

Układy fizyczne z więzami

Wykład 2

Karol Kołodziej

(przy współpracy Bartosza Dziewita)

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

Wszystkie wielkości, które mogą opisywać pewien układ mechaniczny nazywamy **współzrędnymi uogólnionymi**.

Mogą to być np. współzrędnne

- kartezjańskie,
- cylindryczne,
- sferyczne,

Wszystkie wielkości, które mogą opisywać pewien układ mechaniczny nazywamy **współzrędnymi uogólnionymi**.

Mogą to być np. współzrędnne

- kartezjańskie,
- cylindryczne,
- sferyczne,

albo ich kombinacja.

Wszystkie wielkości, które mogą opisywać pewien układ mechaniczny nazywamy **współzrędnymi uogólnionymi**.

Mogą to być np. współzrędnne

- kartezjańskie,
- cylindryczne,
- sferyczne,

albo ich kombinacja.

Minimalną liczbę niezależnych współzrędnnych uogólnionych niezbędnych do pełnego opisu danego układu fizycznego będziemy nazywali **liczbą stopni swobody** układu.

Wszystkie wielkości, które mogą opisywać pewien układ mechaniczny nazywamy **współzrędnymi uogólnionymi**.

Mogą to być np. współzrędne

- kartezjańskie,
- cylindryczne,
- sferyczne,

albo ich kombinacja.

Minimalną liczbę niezależnych współzrędných uogólnionych niezbędnych do pełnego opisu danego układu fizycznego będziemy nazywali **liczbą stopni swobody** układu.

Przykładowo, punkt materialny mogący poruszać się swobodnie, tzn. bez żadnych ograniczeń geometrycznych, w trójwymiarowej przestrzeni ma 3 stopnie swobody, a jeśli może się poruszać na płaszczyźnie, to ma 2 stopnie swobody.

Przykładowo, punkt materialny mogący poruszać się swobodnie, tzn. bez żadnych ograniczeń geometrycznych, w trójwymiarowej przestrzeni ma 3 stopnie swobody, a jeśli może się poruszać na płaszczyźnie, to ma 2 stopnie swobody.

Układ N punktów materialnych nie podlegający ograniczeniom geometrycznym ma w trójwymiarowej przestrzeni $3N$ stopni swobody, a na płaszczyźnie $2N$ stopni swobody.

Przykładowo, punkt materialny mogący poruszać się swobodnie, tzn. bez żadnych ograniczeń geometrycznych, w trójwymiarowej przestrzeni ma 3 stopnie swobody, a jeśli może się poruszać na płaszczyźnie, to ma 2 stopnie swobody.

Układ N punktów materialnych nie podlegający ograniczeniom geometrycznym ma w trójwymiarowej przestrzeni $3N$ stopni swobody, a na płaszczyźnie $2N$ stopni swobody.

Swobodna bryła sztywna ma w trójwymiarowej przestrzeni 6 stopni swobody,

Przykładowo, punkt materialny mogący poruszać się swobodnie, tzn. bez żadnych ograniczeń geometrycznych, w trójwymiarowej przestrzeni ma 3 stopnie swobody, a jeśli może się poruszać na płaszczyźnie, to ma 2 stopnie swobody.

Układ N punktów materialnych nie podlegający ograniczeniom geometrycznym ma w trójwymiarowej przestrzeni $3N$ stopni swobody, a na płaszczyźnie $2N$ stopni swobody.

Swobodna bryła sztywna ma w trójwymiarowej przestrzeni 6 stopni swobody, gdyż dodatkowo do swobody ruchu postępowego w 3 kierunkach, możemy ją obrócić na 3 różne sposoby.

Przykładowo, punkt materialny mogący poruszać się swobodnie, tzn. bez żadnych ograniczeń geometrycznych, w trójwymiarowej przestrzeni ma 3 stopnie swobody, a jeśli może się poruszać na płaszczyźnie, to ma 2 stopnie swobody.

Układ N punktów materialnych nie podlegający ograniczeniom geometrycznym ma w trójwymiarowej przestrzeni $3N$ stopni swobody, a na płaszczyźnie $2N$ stopni swobody.

Swobodna bryła sztywna ma w trójwymiarowej przestrzeni 6 stopni swobody, gdyż dodatkowo do swobody ruchu postępowego w 3 kierunkach, możemy ją obrócić na 3 różne sposoby.

Współrzędne uogólnione

Liczbę stopni swobody układu będziemy oznaczać literą n , a odpowiednie współrzędne uogólnione symbolami $q_1, q_2, \dots, q_n$.

Współrzędne uogólnione

Liczbę stopni swobody układu będziemy oznaczać literą n , a odpowiednie współrzędne uogólnione symbolami $q_1, q_2, \dots, q_n$.

Wygodnie jest określić związki pomiędzy współrzędnymi uogólnionymi a współrzędnymi kartezjańskimi $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Współrzędne uogólnione

Liczbę stopni swobody układu będziemy oznaczać literą n , a odpowiednie współrzędne uogólnione symbolami $q_1, q_2, \dots, q_n$.

Wygodnie jest określić związki pomiędzy współrzędnymi uogólnionymi a współrzędnymi kartezjańskimi $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Dla N swobodnych punktów materialnych w trójwymiarowej przestrzeni ($n = 3N$) związki te mają postać

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t), \quad i = 1, 2, \dots, 3N,$$

Współrzędne uogólnione

Liczbę stopni swobody układu będziemy oznaczać literą n , a odpowiednie współrzędne uogólnione symbolami $q_1, q_2, \dots, q_n$. Wygodnie jest określić związki pomiędzy współzrędnymi uogólnionymi a współzrędnymi kartezjańskimi $x_1, x_2, \dots, x_n$. Dla N swobodnych punktów materialnych w trójwymiarowej przestrzeni ($n = 3N$) związki te mają postać

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t), \quad i = 1, 2, \dots, 3N,$$

gdzie współrzędne kartezjańskie (x_1, y_1, z_1) pierwszego punktu ponumerowaliśmy (x_1, x_2, x_3) ,

Współrzędne uogólnione

Liczbę stopni swobody układu będziemy oznaczać literą n , a odpowiednie współrzędne uogólnione symbolami $q_1, q_2, \dots, q_n$. Wygodnie jest określić związki pomiędzy współrzędnymi uogólnionymi a współrzędnymi kartezjańskimi $x_1, x_2, \dots, x_n$. Dla N swobodnych punktów materialnych w trójwymiarowej przestrzeni ($n = 3N$) związki te mają postać

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t), \quad i = 1, 2, \dots, 3N,$$

gdzie współrzędne kartezjańskie (x_1, y_1, z_1) pierwszego punktu ponumerowaliśmy (x_1, x_2, x_3) , współrzędne kartezjańskie (x_2, y_2, z_2) drugiego punktu ponumerowaliśmy (x_4, x_5, x_6) ,

Współrzędne uogólnione

Liczbę stopni swobody układu będziemy oznaczać literą n , a odpowiednie współrzędne uogólnione symbolami $q_1, q_2, \dots, q_n$. Wygodnie jest określić związki pomiędzy współzrędnymi uogólnionymi a współzrędnymi kartezjańskimi $x_1, x_2, \dots, x_n$. Dla N swobodnych punktów materialnych w trójwymiarowej przestrzeni ($n = 3N$) związki te mają postać

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t), \quad i = 1, 2, \dots, 3N,$$

gdzie współrzędne kartezjańskie (x_1, y_1, z_1) pierwszego punktu ponumerowaliśmy (x_1, x_2, x_3) , współrzędne kartezjańskie (x_2, y_2, z_2) drugiego punktu ponumerowaliśmy (x_4, x_5, x_6) , itd.

Współrzędne uogólnione

Liczbę stopni swobody układu będziemy oznaczać literą n , a odpowiednie współrzędne uogólnione symbolami $q_1, q_2, \dots, q_n$. Wygodnie jest określić związki pomiędzy współzrędnymi uogólnionymi a współzrędnymi kartezjańskimi $x_1, x_2, \dots, x_n$. Dla N swobód punków materialnych w trójwymiarowej przestrzeni ($n = 3N$) związki te mają postać

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t), \quad i = 1, 2, \dots, 3N,$$

gdzie współrzędne kartezjańskie (x_1, y_1, z_1) pierwszego punktu ponumerowaliśmy (x_1, x_2, x_3) , współrzędne kartezjańskie (x_2, y_2, z_2) drugiego punktu ponumerowaliśmy (x_4, x_5, x_6) , itd.

Związki te możemy zapisać wektorowo

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Współrzędne uogólnione

Liczbę stopni swobody układu będziemy oznaczać literą n , a odpowiednie współrzędne uogólnione symbolami $q_1, q_2, \dots, q_n$. Wygodnie jest określić związki pomiędzy współzrędnymi uogólnionymi a współzrędnymi kartezjańskimi $x_1, x_2, \dots, x_n$. Dla N swobód punków materialnych w trójwymiarowej przestrzeni ($n = 3N$) związki te mają postać

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t), \quad i = 1, 2, \dots, 3N,$$

gdzie współrzędne kartezjańskie (x_1, y_1, z_1) pierwszego punktu ponumerowaliśmy (x_1, x_2, x_3) , współrzędne kartezjańskie (x_2, y_2, z_2) drugiego punktu ponumerowaliśmy (x_4, x_5, x_6) , itd. Związki te możemy zapisać wektorowo

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Ograniczmy się do jednego punktu materialnego ($N = 1$) i napiszmy związki

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3, t), \quad i = 1, 2, 3,$$

w przypadku układu

sferycznego:

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$x_2 = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$x_3 = r \cos \theta,$$

Ograniczmy się do jednego punktu materialnego ($N = 1$) i napiszmy związki

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3, t), \quad i = 1, 2, 3,$$

w przypadku układu

sferycznego:

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$x_2 = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$x_3 = r \cos \theta,$$

cyldrycznego:

$$x_1 = r \cos \varphi,$$

$$x_2 = r \sin \varphi,$$

$$x_3 = z,$$

gdzie zmienne $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ i $z = z(t)$ są funkcjami czasu, a jawna zależność od czasu nie występuje.

Ograniczmy się do jednego punktu materialnego ($N = 1$) i napiszmy związki

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3, t), \quad i = 1, 2, 3,$$

w przypadku układu

sferycznego:

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$x_2 = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$x_3 = r \cos \theta,$$

gdzie zmienne $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ i $z = z(t)$ są funkcjami czasu, a jawna zależność od czasu nie występuje.

cyldrycznego:

$$x_1 = r \cos \varphi,$$

$$x_2 = r \sin \varphi,$$

$$x_3 = z,$$

Więzy i ich klasyfikacja

W wielu zagadnieniach występują geometryczne ograniczenia ruchu, które nazywamy **więzami**.

Więzy, mimo że ograniczają liczbę stopni swobody układu, to na ogół utrudniają rozwiązanie zagadnienia ruchu.

Więzy i ich klasyfikacja

W wielu zagadnieniach występują geometryczne ograniczenia ruchu, które nazywamy **więzami**.

