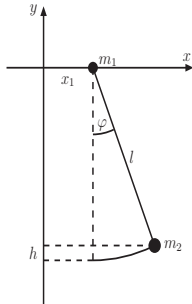


Funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 - m_1gl - m_2gh$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Przykład 3: Wychodząc z równań Lagrange'a II rodzaju wyprowadzić równania ruchu dla wahadła matematycznego z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox .

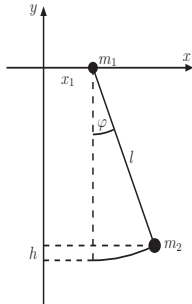


Funkcja Lagrange'a ma postać

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 - m_1gl - m_2gh \\ &= \end{aligned}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Przykład 3: Wychodząc z równań Lagrange'a II rodzaju wyprowadzić równania ruchu dla wahadła matematycznego z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox .

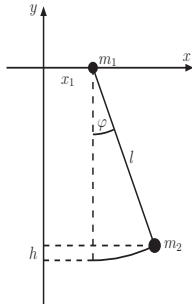


Funkcja Lagrange'a ma postać

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 - m_1gl - m_2gh \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_1gl - m_2gh, \end{aligned}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Przykład 3: Wychodząc z równań Lagrange'a II rodzaju wyprowadzić równania ruchu dla wahadła matematycznego z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox .



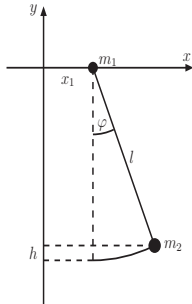
Funkcja Lagrange'a ma postać

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 - m_1gl - m_2gh \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_1gl - m_2gh, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy już warunek więzów $y_1 = 0$.

Równania Lagrange'a II rodzaju

Przykład 3: Wychodząc z równań Lagrange'a II rodzaju wyprowadzić równania ruchu dla wahadła matematycznego z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox .



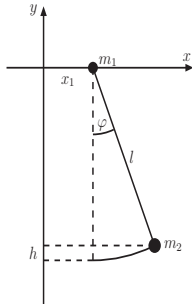
Funkcja Lagrange'a ma postać

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 - m_1gl - m_2gh \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_1gl - m_2gh, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy już warunek więzów $y_1 = 0$. Zauważmy, że jako poziom odniesienia dla energii potencjalnej wybraliśmy najniższe położenie punktu o masie m_2 , odpowiadające $y_2 = -l$. Wysokość punktu o masie m_1 jest stała i wynosi l , a wysokość punktu o masie m_2 wyraża się wzorem $h = l - l \cos \varphi$.

Równania Lagrange'a II rodzaju

Przykład 3: Wychodząc z równań Lagrange'a II rodzaju wyprowadzić równania ruchu dla wahadła matematycznego z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox .



Funkcja Lagrange'a ma postać

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 - m_1gl - m_2gh \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_1gl - m_2gh, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy już warunek więzów $y_1 = 0$. Zauważmy, że jako poziom odniesienia dla energii potencjalnej wybraliśmy najniższe położenie punktu o masie m_2 , odpowiadające $y_2 = -l$. Wysokość punktu o masie m_1 jest stała i wynosi l , a wysokość punktu o masie m_2 wyraża się wzorem $h = l - l \cos \varphi$.

Uwzględniając ten fakt otrzymamy

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_1gl - m_2gl + m_2gl \cos \varphi.$$

Wyrazy $-m_1gl - m_2gl$ w funkcji Lagrange'a są stałe, a zatem nie mają żadnego wpływu na równania ruchu, które zawierają tylko pochodne L .

