

Zasada i równanie d'Alemberta

Wykład 3

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

Przesunięciem wirtualnym $\delta \vec{r}_i$ i -tego punktu materialnego nazywamy jego przemieszczenie, które jest

- nieskończenie małe,
- zgodne z więzami,
- natychmiastowe.

To właśnie **natychmiastowość**, która jest sprzeczna z obserwacją, że oddziaływanie następuje zawsze w pewnym skończonym czasie, odróżnia przesunięcie wirtualne od przesunięcia rzeczywistego.

Przesunięciem wirtualnym $\delta \vec{r}_i$ i -tego punktu materialnego nazywamy jego przemieszczenie, które jest

- nieskończenie małe,
- zgodne z więzami,
- natychmiastowe.

To właśnie **natychmiastowość**, która jest sprzeczna z obserwacją, że oddziaływanie następuje zawsze w pewnym skończonym czasie, odróżnia przesunięcie wirtualne od przesunięcia rzeczywistego.

Uwaga: Zgodnie z postulatami szczególnej teorii względności, największą prędkością, z którą może nastąpić oddziaływanie jest prędkość światła w próżni.

Przesunięciem wirtualnym $\delta \vec{r}_i$ i -tego punktu materialnego nazywamy jego przemieszczenie, które jest

- nieskończenie małe,
- zgodne z więzami,
- natychmiastowe.

To właśnie **natychmiastowość**, która jest sprzeczna z obserwacją, że oddziaływanie następuje zawsze w pewnym skończonym czasie, odróżnia przesunięcie wirtualne od przesunięcia rzeczywistego.

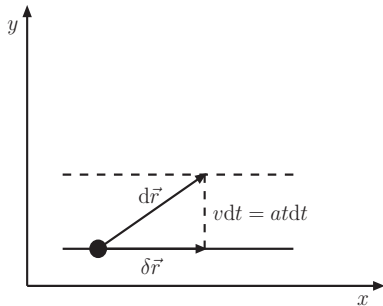
Uwaga: Zgodnie z postulatami szczególnej teorii względności, największą prędkością, z którą może nastąpić oddziaływanie jest prędkość światła w próżni.

W przypadku więzów skleronomicznych przesunięcia wirtualne są równoważne przesunięciom rzeczywistym. Przy więzach reonomicznych przesunięcia wirtualne różnią się od przesunięć rzeczywistych,

W przypadku więzów skleronomicznych przesunięcia wirtualne są równoważne przesunięciom rzeczywistym. Przy więzach reonomicznych przesunięcia wirtualne różnią się od przesunięć rzeczywistych, gdyż w przypadku przesunięć wirtualnych czas jest zamrożony, a w przypadku przesunięć rzeczywistych, następujących w skończonym czasie, więzy reonomiczne zmieniają swój kształt.

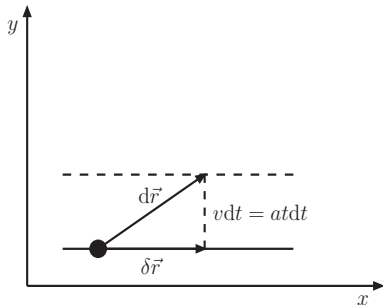
W przypadku **więzów skleronomicznych** przesunięcia wirtualne są równoważne przesunięciom rzeczywistym. Przy **więzach reonomicznych** przesunięcia wirtualne różnią się od przesunięć rzeczywistych, gdyż w przypadku przesunięć wirtualnych czas jest zamrożony, a w przypadku przesunięć rzeczywistych, następujących w skończonym czasie, więzy reonomiczne zmieniają swój kształt.

Przykład 1: Koralek porusza się po drucie równoległym do osi Ox kartezjańskiego układu współrzędnych. Druk porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym w kierunku osi Oy z przyspieszeniem a . W chwili początkowej drut spoczywa ($v_0 = 0$) na osi Ox .



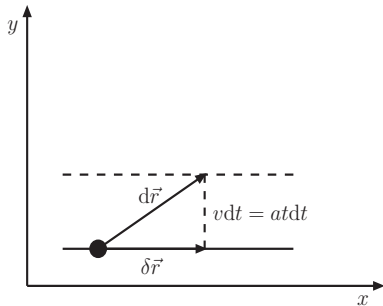
W nieskończenie małym czasie dt pręt przesunie się o $v dt = a t dt$ w kierunku osi Oy ,

Przykład 1: Koralek porusza się po drucie równoległym do osi Ox kartezjańskiego układu współrzędnych. Druk porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym w kierunku osi Oy z przyspieszeniem a . W chwili początkowej drut spoczywa ($v_0 = 0$) na osi Ox .



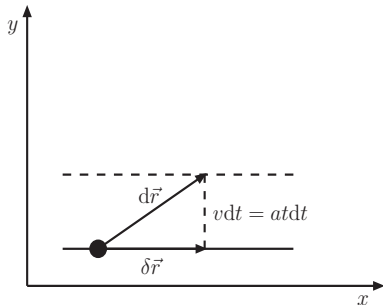
W nieskończenie małym czasie dt pręt przesunie się o $vdt = atdt$ w kierunku osi Oy , a więc przesunięcie rzeczywiste $d\vec{r}$ ma niezerową składową y ,

Przykład 1: Koralek porusza się po drucie równoległym do osi Ox kartezjańskiego układu współrzędnych. Druk porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym w kierunku osi Oy z przyspieszeniem a . W chwili początkowej druk spoczywa ($v_0 = 0$) na osi Ox .



W nieskończenie małym czasie dt pręt przesunie się o $v dt = a t dt$ w kierunku osi Oy , a więc przesunięcie rzeczywiste $d\vec{r}$ ma niezerową składową y , **której nie ma przesunięcie wirtualne $\delta\vec{r}$.**

Przykład 1: Koralek porusza się po drucie równoległym do osi Ox kartezjańskiego układu współrzędnych. Druk porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym w kierunku osi Oy z przyspieszeniem a . W chwili początkowej druk spoczywa ($v_0 = 0$) na osi Ox .



W nieskończenie małym czasie dt pręt przesunie się o $v dt = a t dt$ w kierunku osi Oy , a więc przesunięcie rzeczywiste $d\vec{r}$ ma niezerową składową y , **której nie ma przesunięcie wirtualne $\delta\vec{r}$.**

Rozważmy układ N punktów materialnych. W obecności więzów równanie ruchu i -tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i = \vec{Z}_i,$$

gdzie siłę *aktywną* przenieśliśmy na lewą stronę.

Rozważmy układ N punktów materialnych. W obecności więzów równanie ruchu i -tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i = \vec{Z}_i,$$

gdzie siłę *aktywną* przenieśliśmy na lewą stronę.

Pomnożmy każde z równań dla $i = 1, 2, \dots, N$ przez odpowiednie przesunięcie wirtualne $\delta \vec{r}_i$,

Rozważmy układ N punktów materialnych. W obecności więzów równanie ruchu i -tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i = \vec{Z}_i,$$

gdzie siłę *aktywną* przenieśliśmy na lewą stronę.

Pomnóżmy każde z równań dla $i = 1, 2, \dots, N$ przez odpowiednie przesunięcie wirtualne $\delta \vec{r}_i$, tzn. równanie dla $i = 1$ mnożymy przez $\delta \vec{r}_1$,

Rozważmy układ N punktów materialnych. W obecności więzów równanie ruchu i -tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i = \vec{Z}_i,$$

gdzie siłę *aktywną* przenieśliśmy na lewą stronę.

Pomnożmy każde z równań dla $i = 1, 2, \dots, N$ przez odpowiednie przesunięcie wirtualne $\delta \vec{r}_i$, tzn. równanie dla $i = 1$ mnożymy przez $\delta \vec{r}_1$, równanie dla $i = 2$ mnożymy przez $\delta \vec{r}_2$, itd.

Rozważmy układ N punktów materialnych. W obecności więzów równanie ruchu i -tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i = \vec{Z}_i,$$

gdzie siłę *aktywną* przenieśliśmy na lewą stronę.

Pomnożmy każde z równań dla $i = 1, 2, \dots, N$ przez odpowiednie przesunięcie wirtualne $\delta \vec{r}_i$, tzn. równanie dla $i = 1$ mnożymy przez $\delta \vec{r}_1$, równanie dla $i = 2$ mnożymy przez $\delta \vec{r}_2$, itd.

Wówczas otrzymamy układ N równań skalarnych postaci

$$\left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Rozważmy układ N punktów materialnych. W obecności więzów równanie ruchu i -tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i = \vec{Z}_i,$$

gdzie siłę *aktywną* przenieśliśmy na lewą stronę.

Pomnóżmy każde z równań dla $i = 1, 2, \dots, N$ przez odpowiednie przesunięcie wirtualne $\delta \vec{r}_i$, tzn. równanie dla $i = 1$ mnożymy przez $\delta \vec{r}_1$, równanie dla $i = 2$ mnożymy przez $\delta \vec{r}_2$, itd.

Wówczas otrzymamy układ N równań skalarnych postaci

$$\left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Napiszmy wszystkie równania tego układu:

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_1 \ddot{\vec{r}}_1 - \vec{F}_1) \cdot \delta \vec{r}_1 = \vec{Z}_1 \cdot \delta \vec{r}_1, \\ \dots\dots\dots \\ (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i, \\ \dots\dots\dots \\ (m_N \ddot{\vec{r}}_N - \vec{F}_N) \cdot \delta \vec{r}_N = \vec{Z}_N \cdot \delta \vec{r}_N \end{array} \right.$$

i dodajmy je stronami, wówczas otrzymamy jedno równanie

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i.$$

Napiszmy wszystkie równania tego układu:

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_1 \ddot{\vec{r}}_1 - \vec{F}_1) \cdot \delta \vec{r}_1 = \vec{Z}_1 \cdot \delta \vec{r}_1, \\ \dots\dots\dots \\ (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i, \\ \dots\dots\dots \\ (m_N \ddot{\vec{r}}_N - \vec{F}_N) \cdot \delta \vec{r}_N = \vec{Z}_N \cdot \delta \vec{r}_N \end{array} \right.$$

i dodajmy je stronami, wówczas otrzymamy jedno równanie

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i.$$

Wyrażenie po prawej stronie równania

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i$$

przedstawia sumę prac wirtualnych sił reakcji więzów działających w rozpatrywanym układzie N punktów materialnych.

Wyrażenie po prawej stronie równania

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i$$

przedstawia sumę prac wirtualnych sił reakcji więzów działających w rozpatrywanym układzie N punktów materialnych.

Zasada d'Alemberta mówi, że suma prac wirtualnych sił reakcji więzów działających w układzie jest równa zero,

Wyrażenie po prawej stronie równania

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i$$

przedstawia sumę prac wirtualnych sił reakcji więzów działających w rozpatrywanym układzie N punktów materialnych.

Zasada d'Alemberta mówi, że suma prac wirtualnych sił reakcji więzów działających w układzie jest równa zero, a więc

$$\sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Wyrażenie po prawej stronie równania

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i$$

przedstawia sumę prac wirtualnych sił reakcji więzów działających w rozpatrywanym układzie N punktów materialnych.