Więzy, mimo że ograniczają liczbę stopni swobody układu, to na ogół utrudniają rozwiązanie zagadnienia ruchu. Wynika to z konieczności uwzględnienia dodatkowych sił.

Więzy i ich klasyfikacja

W wielu zagadnieniach występują geometryczne ograniczenia ruchu, które nazywamy **więzami**.

Więzy, mimo że ograniczają liczbę stopni swobody układu, to na ogół utrudniają rozwiązanie zagadnienia ruchu. Wynika to z konieczności uwzględnienia dodatkowych sił.

Więzy holonomiczne

to więzy opisane równaniami

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Więzy i ich klasyfikacja

W wielu zagadnieniach występują geometryczne ograniczenia ruchu, które nazywamy **więzami**.

Więzy, mimo że ograniczają liczbę stopni swobody układu, to na ogół utrudniają rozwiązanie zagadnienia ruchu. Wynika to z konieczności uwzględnienia dodatkowych sił.

Więzy holonomiczne

to więzy opisane równaniami

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

k niezależnych równań więzów holonomicznych redukuje liczbę stopni swobody układu N punktów materialnych do $3N - k$.

Więzy i ich klasyfikacja

W wielu zagadnieniach występują geometryczne ograniczenia ruchu, które nazywamy **więzami**.

Więzy, mimo że ograniczają liczbę stopni swobody układu, to na ogół utrudniają rozwiązanie zagadnienia ruchu. Wynika to z konieczności uwzględnienia dodatkowych sił.

Więzy holonomiczne

to więzy opisane równaniami

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

k niezależnych równań więzów holonomicznych redukuje liczbę stopni swobody układu N punktów materialnych do $3N - k$.

Więzy nieholonomiczne

to więzy, których nie można opisać zwykłymi (algebraicznymi) równaniami.

Więzy i ich klasyfikacja

W wielu zagadnieniach występują geometryczne ograniczenia ruchu, które nazywamy **więzami**.

Więzy, mimo że ograniczają liczbę stopni swobody układu, to na ogół utrudniają rozwiązanie zagadnienia ruchu. Wynika to z konieczności uwzględnienia dodatkowych sił.

Więzy holonomiczne

to więzy opisane równaniami

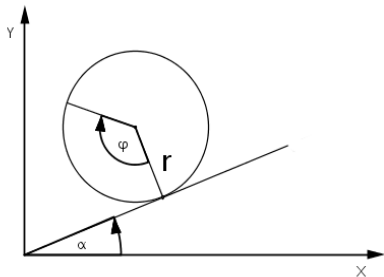
$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

k niezależnych równań więzów holonomicznych redukuje liczbę stopni swobody układu N punktów materialnych do $3N - k$.

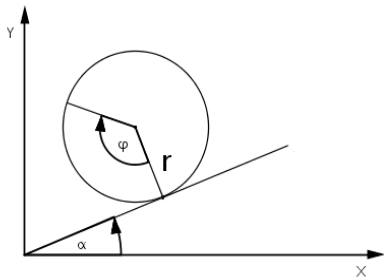
Więzy nieholonomiczne

to więzy, których nie można opisać zwykłymi (algebraicznymi) równaniami.

Przykład 1. Krążek o promieniu r toczy się bez poślizgu na płaszczyźnie po prostej nachylonej do osi Ox kartezjańskiego układu współrzędnych pod kątem α . Prosta ta spełnia rolę więzów.

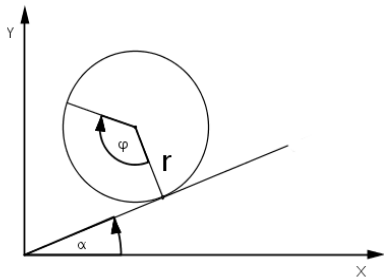


Przykład 1. Krążek o promieniu r toczy się bez poślizgu na płaszczyźnie po prostej nachylonej do osi Ox kartezjańskiego układu współrzędnych pod kątem α . Prosta ta spełnia rolę więzów.



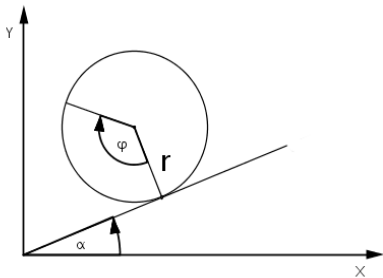
Bez więzów do opisu ruchu krążka na płaszczyźnie potrzebowalibyśmy 3 współrzędnych,

Przykład 1. Krążek o promieniu r toczy się bez poślizgu na płaszczyźnie po prostej nachylonej do osi Ox kartezjańskiego układu współrzędnych pod kątem α . Prosta ta spełnia rolę więzów.



Bez więzów do opisu ruchu krążka na płaszczyźnie potrzebowalibyśmy **3 współrzędnych**, np. współrzędnych środka krążka (x, y) i kąta azymutalnego φ opisującego możliwy ruch obrotowy krążka,

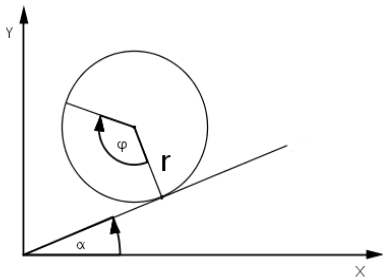
Przykład 1. Krążek o promieniu r toczy się bez poślizgu na płaszczyźnie po prostej nachylonej do osi Ox kartezjańskiego układu współrzędnych pod kątem α . Prosta ta spełnia rolę więzów.



Bez więzów do opisu ruchu krążka na płaszczyźnie potrzebowalibyśmy **3 współrzędnych**, np. współrzędnych środka krążka (x, y) i kąta azymutalnego φ opisującego możliwy ruch obrotowy krążka,

ale krążek może poruszać się tylko wzdłuż prostej.

Przykład 1. Krążek o promieniu r toczy się bez poślizgu na płaszczyźnie po prostej nachylonej do osi Ox kartezjańskiego układu współrzędnych pod kątem α . Prosta ta spełnia rolę więzów.



Bez więzów do opisu ruchu krążka na płaszczyźnie potrzebowalibyśmy **3 współrzędnych**, np. współrzędnych środka krążka (x, y) i kąta azymutalnego φ opisującego możliwy ruch obrotowy krążka,

ale krążek może poruszać się tylko wzdłuż prostej.

Więzy holonomiczne – przykłady

Fakt ten możemy zapisać równaniami określającymi współrzędne (x_A, y_A) punktu A , w którym krążek styka się z prostą. Załóżmy, że w chwili początkowej punkt A znajduje się w początku układu współrzędnych.

Fakt ten możemy zapisać równaniami określającymi współrzędne (x_A, y_A) punktu A , w którym krążek styka się z prostą. Załóżmy, że w chwili początkowej punkt A znajduje się w początku układu współrzędnych.

Odległość punktu A od początku układu jest równa długości łuku opartej na kącie φ ,

Fakt ten możemy zapisać równaniami określającymi współrzędne (x_A, y_A) punktu A , w którym krążek styka się z prostą. Załóżmy, że w chwili początkowej punkt A znajduje się w początku układu współrzędnych.

Odległość punktu A od początku układu jest równa długości łuku opartej na kącie φ , a więc otrzymujemy równania

$$x_A = r\varphi \cos \alpha, \quad y_A = r\varphi \sin \alpha,$$

Więzy holonomiczne – przykłady

Fakt ten możemy zapisać równaniami określającymi współrzędne (x_A, y_A) punktu A , w którym krążek styka się z prostą. Załóżmy, że w chwili początkowej punkt A znajduje się w początku układu współrzędnych.

Odległość punktu A od początku układu jest równa długości łuku opartej na kącie φ , a więc otrzymujemy równania

$$x_A = r\varphi \cos \alpha, \quad y_A = r\varphi \sin \alpha,$$

które łatwo sprowadzić do postaci

$$x_A - r\varphi \cos \alpha = 0, \quad y_A - r\varphi \sin \alpha = 0.$$

Więzy holonomiczne – przykłady

Fakt ten możemy zapisać równaniami określającymi współrzędne (x_A, y_A) punktu A , w którym krążek styka się z prostą. Załóżmy, że w chwili początkowej punkt A znajduje się w początku układu współrzędnych.

Odległość punktu A od początku układu jest równa długości łuku opartej na kącie φ , a więc otrzymujemy równania

$$x_A = r\varphi \cos \alpha, \quad y_A = r\varphi \sin \alpha,$$

które łatwo sprowadzić do postaci

$$x_A - r\varphi \cos \alpha = 0, \quad y_A - r\varphi \sin \alpha = 0.$$

Liczba stopni swobody jest zatem równa $n = 3 - 2 = 1$.

Więzy holonomiczne – przykłady

Fakt ten możemy zapisać równaniami określającymi współrzędne (x_A, y_A) punktu A , w którym krążek styka się z prostą. Załóżmy, że w chwili początkowej punkt A znajduje się w początku układu współrzędnych.

Odległość punktu A od początku układu jest równa długości łuku opartej na kącie φ , a więc otrzymujemy równania

$$x_A = r\varphi \cos \alpha, \quad y_A = r\varphi \sin \alpha,$$

które łatwo sprowadzić do postaci

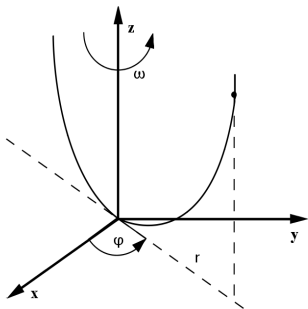
$$x_A - r\varphi \cos \alpha = 0, \quad y_A - r\varphi \sin \alpha = 0.$$

Liczba stopni swobody jest zatem równa $n = 3 - 2 = 1$.

Więzy holonomiczne – przykłady

Przykład 2. Koralik poruszający się po parabolicznym drucie obracającym się ze stałą prędkością kątową ω względem osi symetrii paraboli.

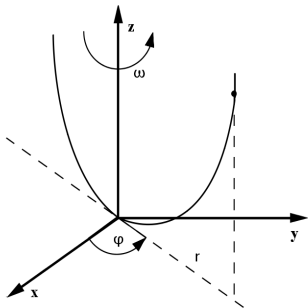
Umieścmy wierzchołek paraboli w początku kartezjańskiego układu współrzędnych.



Więzy holonomiczne – przykłady

Przykład 2. Koralik poruszający się po parabolicznym drucie obracającym się ze stałą prędkością kątową ω względem osi symetrii paraboli.

Umieścmy wierzchołek paraboli w początku kartezjańskiego układu współrzędnych.

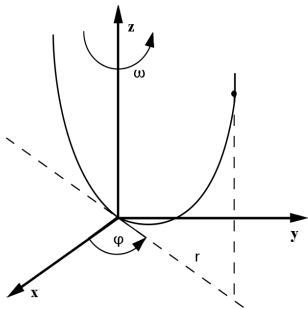


Bez więzów do opisu ruchu koralika w przestrzeni potrzebowalibyśmy 3 współrzędnych.