Uwzględniając ten fakt otrzymamy

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_1gl - m_2gl + m_2gl \cos \varphi.$$

Wyrazy $-m_1gl - m_2gl$ w funkcji Lagrange'a są stałe, a zatem nie mają żadnego wpływu na równania ruchu, które zawierają tylko pochodne L . Dlatego możemy je pominąć i rozpatrywać funkcję Lagrange'a postaci

Równania Lagrange'a II rodzaju

Uwzględniając ten fakt otrzymamy

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_1gl - m_2gl + m_2gl \cos \varphi.$$

Wyrazy $-m_1gl - m_2gl$ w funkcji Lagrange'a są stałe, a zatem nie mają żadnego wpływu na równania ruchu, które zawierają tylko pochodne L . Dlatego możemy je pominąć i rozpatrywać funkcję Lagrange'a postaci

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_2gl \cos \varphi .$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Uwzględniając ten fakt otrzymamy

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_1gl - m_2gl + m_2gl \cos \varphi.$$

Wyrazy $-m_1gl - m_2gl$ w funkcji Lagrange'a są stałe, a zatem nie mają żadnego wpływu na równania ruchu, które zawierają tylko pochodne L . Dlatego możemy je pominąć i rozpatrywać funkcję Lagrange'a postaci

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_2gl \cos \varphi .$$

Dowolność wyboru stałej w funkcji Lagrange'a, wiąże się w tym przypadku bezpośrednio z dowolnością wyboru poziomu, względem którego określamy energię potencjalną V .

Równania Lagrange'a II rodzaju

Uwzględniając ten fakt otrzymamy

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_1gl - m_2gl + m_2gl \cos \varphi.$$

Wyrazy $-m_1gl - m_2gl$ w funkcji Lagrange'a są stałe, a zatem nie mają żadnego wpływu na równania ruchu, które zawierają tylko pochodne L . Dlatego możemy je pominąć i rozpatrywać funkcję Lagrange'a postaci

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_2gl \cos \varphi.$$

Dowolność wyboru stałej w funkcji Lagrange'a, wiąże się w tym przypadku bezpośrednio z dowolnością wyboru poziomu, względem którego określamy energię potencjalną V .

Skorzystajmy z wzorów transformacyjnych

$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi \quad \Rightarrow$$

Skorzystajmy z wzorów transformacyjnych

$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l \dot{\varphi} \cos \varphi,$$

Skorzystajmy z wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \varphi & \Rightarrow & & \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + l \dot{\varphi} \cos \varphi, \\y_2 &= -l \cos \varphi\end{aligned}$$

Skorzystajmy z wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \varphi & \Rightarrow & \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l \dot{\varphi} \cos \varphi, \\y_2 &= -l \cos \varphi & \Rightarrow & \end{aligned}$$

Skorzystajmy z wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \varphi & \Rightarrow & \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l \dot{\varphi} \cos \varphi, \\y_2 &= -l \cos \varphi & \Rightarrow & \dot{y}_2 = l \dot{\varphi} \sin \varphi.\end{aligned}$$

Skorzystajmy z wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \varphi & \Rightarrow & \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l \dot{\varphi} \cos \varphi, \\y_2 &= -l \cos \varphi & \Rightarrow & \dot{y}_2 = l \dot{\varphi} \sin \varphi.\end{aligned}$$

i wstawmy odpowiednie pochodne do wzoru na L

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_2 g l \cos \varphi .$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Skorzystajmy z wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \varphi & \Rightarrow & \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l \dot{\varphi} \cos \varphi, \\y_2 &= -l \cos \varphi & \Rightarrow & \dot{y}_2 = l \dot{\varphi} \sin \varphi.\end{aligned}$$

i wstawmy odpowiednie pochodne do wzoru na L

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_2 g l \cos \varphi .$$

Po uporządkowaniu i skorzystaniu z jedynki trygonometrycznej otrzymamy

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi) + m_2 g l \cos \varphi .$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Skorzystajmy z wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \varphi & \Rightarrow & \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l \dot{\varphi} \cos \varphi, \\y_2 &= -l \cos \varphi & \Rightarrow & \dot{y}_2 = l \dot{\varphi} \sin \varphi.\end{aligned}$$

i wstawmy odpowiednie pochodne do wzoru na L

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_2 g l \cos \varphi .$$

Po uporządkowaniu i skorzystaniu z jedynki trygonometrycznej otrzymamy

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi) + m_2 g l \cos \varphi .$$

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych x_1 i φ mają postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 .$$