Zasada d'Alemberta mówi, że suma prac wirtualnych sił reakcji więzów działających w układzie jest równa zero, a więc

$$\sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Zasada d'Alemberta, jakkolwiek oczywista – zamrożone więzy nie mogą przecież wykonywać pracy nad układem fizycznym –

Zasada d'Alemberta, jakkolwiek oczywista – zamrożone więzy nie mogą przecież wykonywać pracy nad układem fizycznym – jest aksjomatem mechaniki,

Zasada d'Alemberta, jakkolwiek oczywista – zamrożone więzy nie mogą przecież wykonywać pracy nad układem fizycznym – jest aksjomatem mechaniki, tzn., że nie można jej wyprowadzić z innych, bardziej podstawowych praw.

Zasada d'Alemberta, jakkolwiek oczywista – zamrożone więzy nie mogą przecież wykonywać pracy nad układem fizycznym – jest aksjomatem mechaniki, tzn., że nie można jej wyprowadzić z innych, bardziej podstawowych praw.

Zauważmy, że poszczególne składniki sumy, $\vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i$, w zasadzie d'Alemberta nie muszą się zerować.

Zasada d'Alemberta, jakkolwiek oczywista – zamrożone więzy nie mogą przecież wykonywać pracy nad układem fizycznym – jest aksjomatem mechaniki, tzn., że nie można jej wyprowadzić z innych, bardziej podstawowych praw.

Zauważmy, że poszczególne składniki sumy, $\vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i$, w zasadzie d'Alemberta nie muszą się zerować. Znikać musi dopiero ich suma:

$$\sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Zasada d'Alemberta, jakkolwiek oczywista – zamrożone więzy nie mogą przecież wykonywać pracy nad układem fizycznym – **jest aksjomatem mechaniki**, tzn., że nie można jej wyprowadzić z innych, bardziej podstawowych praw.

Zauważmy, że poszczególne składniki sumy, $\vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i$, w zasadzie d'Alemberta nie muszą się zerować. **Znikać musi dopiero ich suma:**

$$\sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Aby to zilustrować, rozważmy ponownie przykład wahadła ze swobodnie ślizgającym się punktem zawieszenia.

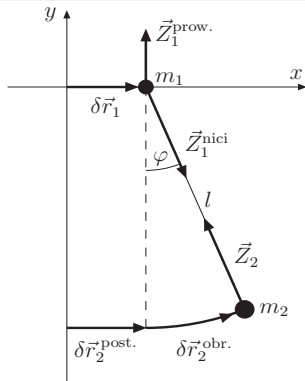
Zasada d'Alemberta, jakkolwiek oczywista – zamrożone więzy nie mogą przecież wykonywać pracy nad układem fizycznym – **jest aksjomatem mechaniki**, tzn., że nie można jej wyprowadzić z innych, bardziej podstawowych praw.

Zauważmy, że poszczególne składniki sumy, $\vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i$, w zasadzie d'Alemberta nie muszą się zerować. **Znikać musi dopiero ich suma:**

$$\sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Aby to zilustrować, rozważmy ponownie przykład wahadła ze swobodnie ślizgającym się punktem zawieszenia.

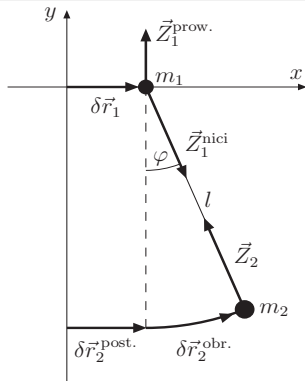
Zasada d'Alemberta



Zauważmy, że

$$\vec{Z}_1^{\text{nici}} = -\vec{Z}_2,$$

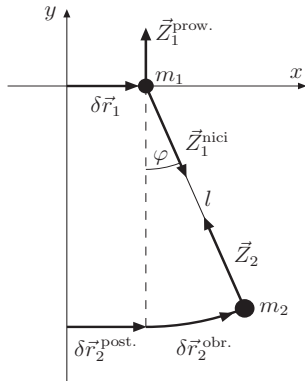
Zasada d'Alemberta



Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\vec{Z}_1^{\text{nici}} &= -\vec{Z}_2, \\ \delta \vec{r}_1 &= \delta \vec{r}_2^{\text{post.}}\end{aligned}$$

Zasada d'Alemberta



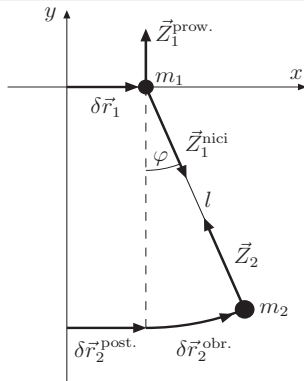
Zauważmy, że

$$\vec{Z}_1^{\text{nici}} = -\vec{Z}_2,$$

$$\delta \vec{r}_1 = \delta \vec{r}_2^{\text{post.}}$$

$$\vec{Z}_1^{\text{prow.}} \cdot \delta \vec{r}_1 = 0,$$

Zasada d'Alemberta



Zauważmy, że

$$\vec{Z}_1^{\text{nici}} = -\vec{Z}_2,$$

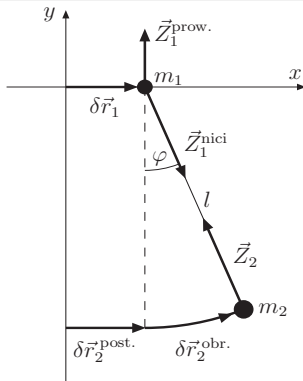
$$\delta \vec{r}_1 = \delta \vec{r}_2^{\text{post.}}$$

$$\vec{Z}_1^{\text{proh.}} \cdot \delta \vec{r}_1 = 0,$$

$$\vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^{\text{obr.}} = 0.$$

Dla nieskończenie małych przesunięć krzywizna $\delta \vec{r}_2^{\text{obr.}}$ nie odgrywa roli.

Zasada d'Alemberta



Zauważmy, że

$$\vec{Z}_1^{\text{nici}} = -\vec{Z}_2,$$

$$\delta \vec{r}_1 = \delta \vec{r}_2^{\text{post.}}$$

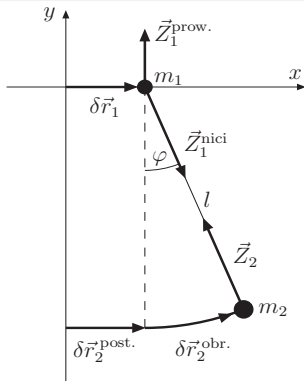
$$\vec{Z}_1^{\text{prow.}} \cdot \delta \vec{r}_1 = 0,$$

$$\vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^{\text{obr.}} = 0.$$

Dla nieskończenie małych przesunięć krzywizna $\delta \vec{r}_2^{\text{obr.}}$ nie odgrywa roli.

Poszczególne wyrazy w zasadzie d'Alemberta mają postać

Zasada d'Alemberta



Zauważmy, że

$$\vec{Z}_1^{\text{nici}} = -\vec{Z}_2,$$

$$\delta \vec{r}_1 = \delta \vec{r}_2^{\text{post.}}$$

$$\vec{Z}_1^{\text{prow.}} \cdot \delta \vec{r}_1 = 0,$$

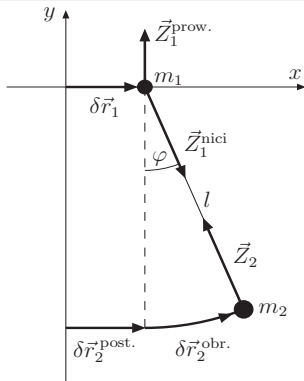
$$\vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^{\text{obr.}} = 0.$$

Dla nieskończenie małych przesunięć krzywizna $\delta \vec{r}_2^{\text{obr.}}$ nie odgrywa roli.

Poszczególne wyrazy w zasadzie d'Alemberta mają postać

$$\vec{Z}_1 \cdot \delta \vec{r}_1$$

Zasada d'Alemberta



Zauważmy, że

$$\vec{Z}_1^{\text{nici}} = -\vec{Z}_2,$$

$$\delta \vec{r}_1 = \delta \vec{r}_2^{\text{post.}}$$

$$\vec{Z}_1^{\text{proW.}} \cdot \delta \vec{r}_1 = 0,$$

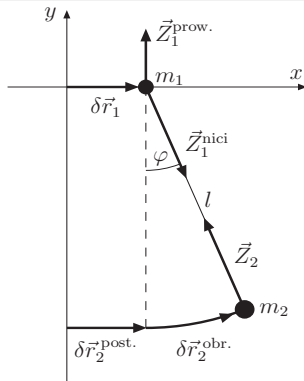
$$\vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^{\text{obr.}} = 0.$$

Dla nieskończenie małych przesunięć krzywizna $\delta \vec{r}_2^{\text{obr.}}$ nie odgrywa roli.

Poszczególne wyrazy w zasadzie d'Alemberta mają postać

$$\vec{Z}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 =$$

Zasada d'Alemberta



Zauważmy, że

$$\vec{Z}_1^{\text{nici}} = -\vec{Z}_2,$$

$$\delta \vec{r}_1 = \delta \vec{r}_2^{\text{post.}}$$

$$\vec{Z}_1^{\text{prow.}} \cdot \delta \vec{r}_1 = 0,$$

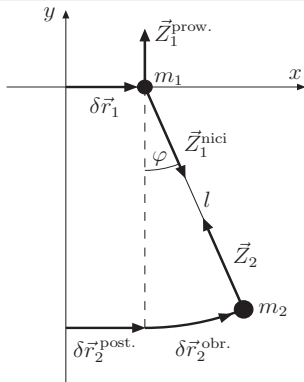
$$\vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^{\text{obr.}} = 0.$$

Dla nieskończenie małych przesunięć krzywizna $\delta \vec{r}_2^{\text{obr.}}$ nie odgrywa roli.

Poszczególne wyrazy w zasadzie d'Alemberta mają postać

$$\vec{Z}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 = \left(\vec{Z}_1^{\text{prow.}} + \vec{Z}_1^{\text{nici}} \right) \cdot \delta \vec{r}_1 =$$

Zasada d'Alemberta



Zauważmy, że

$$\vec{Z}_1^{\text{nici}} = -\vec{Z}_2,$$

$$\delta \vec{r}_1 = \delta \vec{r}_2^{\text{post.}}$$

$$\vec{Z}_1^{\text{proW.}} \cdot \delta \vec{r}_1 = 0,$$

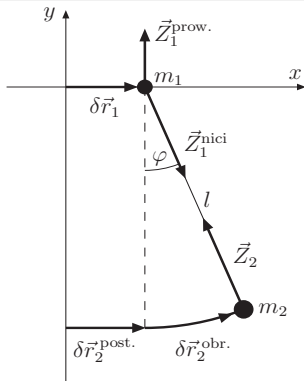
$$\vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^{\text{obr.}} = 0.$$

Dla nieskończenie małych przesunięć krzywizna $\delta \vec{r}_2^{\text{obr.}}$ nie odgrywa roli.