Więzy holonomiczne – przykłady

Przykład 2. Koralek poruszający się po parabolicznym drucie obracającym się ze stałą prędkością kątową ω względem osi symetrii paraboli.

Umieścimy wierzchołek paraboli w początku kartezjańskiego układu współrzędnych.

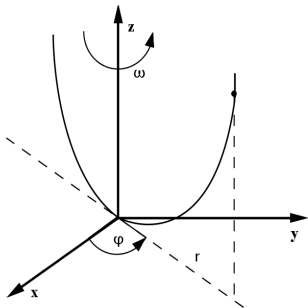


Bez więzów do opisu ruchu koralka w przestrzeni potrzebowalibyśmy **3 współrzędnych**. Ze względu na symetrię zagadnienia wybieramy współrzędne cylindryczne,

Więzy holonomiczne – przykłady

Przykład 2. Koralek poruszający się po parabolicznym drucie obracającym się ze stałą prędkością kątową ω względem osi symetrii paraboli.

Umieścmy wierzchołek paraboli w początku kartezjańskiego układu współrzędnych.

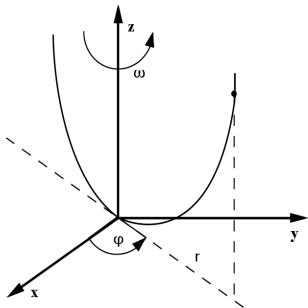


Bez więzów do opisu ruchu koralka w przestrzeni potrzebowalibyśmy **3 współrzędnych**. Ze względu na symetrię zagadnienia wybieramy współrzędne cylindryczne, w których równania więzów mają postać:

Więzy holonomiczne – przykłady

Przykład 2. Koralik poruszający się po parabolicznym drucie obracającym się ze stałą prędkością kątową ω względem osi symetrii paraboli.

Umieścmy wierzchołek paraboli w początku kartezjańskiego układu współrzędnych.



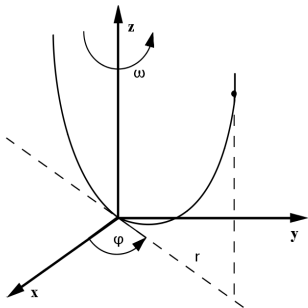
Bez więzów do opisu ruchu koralika w przestrzeni potrzebowalibyśmy **3 współrzędnych**. Ze względu na symetrię zagadnienia wybieramy współrzędne cylindryczne, w których równania więzów mają postać:

$$\varphi = \omega t, \quad z = a r^2.$$

Więzy holonomiczne – przykłady

Przykład 2. Koralik poruszający się po parabolicznym drucie obracającym się ze stałą prędkością kątową ω względem osi symetrii paraboli.

Umieścmy wierzchołek paraboli w początku kartezjańskiego układu współrzędnych.



Bez więzów do opisu ruchu koralika w przestrzeni potrzebowalibyśmy **3 współrzędnych**. Ze względu na symetrię zagadnienia wybieramy współrzędne cylindryczne, w których równania więzów mają postać:

$$\varphi = \omega t, \quad z = a r^2.$$

Więzy holonomiczne – przykłady

Równanie $\varphi = \omega t$ określa wartość kąta, o który obróci się płaszczyzna paraboli w czasie t , jeśli w chwili początkowej pokrywała się ona z płaszczyzną xOy , a równanie $z = a r^2$ jest równaniem paraboli o zadanym współczynniku a .

Więzy holonomiczne – przykłady

Równanie $\varphi = \omega t$ określa wartość kąta, o który obróci się płaszczyzna paraboli w czasie t , jeśli w chwili początkowej pokrywała się ona z płaszczyzną xOy , a równanie $z = a r^2$ jest równaniem paraboli o zadanym współczynniku a .

Przypomnijmy, że równanie paraboli o wierzchołku w początku układu współrzędnych ma postać $y = a x^2$. W tym przypadku rolę zmiennej x spełnia r , a rolę zmiennej y spełnia z .

Więzy holonomiczne – przykłady

Równanie $\varphi = \omega t$ określa wartość kąta, o który obróci się płaszczyzna paraboli w czasie t , jeśli w chwili początkowej pokrywała się ona z płaszczyzną xOy , a równanie $z = ar^2$ jest równaniem paraboli o zadanym współczynniku a .

Przypomnijmy, że równanie paraboli o wierzchołku w początku układu współrzędnych ma postać $y = ax^2$. W tym przypadku rolę zmiennej x spełnia r , a rolę zmiennej y spełnia z .

Równania więzów łatwo sprowadzić do postaci

$$\varphi - \omega t = 0, \quad z - ar^2 = 0.$$

Więzy holonomiczne – przykłady

Równanie $\varphi = \omega t$ określa wartość kąta, o który obróci się płaszczyzna paraboli w czasie t , jeśli w chwili początkowej pokrywała się ona z płaszczyzną xOy , a równanie $z = a r^2$ jest równaniem paraboli o zadanym współczynniku a .

Przypomnijmy, że równanie paraboli o wierzchołku w początku układu współrzędnych ma postać $y = a x^2$. W tym przypadku rolę zmiennej x spełnia r , a rolę zmiennej y spełnia z .

Równania więzów łatwo sprowadzić do postaci

$$\varphi - \omega t = 0, \quad z - a r^2 = 0.$$

Również tym razem liczba stopni swobody jest równa

$$n = 3 - 2 = 1.$$

Więzy holonomiczne – przykłady

Równanie $\varphi = \omega t$ określa wartość kąta, o który obróci się płaszczyzna paraboli w czasie t , jeśli w chwili początkowej pokrywała się ona z płaszczyzną xOy , a równanie $z = ar^2$ jest równaniem paraboli o zadanym współczynniku a .

Przypomnijmy, że równanie paraboli o wierzchołku w początku układu współrzędnych ma postać $y = ax^2$. W tym przypadku rolę zmiennej x spełnia r , a rolę zmiennej y spełnia z .

Równania więzów łatwo sprowadzić do postaci

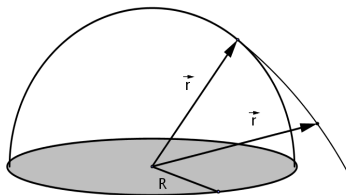
$$\varphi - \omega t = 0, \quad z - ar^2 = 0.$$

Również tym razem liczba stopni swobody jest równa

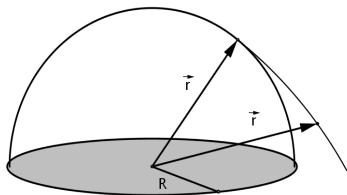
$$n = 3 - 2 = 1.$$

Przykład 3. Punkt materialny zsuwa się po powierzchni kuli o promieniu R .

Położenie punktu opisujemy wektorem $\vec{r}$.

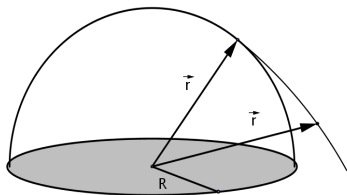


Przykład 3. Punkt materialny zsuwa się po powierzchni kuli o promieniu R .



Położenie punktu opisujemy wektorem $\vec{r}$. Jeśli prędkość punktu będzie mała, to będzie on pozostawał na powierzchni kuli, jeśli natomiast prędkość punktu będzie odpowiednio duża, to oderwie się on od powierzchni.

Przykład 3. Punkt materialny zsuwa się po powierzchni kuli o promieniu R .

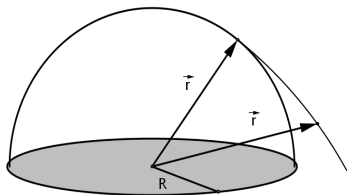


Położenie punktu opisujemy wektorem $\vec{r}$. Jeśli prędkość punktu będzie mała, to będzie on pozostawał na powierzchni kuli, jeśli natomiast prędkość punktu będzie odpowiednio duża, to oderwie się on od powierzchni. Obie możliwości możemy uwzględnić pisząc

nierówność dla wektora położenia punktu $\vec{r} = \vec{r}(t)$

$$\vec{r}^2 \geq R^2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r}^2 - R^2 \geq 0,$$

Przykład 3. Punkt materialny zsuwa się po powierzchni kuli o promieniu R .



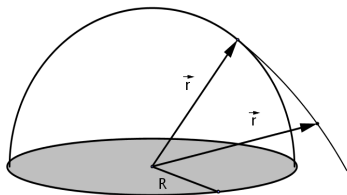
Położenie punktu opisujemy wektorem $\vec{r}$. Jeśli prędkość punktu będzie mała, to będzie on pozostawał na powierzchni kuli, jeśli natomiast prędkość punktu będzie odpowiednio duża, to oderwie się on od powierzchni. Obie możliwości możemy uwzględnić pisząc

nierówność dla wektora położenia punktu $\vec{r} = \vec{r}(t)$

$$\vec{r}^2 \geq R^2 \Leftrightarrow \vec{r}^2 - R^2 \geq 0,$$

która oczywiście nie jest równaniem.

Przykład 3. Punkt materialny zsuwa się po powierzchni kuli o promieniu R .



Położenie punktu opisujemy wektorem $\vec{r}$. Jeśli prędkość punktu będzie mała, to będzie on pozostawał na powierzchni kuli, jeśli natomiast prędkość punktu będzie odpowiednio duża, to oderwie się on od powierzchni. Obie możliwości możemy uwzględnić pisząc

nierówność dla wektora położenia punktu $\vec{r} = \vec{r}(t)$

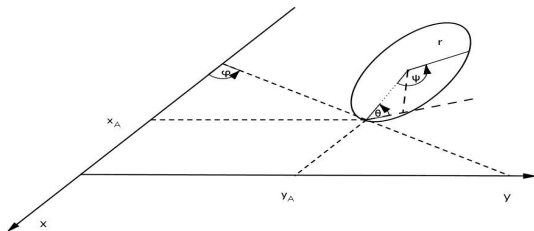
$$\vec{r}^2 \geq R^2 \Leftrightarrow \vec{r}^2 - R^2 \geq 0,$$

która oczywiście **nie jest równaniem**.

Więzy nieholonomiczne – przykłady

Ważną klasę więzów nieholonomicznych tworzą **więzy różniczkowe niecałkowalne**.

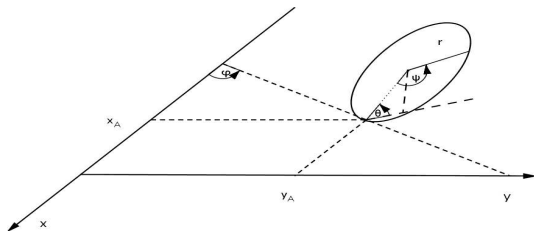
Przykład 4. Moneta toczy się bez poślizgu swoją boczną stroną po blacie stołu.



Więzy nieholonomiczne – przykłady

Ważną klasę więzów nieholonomicznych tworzą **więzy różniczkowe niecałkowalne**.

Przykład 4. Moneta toczy się bez poślizgu swoją boczną stroną po blacie stołu.