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych x_1 i φ mają postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 .$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0,$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} =$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2) \dot{x}_1 + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= \end{aligned}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= (m_1 + m_2) \dot{x}_1 + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l \left(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right), \end{aligned}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= (m_1 + m_2) \dot{x}_1 + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l \left(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right), \end{aligned}$$

a zatem pierwsze równanie ma postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l \left(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right) = 0.$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= (m_1 + m_2) \dot{x}_1 + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l \left(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right), \end{aligned}$$

a zatem pierwsze równanie ma postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l \left(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right) = 0.$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} =$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - m_2 g l \sin \varphi,$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - m_2 g l \sin \varphi, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 l \dot{x}_1 \cos \varphi + m_2 l^2 \dot{\varphi} \end{aligned}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = - m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - m_2 g l \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} =$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - m_2 g l \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \dot{\varphi} + m_2 l \dot{x}_1 \cos \varphi,$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - m_2 g l \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \dot{\varphi} + m_2 l \dot{x}_1 \cos \varphi,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - m_2 g l \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \dot{\varphi} + m_2 l \dot{x}_1 \cos \varphi,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} =$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - m_2 g l \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \dot{\varphi} + m_2 l \dot{x}_1 \cos \varphi,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l (\ddot{x}_1 \cos \varphi - \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi),$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - m_2 g l \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \dot{\varphi} + m_2 l \dot{x}_1 \cos \varphi,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l (\ddot{x}_1 \cos \varphi - \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi),$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - m_2 g l \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \dot{\varphi} + m_2 l \dot{x}_1 \cos \varphi,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l (\ddot{x}_1 \cos \varphi - \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi),$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} =$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - m_2 g l \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \dot{\varphi} + m_2 l \dot{x}_1 \cos \varphi,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l (\ddot{x}_1 \cos \varphi - \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi),$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l (\ddot{x}_1 \cos \varphi - \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi)$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - m_2 g l \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \dot{\varphi} + m_2 l \dot{x}_1 \cos \varphi,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l (\ddot{x}_1 \cos \varphi - \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi),$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l (\ddot{x}_1 \cos \varphi - \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi) +$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - m_2 g l \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \dot{\varphi} + m_2 l \dot{x}_1 \cos \varphi,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l (\ddot{x}_1 \cos \varphi - \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi),$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l (\ddot{x}_1 \cos \varphi - \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi) + m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi + m_2 g l \sin \varphi = 0.$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - m_2 g l \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \dot{\varphi} + m_2 l \dot{x}_1 \cos \varphi,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l (\ddot{x}_1 \cos \varphi - \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi),$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l (\ddot{x}_1 \cos \varphi - \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi) + m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi + m_2 g l \sin \varphi = 0.$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Uporządkujmy ostatnie równanie w kolorze niebieskim

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x}_1 \cos \varphi + m_2 g l \sin \varphi = 0$$

i podzielmy obustronnie przez $m_2 l$,

Równania Lagrange'a II rodzaju

Uporządkujmy ostatnie równanie w kolorze niebieskim

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x}_1 \cos \varphi + m_2 g l \sin \varphi = 0$$

i podzielmy obustronnie przez $m_2 l$, wówczas otrzymamy ostateczną postać drugiego równania ruchu wahadła z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox :

$$l \ddot{\varphi} + \ddot{x}_1 \cos \varphi + g \sin \varphi = 0.$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Uporządkujmy ostatnie równanie w kolorze niebieskim

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x}_1 \cos \varphi + m_2 g l \sin \varphi = 0$$

i podzielmy obustronnie przez $m_2 l$, wówczas otrzymamy ostateczną postać drugiego równania ruchu wahadła z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox :

$$l \ddot{\varphi} + \ddot{x}_1 \cos \varphi + g \sin \varphi = 0.$$

Przypomnijmy pierwsze równanie

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = 0.$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Uporządkujmy ostatnie równanie w kolorze niebieskim

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x}_1 \cos \varphi + m_2 g l \sin \varphi = 0$$

i podzielmy obustronnie przez $m_2 l$, wówczas otrzymamy ostateczną postać drugiego równania ruchu wahadła z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox :

$$l \ddot{\varphi} + \ddot{x}_1 \cos \varphi + g \sin \varphi = 0.$$

Przypomnijmy pierwsze równanie

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = 0.$$

Znów otrzymaliśmy dokładnie takie same równania, jak wówczas gdy startowaliśmy z równania d'Alemberta i z równań Newtona.