Poszczególne wyrazy w zasadzie d'Alemberta mają postać

$$\vec{Z}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 = \left(\vec{Z}_1^{\text{proW.}} + \vec{Z}_1^{\text{nici}} \right) \cdot \delta \vec{r}_1 = \vec{Z}_1^{\text{nici}} \cdot \delta \vec{r}_1 =$$

Zasada d'Alemberta



Zauważmy, że

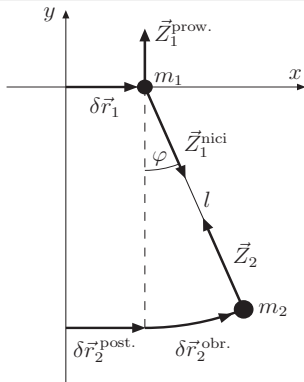
$$\begin{aligned}\vec{Z}_1^{\text{nici}} &= -\vec{Z}_2, \\ \delta \vec{r}_1 &= \delta \vec{r}_2^{\text{post.}}, \\ \vec{Z}_1^{\text{proW.}} \cdot \delta \vec{r}_1 &= 0, \\ \vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^{\text{obr.}} &= 0.\end{aligned}$$

Dla nieskończenie małych przesunięć krzywizna $\delta \vec{r}_2^{\text{obr.}}$ nie odgrywa roli.

Poszczególne wyrazy w zasadzie d'Alemberta mają postać

$$\vec{Z}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 = \left(\vec{Z}_1^{\text{proW.}} + \vec{Z}_1^{\text{nici}} \right) \cdot \delta \vec{r}_1 = \vec{Z}_1^{\text{nici}} \cdot \delta \vec{r}_1 = -\vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_1,$$

Zasada d'Alemberta



Zauważmy, że

$$\vec{Z}_1^{\text{nici}} = -\vec{Z}_2,$$

$$\delta \vec{r}_1 = \delta \vec{r}_2^{\text{post.}}$$

$$\vec{Z}_1^{\text{prow.}} \cdot \delta \vec{r}_1 = 0,$$

$$\vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^{\text{obr.}} = 0.$$

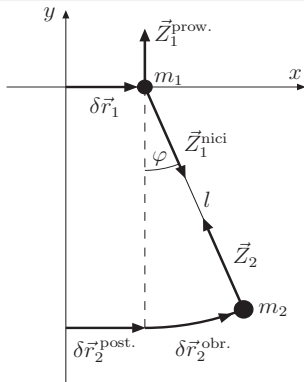
Dla nieskończenie małych przesunięć krzywizna $\delta \vec{r}_2^{\text{obr.}}$ nie odgrywa roli.

Poszczególne wyrazy w zasadzie d'Alemberta mają postać

$$\vec{Z}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 = \left(\vec{Z}_1^{\text{prow.}} + \vec{Z}_1^{\text{nici}} \right) \cdot \delta \vec{r}_1 = \vec{Z}_1^{\text{nici}} \cdot \delta \vec{r}_1 = -\vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_1,$$

$$\vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2$$

Zasada d'Alemberta



Zauważmy, że

$$\vec{Z}_1^{\text{nici}} = -\vec{Z}_2,$$

$$\delta \vec{r}_1 = \delta \vec{r}_2^{\text{post.}}$$

$$\vec{Z}_1^{\text{proW.}} \cdot \delta \vec{r}_1 = 0,$$

$$\vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^{\text{obr.}} = 0.$$

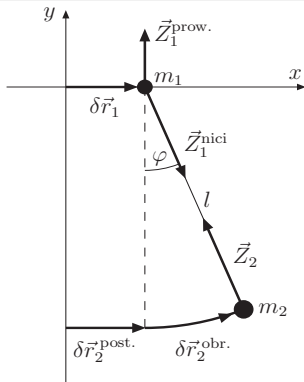
Dla nieskończenie małych przesunięć krzywizna $\delta \vec{r}_2^{\text{obr.}}$ nie odgrywa roli.

Poszczególne wyrazy w zasadzie d'Alemberta mają postać

$$\vec{Z}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 = \left(\vec{Z}_1^{\text{proW.}} + \vec{Z}_1^{\text{nici}} \right) \cdot \delta \vec{r}_1 = \vec{Z}_1^{\text{nici}} \cdot \delta \vec{r}_1 = -\vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_1,$$

$$\vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 =$$

Zasada d'Alemberta



Zauważmy, że

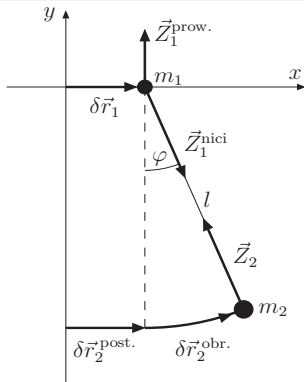
$$\begin{aligned}\vec{Z}_1^{\text{nici}} &= -\vec{Z}_2, \\ \delta\vec{r}_1 &= \delta\vec{r}_2^{\text{post.}}, \\ \vec{Z}_1^{\text{prow.}} \cdot \delta\vec{r}_1 &= 0, \\ \vec{Z}_2 \cdot \delta\vec{r}_2^{\text{obr.}} &= 0.\end{aligned}$$

Dla nieskończenie małych przesunięć krzywizna $\delta\vec{r}_2^{\text{obr.}}$ nie odgrywa roli.

Poszczególne wyrazy w zasadzie d'Alemberta mają postać

$$\begin{aligned}\vec{Z}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 &= \left(\vec{Z}_1^{\text{prow.}} + \vec{Z}_1^{\text{nici}} \right) \cdot \delta\vec{r}_1 = \vec{Z}_1^{\text{nici}} \cdot \delta\vec{r}_1 = -\vec{Z}_2 \cdot \delta\vec{r}_1, \\ \vec{Z}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 &= \vec{Z}_2 \cdot \left(\delta\vec{r}_2^{\text{post.}} + \delta\vec{r}_2^{\text{obr.}} \right) =\end{aligned}$$

Zasada d'Alemberta



Zauważmy, że

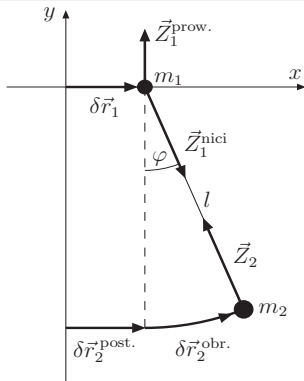
$$\begin{aligned}\vec{Z}_1^{\text{nici}} &= -\vec{Z}_2, \\ \delta \vec{r}_1 &= \delta \vec{r}_2^{\text{post.}}, \\ \vec{Z}_1^{\text{prow.}} \cdot \delta \vec{r}_1 &= 0, \\ \vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^{\text{obr.}} &= 0.\end{aligned}$$

Dla nieskończenie małych przesunięć krzywizna $\delta \vec{r}_2^{\text{obr.}}$ nie odgrywa roli.

Poszczególne wyrazy w zasadzie d'Alemberta mają postać

$$\begin{aligned}\vec{Z}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 &= (\vec{Z}_1^{\text{prow.}} + \vec{Z}_1^{\text{nici}}) \cdot \delta \vec{r}_1 = \vec{Z}_1^{\text{nici}} \cdot \delta \vec{r}_1 = -\vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_1, \\ \vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 &= \vec{Z}_2 \cdot (\delta \vec{r}_2^{\text{post.}} + \delta \vec{r}_2^{\text{obr.}}) = \vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^{\text{post.}} =\end{aligned}$$

Zasada d'Alemberta



Zauważmy, że

$$\vec{Z}_1^{\text{nici}} = -\vec{Z}_2,$$

$$\delta \vec{r}_1 = \delta \vec{r}_2^{\text{post.}}$$

$$\vec{Z}_1^{\text{prow.}} \cdot \delta \vec{r}_1 = 0,$$

$$\vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^{\text{obr.}} = 0.$$

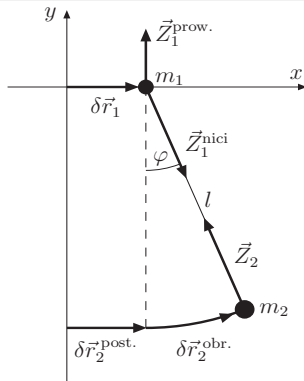
Dla nieskończenie małych przesunięć krzywizna $\delta \vec{r}_2^{\text{obr.}}$ nie odgrywa roli.

Poszczególne wyrazy w zasadzie d'Alemberta mają postać

$$\vec{Z}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 = \left(\vec{Z}_1^{\text{prow.}} + \vec{Z}_1^{\text{nici}} \right) \cdot \delta \vec{r}_1 = \vec{Z}_1^{\text{nici}} \cdot \delta \vec{r}_1 = -\vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_1,$$

$$\vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 = \vec{Z}_2 \cdot \left(\delta \vec{r}_2^{\text{post.}} + \delta \vec{r}_2^{\text{obr.}} \right) = \vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^{\text{post.}} = \vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_1.$$

Zasada d'Alemberta



Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\vec{Z}_1^{\text{nici}} &= -\vec{Z}_2, \\ \delta \vec{r}_1 &= \delta \vec{r}_2^{\text{post.}}, \\ \vec{Z}_1^{\text{prow.}} \cdot \delta \vec{r}_1 &= 0, \\ \vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^{\text{obr.}} &= 0.\end{aligned}$$

Dla nieskończenie małych przesunięć krzywizna $\delta \vec{r}_2^{\text{obr.}}$ nie odgrywa roli.

Poszczególne wyrazy w zasadzie d'Alemberta mają postać

$$\begin{aligned}\vec{Z}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 &= (\vec{Z}_1^{\text{prow.}} + \vec{Z}_1^{\text{nici}}) \cdot \delta \vec{r}_1 = \vec{Z}_1^{\text{nici}} \cdot \delta \vec{r}_1 = -\vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_1, \\ \vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 &= \vec{Z}_2 \cdot (\delta \vec{r}_2^{\text{post.}} + \delta \vec{r}_2^{\text{obr.}}) = \vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^{\text{post.}} = \vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_1.\end{aligned}$$

Chociaż poszczególne wyrazy w zasadzie d'Alemberta są niezerowe, to ich suma znika.

$$\sum_{i=1}^2 \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{Z}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 = -\vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_1 = 0.$$

Chociaż poszczególne wyrazy w zasadzie d'Alemberta są niezerowe, to ich suma znika.

$$\sum_{i=1}^2 \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{Z}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 = -\vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_1 = 0.$$

Poszczególne punkty układu o masach m_1 i m_2 mogą wymieniać ze sobą energię utraconą, bądź uzyskaną, w wyniku oddziaływania z więzami.

Chociaż poszczególne wyrazy w zasadzie d'Alemberta są niezerowe, to ich suma znika.

$$\sum_{i=1}^2 \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{Z}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 = -\vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{Z}_2 \cdot \delta \vec{r}_1 = 0.$$

Poszczególne punkty układu o masach m_1 i m_2 mogą wymieniać ze sobą energię utraconą, bądź uzyskaną, w wyniku oddziaływania z więzami.

Równanie d'Alemberta

Bezpośrednią konsekwencją zasady d'Alemberta jest **równanie d'Alemberta**. Jeżeli w równaniu

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i.$$

Równanie d'Alemberta

Bezpośrednią konsekwencją zasady d'Alemberta jest **równanie d'Alemberta**. Jeżeli w równaniu

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i.$$

podstawimy $\sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$,

Równanie d'Alemberta

Bezpośrednią konsekwencją zasady d'Alemberta jest **równanie d'Alemberta**. Jeżeli w równaniu

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i.$$

podstawimy $\sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$, to otrzymamy

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Równanie d'Alemberta

Bezpośrednią konsekwencją zasady d'Alemberta jest **równanie d'Alemberta**. Jeżeli w równaniu

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i.$$

podstawimy $\sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$, to otrzymamy

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Jest to **równanie d'Alemberta** dla układu N punktów materialnych z więzami dowolnymi.