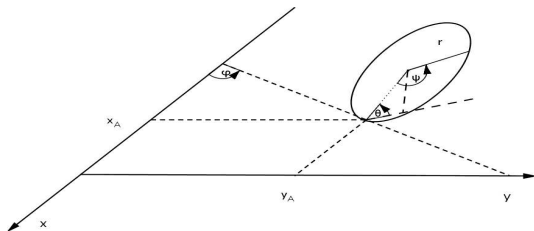
Położenie monety możemy opisać podając 5 współrzędnych, które możemy wybrać następująco

- x_A, y_A – współrzędne punktu A, w którym moneta styka się z blatem,

Więzy nieholonomiczne – przykłady

Ważną klasę więzów nieholonomicznych tworzą **więzy różniczkowe niecałkowalne**.

Przykład 4. Moneta toczy się bez poślizgu swoją boczną stroną po blacie stołu.



Położenie monety możemy opisać podając 5 współrzędnych, które możemy wybrać następująco

- x_A, y_A – współrzędne punktu A, w którym moneta styka się z blatem,

Więzy nieholonomiczne – przykłady

- φ – kąt, który tworzy chwilowy kierunek ruchu monety z osią Ox ,
- θ – kąt nachylenia płaszczyzny monety do blatu,
- ψ – kąt obrotowy monety.

W każdej chwili moneta toczy się w kierunku prostej, wzdłuż której płaszczyzna monety przecina się z blatem.

Więzy nieholonomiczne – przykłady

- φ – kąt, który tworzy chwilowy kierunek ruchu monety z osią Ox ,
- θ – kąt nachylenia płaszczyzny monety do blatu,
- ψ – kąt obrotowy monety.

W każdej chwili moneta toczy się w kierunku prostej, wzdłuż której płaszczyzna monety przecina się z blatem.

Przy obrocie o nieskończenie mały kąt $d\psi$ kierunek ruchu, a więc kąt φ , pozostaje w przybliżeniu stały.

Więzy nieholonomiczne – przykłady

- φ – kąt, który tworzy chwilowy kierunek ruchu monety z osią Ox ,
- θ – kąt nachylenia płaszczyzny monety do blatu,
- ψ – kąt obrotowy monety.

W każdej chwili moneta toczy się w kierunku prostej, wzdłuż której płaszczyzna monety przecina się z blatem.

Przy obrocie o nieskończenie mały kąt $d\psi$ kierunek ruchu, a więc kąt φ , pozostaje w przybliżeniu stały.

Rzuty pokonanej przy takim obrocie drogi $rd\psi$ na osie Ox i Oy dane są odpowiednio równaniami

$$dx_A = -rd\psi \cos \varphi,$$

$$dy_A = -rd\psi \sin \varphi.$$

Więzy nieholonomiczne – przykłady

- φ – kąt, który tworzy chwilowy kierunek ruchu monety z osią Ox ,
- θ – kąt nachylenia płaszczyzny monety do blatu,
- ψ – kąt obrotowy monety.

W każdej chwili moneta toczy się w kierunku prostej, wzdłuż której płaszczyzna monety przecina się z blatem.

Przy obrocie o nieskończenie mały kąt $d\psi$ kierunek ruchu, a więc kąt φ , pozostaje w przybliżeniu stały.

Rzuty pokonanej przy takim obrocie drogi $rd\psi$ na osie Ox i Oy dane są odpowiednio równaniami

$$dx_A = -rd\psi \cos \varphi,$$

$$dy_A = -rd\psi \sin \varphi.$$

Więzy nieholonomiczne – przykłady

Znak $-$ po prawej stronie odzwierciedla fakt, że zgodnie z rysunkiem przyrosty współrzędnych x_A i y_A są ujemne.

Przenosząc wszystko na lewą stronę i zmieniając kolejność otrzymamy

$$dx_A + r \cos \varphi d\psi = 0,$$

$$dy_A + r \sin \varphi d\psi = 0.$$

Znak $-$ po prawej stronie odzwierciedla fakt, że zgodnie z rysunkiem przyrosty współrzędnych x_A i y_A są ujemne. Przenosząc wszystko na lewą stronę i zmieniając kolejność otrzymamy

$$\begin{aligned}dx_A + r \cos \varphi d\psi &= 0, \\ dy_A + r \sin \varphi d\psi &= 0.\end{aligned}$$

Jest to układ równań różniczkowych.

Znak – po prawej stronie odzwierciedla fakt, że zgodnie z rysunkiem przyrosty współrzędnych x_A i y_A są ujemne. Przenosząc wszystko na lewą stronę i zmieniając kolejność otrzymamy

$$\begin{aligned}dx_A + r \cos \varphi d\psi &= 0, \\ dy_A + r \sin \varphi d\psi &= 0.\end{aligned}$$

Jest to układ równań różniczkowych. Za chwilę pokażemy, że układ ten nie jest całkowny, a zatem nie można go zapisać w postaci układu równań algebraicznych.

Znak $-$ po prawej stronie odzwierciedla fakt, że zgodnie z rysunkiem przyrosty współrzędnych x_A i y_A są ujemne. Przenosząc wszystko na lewą stronę i zmieniając kolejność otrzymamy

$$\begin{aligned}dx_A + r \cos \varphi d\psi &= 0, \\ dy_A + r \sin \varphi d\psi &= 0.\end{aligned}$$

Jest to układ równań różniczkowych. Za chwilę pokażemy, że układ ten nie jest całkowny, a zatem nie można go zapisać w postaci układu równań algebraicznych.

Jak sprawdzić czy układ równań różniczkowych jest całkowny lub nie?

Znak $-$ po prawej stronie odzwierciedla fakt, że zgodnie z rysunkiem przyrosty współrzędnych x_A i y_A są ujemne. Przenosząc wszystko na lewą stronę i zmieniając kolejność otrzymamy

$$\begin{aligned}dx_A + r \cos \varphi d\psi &= 0, \\ dy_A + r \sin \varphi d\psi &= 0.\end{aligned}$$

Jest to układ równań różniczkowych. Za chwilę pokażemy, że układ ten nie jest całkowny, a zatem nie można go zapisać w postaci układu równań algebraicznych.

Jak sprawdzić czy układ równań różniczkowych jest całkowny lub nie?

Więzy różniczkowe

Rozważmy ogólną postać k równań więzów różniczkowych nałożonych na układ N punktów materialnych w trójwymiarowej przestrzeni.

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

gdzie współczynniki a_{ij} i a_{it} mogą zależeć od wszystkich współrzędnych uogólnionych i czasu, ale nie zależą od prędkości

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_{ij}(\underbrace{q_1, q_2, \dots, q_{3N}}_q, t) \equiv a_{ij}(q, t), \\ a_{it} &= a_{it}(\underbrace{q_1, q_2, \dots, q_{3N}}_q, t) \equiv a_{it}(q, t). \end{aligned}$$

Więzy różniczkowe

Rozważmy ogólną postać k równań więzów różniczkowych nałożonych na układ N punktów materialnych w trójwymiarowej przestrzeni.

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

gdzie współczynniki a_{ij} i a_{it} mogą zależeć od wszystkich współrzędnych uogólnionych i czasu, ale nie zależą od prędkości

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_{ij}(\underbrace{q_1, q_2, \dots, q_{3N}}_q, t) \equiv a_{ij}(q, t), \\ a_{it} &= a_{it}(\underbrace{q_1, q_2, \dots, q_{3N}}_q, t) \equiv a_{it}(q, t). \end{aligned}$$

Wprowadziliśmy tu skrótową notację, w której **zależność od wszystkich współrzędnych uogólnionych $q_1, q_2, \dots, q_{3N}$ oznaczyliśmy literą q** . Tej skrótowej notacji będziemy często używać.

Układ równań

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

jest z pewnością całkowalny, jeśli istnieje **zbiór funkcji różniczkowalnych $f_i(q, t)$, $i = 1, 2, \dots, k$** , dla których powyższe równania są różniczkami zupełnymi.

Wprowadziliśmy tu skrótową notację, w której **zależność od wszystkich współrzędnych uogólnionych $q_1, q_2, \dots, q_{3N}$ oznaczyliśmy literą q** . Tej skrótowej notacji będziemy często używać.

Układ równań

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

jest z pewnością całkowalny, jeśli istnieje **zbiór funkcji różniczkowalnych $f_i(q, t)$, $i = 1, 2, \dots, k$** , dla których powyższe równania są różniczkami zupełnymi.

Obliczmy różniczkę zupełną funkcji $f_i(q, t)$ i przyrównajmy ją do lewej strony i -tego równania więzów

$$df_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} dt \equiv \sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt.$$

Równość zachodzi tylko pod warunkiem równości współczynników przy niezależnych przyrostach zmiennych dq_j i dt

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} = a_{ij} \quad \text{i} \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} = a_{it},$$

Obliczmy różniczkę zupełną funkcji $f_i(q, t)$ i przyrównajmy ją do lewej strony i -tego równania więzów

$$df_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} dt \equiv \sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt.$$

Równość zachodzi tylko pod warunkiem równości współczynników przy niezależnych przyrostach zmiennych dq_j i dt

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} = a_{ij} \quad \text{ i } \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} = a_{it},$$

ale warunkiem wystarczającym na to aby funkcja $f_i(q, t)$ była różniczkowalna jest istnienie wszystkich drugich pochodnych i równość odpowiednich pochodnych mieszanych. Skąd otrzymujemy warunki

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial q_j \partial q_l} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_l} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_l \partial q_j} = \frac{\partial a_{il}}{\partial q_j},$$
$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial a_{it}}{\partial q_j},$$

ale warunkiem wystarczającym na to aby funkcja $f_i(q, t)$ była różniczkowalna jest istnienie wszystkich drugich pochodnych i równość odpowiednich pochodnych mieszanych. Skąd otrzymujemy warunki

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f_i}{\partial q_j \partial q_l} &= \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_l} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_l \partial q_j} = \frac{\partial a_{il}}{\partial q_j}, \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_j \partial t} &= \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial a_{it}}{\partial q_j},\end{aligned}$$

a więc

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_l} = \frac{\partial a_{il}}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial a_{it}}{\partial q_j},$$

dla wszystkich wartości indeksów l, j takich, że $l \neq j$.

ale warunkiem wystarczającym na to aby funkcja $f_i(q, t)$ była różniczkowalna jest istnienie wszystkich drugich pochodnych i równość odpowiednich pochodnych mieszanych. Skąd otrzymujemy warunki

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f_i}{\partial q_j \partial q_l} &= \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_l} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_l \partial q_j} = \frac{\partial a_{il}}{\partial q_j}, \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_j \partial t} &= \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial a_{it}}{\partial q_j},\end{aligned}$$

a więc

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_l} = \frac{\partial a_{il}}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial a_{it}}{\partial q_j},$$

dla wszystkich wartości indeksów l, j takich, że $l \neq j$.