W obu rozpatrywanych przykładach wyprowadzenie równań ruchu z równań Lagrange'a II rodzaju było jednak prostsze.

Znów otrzymaliśmy dokładnie takie same równania, jak wówczas gdy startowaliśmy z równania d'Alemberta i z równań Newtona.

W obu rozpatrywanych przykładach wyprowadzenie równań ruchu z równań Lagrange'a II rodzaju było jednak prostsze.

Dużą zaletą równań Lagrange'a II rodzaju jest ich **niezmienniczość przy transformacjach punktowych**, czyli przy transformacjach postaci

$$q_i \rightarrow Q_i = Q_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \equiv Q_i(q, t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dużą zaletą równań Lagrange'a II rodzaju jest ich **niezmienniczość przy transformacjach punktowych**, czyli przy transformacjach postaci

$$q_i \rightarrow Q_i = Q_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \equiv Q_i(q, t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Tego typu transformacje mogą opisywać np. przejście od współrzędnych kartezjańskich do krzywoliniowych,

Dużą zaletą równań Lagrange'a II rodzaju jest ich **niezmienniczość przy transformacjach punktowych**, czyli przy transformacjach postaci

$$q_i \rightarrow Q_i = Q_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \equiv Q_i(q, t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Tego typu transformacje mogą opisywać np. przejście od współrzędnych kartezjańskich do krzywoliniowych, albo przejście do poruszającego się układu odniesienia.

Dużą zaletą równań Lagrange'a II rodzaju jest ich **niezmienniczość przy transformacjach punktowych**, czyli przy transformacjach postaci

$$q_i \rightarrow Q_i = Q_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \equiv Q_i(q, t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Tego typu transformacje mogą opisywać np. przejście od współrzędnych kartezjańskich do krzywoliniowych, albo przejście do poruszającego się układu odniesienia.

Transformacje punktowe

Założmy, że istnieją transformacje odwrotne

$$Q_i \rightarrow q_i = q_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, t) \equiv q_i(Q, t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Obliczmy zupełną pochodną czasową transformacji odwrotnej

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t}$$

Transformacje punktowe

Założmy, że istnieją transformacje odwrotne

$$Q_i \rightarrow q_i = q_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, t) \equiv q_i(Q, t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Obliczmy zupełną pochodną czasową transformacji odwrotnej

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} \Rightarrow \dot{q}_i = \dot{q}_i(Q, \dot{Q}, t)$$

Transformacje punktowe

Założmy, że istnieją transformacje odwrotne

$$Q_i \rightarrow q_i = q_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, t) \equiv q_i(Q, t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Obliczmy zupełną pochodną czasową transformacji odwrotnej

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} \Rightarrow \dot{q}_i = \dot{q}_i(Q, \dot{Q}, t)$$

i zróżniczkujemy obustronnie po $\dot{Q}_l$, wówczas otrzymamy

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_l} =$$

Transformacje punktowe

Założmy, że istnieją transformacje odwrotne

$$Q_i \rightarrow q_i = q_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, t) \equiv q_i(Q, t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Obliczmy zupełną pochodną czasową transformacji odwrotnej

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} \Rightarrow \dot{q}_i = \dot{q}_i(Q, \dot{Q}, t)$$

i zróżniczkujemy obustronnie po $\dot{Q}_l$, wówczas otrzymamy

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_l} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{Q}_l} =$$

Transformacje punktowe

Założmy, że istnieją transformacje odwrotne

$$Q_i \rightarrow q_i = q_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, t) \equiv q_i(Q, t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Obliczmy zupełną pochodną czasową transformacji odwrotnej

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} \Rightarrow \dot{q}_i = \dot{q}_i(Q, \dot{Q}, t)$$

i zróżniczkujemy obustronnie po $\dot{Q}_l$, wówczas otrzymamy

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_l} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{Q}_l} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \delta_{jl}$$