Równanie d'Alemberta

Bezpośrednią konsekwencją zasady d'Alemberta jest **równanie d'Alemberta**. Jeżeli w równaniu

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i.$$

podstawimy $\sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$, to otrzymamy

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Jest to **równanie d'Alemberta** dla układu N punktów materialnych z więzami dowolnymi.

Równanie d'Alemberta ma jednak praktyczne znaczenie tylko dla więzów holonomicznych.

Równanie d'Alemberta

Bezpośrednią konsekwencją zasady d'Alemberta jest **równanie d'Alemberta**. Jeżeli w równaniu

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i.$$

podstawimy $\sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$, to otrzymamy

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

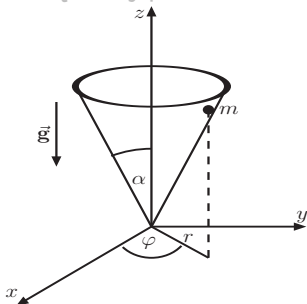
Jest to **równanie d'Alemberta** dla układu N punktów materialnych z więzami dowolnymi.

Równanie d'Alemberta ma jednak praktyczne znaczenie tylko dla więzów holonomicznych.

Równanie d'Alemberta

Stwierdzenie to ilustrują następujące przykłady.

Przykład 2: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .

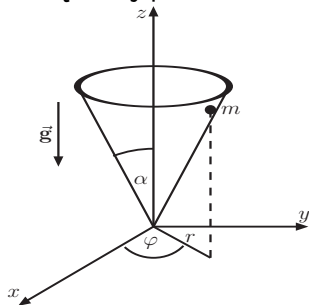


$$z = r \operatorname{ctg} \alpha$$

Równanie d'Alemberta

Stwierdzenie to ilustrują następujące przykłady.

Przykład 2: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .



$$z = r \operatorname{ctg} \alpha$$

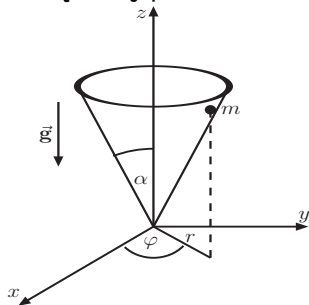
Równanie d'Alemberta ma postać

$$\left(m\ddot{\vec{r}} - m\vec{g} \right) \cdot \delta\vec{r} = 0$$

Równanie d'Alemberta

Stwierdzenie to ilustrują następujące przykłady.

Przykład 2: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .



$$z = r \operatorname{ctg} \alpha$$

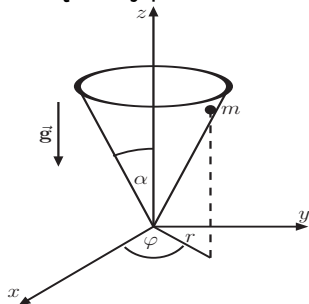
Równanie d'Alemberta ma postać

$$\begin{aligned} (m\ddot{\vec{r}} - m\vec{g}) \cdot \delta\vec{r} &= 0 \\ m[\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + (\ddot{z} + g)\delta z] &= 0, \end{aligned}$$

Równanie d'Alemberta

Stwierdzenie to ilustrują następujące przykłady.

Przykład 2: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .



$$z = r \operatorname{ctg} \alpha$$

Równanie d'Alemberta ma postać

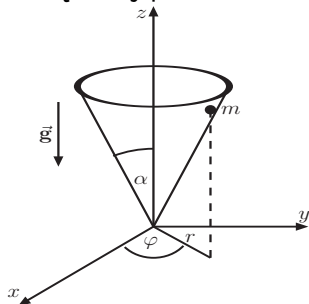
$$\begin{aligned} (m\ddot{\vec{r}} - m\vec{g}) \cdot \delta\vec{r} &= 0 \\ m[\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + (\ddot{z} + g)\delta z] &= 0, \end{aligned}$$

gdź w wybranym układzie współrzędnych wektor przyspieszenia ziemskiego $\vec{g} = [0, 0, -g]$.

Równanie d'Alemberta

Stwierdzenie to ilustrują następujące przykłady.

Przykład 2: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .



$$z = r \operatorname{ctg} \alpha$$

Równanie d'Alemberta ma postać

$$\begin{aligned} (m\ddot{\vec{r}} - m\vec{g}) \cdot \delta\vec{r} &= 0 \\ m[\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + (\ddot{z} + g)\delta z] &= 0, \end{aligned}$$

gdyż w wybranym układzie współrzędnych wektor przyspieszenia ziemskiego

$$\vec{g} = [0, 0, -g].$$

We współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x \end{cases}$$

We współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x = \end{cases}$$

We współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x = \cos \varphi \delta r - r \sin \varphi \delta \varphi, \end{cases}$$

We współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x = \cos \varphi \delta r - r \sin \varphi \delta \varphi, \\ \delta y \end{cases}$$

We współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x = \cos \varphi \delta r - r \sin \varphi \delta \varphi, \\ \delta y = \sin \varphi \delta r + r \cos \varphi \delta \varphi, \\ \delta z = \delta r \operatorname{ctg} \alpha - r \operatorname{cosec}^2 \alpha \delta \alpha \end{cases}$$

We współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x = \cos \varphi \delta r - r \sin \varphi \delta \varphi, \\ \delta y = \sin \varphi \delta r + r \cos \varphi \delta \varphi, \end{cases}$$

We współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x = \cos \varphi \delta r - r \sin \varphi \delta \varphi, \\ \delta y = \sin \varphi \delta r + r \cos \varphi \delta \varphi, \\ \delta z \end{cases}$$

We współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x = \cos \varphi \delta r - r \sin \varphi \delta \varphi, \\ \delta y = \sin \varphi \delta r + r \cos \varphi \delta \varphi, \\ \delta z = \end{cases}$$

We współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x = \cos \varphi \delta r - r \sin \varphi \delta \varphi, \\ \delta y = \sin \varphi \delta r + r \cos \varphi \delta \varphi, \\ \delta z = \operatorname{ctg} \alpha \delta r. \end{cases}$$

Równanie d'Alemberta

We współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x = \cos \varphi \delta r - r \sin \varphi \delta \varphi, \\ \delta y = \sin \varphi \delta r + r \cos \varphi \delta \varphi, \\ \delta z = \operatorname{ctg} \alpha \delta r. \end{cases}$$

Nie ma jawnej zależności od czasu więc przesunięcia wirtualne obliczamy tak jak różniczki zupełne.

Równanie d'Alemberta

We współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x = \cos \varphi \delta r - r \sin \varphi \delta \varphi, \\ \delta y = \sin \varphi \delta r + r \cos \varphi \delta \varphi, \\ \delta z = \operatorname{ctg} \alpha \delta r. \end{cases}$$

Nie ma jawnej zależności od czasu więc przesunięcia wirtualne obliczamy tak jak różniczki zupełne.

Przedzielmy równanie d'Alemberta przez m

$$\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + (\ddot{z} + g)\delta z = 0$$

i wstawmy obliczone przesunięcia wirtualne

Równanie d'Alemberta

We współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x = \cos \varphi \delta r - r \sin \varphi \delta \varphi, \\ \delta y = \sin \varphi \delta r + r \cos \varphi \delta \varphi, \\ \delta z = \operatorname{ctg} \alpha \delta r. \end{cases}$$

Nie ma jawnej zależności od czasu więc przesunięcia wirtualne obliczamy tak jak różniczki zupełne.

Przedzielimy równanie d'Alemberta przez m

$$\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + (\ddot{z} + g)\delta z = 0$$

i wstawmy obliczone przesunięcia wirtualne

$$\ddot{x}(\cos \varphi \delta r - r \sin \varphi \delta \varphi) + \ddot{y}(\sin \varphi \delta r + r \cos \varphi \delta \varphi) + (\ddot{z} + g) \operatorname{ctg} \alpha \delta r = 0.$$

Równanie d'Alemberta

We współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x = \cos \varphi \delta r - r \sin \varphi \delta \varphi, \\ \delta y = \sin \varphi \delta r + r \cos \varphi \delta \varphi, \\ \delta z = \operatorname{ctg} \alpha \delta r. \end{cases}$$

Nie ma jawnej zależności od czasu więc przesunięcia wirtualne obliczamy tak jak różniczki zupełne.

Przedzielimy równanie d'Alemberta przez m

$$\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + (\ddot{z} + g)\delta z = 0$$

i wstawmy obliczone przesunięcia wirtualne

$$\ddot{x}(\cos \varphi \delta r - r \sin \varphi \delta \varphi) + \ddot{y}(\sin \varphi \delta r + r \cos \varphi \delta \varphi) + (\ddot{z} + g) \operatorname{ctg} \alpha \delta r = 0.$$

Przekształćmy równanie

$$\ddot{x}(\cos \varphi \delta r - r \sin \varphi \delta \varphi) + \ddot{y}(\sin \varphi \delta r + r \cos \varphi \delta \varphi) + (\ddot{z} + g) \operatorname{ctg} \alpha \delta r = 0$$

grupując wyrazy z δr i $\delta \varphi$

$$[\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi + (\ddot{z} + g) \operatorname{ctg} \alpha] \delta r + (-\ddot{x} r \sin \varphi + \ddot{y} r \cos \varphi) \delta \varphi = 0.$$

Przekształćmy równanie

$$\ddot{x}(\cos \varphi \delta r - r \sin \varphi \delta \varphi) + \ddot{y}(\sin \varphi \delta r + r \cos \varphi \delta \varphi) + (\ddot{z} + g) \operatorname{ctg} \alpha \delta r = 0$$

grupując wyrazy z δr i $\delta \varphi$

$$[\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi + (\ddot{z} + g) \operatorname{ctg} \alpha] \delta r + (-\ddot{x} r \sin \varphi + \ddot{y} r \cos \varphi) \delta \varphi = 0.$$

Współrzędne r i φ , a zatem również przesunięcia δr i $\delta \varphi$, są niezależne.

Przekształćmy równanie

$$\ddot{x}(\cos \varphi \delta r - r \sin \varphi \delta \varphi) + \ddot{y}(\sin \varphi \delta r + r \cos \varphi \delta \varphi) + (\ddot{z} + g) \operatorname{ctg} \alpha \delta r = 0$$

grupując wyrazy z δr i $\delta \varphi$

$$[\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi + (\ddot{z} + g) \operatorname{ctg} \alpha] \delta r + (-\ddot{x} r \sin \varphi + \ddot{y} r \cos \varphi) \delta \varphi = 0.$$

Współrzędne r i φ , a zatem również przesunięcia δr i $\delta \varphi$, są niezależne. (Układ ma dwa stopnie swobody.)

Przekształćmy równanie

$$\ddot{x}(\cos \varphi \delta r - r \sin \varphi \delta \varphi) + \ddot{y}(\sin \varphi \delta r + r \cos \varphi \delta \varphi) + (\ddot{z} + g) \operatorname{ctg} \alpha \delta r = 0$$

grupując wyrazy z δr i $\delta \varphi$

$$[\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi + (\ddot{z} + g) \operatorname{ctg} \alpha] \delta r + (-\ddot{x} r \sin \varphi + \ddot{y} r \cos \varphi) \delta \varphi = 0.$$

Współrzędne r i φ , a zatem również przesunięcia δr i $\delta \varphi$, są niezależne. (Układ ma dwa stopnie swobody.)