Otrzymaliśmy w ten sposób następujący warunek. Więzy różniczkowe

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

są całkowalne, jeśli niezależne od prędkości uogólnionych współczynniki $a_{ij}(q, t)$ i $a_{it}(q, t)$ spełniają warunki

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_l} = \frac{\partial a_{il}}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial a_{it}}{\partial q_j},$$

dla wszystkich wartości indeksów l, j takich, że $l \neq j$.

Otrzymaliśmy w ten sposób następujący warunek. Więzy różniczkowe

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

są całkowalne, jeśli niezależne od prędkości uogólnionych współczynniki $a_{ij}(q, t)$ i $a_{it}(q, t)$ spełniają warunki

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_l} = \frac{\partial a_{il}}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial a_{it}}{\partial q_j},$$

dla wszystkich wartości indeksów l, j takich, że $l \neq j$.

Uwaga. Warunki te można w rzeczywistości osłabić do żądania aby forma różniczkowa $\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt$ miała tzw. czynnik całkujący, co można sprowadzić do warunku

$$a_{ik} \left(\frac{\partial a_{il}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_l} \right) + a_{ij} \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_l} - \frac{\partial a_{il}}{\partial q_k} \right) + a_{il} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} \right) = 0.$$

Uwaga. Warunki te można w rzeczywistości osłabić do żądania aby forma różniczkowa $\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt$ miała tzw. czynnik całkujący, co można sprowadzić do warunku

$$a_{ik} \left(\frac{\partial a_{il}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_l} \right) + a_{ij} \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_l} - \frac{\partial a_{il}}{\partial q_k} \right) + a_{il} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} \right) = 0.$$

Wyprowadzenie tego warunku można znaleźć np. w podręczniku G. Białkowskiego *Mechanika klasyczna*.

Uwaga. Warunki te można w rzeczywistości osłabić do żądania aby forma różniczkowa $\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt$ miała tzw. czynnik całkujący, co można sprowadzić do warunku

$$a_{ik} \left(\frac{\partial a_{il}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_l} \right) + a_{ij} \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_l} - \frac{\partial a_{il}}{\partial q_k} \right) + a_{il} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} \right) = 0.$$

Wyprowadzenie tego warunku można znaleźć np. w podręczniku G. Białkowskiego *Mechanika klasyczna*.

Zadanie 1. Udowodnić, że więzy w przykładzie z monetą toczącą się po blacie stołu dane równaniami różniczkowymi

$$dx_A + r \cos \varphi d\psi = 0,$$

$$dy_A + r \sin \varphi d\psi = 0.$$

nie są całkowne.

Rozwiązanie. Przeprowadzimy dowód nie wprost, tzn. pokażemy, że założenie całkowności układu prowadzi do sprzeczności.

Zadanie 1. Udowodnić, że więzy w przykładzie z monetą toczącą się po blacie stołu dane równaniami różniczkowymi

$$dx_A + r \cos \varphi d\psi = 0,$$

$$dy_A + r \sin \varphi d\psi = 0.$$

nie są całkowalne.

Rozwiązanie. Przeprowadzimy dowód nie wprost, tzn. pokażemy, że założenie całkowalności układu prowadzi do sprzeczności.

Powyższy układ równań jest całkowalny jeśli istnieją dwie funkcje pięciu zmiennych $f_i(x_A, y_A, \varphi, \theta, \psi)$, $i = 1, 2$, dla których równania układu są różniczkami zupełnymi.

Zadanie 1. Udowodnić, że więzy w przykładzie z monetą toczącą się po blacie stołu dane równaniami różniczkowymi

$$dx_A + r \cos \varphi d\psi = 0,$$

$$dy_A + r \sin \varphi d\psi = 0.$$

nie są całkowalne.

Rozwiązanie. Przeprowadzimy dowód nie wprost, tzn. pokażemy, że założenie całkowalności układu prowadzi do sprzeczności.

Powyższy układ równań jest całkowalny jeśli istnieją dwie funkcje pięciu zmiennych $f_i(x_A, y_A, \varphi, \theta, \psi)$, $i = 1, 2$, dla których równania układu są różniczkami zupełnymi.

Więzy różniczkowe – przykłady

Obliczmy różniczki zupełne funkcji $f_i(x_A, y_A, \varphi, \theta, \psi)$, $i = 1, 2$, i przyrównajmy do lewej strony równań więzów

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_A} dx_A + \frac{\partial f_1}{\partial y_A} dy_A + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial f_1}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f_1}{\partial \psi} d\psi &= dx_A + r \cos \varphi d\psi, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_A} dx_A + \frac{\partial f_2}{\partial y_A} dy_A + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial f_2}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f_2}{\partial \psi} d\psi &= dy_A + r \sin \varphi d\psi.\end{aligned}$$

Więzy różniczkowe – przykłady

Obliczmy różniczki zupełne funkcji $f_i(x_A, y_A, \varphi, \theta, \psi)$, $i = 1, 2$, i przyrównajmy do lewej strony równań więzów

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_A} dx_A + \frac{\partial f_1}{\partial y_A} dy_A + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial f_1}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f_1}{\partial \psi} d\psi &= dx_A + r \cos \varphi d\psi, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_A} dx_A + \frac{\partial f_2}{\partial y_A} dy_A + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial f_2}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f_2}{\partial \psi} d\psi &= dy_A + r \sin \varphi d\psi.\end{aligned}$$

Porównajmy współczynniki przy dx_A , dy_A , $d\varphi$, $d\theta$ i $d\psi$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_A} = 1, & \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_A} = 0, & \quad \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = 0, & \quad \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = 0, & \quad \frac{\partial f_1}{\partial \psi} = r \cos \varphi, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_A} = 0, & \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_A} = 1, & \quad \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = 0, & \quad \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = 0, & \quad \frac{\partial f_2}{\partial \psi} = r \sin \varphi.\end{aligned}$$

Więzy różniczkowe – przykłady

Obliczmy różniczki zupełne funkcji $f_i(x_A, y_A, \varphi, \theta, \psi)$, $i = 1, 2$, i przyrównajmy do lewej strony równań więzów

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_A} dx_A + \frac{\partial f_1}{\partial y_A} dy_A + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial f_1}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f_1}{\partial \psi} d\psi &= dx_A + r \cos \varphi d\psi, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_A} dx_A + \frac{\partial f_2}{\partial y_A} dy_A + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial f_2}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f_2}{\partial \psi} d\psi &= dy_A + r \sin \varphi d\psi.\end{aligned}$$

Porównajmy współczynniki przy dx_A , dy_A , $d\varphi$, $d\theta$ i $d\psi$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_A} = 1, & \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_A} = 0, & \quad \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = 0, & \quad \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = 0, & \quad \frac{\partial f_1}{\partial \psi} = r \cos \varphi, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_A} = 0, & \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_A} = 1, & \quad \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = 0, & \quad \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = 0, & \quad \frac{\partial f_2}{\partial \psi} = r \sin \varphi.\end{aligned}$$

Więzy różniczkowe – przykłady

Skoncentrujmy się na równaniach w kolorze niebieskim

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = 0, & \frac{\partial f_1}{\partial \psi} = r \cos \varphi, \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = 0, & \frac{\partial f_2}{\partial \psi} = r \sin \varphi. \end{array}$$

Zróżniczkujemy równania w pierwszej kolumnie po zmiennej ψ , a równania w drugiej kolumnie po zmiennej φ

Więzy różniczkowe – przykłady

Skoncentrujmy się na równaniach w kolorze niebieskim

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{\partial f_1}{\partial \psi} &= r \cos \varphi, \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{\partial f_2}{\partial \psi} &= r \sin \varphi.\end{aligned}$$

Zróżniczkujemy równania w pierwszej kolumnie po zmiennej ψ , a równania w drugiej kolumnie po zmiennej φ

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \varphi \partial \psi} = 0 \neq \frac{\partial^2 f_1}{\partial \psi \partial \varphi} = -r \sin \varphi,$$

Więzy różniczkowe – przykłady

Skoncentrujmy się na równaniach w kolorze niebieskim

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{\partial f_1}{\partial \psi} &= r \cos \varphi, \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{\partial f_2}{\partial \psi} &= r \sin \varphi.\end{aligned}$$

Zróżniczkujemy równania w pierwszej kolumnie po zmiennej ψ , a równania w drugiej kolumnie po zmiennej φ

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f_1}{\partial \varphi \partial \psi} &= 0 \neq \frac{\partial^2 f_1}{\partial \psi \partial \varphi} = -r \sin \varphi, \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial \varphi \partial \psi} &= 0 \neq \frac{\partial^2 f_2}{\partial \psi \partial \varphi} = r \cos \varphi,\end{aligned}$$

Więzy różniczkowe – przykłady

Skoncentrujmy się na równaniach w kolorze niebieskim

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{\partial f_1}{\partial \psi} &= r \cos \varphi, \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{\partial f_2}{\partial \psi} &= r \sin \varphi.\end{aligned}$$

Zróżniczkujemy równania w pierwszej kolumnie po zmiennej ψ , a równania w drugiej kolumnie po zmiennej φ

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f_1}{\partial \varphi \partial \psi} &= 0 \neq \frac{\partial^2 f_1}{\partial \psi \partial \varphi} = -r \sin \varphi, \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial \varphi \partial \psi} &= 0 \neq \frac{\partial^2 f_2}{\partial \psi \partial \varphi} = r \cos \varphi,\end{aligned}$$

a zatem układ równań nie jest całkowny.

Więzy różniczkowe – przykłady

Skoncentrujmy się na równaniach w kolorze niebieskim

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{\partial f_1}{\partial \psi} &= r \cos \varphi, \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{\partial f_2}{\partial \psi} &= r \sin \varphi.\end{aligned}$$

Zróżniczkujemy równania w pierwszej kolumnie po zmiennej ψ , a równania w drugiej kolumnie po zmiennej φ

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f_1}{\partial \varphi \partial \psi} &= 0 \neq \frac{\partial^2 f_1}{\partial \psi \partial \varphi} = -r \sin \varphi, \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial \varphi \partial \psi} &= 0 \neq \frac{\partial^2 f_2}{\partial \psi \partial \varphi} = r \cos \varphi,\end{aligned}$$

a zatem układ równań nie jest całkowny.

Uwaga. Właściwie dla wyprowadzenia powyższej konkluzji należałoby pokazać, że nie istnieje czynnik całkujący.

Więzy możemy również sklasyfikować ze względu na zależność od czasu dzieląc je na

- **więzy skleronomiczne**, które nie zawierają jawnej zależności od czasu, jak np. więzy $x_A - r\varphi \cos \alpha = 0$, $y_A - r\varphi \sin \alpha = 0$, z przykładu krążka toczącego się po prostej,
- **więzy reonomiczne**, które zależą jawnie od czasu, jak np. więzy $\varphi = \omega t$, $z = ar^2$, w przypadku koralika poruszającego się po obracającej się paraboli.