Transformacje punktowe

Założmy, że istnieją transformacje odwrotne

$$Q_i \rightarrow q_i = q_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, t) \equiv q_i(Q, t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Obliczmy zupełną pochodną czasową transformacji odwrotnej

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} \Rightarrow \dot{q}_i = \dot{q}_i(Q, \dot{Q}, t)$$

i zróżniczkujemy obustronnie po $\dot{Q}_l$, wówczas otrzymamy

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_l} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{Q}_l} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \delta_{jl} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_l}.$$

Transformacje punktowe

Założmy, że istnieją transformacje odwrotne

$$Q_i \rightarrow q_i = q_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, t) \equiv q_i(Q, t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Obliczmy zupełną pochodną czasową transformacji odwrotnej

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} \Rightarrow \dot{q}_i = \dot{q}_i(Q, \dot{Q}, t)$$

i zróżniczkujemy obustronnie po $\dot{Q}_l$, wówczas otrzymamy

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_l} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{Q}_l} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \delta_{jl} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_l}.$$

Transformacje punktowe

Wyraźmy funkcję Lagrange'a w nowych współrzędnych

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right) \equiv L'(Q, \dot{Q}, t).$$

Obliczmy pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_j} =$$

Wyraźmy funkcję Lagrange'a w nowych współrzędnych

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right) \equiv L'(Q, \dot{Q}, t).$$

Obliczmy pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right),$$

Wyraźmy funkcję Lagrange'a w nowych współrzędnych

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right) \equiv L'(Q, \dot{Q}, t).$$

Obliczmy pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right),$$
$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j}$$

Wyraźmy funkcję Lagrange'a w nowych współrzędnych

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right) \equiv L'(Q, \dot{Q}, t).$$

Obliczmy pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right),$$
$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} =$$

Wyraźmy funkcję Lagrange'a w nowych współrzędnych

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right) \equiv L'(Q, \dot{Q}, t).$$

Obliczmy pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right),$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} =$$

Wyraźmy funkcję Lagrange'a w nowych współrzędnych

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right) \equiv L'(Q, \dot{Q}, t).$$

Obliczmy pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right),$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j},$$

Wyraźmy funkcję Lagrange'a w nowych współrzędnych

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right) \equiv L'(Q, \dot{Q}, t).$$

Obliczmy pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right),$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j}$$

Wyraźmy funkcję Lagrange'a w nowych współrzędnych

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right) \equiv L'(Q, \dot{Q}, t).$$

Obliczmy pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right),$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} =$$

Wyraźmy funkcję Lagrange'a w nowych współrzędnych

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right) \equiv L'(Q, \dot{Q}, t).$$

Obliczmy pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L'}{\partial Q_j} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right), \\ \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right],\end{aligned}$$

Wyrażmy funkcję Lagrange'a w nowych współrzędnych

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right) \equiv L'(Q, \dot{Q}, t).$$

Obliczmy pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L'}{\partial Q_j} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right), \\ \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right],\end{aligned}$$

Transformacje punktowe

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_I} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_I} \quad \text{i} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}.$$

Uwaga. Aby skorzystać z drugiej własności, trzeba założyć, że rozpatrywane transformacje są funkcjami klasy $\mathcal{C}^2$.

Transformacje punktowe

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_I} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_I} \quad \text{i} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j}.$$

Uwaga. Aby skorzystać z drugiej własności, trzeba założyć, że rozpatrywane transformacje są funkcjami klasy $\mathcal{C}^2$.

Obliczmy następującą różnicę, korzystając z wyprowadzonych wzorów na pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} =$$

Transformacje punktowe

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_I} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_I} \quad \text{i} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}.$$

Uwaga. Aby skorzystać z drugiej własności, trzeba założyć, że rozpatrywane transformacje są funkcjami klasy $\mathcal{C}^2$.