Równanie d'Alemberta

Kombinacja liniowa niezależnych przesunięć δr i $\delta\varphi$

$$[\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi + (\ddot{z} + g) \operatorname{ctg} \alpha] \delta r + (-\ddot{x} r \sin \varphi + \ddot{y} r \cos \varphi) \delta \varphi = 0.$$

może znikać wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie współczynniki się zerują.

W takim razie otrzymujemy dwa równania

$$\begin{aligned}\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi + (\ddot{z} + g) \operatorname{ctg} \alpha &= 0, \\ r(-\ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi) &= 0.\end{aligned}$$

Równanie d'Alemberta

Kombinacja liniowa niezależnych przesunięć δr i $\delta\varphi$

$$[\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi + (\ddot{z} + g) \operatorname{ctg} \alpha] \delta r + (-\ddot{x} r \sin \varphi + \ddot{y} r \cos \varphi) \delta \varphi = 0.$$

może znikać wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie współczynniki się zerują.

W takim razie otrzymujemy dwa równania

$$\begin{aligned}\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi + (\ddot{z} + g) \operatorname{ctg} \alpha &= 0, \\ r(-\ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi) &= 0.\end{aligned}$$

Drugie równanie jest spełnione, gdy

Równanie d'Alemberta

Kombinacja liniowa niezależnych przesunięć δr i $\delta\varphi$

$$[\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi + (\ddot{z} + g) \operatorname{ctg} \alpha] \delta r + (-\ddot{x} r \sin \varphi + \ddot{y} r \cos \varphi) \delta \varphi = 0.$$

może znikać wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie współczynniki się zerują.

W takim razie otrzymujemy dwa równania

$$\begin{aligned}\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi + (\ddot{z} + g) \operatorname{ctg} \alpha &= 0, \\ r(-\ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi) &= 0.\end{aligned}$$

Drugie równanie jest spełnione, gdy

$$r = 0$$

Równanie d'Alemberta

Kombinacja liniowa niezależnych przesunięć δr i $\delta\varphi$

$$[\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi + (\ddot{z} + g) \operatorname{ctg} \alpha] \delta r + (-\ddot{x} r \sin \varphi + \ddot{y} r \cos \varphi) \delta \varphi = 0.$$

może znikać wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie współczynniki się zerują.

W takim razie otrzymujemy dwa równania

$$\begin{aligned}\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi + (\ddot{z} + g) \operatorname{ctg} \alpha &= 0, \\ r(-\ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi) &= 0.\end{aligned}$$

Drugie równanie jest spełnione, gdy

$$r = 0 \quad \text{lub} \quad -\ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi = 0.$$

Równanie d'Alemberta

Kombinacja liniowa niezależnych przesunięć δr i $\delta\varphi$

$$[\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi + (\ddot{z} + g) \operatorname{ctg} \alpha] \delta r + (-\ddot{x} r \sin \varphi + \ddot{y} r \cos \varphi) \delta \varphi = 0.$$

może znikać wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie współczynniki się zerują.

W takim razie otrzymujemy dwa równania

$$\begin{aligned}\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi + (\ddot{z} + g) \operatorname{ctg} \alpha &= 0, \\ r(-\ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi) &= 0.\end{aligned}$$

Drugie równanie jest spełnione, gdy

$$r = 0 \quad \text{lub} \quad -\ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi = 0.$$

Równanie d'Alemberta

Ponieważ równanie $r = 0$ jest spełnione tylko, gdy punkt spoczywa w wierzchołku stożka, to możemy je pominąć jako fizycznie nieciekawe.

Wstawiając do równań w kolorze niebieskim wzory na $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ i $\ddot{z}$ z *Wykładu 2*

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi,$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi,$$

$$\ddot{z} = \ddot{r} \operatorname{ctg} \alpha$$

Równanie d'Alemberta

Ponieważ równanie $r = 0$ jest spełnione tylko, gdy punkt spoczywa w wierzchołku stożka, to możemy je pominąć jako fizycznie nieciekawe.

Wstawiając do równań w kolorze niebieskim wzory na $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ i $\ddot{z}$ z *Wykładu 2*

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi,$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi,$$

$$\ddot{z} = \ddot{r} \operatorname{ctg} \alpha$$

i porządkując otrzymamy równania ruchu dla punktu materialnego na powierzchni stożka

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \quad \text{ i } \quad (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \operatorname{tg} \alpha + g = 0.$$

Równanie d'Alemberta

Ponieważ równanie $r = 0$ jest spełnione tylko, gdy punkt spoczywa w wierzchołku stożka, to możemy je pominąć jako fizycznie nieciekawe.

Wstawiając do równań w kolorze niebieskim wzory na $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ i $\ddot{z}$ z *Wykładu 2*

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi,$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi,$$

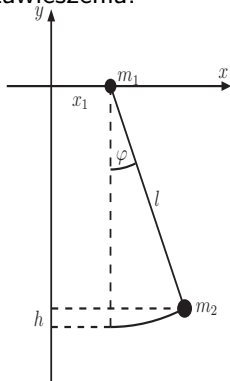
$$\ddot{z} = \ddot{r} \operatorname{ctg} \alpha$$

i porządkując otrzymamy równania ruchu dla punktu materialnego na powierzchni stożka

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \quad \text{ i } \quad (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \operatorname{tg} \alpha + g = 0.$$

Równanie d'Alemberta

Przykład 3: Wahadło ze swobodnie ślizgającym się punktem zawieszenia.

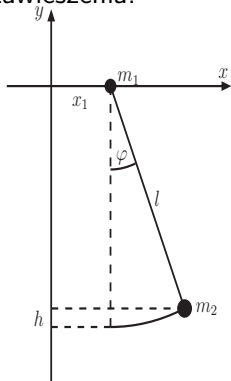


Równanie d'Alemberta ma postać

$$\sum_{i=1}^2 \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - m_i \vec{g} \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Równanie d'Alemberta

Przykład 3: Wahadło ze swobodnie ślizgającym się punktem zawieszenia.



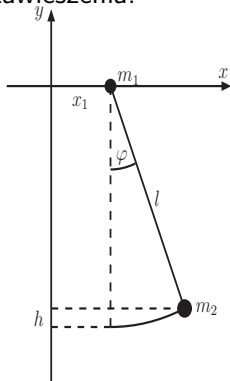
Równanie d'Alemberta ma postać

$$\sum_{i=1}^2 \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - m_i \vec{g} \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + m_2 \left(\ddot{\vec{r}}_2 - \vec{g} \right) \cdot \delta \vec{r}_2 = 0,$$

Równanie d'Alemberta

Przykład 3: Wahadło ze swobodnie ślizgającym się punktem zawieszenia.



Równanie d'Alemberta ma postać

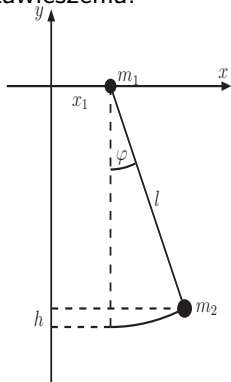
$$\sum_{i=1}^2 \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - m_i \vec{g} \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + m_2 \left(\ddot{\vec{r}}_2 - \vec{g} \right) \cdot \delta \vec{r}_2 = 0,$$

$$\text{gdź } \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_1 = [0, -g] \cdot [\delta x_1, 0] = 0.$$

Równanie d'Alemberta

Przykład 3: Wahadło ze swobodnie ślizgającym się punktem zawieszenia.



Równanie d'Alemberta ma postać

$$\sum_{i=1}^2 \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - m_i \vec{g} \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + m_2 \left(\ddot{\vec{r}}_2 - \vec{g} \right) \cdot \delta \vec{r}_2 = 0,$$

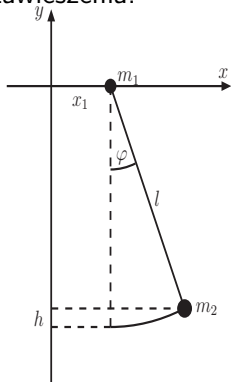
$$\text{gdź } \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_1 = [0, -g] \cdot [\delta x_1, 0] = 0.$$

Rozpisując iloczyny skalarne we współrzędnych otrzymamy

$$m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 + m_2 [\ddot{x}_2 \delta x_2 + (\ddot{y}_2 + g) \delta y_2] = 0.$$

Równanie d'Alemberta

Przykład 3: Wahadło ze swobodnie ślizgającym się punktem zawieszenia.



Równanie d'Alemberta ma postać

$$\sum_{i=1}^2 \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - m_i \vec{g} \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

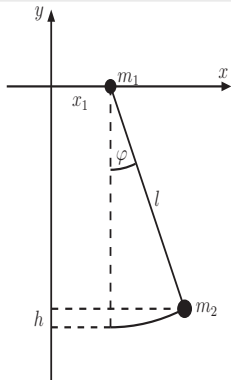
$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + m_2 \left(\ddot{\vec{r}}_2 - \vec{g} \right) \cdot \delta \vec{r}_2 = 0,$$

$$\text{gdyż } \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_1 = [0, -g] \cdot [\delta x_1, 0] = 0.$$

Rozpisując iloczyny skalarne we współrzędnych otrzymamy

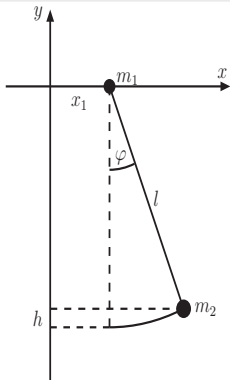
$$m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 + m_2 [\ddot{x}_2 \delta x_2 + (\ddot{y}_2 + g) \delta y_2] = 0.$$

Równanie d'Alemberta



Skorzystajmy ze wzorów transformacyjnych

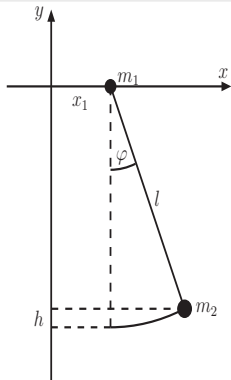
Równanie d'Alemberta



Skorzystajmy ze wzorów transformacyjnych

$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi$$

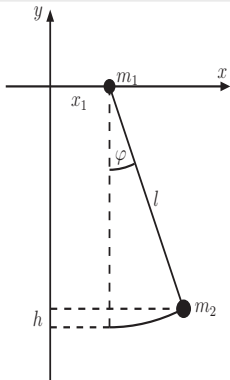
Równanie d'Alemberta



Skorzystajmy ze wzorów transformacyjnych

$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi \Rightarrow$$

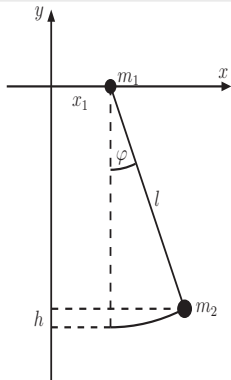
Równanie d'Alemberta



Skorzystajmy ze wzorów transformacyjnych

$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \delta x_2 = \delta x_1 + l \cos \varphi \delta \varphi,$$

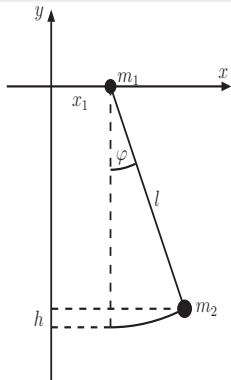
Równanie d'Alemberta



Skorzystajmy ze wzorów transformacyjnych

$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \delta x_2 = \delta x_1 + l \cos \varphi \delta \varphi,$$
$$y_2 = -l \cos \varphi$$