Więzy możemy również sklasyfikować ze względu na zależność od czasu dzieląc je na

- **więzy skleronomiczne**, które nie zawierają jawnej zależności od czasu, jak np. więzy $x_A - r\varphi \cos \alpha = 0$, $y_A - r\varphi \sin \alpha = 0$, z przykładu krążka toczącego się po prostej,
- **więzy reonomiczne**, które zależą jawnie od czasu, jak np. więzy $\varphi = \omega t$, $z = ar^2$, w przypadku koralika poruszającego się po obracającej się paraboli.

Równania ruchu dla układów z więzami

Rozważmy teraz układ N punktów materialnych, na który nałożono **więzy holonomiczne** opisane równaniami

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

z których możemy wyeliminować k współrzędnych uogólnionych q_j .

Równania ruchu dla układów z więzami

Rozważmy teraz układ N punktów materialnych, na który nałożono **więzy holonomiczne** opisane równaniami

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

z których możemy wyeliminować k współrzędnych uogólnionych q_j . Nie zmniejszając ogólności rozważań możemy przyjąć, że wyeliminowaliśmy k ostatnich współrzędnych

$$q_{3N-k+1}, q_{3N-k+2}, \dots, q_{3N}$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Rozważmy teraz układ N punktów materialnych, na który nałożono **więzy holonomiczne** opisane równaniami

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

z których możemy wyeliminować k współrzędnych uogólnionych q_j . Nie zmniejszając ogólności rozważań możemy przyjąć, że wyeliminowaliśmy k ostatnich współrzędnych

$$q_{3N-k+1}, q_{3N-k+2}, \dots, q_{3N}$$

tak, że wektory położenia poszczególnych punktów układu będą powiązane z pozostałymi $3N - k$ **niezależnymi** współrzędnymi uogólnionymi równaniami

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Rozważmy teraz układ N punktów materialnych, na który nałożono **więzy holonomiczne** opisane równaniami

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

z których możemy wyeliminować k współrzędnych uogólnionych q_j . Nie zmniejszając ogólności rozważań możemy przyjąć, że wyeliminowaliśmy k ostatnich współrzędnych

$$q_{3N-k+1}, q_{3N-k+2}, \dots, q_{3N}$$

tak, że wektory położenia poszczególnych punktów układu będą powiązane z pozostałymi $3N - k$ **niezależnymi** współrzędnymi uogólnionymi równaniami

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

W obecności więzów równanie ruchu i -tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie po prawej stronie

W obecności więzów równanie ruchu i -tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie po prawej stronie – oprócz wypadkowej, *aktywnej* siły działającej na i -ty punkt –

Równania ruchu dla układów z więzami

W obecności więzów równanie ruchu i -tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie po prawej stronie – oprócz wypadkowej, *aktywnej* siły działającej na i -ty punkt – wprowadziliśmy *siłę reakcji więzów* $\vec{Z}_i$,

W obecności więzów równanie ruchu i -tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie po prawej stronie – oprócz wypadkowej, *aktywnej* siły działającej na i -ty punkt – wprowadziliśmy *siłę reakcji więzów* $\vec{Z}_i$, która sprawia, że punkt materialny porusza się w sposób zgodny z więzami.

W obecności więzów równanie ruchu i -tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie po prawej stronie – oprócz wypadkowej, *aktywnej* siły działającej na i -ty punkt – wprowadziliśmy *siłę reakcji więzów* $\vec{Z}_i$, która sprawia, że punkt materialny porusza się w sposób zgodny z więzami.

Znamy skutki działania sił reakcji więzów,

W obecności więzów równanie ruchu i -tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie po prawej stronie – oprócz wypadkowej, *aktywnej* siły działającej na i -ty punkt – wprowadziliśmy *siłę reakcji więzów* $\vec{Z}_i$, która sprawia, że punkt materialny porusza się w sposób zgodny z więzami.

Znamy skutki działania sił reakcji więzów, ale na ogół nie znamy ich wielkości,

W obecności więzów równanie ruchu i -tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie po prawej stronie – oprócz wypadkowej, *aktywnej* siły działającej na i -ty punkt – wprowadziliśmy *siłę reakcji więzów* $\vec{Z}_i$, która sprawia, że punkt materialny porusza się w sposób zgodny z więzami.

Znamy skutki działania sił reakcji więzów, ale na ogół nie znamy ich wielkości, dlatego ich występowanie komplikuje rozwiązanie zagadnienia ruchu.

W obecności więzów równanie ruchu i -tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

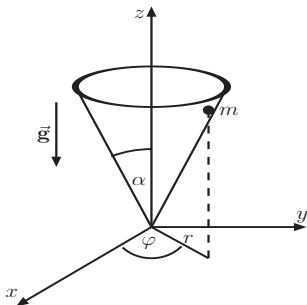
$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie po prawej stronie – oprócz wypadkowej, *aktywnej* siły działającej na i -ty punkt – wprowadziliśmy *siłę reakcji więzów* $\vec{Z}_i$, która sprawia, że punkt materialny porusza się w sposób zgodny z więzami.

Znamy skutki działania sił reakcji więzów, ale na ogół nie znamy ich wielkości, *dlatego ich występowanie komplikuje rozwiązanie zagadnienia ruchu.*

Równania ruchu dla układów z więzami

Przykład 3. Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .

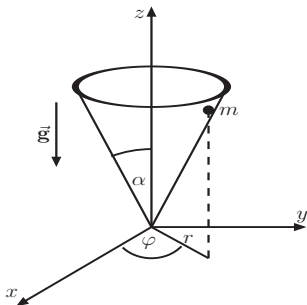


Równanie ruchu ma postać

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{Z},$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Przykład 3. Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .



Równanie ruchu ma postać

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{Z},$$

a w składowych

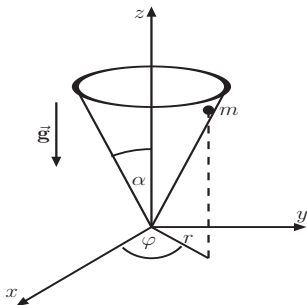
$$m\ddot{x} = Z_x,$$

$$m\ddot{y} = Z_y,$$

$$m\ddot{z} = -mg + Z_z.$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Przykład 3. Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .



Równanie więzów:

$$\frac{z}{r} = \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow r - z \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Równanie ruchu ma postać

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{Z},$$

a w składowych

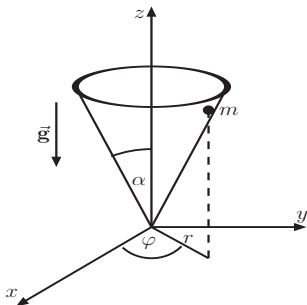
$$m\ddot{x} = Z_x,$$

$$m\ddot{y} = Z_y,$$

$$m\ddot{z} = -mg + Z_z.$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Przykład 3. Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α .



Równanie więzów:

$$\frac{z}{r} = \operatorname{ctg} \alpha \quad \Rightarrow \quad r - z \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Równanie ruchu ma postać

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{Z},$$

a w składowych

$$m\ddot{x} = Z_x,$$

$$m\ddot{y} = Z_y,$$

$$m\ddot{z} = -mg + Z_z.$$

Jako zmienne niezależne wybieramy współrzędne cylindryczne r i φ . Obliczmy pochodne czasowe odpowiednich związków ze współrzędnymi kartezjańskimi

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{cases}$$

Jako zmienne niezależne wybieramy współrzędne cylindryczne r i φ . Obliczmy pochodne czasowe odpowiednich związków ze współrzędnymi kartezjańskimi

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \end{cases}$$

Jako zmienne niezależne wybieramy współrzędne cylindryczne r i φ . Obliczmy pochodne czasowe odpowiednich związków ze współrzędnymi kartezjańskimi

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} \end{cases}$$

Jako zmienne niezależne wybieramy współrzędne cylindryczne r i φ . Obliczmy pochodne czasowe odpowiednich związków ze współrzędnymi kartezjańskimi

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{z} = 0, \end{cases}$$

Jako zmienne niezależne wybieramy współrzędne cylindryczne r i φ . Obliczmy pochodne czasowe odpowiednich związków ze współrzędnymi kartezjańskimi

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

Jako zmienne niezależne wybieramy współrzędne cylindryczne r i φ . Obliczmy pochodne czasowe odpowiednich związków ze współrzędnymi kartezjańskimi

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{z} = \end{cases}$$

Jako zmienne niezależne wybieramy współrzędne cylindryczne r i φ . Obliczmy pochodne czasowe odpowiednich związków ze współrzędnymi kartezjańskimi

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{z} = \dot{r} \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases}$$

Zadanie 2. Uzasadnić powyższe wzory na pochodne czasowe w oparciu o wzór na pochodną funkcji złożonej wielu zmiennych, biorąc pod uwagę, że $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ a kąt α jest stały.

Jako zmienne niezależne wybieramy współrzędne cylindryczne r i φ . Obliczmy pochodne czasowe odpowiednich związków ze współrzędnymi kartezjańskimi

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = r \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{z} = \dot{r} \operatorname{ctg} \alpha, \end{cases}$$

Zadanie 2. Uzasadnić powyższe wzory na pochodne czasowe w oparciu o wzór na pochodną funkcji złożonej wielu zmiennych, biorąc pod uwagę, że $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ a kąt α jest stały.

Obliczmy drugą pochodną czasową $\ddot{x}$

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt} (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi)$$

Obliczmy drugą pochodną czasową $\ddot{x}$

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{d}{dt} (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi) \\ &= \end{aligned}$$

Obliczmy drugą pochodną czasową $\ddot{x}$

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{d}{dt} (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi) \\ &= \ddot{r} \cos \varphi - \dot{r} \dot{\varphi} \sin \varphi - \dot{r} \dot{\varphi} \sin \varphi - r \ddot{\varphi} \sin \varphi - r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi\end{aligned}$$

Obliczmy drugą pochodną czasową $\ddot{x}$

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{d}{dt} (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi) \\ &= \ddot{r} \cos \varphi - \dot{r} \dot{\varphi} \sin \varphi - \dot{r} \dot{\varphi} \sin \varphi - r \ddot{\varphi} \sin \varphi - r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \\ &= \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r} \dot{\varphi} \sin \varphi - r \ddot{\varphi} \sin \varphi - r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi.\end{aligned}$$

Obliczmy drugą pochodną czasową $\ddot{x}$

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{d}{dt} (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi) \\ &= \ddot{r} \cos \varphi - \dot{r} \dot{\varphi} \sin \varphi - \dot{r} \dot{\varphi} \sin \varphi - r \ddot{\varphi} \sin \varphi - r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \\ &= \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r} \dot{\varphi} \sin \varphi - r \ddot{\varphi} \sin \varphi - r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi.\end{aligned}$$

Zadanie 3. Pokazać, że drugie pochodne czasowe $\ddot{y}$ i $\ddot{z}$ są równe

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \\ \ddot{z} &= \ddot{r} \operatorname{ctg} \alpha,\end{aligned}$$

a równania ruchu mają postać

$$\begin{aligned}m \left(\ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \right) &= Z_x, \\ m \left(\ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right) &= Z_y, \\ m \left(\ddot{r} \operatorname{ctg} \alpha + g \right) &= Z_z.\end{aligned}$$

Zadanie 3. Pokazać, że drugie pochodne czasowe $\ddot{y}$ i $\ddot{z}$ są równe

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \\ \ddot{z} &= \ddot{r} \operatorname{ctg} \alpha,\end{aligned}$$

a równania ruchu mają postać

$$\begin{aligned}m \left(\ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \right) &= Z_x, \\ m \left(\ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right) &= Z_y, \\ m(\ddot{r} \operatorname{ctg} \alpha + g) &= Z_z.\end{aligned}$$

Zauważmy, że jest to układ trzech równań różniczkowych z pięcioma niewiadomymi: $r(t)$, $\varphi(t)$, Z_x , Z_y i Z_z .