Obliczmy następującą różnicę, korzystając z wyprowadzonych wzorów na pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right]$$

Transformacje punktowe

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_I} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_I} \quad \text{i} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}.$$

Uwaga. Aby skorzystać z drugiej własności, trzeba założyć, że rozpatrywane transformacje są funkcjami klasy $\mathcal{C}^2$.

Obliczmy następującą różnicę, korzystając z wyprowadzonych wzorów na pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right] = \end{aligned}$$

Transformacje punktowe

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_I} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_I} \quad \text{i} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}.$$

Uwaga. Aby skorzystać z drugiej własności, trzeba założyć, że rozpatrywane transformacje są funkcjami klasy $\mathcal{C}^2$.

Obliczmy następującą różnicę, korzystając z wyprowadzonych wzorów na pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right] = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right]}_0 \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \end{aligned}$$

Transformacje punktowe

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_I} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_I} \quad \text{i} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}.$$

Uwaga. Aby skorzystać z drugiej własności, trzeba założyć, że rozpatrywane transformacje są funkcjami klasy $\mathcal{C}^2$.

Obliczmy następującą różnicę, korzystając z wyprowadzonych wzorów na pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right] = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right]}_0 \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = 0. \end{aligned}$$

Transformacje punktowe

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_I} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_I} \quad \text{i} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}.$$

Uwaga. Aby skorzystać z drugiej własności, trzeba założyć, że rozpatrywane transformacje są funkcjami klasy $\mathcal{C}^2$.

Obliczmy następującą różnicę, korzystając z wyprowadzonych wzorów na pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right] = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right]}_0 \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = 0. \end{aligned}$$

Widzimy, że równania Lagrange'a II rodzaju po transformacji punktowej mają dokładnie taką samą postać jak przed transformacją:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Uwaga. Ponieważ funkcja Lagrange'a $L'(Q, \dot{Q}, t)$ ma na ogół inną postać niż wyjściowa funkcja $L(q, \dot{q}, t)$, to równania ruchu wyrażone przez współrzędne Q_j i prędkości $\dot{Q}_j$ będą miały inną postać, niż równania wyjściowe, wyrażone przez q_j i $\dot{q}_j$, ale zawsze będziemy mogli je wyprowadzić wychodząc z równań Lagrange'a II rodzaju w niezminionej formie.

Widzimy, że równania Lagrange'a II rodzaju po transformacji punktowej mają dokładnie taką samą postać jak przed transformacją:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Uwaga. Ponieważ funkcja Lagrange'a $L'(Q, \dot{Q}, t)$ ma na ogół inną postać niż wyjściowa funkcja $L(q, \dot{q}, t)$, to równania ruchu wyrażone przez współrzędne Q_j i prędkości $\dot{Q}_j$ będą miały inną postać, niż równania wyjściowe, wyrażone przez q_j i $\dot{q}_j$, ale zawsze będziemy mogli je wyprowadzić wychodząc z równań Lagrange'a II rodzaju w niezminionej formie.

Niezmienniczość cechowania

Inną ciekawą własnością równań Lagrange'a II rodzaju jest tzw. niezmienniczość cechowania.

Przetransformujmy funkcję Lagrange'a, tym razem bez zmiany współrzędnych, w następujący sposób

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF(q, t)}{dt},$$

gdzie $F(q, t)$ jest dowolną różniczkowalną funkcją współrzędnych uogólnionych i czasu.

Inną ciekawą własnością równań Lagrange'a II rodzaju jest tzw. niezmienniczość cechowania.

Przetransformujmy funkcję Lagrange'a, tym razem bez zmiany współrzędnych, w następujący sposób

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF(q, t)}{dt},$$

gdzie $F(q, t)$ jest dowolną różniczkowalną funkcją współrzędnych uogólnionych i czasu.

Wstawmy funkcję $L'(q, \dot{q}, t)$ do równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} =$$

Niezmienniczość cechowania

Inną ciekawą własnością równań Lagrange'a II rodzaju jest tzw. niezmienniczość cechowania.

Przetransformujmy funkcję Lagrange'a, tym razem bez zmiany współrzędnych, w następujący sposób

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF(q, t)}{dt},$$

gdzie $F(q, t)$ jest dowolną różniczkowalną funkcją współrzędnych uogólnionych i czasu.