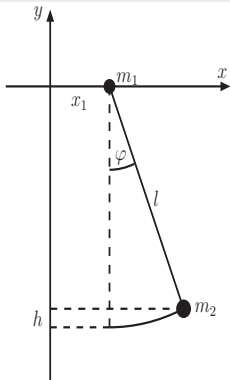
Równanie d'Alemberta



Skorzystajmy ze wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \varphi &\Rightarrow &\delta x_2 = \delta x_1 + l \cos \varphi \delta \varphi, \\y_2 &= -l \cos \varphi &\Rightarrow &\end{aligned}$$

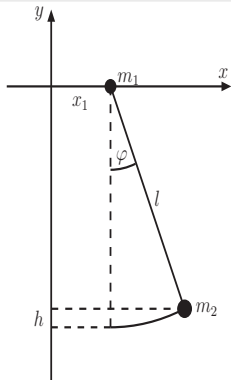
Równanie d'Alemberta



Skorzystajmy ze wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \varphi &\Rightarrow &\delta x_2 = \delta x_1 + l \cos \varphi \delta \varphi, \\y_2 &= -l \cos \varphi &\Rightarrow &\delta y_2 = l \sin \varphi \delta \varphi\end{aligned}$$

Równanie d'Alemberta

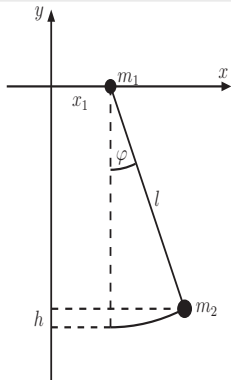


Skorzystajmy ze wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \varphi &\Rightarrow &\delta x_2 = \delta x_1 + l \cos \varphi \delta \varphi, \\y_2 &= -l \cos \varphi &\Rightarrow &\delta y_2 = l \sin \varphi \delta \varphi\end{aligned}$$

w równaniu

Równanie d'Alemberta



Skorzystajmy ze wzorów transformacyjnych

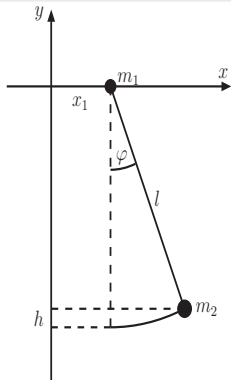
$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \delta x_2 = \delta x_1 + l \cos \varphi \delta \varphi,$$

$$y_2 = -l \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad \delta y_2 = l \sin \varphi \delta \varphi$$

w równaniu

$$m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 + m_2 [\ddot{x}_2 \delta x_2 + (\ddot{y}_2 + g) \delta y_2] = 0.$$

Równanie d'Alemberta



Skorzystajmy ze wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \varphi &\Rightarrow \delta x_2 &= \delta x_1 + l \cos \varphi \delta \varphi, \\y_2 &= -l \cos \varphi &\Rightarrow \delta y_2 &= l \sin \varphi \delta \varphi\end{aligned}$$

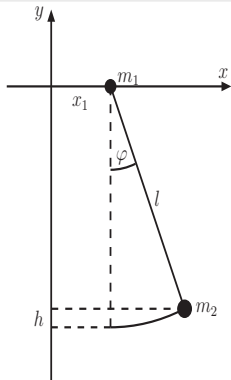
w równaniu

$$m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 + m_2 [\ddot{x}_2 \delta x_2 + (\ddot{y}_2 + g) \delta y_2] = 0.$$

Wtedy otrzymamy

$$m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 + m_2 [\ddot{x}_2 (\delta x_1 + l \cos \varphi \delta \varphi) + (\ddot{y}_2 + g) l \sin \varphi \delta \varphi] = 0.$$

Równanie d'Alemberta



Skorzystajmy ze wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \varphi &\Rightarrow &\delta x_2 = \delta x_1 + l \cos \varphi \delta \varphi, \\y_2 &= -l \cos \varphi &\Rightarrow &\delta y_2 = l \sin \varphi \delta \varphi\end{aligned}$$

w równaniu

$$m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 + m_2 [\ddot{x}_2 \delta x_2 + (\ddot{y}_2 + g) \delta y_2] = 0.$$

Wtedy otrzymamy

$$m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 + m_2 [\ddot{x}_2 (\delta x_1 + l \cos \varphi \delta \varphi) + (\ddot{y}_2 + g) l \sin \varphi \delta \varphi] = 0.$$

Grupując wyrazy przy δx_1 i $\delta \varphi$ w równaniu

$$m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 + m_2 [\ddot{x}_2 (\delta x_1 + l \cos \varphi \delta \varphi) + (\ddot{y}_2 + g) l \sin \varphi \delta \varphi] = 0$$

otrzymamy

$$(m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2) \delta x_1 + m_2 l [\ddot{x}_2 \cos \varphi + (\ddot{y}_2 + g) \sin \varphi] \delta \varphi = 0.$$

Grupując wyrazy przy δx_1 i $\delta \varphi$ w równaniu

$$m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 + m_2 [\ddot{x}_2 (\delta x_1 + l \cos \varphi \delta \varphi) + (\ddot{y}_2 + g) l \sin \varphi \delta \varphi] = 0$$

otrzymamy

$$(m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2) \delta x_1 + m_2 l [\ddot{x}_2 \cos \varphi + (\ddot{y}_2 + g) \sin \varphi] \delta \varphi = 0.$$

Przyrównując do zera współczynniki przy niezależnych przesunięciach wirtualnych δx_1 i $\delta \varphi$ otrzymamy

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0,$$

$$\ddot{x}_2 \cos \varphi + (\ddot{y}_2 + g) \sin \varphi = 0,$$

gdzie drugie równanie przedzieliliśmy przez $m_2 l$.

Grupując wyrazy przy δx_1 i $\delta \varphi$ w równaniu

$$m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 + m_2 [\ddot{x}_2 (\delta x_1 + l \cos \varphi \delta \varphi) + (\ddot{y}_2 + g) l \sin \varphi \delta \varphi] = 0$$

otrzymamy

$$(m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2) \delta x_1 + m_2 l [\ddot{x}_2 \cos \varphi + (\ddot{y}_2 + g) \sin \varphi] \delta \varphi = 0.$$

Przyrównując do zera współczynniki przy niezależnych przesunięciach wirtualnych δx_1 i $\delta \varphi$ otrzymamy

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0,$$

$$\ddot{x}_2 \cos \varphi + (\ddot{y}_2 + g) \sin \varphi = 0,$$

gdzie drugie równanie przedzieliliśmy przez $m_2 l$.

Skorzystajmy ponownie z wzorów transformacyjnych

$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi \Rightarrow$$

Skorzystajmy ponownie z wzorów transformacyjnych

$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l \dot{\varphi} \cos \varphi$$

Skorzystajmy ponownie z wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ y_2 &= -l \cos \varphi\end{aligned}$$

Skorzystajmy ponownie z wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \varphi & \Rightarrow & \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l \dot{\varphi} \cos \varphi \\y_2 &= -l \cos \varphi & \Rightarrow & \end{aligned}$$

Skorzystajmy ponownie z wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \varphi & \Rightarrow & \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ y_2 &= -l \cos \varphi & \Rightarrow & \dot{y}_2 = l \dot{\varphi} \sin \varphi.\end{aligned}$$

Skorzystajmy ponownie z wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \varphi & \Rightarrow & \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l \dot{\varphi} \cos \varphi \\y_2 &= -l \cos \varphi & \Rightarrow & \dot{y}_2 = l \dot{\varphi} \sin \varphi.\end{aligned}$$

Obliczmy drugie pochodne czasowe

$$\ddot{x}_2 =$$

Skorzystajmy ponownie z wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \varphi & \Rightarrow & \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l \dot{\varphi} \cos \varphi \\y_2 &= -l \cos \varphi & \Rightarrow & \dot{y}_2 = l \dot{\varphi} \sin \varphi.\end{aligned}$$

Obliczmy drugie pochodne czasowe

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 + l \ddot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi,$$

Skorzystajmy ponownie z wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \varphi & \Rightarrow & \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l \dot{\varphi} \cos \varphi \\y_2 &= -l \cos \varphi & \Rightarrow & \dot{y}_2 = l \dot{\varphi} \sin \varphi.\end{aligned}$$

Obliczmy drugie pochodne czasowe

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 + l \ddot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi,$$
$$\ddot{y}_2$$

Równanie d'Alemberta

Skorzystajmy ponownie z wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \varphi & \Rightarrow & \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l \dot{\varphi} \cos \varphi \\y_2 &= -l \cos \varphi & \Rightarrow & \dot{y}_2 = l \dot{\varphi} \sin \varphi.\end{aligned}$$

Obliczmy drugie pochodne czasowe

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 &= \ddot{x}_1 + l \ddot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \\ \ddot{y}_2 &= \end{aligned}$$

Skorzystajmy ponownie z wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \varphi & \Rightarrow & \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l \dot{\varphi} \cos \varphi \\y_2 &= -l \cos \varphi & \Rightarrow & \dot{y}_2 = l \dot{\varphi} \sin \varphi.\end{aligned}$$

Obliczmy drugie pochodne czasowe

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 &= \ddot{x}_1 + l \ddot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \\ \ddot{y}_2 &= l \ddot{\varphi} \sin \varphi + l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi\end{aligned}$$

Równanie d'Alemberta

Skorzystajmy ponownie z wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \varphi & \Rightarrow & \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l \dot{\varphi} \cos \varphi \\y_2 &= -l \cos \varphi & \Rightarrow & \dot{y}_2 = l \dot{\varphi} \sin \varphi.\end{aligned}$$

Obliczmy drugie pochodne czasowe

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 &= \ddot{x}_1 + l \ddot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \\ \ddot{y}_2 &= l \ddot{\varphi} \sin \varphi + l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi\end{aligned}$$

i wstawmy je do równań u dołu poprzedniej strony

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \left(\ddot{x}_1 + l \ddot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right) &= 0, \\ \left(\ddot{x}_1 + l \ddot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right) \cos \varphi + \left(l \ddot{\varphi} \sin \varphi + l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + g \right) \sin \varphi &= 0.\end{aligned}$$

Równanie d'Alemberta

Skorzystajmy ponownie z wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \varphi & \Rightarrow & \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l \dot{\varphi} \cos \varphi \\y_2 &= -l \cos \varphi & \Rightarrow & \dot{y}_2 = l \dot{\varphi} \sin \varphi.\end{aligned}$$

Obliczmy drugie pochodne czasowe

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 &= \ddot{x}_1 + l \ddot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \\ \ddot{y}_2 &= l \ddot{\varphi} \sin \varphi + l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi\end{aligned}$$

i wstawmy je do równań u dołu poprzedniej strony

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \left(\ddot{x}_1 + l \ddot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right) &= 0, \\ \left(\ddot{x}_1 + l \ddot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right) \cos \varphi + \left(l \ddot{\varphi} \sin \varphi + l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + g \right) \sin \varphi &= 0.\end{aligned}$$

Po prostych przekształceniach otrzymamy układ równań ruchu wahadła ze swobodnie ślizgającym się punktem zawieszenia

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) &= 0, \\ \ddot{x}_1 \cos \varphi + l \ddot{\varphi} + g \sin \varphi &= 0.\end{aligned}$$

W obu przykładach otrzymaliśmy dokładnie takie same równania ruchu jak te, które wyprowadziliśmy z równań Newtona.