Zadanie 3. Pokazać, że drugie pochodne czasowe $\ddot{y}$ i $\ddot{z}$ są równe

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \\ \ddot{z} &= \ddot{r} \operatorname{ctg} \alpha,\end{aligned}$$

a równania ruchu mają postać

$$\begin{aligned}m \left(\ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \right) &= Z_x, \\ m \left(\ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right) &= Z_y, \\ m \left(\ddot{r} \operatorname{ctg} \alpha + g \right) &= Z_z.\end{aligned}$$

Zauważmy, że jest to układ trzech równań różniczkowych z pięcioma niewiadomymi: $r(t)$, $\varphi(t)$, Z_x , Z_y i Z_z .

Aby jednoznacznie rozwiązać problem, musimy uczynić pewne założenia co do natury siły reakcji więzów $\vec{Z}$.

Założymy, że jest ona prostopadła do powierzchni stożka.

Aby jednoznacznie rozwiązać problem, musimy uczynić pewne założenia co do natury siły reakcji więzów $\vec{Z}$.

Założymy, że jest ona prostopadła do powierzchni stożka.

Jest to założenie naturalne. Gdyby nie było ono spełnione, to siła reakcji więzów mogłaby wkonywać pracę nad punktem, co w oczywisty sposób przeczyłoby obserwacjom.

Aby jednoznacznie rozwiązać problem, musimy uczynić pewne założenia co do natury siły reakcji więzów $\vec{Z}$.

Założymy, że jest ona prostopadła do powierzchni stożka.

Jest to założenie naturalne. Gdyby nie było ono spełnione, to siła reakcji więzów mogłaby wykonywać pracę nad punktem, co w oczywisty sposób przeczyłoby obserwacjom.

Nieruchoma powierzchnia więzów nie może wykonywać pracy nad układem.

Aby jednoznacznie rozwiązać problem, musimy uczynić pewne założenia co do natury siły reakcji więzów $\vec{Z}$.

Założymy, że jest ona prostopadła do powierzchni stożka.

Jest to założenie naturalne. Gdyby nie było ono spełnione, to siła reakcji więzów mogłaby wykonywać pracę nad punktem, co w oczywisty sposób przeczyłoby obserwacjom.

Nieruchoma powierzchnia więzów nie może wykonywać pracy nad układem.

Równania ruchu dla układów z więzami

Z kursów analizy matematycznej i fizyki ogólnej wiemy, że wektorem prostopadłym do powierzchni danej równaniem

$$f(x, y, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0$$

jest wektor gradientu $\vec{\nabla} f$, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\vec{\nabla} f \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right].$$

Obliczmy potrzebne pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - z \operatorname{tg} \alpha \right) =$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Z kursów analizy matematycznej i fizyki ogólnej wiemy, że wektorem prostopadłym do powierzchni danej równaniem

$$f(x, y, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0$$

jest wektor gradientu $\vec{\nabla} f$, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\vec{\nabla} f \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right].$$

Obliczmy potrzebne pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - z \operatorname{tg} \alpha \right) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Z kursów analizy matematycznej i fizyki ogólnej wiemy, że wektorem prostopadłym do powierzchni danej równaniem

$$f(x, y, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0$$

jest wektor gradientu $\vec{\nabla} f$, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\vec{\nabla} f \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right].$$

Obliczmy potrzebne pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - z \operatorname{tg} \alpha \right) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} =$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Z kursów analizy matematycznej i fizyki ogólnej wiemy, że wektorem prostopadłym do powierzchni danej równaniem

$$f(x, y, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0$$

jest wektor gradientu $\vec{\nabla} f$, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\vec{\nabla} f \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right].$$

Obliczmy potrzebne pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - z \operatorname{tg} \alpha \right) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Z kursów analizy matematycznej i fizyki ogólnej wiemy, że wektorem prostopadłym do powierzchni danej równaniem

$$f(x, y, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0$$

jest wektor gradientu $\vec{\nabla} f$, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\vec{\nabla} f \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right].$$

Obliczmy potrzebne pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - z \operatorname{tg} \alpha \right) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial f}{\partial z} =$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Z kursów analizy matematycznej i fizyki ogólnej wiemy, że wektorem prostopadłym do powierzchni danej równaniem

$$f(x, y, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0$$

jest wektor gradientu $\vec{\nabla} f$, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\vec{\nabla} f \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right].$$

Obliczmy potrzebne pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - z \operatorname{tg} \alpha \right) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Z kursów analizy matematycznej i fizyki ogólnej wiemy, że wektorem prostopadłym do powierzchni danej równaniem

$$f(x, y, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0$$

jest wektor gradientu $\vec{\nabla} f$, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\vec{\nabla} f \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right].$$

Obliczmy potrzebne pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - z \operatorname{tg} \alpha \right) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Otrzymaliśmy wzór

$$\vec{\nabla} f = [\cos \varphi, \sin \varphi, -\operatorname{tg} \alpha].$$

Wektor $\vec{Z}$ jest równoległy do wektora $\vec{\nabla} f$, a więc

$$\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} f, \quad \text{gdzie } \lambda \in \mathbb{R},$$

Otrzymaliśmy wzór

$$\vec{\nabla} f = [\cos \varphi, \sin \varphi, -\operatorname{tg} \alpha].$$

Wektor $\vec{Z}$ jest równoległy do wektora $\vec{\nabla} f$, a więc

$$\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} f, \quad \text{gdzie} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

co jest równoważne trzem równaniami skalarnym

$$Z_x = \lambda \cos \varphi, \quad Z_y = \lambda \sin \varphi, \quad Z_z = -\lambda \operatorname{tg} \alpha.$$

Otrzymaliśmy wzór

$$\vec{\nabla} f = [\cos \varphi, \sin \varphi, -\operatorname{tg} \alpha].$$

Wektor $\vec{Z}$ jest równoległy do wektora $\vec{\nabla} f$, a więc

$$\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} f, \quad \text{gdzie} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

co jest równoważne trzem równaniami skalarnym

$$Z_x = \lambda \cos \varphi, \quad Z_y = \lambda \sin \varphi, \quad Z_z = -\lambda \operatorname{tg} \alpha.$$

Eliminując współczynnik λ otrzymujemy dwa brakujące równania

$$Z_x \sin \varphi = Z_y \cos \varphi, \quad Z_z \cos \varphi = -Z_x \operatorname{tg} \alpha.$$

Otrzymaliśmy wzór

$$\vec{\nabla} f = [\cos \varphi, \sin \varphi, -\operatorname{tg} \alpha].$$

Wektor $\vec{Z}$ jest równoległy do wektora $\vec{\nabla} f$, a więc

$$\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} f, \quad \text{gdzie} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

co jest równoważne trzem równaniami skalarnym

$$Z_x = \lambda \cos \varphi, \quad Z_y = \lambda \sin \varphi, \quad Z_z = -\lambda \operatorname{tg} \alpha.$$

Eliminując współczynnik λ otrzymujemy dwa brakujące równania

$$Z_x \sin \varphi = Z_y \cos \varphi, \quad Z_z \cos \varphi = -Z_x \operatorname{tg} \alpha.$$

Zadanie 4. Pokazać, że powyższe dwa równania pozwalają wyeliminować składowe siły reakcji więzów z równań ruchu

$$m \left(\ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \right) = Z_x,$$

$$m \left(\ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right) = Z_y,$$

$$m(\ddot{r} \operatorname{ctg} \alpha + g) = Z_z,$$

które ostatecznie przybierają postać

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0$$

$$(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \operatorname{tg} \alpha + g = 0.$$

Zadanie 4. Pokazać, że powyższe dwa równania pozwalają wyeliminować składowe siły reakcji więzów z równań ruchu

$$m \left(\ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \right) = Z_x,$$

$$m \left(\ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right) = Z_y,$$

$$m(\ddot{r} \operatorname{ctg} \alpha + g) = Z_z,$$

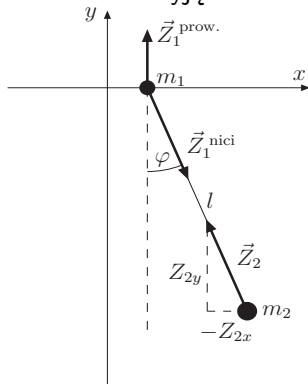
które ostatecznie przybierają postać

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0$$

$$(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \operatorname{tg} \alpha + g = 0.$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Przykład 4. Wyprowadzić równania ruchu dla wahadła matematycznego z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox . Przyjąć oznaczenia takie jak na rysunku.



Równania ruchu mają postać

$$m_1 \ddot{x}_1 = Z_{1x},$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = -m_1 g + Z_{1y},$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = Z_{2x},$$

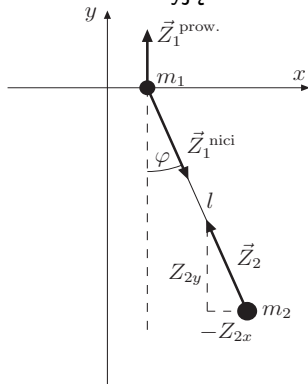
$$m_2 \ddot{y}_2 = -m_2 g + Z_{2y}.$$

Równania więzów:

$$y_1 = 0, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0.$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Przykład 4. Wyprowadzić równania ruchu dla wahadła matematycznego z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox . Przyjąć oznaczenia takie jak na rysunku.



Równania ruchu mają postać

$$m_1 \ddot{x}_1 = Z_{1x},$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = -m_1 g + Z_{1y},$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = Z_{2x},$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = -m_2 g + Z_{2y}.$$

Równania więzów:

$$y_1 = 0, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0.$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Jako niezależne współrzędne uogólnione wybieramy x_1 – opisujące położenie punktu zawieszenia (pamiętamy, że $y_1 = 0$)

Jako niezależne współrzędne uogólnione wybieramy x_1 – opisujące położenie punktu zawieszenia (pamiętamy, że $y_1 = 0$) i φ – kąt wychylenia wahadła.

Jako niezależne współrzędne uogólnione wybieramy x_1 – opisujące położenie punktu zawieszenia (pamiętamy, że $y_1 = 0$) i φ – kąt wychylenia wahadła.

Równania transformacyjne mają postać

$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi, \quad y_2 = -l \cos \varphi.$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Jako niezależne współrzędne uogólnione wybieramy x_1 – opisujące położenie punktu zawieszenia (pamiętamy, że $y_1 = 0$) i φ – kąt wychylenia wahadła.