Wstawmy funkcję $L'(q, \dot{q}, t)$ do równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}}_0 + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{dF(q, t)}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{dF(q, t)}{dt}.$$

Niezmienniczość cechowania

Inną ciekawą własnością równań Lagrange'a II rodzaju jest tzw. niezmienniczość cechowania.

Przetransformujmy funkcję Lagrange'a, tym razem bez zmiany współrzędnych, w następujący sposób

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF(q, t)}{dt},$$

gdzie $F(q, t)$ jest dowolną różniczkowalną funkcją współrzędnych uogólnionych i czasu.

Wstawmy funkcję $L'(q, \dot{q}, t)$ do równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}}_0 + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{dF(q, t)}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{dF(q, t)}{dt}.$$

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q, t)$ zaznaczone na niebiesko

$$\frac{dF}{dt} =$$

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q, t)$ zaznaczone na niebiesko

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t},$$

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q, t)$ zaznaczone na niebiesko

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t},$$
$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{dF}{dt}$$

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q, t)$ zaznaczone na niebiesko

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{dF}{dt} =$$

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q, t)$ zaznaczone na niebiesko

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} =$$

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q, t)$ zaznaczone na niebiesko

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{dF}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \delta_{ij} =\end{aligned}$$

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q, t)$ zaznaczone na niebiesko

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{dF}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \delta_{ij} = \frac{\partial F}{\partial q_j}\end{aligned}$$

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q, t)$ zaznaczone na niebiesko

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \delta_{ij} = \frac{\partial F}{\partial q_j}$$

i wstawmy je do równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{dF}{dt}.$$

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q, t)$ zaznaczone na niebiesko

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{dF}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \delta_{ij} = \frac{\partial F}{\partial q_j}\end{aligned}$$

i wstawmy je do równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{dF}{dt}.$$

Widzimy, że wyrazy po prawej stronie różnią się tylko kolejnością pochodnych.

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q, t)$ zaznaczone na niebiesko

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{dF}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \delta_{ij} = \frac{\partial F}{\partial q_j}\end{aligned}$$

i wstawmy je do równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{dF}{dt}.$$

Widzimy, że wyrazy po prawej stronie różnią się tylko kolejnością pochodnych. Jeśli funkcja F jest klasy $\mathcal{C}^2$, to oba wyrazy kasują się

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q, t)$ zaznaczone na niebiesko

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{dF}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \delta_{ij} = \frac{\partial F}{\partial q_j}\end{aligned}$$

i wstawmy je do równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{dF}{dt}.$$

Widzimy, że wyrazy po prawej stronie różnią się tylko kolejnością pochodnych. Jeśli funkcja F jest klasy $\mathcal{C}^2$, to oba wyrazy kasują się

i otrzymujemy równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

takie same jak równania wyjściowe z funkcją L .

i otrzymujemy równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

takie same jak równania wyjściowe z funkcją L .

Podsumujmy naszą dotychczasową wiedzę na temat równań Lagrange'a II rodzaju.

- Dzięki swojej prostocie i niezmienniczości przy transformacjach punktowych nadają się na ogół najlepiej do znajdowania równań ruchu dla układów z więzami holonomicznymi.

Podsumujmy naszą dotychczasową wiedzę na temat równań Lagrange'a II rodzaju.

- Dzięki swojej prostocie i niezmienniczości przy transformacjach punktowych nadają się na ogół najlepiej do znajdowania równań ruchu dla układów z więzami holonomicznymi.
- Stanowią centralny punkt mechaniki lagranżowskiej oraz są punktem wyjścia do dalszych studiów mechaniki.

Podsumujmy naszą dotychczasową wiedzę na temat równań Lagrange'a II rodzaju.

- Dzięki swojej prostocie i niezmienniczości przy transformacjach punktowych nadają się na ogół najlepiej do znajdowania równań ruchu dla układów z więzami holonomicznymi.
- Stanowią centralny punkt mechaniki lagranżowskiej oraz są punktem wyjścia do dalszych studiów mechaniki.