Po prostych przekształceniach otrzymamy układ równań ruchu wahadła ze swobodnie ślizgającym się punktem zawieszenia

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) &= 0, \\ \ddot{x}_1 \cos \varphi + l \ddot{\varphi} + g \sin \varphi &= 0.\end{aligned}$$

W obu przykładach otrzymaliśmy dokładnie takie same równania ruchu jak te, które wyprowadziliśmy z równań Newtona.

Tym razem jednak nie wprowadziliśmy sił reakcji więzów, a więc nie musieliśmy ich eliminować.

Po prostych przekształceniach otrzymamy układ równań ruchu wahadła ze swobodnie ślizgającym się punktem zawieszenia

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) &= 0, \\ \ddot{x}_1 \cos \varphi + l \ddot{\varphi} + g \sin \varphi &= 0.\end{aligned}$$

W obu przykładach otrzymaliśmy dokładnie takie same równania ruchu jak te, które wyprowadziliśmy z równań Newtona.

Tym razem jednak nie wprowadziliśmy sił reakcji więzów, a więc nie musieliśmy ich eliminować.

Zwróćmy uwagę, że wyprowadzając równania ruchu z równania d'Alemberta skorzystaliśmy z niezależności odpowiednich przesunięć wirtualnych, a zmienne zależne wyeliminowaliśmy korzystając z warunków więzów.

Zwróćmy uwagę, że wyprowadzając równania ruchu z równania d'Alemberta skorzystaliśmy z niezależności odpowiednich przesunięć wirtualnych, a zmienne zależne wyeliminowaliśmy korzystając z warunków więzów.

Taka eliminacja zmiennych zależnych jest możliwa tylko w przypadku więzów holonomicznych.

Zwróćmy uwagę, że wyprowadzając równania ruchu z równania d'Alemberta skorzystaliśmy z niezależności odpowiednich przesunięć wirtualnych, a zmienne zależne wyeliminowaliśmy korzystając z warunków więzów.

Taka eliminacja zmiennych zależnych jest możliwa tylko w przypadku więzów holonomicznych.

Dlatego równanie d'Alemberta ma praktyczne znaczenie tylko w przypadku układów z więzami holonomicznymi.

Zwróćmy uwagę, że wyprowadzając równania ruchu z równania d'Alemberta skorzystaliśmy z niezależności odpowiednich przesunięć wirtualnych, a zmienne zależne wyeliminowaliśmy korzystając z warunków więzów.

Taka eliminacja zmiennych zależnych jest możliwa tylko w przypadku więzów holonomicznych.

Dlatego równanie d'Alemberta ma praktyczne znaczenie tylko w przypadku układów z więzami holonomicznymi.

Jeżeli układ jest statyczny, to wszystkie przyspieszenia w równaniu d'Alemberta są równe zero i przyjmuje ono postać

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \left(-\vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i =$$

Zasada równowagi

Jeżeli układ jest statyczny, to wszystkie przyspieszenia w równaniu d'Alemberta są równe zero i przyjmuje ono postać

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \left(-\vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Zasada równowagi

Jeżeli układ jest statyczny, to wszystkie przyspieszenia w równaniu d'Alemberta są równe zero i przyjmuje ono postać

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \left(-\vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Otrzymaliśmy równanie wyrażające zasadę równowagi układu N punktów materialnych

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Zasada równowagi

Jeżeli układ jest statyczny, to wszystkie przyspieszenia w równaniu d'Alemberta są równe zero i przyjmuje ono postać

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \left(-\vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Otrzymaliśmy równanie wyrażające zasadę równowagi układu N punktów materialnych

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Układ fizyczny jest w równowadze, jeśli suma prac wirtualnych sił aktywnych jest równa zero.

Zasada równowagi

Jeżeli układ jest statyczny, to wszystkie przyspieszenia w równaniu d'Alemberta są równe zero i przyjmuje ono postać

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \left(-\vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Otrzymaliśmy równanie wyrażające zasadę równowagi układu N punktów materialnych

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Układ fizyczny jest w równowadze, jeśli suma prac wirtualnych sił aktywnych jest równa zero.

Równanie d'Alemberta można wykorzystać do znajdowania sił reakcji więzów. W tym celu rozpatruje się alternatywny układ fizyczny, w którym usuwa się jeden warunek więzów, który jest realizowany przez poszukiwaną siłę reakcji $\vec{F}$.

Równanie d'Alemberta można wykorzystać do znajdowania sił reakcji więzów. W tym celu rozpatruje się alternatywny układ fizyczny, w którym usuwa się jeden warunek więzów, który jest realizowany przez poszukiwaną siłę reakcji $\vec{F}$. Ilustruje to następujący przykład.

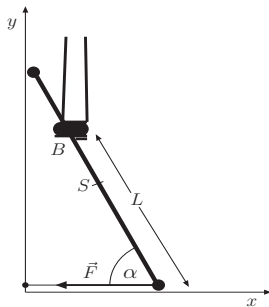
Równanie d'Alemberta można wykorzystać do znajdowania sił reakcji więzów. W tym celu rozpatruje się alternatywny układ fizyczny, w którym usuwa się jeden warunek więzów, który jest realizowany przez poszukiwaną siłę reakcji $\vec{F}$. Ilustruje to następujący przykład.

Przykład 4: Człowiek o masie M wchodzi na drabinę o długości l na długość L . Drabina tworzy z podłogą kąt α , a na jej końcach umieszczono rolki, żeby wyeliminować siły tarcia o ścianę i podłogę. Masa drabiny wynosi m . Jaka jest siła naprężenia liny, którą drabina jest umocowana do ściany?

Równanie d'Alemberta można wykorzystać do znajdowania sił reakcji więzów. W tym celu rozpatruje się alternatywny układ fizyczny, w którym usuwa się jeden warunek więzów, który jest realizowany przez poszukiwaną siłę reakcji $\vec{F}$. Ilustruje to następujący przykład.

Przykład 4: Człowiek o masie M wchodzi na drabinę o długości l na długość L . Drabina tworzy z podłogą kąt α , a na jej końcach umieszczono rolki, żeby wyeliminować siły tarcia o ścianę i podłogę. Masa drabiny wynosi m . Jaka jest siła naprężenia liny, którą drabina jest umocowana do ściany?

Równanie d'Alemberta

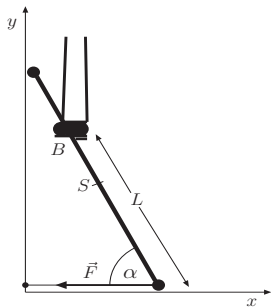


Podłoga i ściana są źródłem sił reakcji więzów, a ciężar człowieka i drabiny oraz naprężenie liny $\vec{F}$ są siłami aktywnymi.

Układ jest statyczny, dlatego równanie d'Alemberta ma postać

$$m\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_S + M\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_B + \vec{F} \cdot \delta\vec{r}_A = 0,$$

Równanie d'Alemberta



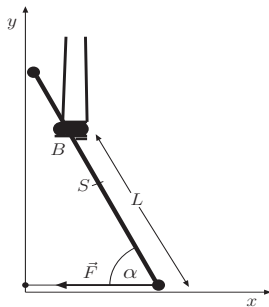
Podłoga i ściana są źródłem sił reakcji więzów, a ciężar człowieka i drabiny oraz naprężenie liny $\vec{F}$ są siłami aktywnymi.

Układ jest statyczny, dlatego równanie d'Alemberta ma postać

$$m\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_S + M\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_B + \vec{F} \cdot \delta\vec{r}_A = 0,$$

gdzie $\vec{g} = [0, -g]$,

Równanie d'Alemberta



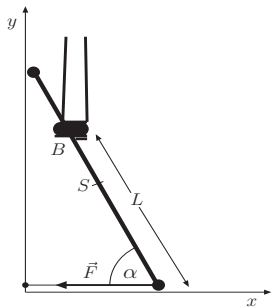
Podłoga i ściana są źródłem sił reakcji więzów, a ciężar człowieka i drabiny oraz naprężenie liny $\vec{F}$ są siłami aktywnymi.

Układ jest statyczny, dlatego równanie d'Alemberta ma postać

$$m\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_S + M\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_B + \vec{F} \cdot \delta\vec{r}_A = 0,$$

gdzie $\vec{g} = [0, -g]$, $\vec{F} = [-F, 0]$,

Równanie d'Alemberta



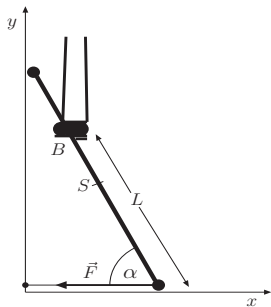
Podłoga i ściana są źródłem sił reakcji więzów, a ciężar człowieka i drabiny oraz naprężenie liny $\vec{F}$ są siłami aktywnymi.

Układ jest statyczny, dlatego równanie d'Alemberta ma postać

$$m\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_S + M\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_B + \vec{F} \cdot \delta\vec{r}_A = 0,$$

gdzie $\vec{g} = [0, -g]$, $\vec{F} = [-F, 0]$, $\delta\vec{r}_S = [\delta x_S, \delta y_S]$,

Równanie d'Alemberta



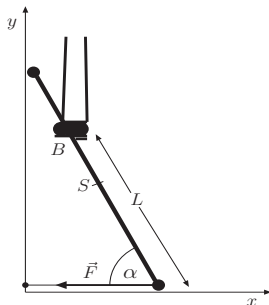
Podłoga i ściana są źródłem sił reakcji więzów, a ciężar człowieka i drabiny oraz naprężenie liny $\vec{F}$ są siłami aktywnymi.

Układ jest statyczny, dlatego równanie d'Alemberta ma postać

$$m\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_S + M\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_B + \vec{F} \cdot \delta\vec{r}_A = 0,$$

gdzie $\vec{g} = [0, -g]$, $\vec{F} = [-F, 0]$, $\delta\vec{r}_S = [\delta x_S, \delta y_S]$, $\delta\vec{r}_B = [\delta x_B, \delta y_B]$

Równanie d'Alemberta



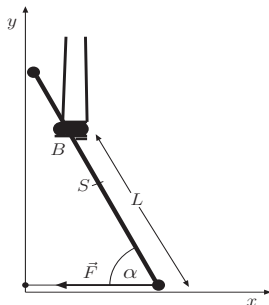
Podłoga i ściana są źródłem sił reakcji więzów, a ciężar człowieka i drabiny oraz naprężenie liny $\vec{F}$ są siłami aktywnymi.

Układ jest statyczny, dlatego równanie d'Alemberta ma postać

$$m\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_S + M\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_B + \vec{F} \cdot \delta\vec{r}_A = 0,$$

gdzie $\vec{g} = [0, -g]$, $\vec{F} = [-F, 0]$, $\delta\vec{r}_S = [\delta x_S, \delta y_S]$, $\delta\vec{r}_B = [\delta x_B, \delta y_B]$
i $\delta\vec{r}_A = [\delta x_A, 0]$.

Równanie d'Alemberta



Podłoga i ściana są źródłem sił reakcji więzów, a ciężar człowieka i drabiny oraz naprężenie liny $\vec{F}$ są siłami aktywnymi.

Układ jest statyczny, dlatego równanie d'Alemberta ma postać

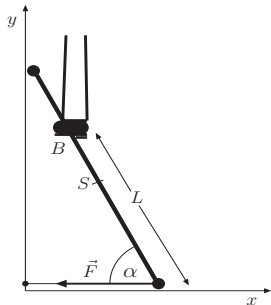
$$m\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_S + M\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_B + \vec{F} \cdot \delta\vec{r}_A = 0,$$

gdzie $\vec{g} = [0, -g]$, $\vec{F} = [-F, 0]$, $\delta\vec{r}_S = [\delta x_S, \delta y_S]$, $\delta\vec{r}_B = [\delta x_B, \delta y_B]$
i $\delta\vec{r}_A = [\delta x_A, 0]$.

Równanie d'Alemberta

Uwzględniając postać wektorów otrzymamy równanie

$$-mg\delta y_S - Mg\delta y_B - F\delta x_A = 0.$$

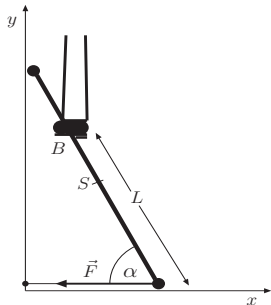


Wyrażmy wszystkie zmienne przez kąt α

Równanie d'Alemberta

Uwzględniając postać wektorów otrzymamy równanie

$$-mg\delta y_S - Mg\delta y_B - F\delta x_A = 0.$$



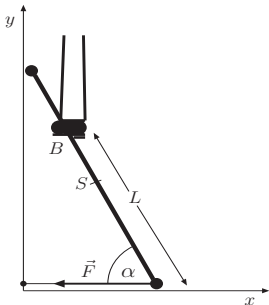
Wyrażmy wszystkie zmienne przez kąt α

$$x_A = l \cos \alpha$$

Równanie d'Alemberta

Uwzględniając postać wektorów otrzymamy równanie

$$-mg\delta y_S - Mg\delta y_B - F\delta x_A = 0.$$



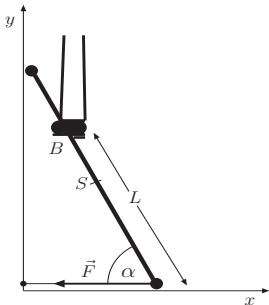
Wyrażmy wszystkie zmienne przez kąt α

$$x_A = l \cos \alpha \quad \Rightarrow$$

Równanie d'Alemberta

Uwzględniając postać wektorów otrzymamy równanie

$$-mg\delta y_S - Mg\delta y_B - F\delta x_A = 0.$$



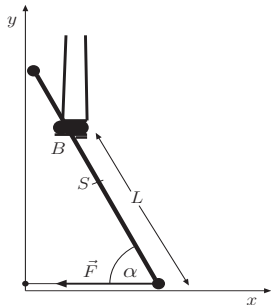
Wyrażmy wszystkie zmienne przez kąt α

$$x_A = l \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \delta x_A = -l \sin \alpha \delta \alpha,$$

Równanie d'Alemberta

Uwzględniając postać wektorów otrzymamy równanie

$$-mg\delta y_S - Mg\delta y_B - F\delta x_A = 0.$$



Wyrażmy wszystkie zmienne przez kąt α

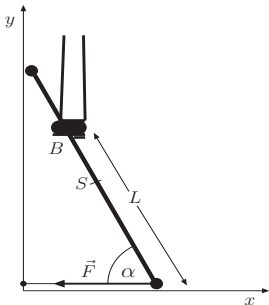
$$x_A = l \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \delta x_A = -l \sin \alpha \delta \alpha,$$

$$y_B = L \sin \alpha$$

Równanie d'Alemberta

Uwzględniając postać wektorów otrzymamy równanie

$$-mg\delta y_S - Mg\delta y_B - F\delta x_A = 0.$$



Wyrażmy wszystkie zmienne przez kąt α

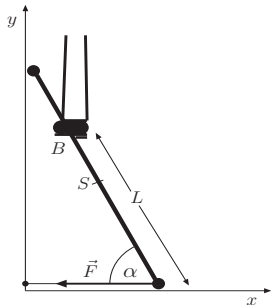
$$x_A = l \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \delta x_A = -l \sin \alpha \delta \alpha,$$

$$y_B = L \sin \alpha \quad \Rightarrow$$

Równanie d'Alemberta

Uwzględniając postać wektorów otrzymamy równanie

$$-mg\delta y_S - Mg\delta y_B - F\delta x_A = 0.$$



Wyrażmy wszystkie zmienne przez kąt α

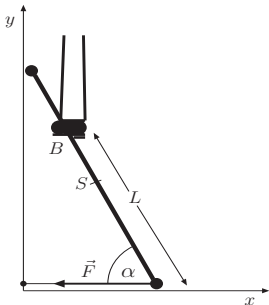
$$x_A = l \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \delta x_A = -l \sin \alpha \delta \alpha,$$

$$y_B = L \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \delta y_B = L \cos \alpha \delta \alpha,$$

Równanie d'Alemberta

Uwzględniając postać wektorów otrzymamy równanie

$$-mg\delta y_S - Mg\delta y_B - F\delta x_A = 0.$$



Wyrażmy wszystkie zmienne przez kąt α

$$x_A = l \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \delta x_A = -l \sin \alpha \delta \alpha,$$

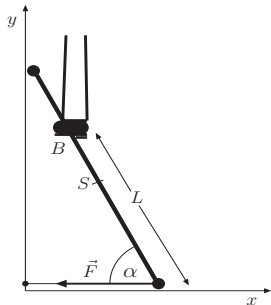
$$y_B = L \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \delta y_B = L \cos \alpha \delta \alpha,$$

$$y_S = \frac{1}{2} l \sin \alpha$$

Równanie d'Alemberta

Uwzględniając postać wektorów otrzymamy równanie

$$-mg\delta y_S - Mg\delta y_B - F\delta x_A = 0.$$



Wyrażmy wszystkie zmienne przez kąt α

$$x_A = l \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \delta x_A = -l \sin \alpha \delta \alpha,$$

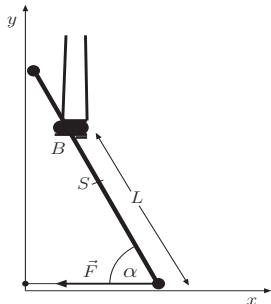
$$y_B = L \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \delta y_B = L \cos \alpha \delta \alpha,$$

$$y_S = \frac{1}{2} l \sin \alpha \quad \Rightarrow$$

Równanie d'Alemberta

Uwzględniając postać wektorów otrzymamy równanie

$$-mg\delta y_S - Mg\delta y_B - F\delta x_A = 0.$$



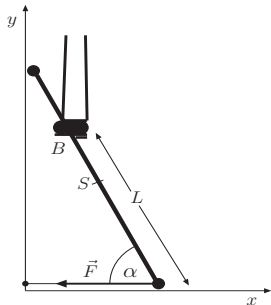
Wyrażmy wszystkie zmienne przez kąt α

$$\begin{aligned}x_A &= l \cos \alpha &\Rightarrow &\delta x_A = -l \sin \alpha \delta \alpha, \\y_B &= L \sin \alpha &\Rightarrow &\delta y_B = L \cos \alpha \delta \alpha, \\y_S &= \frac{1}{2} l \sin \alpha &\Rightarrow &\delta y_S = \frac{1}{2} l \cos \alpha \delta \alpha\end{aligned}$$

Równanie d'Alemberta

Uwzględniając postać wektorów otrzymamy równanie

$$-mg\delta y_S - Mg\delta y_B - F\delta x_A = 0.$$



Wyrażmy wszystkie zmienne przez kąt α

$$x_A = l \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \delta x_A = -l \sin \alpha \delta \alpha,$$

$$y_B = L \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \delta y_B = L \cos \alpha \delta \alpha,$$

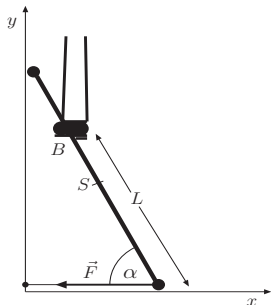
$$y_S = \frac{1}{2} l \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \delta y_S = \frac{1}{2} l \cos \alpha \delta \alpha$$

i wstawmy je do naszego równania.

Równanie d'Alemberta

Uwzględniając postać wektorów otrzymamy równanie

$$-mg\delta y_S - Mg\delta y_B - F\delta x_A = 0.$$



Wyrażmy wszystkie zmienne przez kąt α

$$\begin{aligned}x_A &= l \cos \alpha &\Rightarrow & \delta x_A = -l \sin \alpha \delta \alpha, \\y_B &= L \sin \alpha &\Rightarrow & \delta y_B = L \cos \alpha \delta \alpha, \\y_S &= \frac{1}{2} l \sin \alpha &\Rightarrow & \delta y_S = \frac{1}{2} l \cos \alpha \delta \alpha\end{aligned}$$

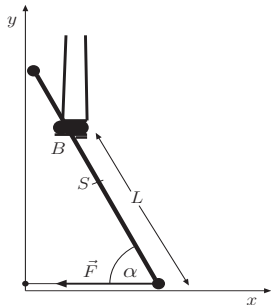
i wstawmy je do naszego równania. Otrzymujemy

$$\left(-mg\frac{1}{2}l \cos \alpha - MgL \cos \alpha + Fl \sin \alpha \right) \delta \alpha = 0.$$

Równanie d'Alemberta

Uwzględniając postać wektorów otrzymamy równanie

$$-mg\delta y_S - Mg\delta y_B - F\delta x_A = 0.$$



Wyrażmy wszystkie zmienne przez kąt α

$$\begin{aligned}x_A &= l \cos \alpha &\Rightarrow &\delta x_A = -l \sin \alpha \delta \alpha, \\y_B &= L \sin \alpha &\Rightarrow &\delta y_B = L \cos \alpha \delta \alpha, \\y_S &= \frac{1}{2} l \sin \alpha &\Rightarrow &\delta y_S = \frac{1}{2} l \cos \alpha \delta \alpha\end{aligned}$$

i wstawmy je do naszego równania. Otrzymujemy

$$\left(-mg\frac{1}{2}l \cos \alpha - MgL \cos \alpha + Fl \sin \alpha \right) \delta \alpha = 0.$$

Współczynnik przy $\delta\alpha$ musi się zerować

$$-mg\frac{1}{2}l\cos\alpha - MgL\cos\alpha + Fl\sin\alpha = 0.$$

Skąd po prostych przekształceniach otrzymujemy wzór na szukaną siłę F

$$F = \left(\frac{1}{2}m + \frac{L}{l}M\right) g \operatorname{ctg} \alpha.$$

Współczynnik przy $\delta\alpha$ musi się zerować

$$-mg\frac{1}{2}l\cos\alpha - MgL\cos\alpha + Fl\sin\alpha = 0.$$

Skąd po prostych przekształceniach otrzymujemy wzór na szukaną siłę F

$$F = \left(\frac{1}{2}m + \frac{L}{l}M\right) g \operatorname{ctg} \alpha.$$

Podsumujmy znaczenie zasady i równania d'Alemberta.

- Pozwalają przedstawić równania ruchu w postaci nie zawierającej sił reakcji więzów.
- Pozwalają wyznaczyć siły działające na układ.
- Pozwalają znaleźć położenia równowagi układów.
- Pozwalają w naturalny sposób przejść do formalizmu lagranżowskiego.