Równania transformacyjne mają postać

$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi, \quad y_2 = -l \cos \varphi.$$

Zauważmy, że po wstawieniu tych równań do warunku więzów

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0$$

opisującego stałą długość nici, otrzymamy tożsamość

Jako niezależne współrzędne uogólnione wybieramy x_1 – opisujące położenie punktu zawieszenia (pamiętamy, że $y_1 = 0$) i φ – kąt wychylenia wahadła.

Równania transformacyjne mają postać

$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi, \quad y_2 = -l \cos \varphi.$$

Zauważmy, że po wstawieniu tych równań do warunku więzów

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0$$

opisującego stałą długość nici, otrzymamy tożsamość (jedynekę trygonometryczną).

Jako niezależne współrzędne uogólnione wybieramy x_1 – opisujące położenie punktu zawieszenia (pamiętamy, że $y_1 = 0$) i φ – kąt wychylenia wahadła.

Równania transformacyjne mają postać

$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi, \quad y_2 = -l \cos \varphi.$$

Zauważmy, że po wstawieniu tych równań do warunku więzów

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0$$

opisującego stałą długość nici, otrzymamy tożsamość (jedynekę trygonometryczną).

Po obliczeniu drugich pochodnych czasowych $\ddot{x}_2$ i $\ddot{y}_2$ i wstawieniu ich do równań ruchu przyjmują one postać

$$m_1 \ddot{x}_1 = Z_{1x}, \quad (1)$$

$$m_1 g = Z_{1y}, \quad (2)$$

$$m_2 \left(\ddot{x}_1 + l \ddot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right) = Z_{2x}, \quad (3)$$

$$m_2 \left[l \left(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \right) + g \right] = Z_{2y}. \quad (4)$$

Znów mamy więcej niewiadomych niż równań.

Po obliczeniu drugich pochodnych czasowych $\ddot{x}_2$ i $\ddot{y}_2$ i wstawieniu ich do równań ruchu przyjmują one postać

$$m_1 \ddot{x}_1 = Z_{1x}, \quad (1)$$

$$m_1 g = Z_{1y}, \quad (2)$$

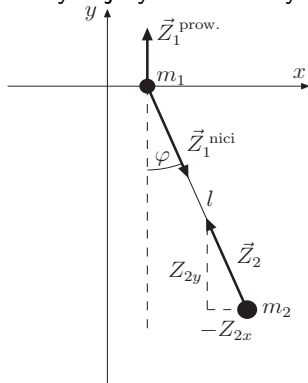
$$m_2 \left(\ddot{x}_1 + l \ddot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right) = Z_{2x}, \quad (3)$$

$$m_2 \left[l \left(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \right) + g \right] = Z_{2y}. \quad (4)$$

Znów mamy więcej niewiadomych niż równań.

Równania ruchu dla układów z więzami

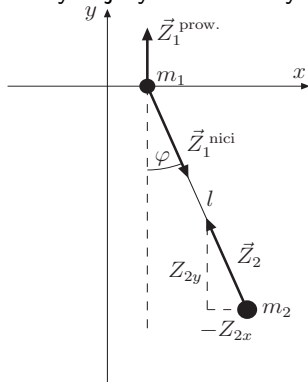
Skorzystajmy z III zasady dynamiki Newtona i z trygonometrii



$$\vec{Z}_1^{\text{nici}} = -\vec{Z}_2$$

Równania ruchu dla układów z więzami

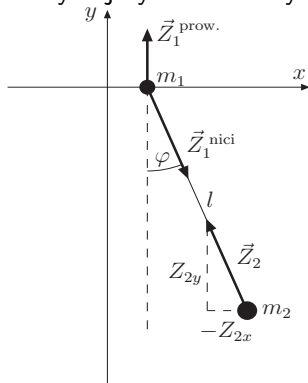
Skorzystajmy z III zasady dynamiki Newtona i z trygonometrii



$$\vec{Z}_1^{\text{nici}} = -\vec{Z}_2 \Rightarrow$$

Równania ruchu dla układów z więzami

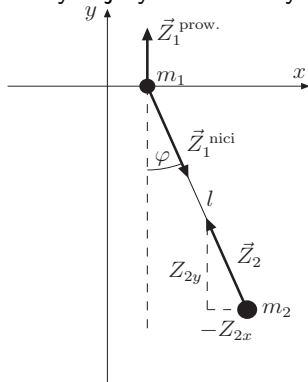
Skorzystajmy z III zasady dynamiki Newtona i z trygonometrii



$$\vec{Z}_1^{\text{nici}} = -\vec{Z}_2 \Rightarrow Z_{1x} = -Z_{2x},$$

Równania ruchu dla układów z więzami

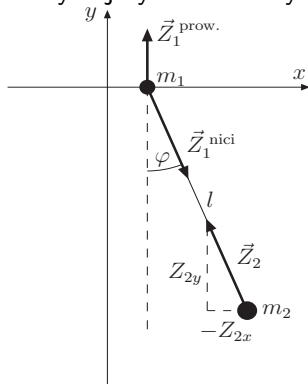
Skorzystajmy z III zasady dynamiki Newtona i z trygonometrii



$$\vec{Z}_1^{\text{nici}} = -\vec{Z}_2 \Rightarrow Z_{1x} = -Z_{2x},$$
$$\frac{-Z_{2x}}{Z_{2y}} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Skorzystajmy z III zasady dynamiki Newtona i z trygonometrii



$$\begin{aligned}\vec{Z}_1^{\text{nici}} &= -\vec{Z}_2 \Rightarrow Z_{1x} = -Z_{2x}, \\ \frac{-Z_{2x}}{Z_{2y}} &= \operatorname{tg} \varphi.\end{aligned}$$

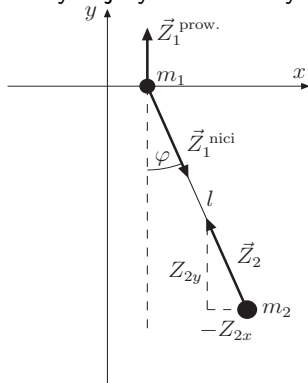
Otrzymaliśmy dwa dodatkowe równania:

$$Z_{1x} + Z_{2x} = 0, \quad (5)$$

$$Z_{2x} \cos \varphi + Z_{2y} \sin \varphi = 0. \quad (6)$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Skorzystajmy z III zasady dynamiki Newtona i z trygonometrii



$$\begin{aligned}\vec{Z}_1^{\text{nici}} &= -\vec{Z}_2 \Rightarrow Z_{1x} = -Z_{2x}, \\ \frac{-Z_{2x}}{Z_{2y}} &= \operatorname{tg} \varphi.\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy dwa dodatkowe równania:

$$Z_{1x} + Z_{2x} = 0, \quad (5)$$

$$Z_{2x} \cos \varphi + Z_{2y} \sin \varphi = 0. \quad (6)$$

Równania (1) – (6) można już, przynajmniej z zasady, jednoznacznie rozwiązać.

Dodając stronami równania (1) i (3), a następnie korzystając z (5) otrzymamy

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 = m_2 l \left(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi \right).$$

Równania (1) – (6) można już, przynajmniej z zasady, jednoznacznie rozwiązać.

Dodając stronami równania (1) i (3), a następnie korzystając z (5) otrzymamy

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 = m_2 l \left(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi \right).$$

Z kolei mnożąc równanie (3) przez $\cos \varphi$ a równanie (4) przez $\sin \varphi$ i dodając tak uzyskane równania stronami otrzymamy

$$\ddot{x}_1 \cos \varphi + l \ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0.$$

Równania (1) – (6) można już, przynajmniej z zasady, jednoznacznie rozwiązać.

Dodając stronami równania (1) i (3), a następnie korzystając z (5) otrzymamy

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 = m_2 l (\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi).$$

Z kolei mnożąc równanie (3) przez $\cos \varphi$ a równanie (4) przez $\sin \varphi$ i dodając tak uzyskane równania stronami otrzymamy

$$\ddot{x}_1 \cos \varphi + l \ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0.$$

Koniec przykładu 4.

Równania (1) – (6) można już, przynajmniej z zasady, jednoznacznie rozwiązać.

Dodając stronami równania (1) i (3), a następnie korzystając z (5) otrzymamy

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 = m_2 l (\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi).$$

Z kolei mnożąc równanie (3) przez $\cos \varphi$ a równanie (4) przez $\sin \varphi$ i dodając tak uzyskane równania stronami otrzymamy

$$\ddot{x}_1 \cos \varphi + l \ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0.$$

Koniec przykładu 4.

Zadanie 5. Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 &= m_2 l \left(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi \right), \\ \ddot{x}_1 \cos \varphi + l \ddot{\varphi} + g \sin \varphi &= 0\end{aligned}$$

w przybliżeniu małych wahań. Założyć warunki początkowe postaci

$$x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0.$$

Rozwiązanie. W przybliżeniu małych wahań zachodzą przybliżone związki $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$, $\varphi \dot{\varphi}^2 \approx 0$ i nasz układ równań ma postać:

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 &= -m_2 l \ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \ddot{\varphi} \\ \ddot{x}_1 + l \ddot{\varphi} + g \varphi &= 0.\end{aligned}$$

Zadanie 5. Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 &= m_2 l \left(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi \right), \\ \ddot{x}_1 \cos \varphi + l \ddot{\varphi} + g \sin \varphi &= 0\end{aligned}$$

w przybliżeniu małych wahań. Założyć warunki początkowe postaci

$$x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0.$$

Rozwiązanie. W przybliżeniu małych wahań zachodzą przybliżone związki $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$, $\varphi \dot{\varphi}^2 \approx 0$ i nasz układ równań ma postać:

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 &= -m_2 l \ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \ddot{\varphi} \\ \ddot{x}_1 + l \ddot{\varphi} + g \varphi &= 0.\end{aligned}$$

Wstawmy $\ddot{x}_1$ do drugiego równania

$$-\frac{m_2}{m_1 + m_2}l\ddot{\varphi} + l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0.$$

Uporządkujmy

$$\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0 \Rightarrow \frac{m_1}{m_1 + m_2}l\ddot{\varphi} = -g\varphi,$$

Skąd

$$\ddot{\varphi} = -\frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l} \varphi.$$

Wstawmy $\ddot{x}_1$ do drugiego równania

$$-\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \ddot{\varphi} + l \ddot{\varphi} + g \varphi = 0.$$

Uporządkujmy

$$\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) l \ddot{\varphi} + g \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \ddot{\varphi} = -g \varphi,$$

Skąd

$$\ddot{\varphi} = -\frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l} \varphi.$$

Oznaczmy

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l}}$$

Wówczas drugie równanie przyjmie postać

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi.$$

Oznaczmy

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l}}$$

Wówczas drugie równanie przyjmie postać

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi.$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego,

Oznaczmy

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l}}$$

Wówczas drugie równanie przyjmie postać

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi.$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego, którego rozwiązanie ogólne ma postać

$$\varphi(t) = A \cos(\omega t + \alpha).$$

Oznaczmy

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l}}$$

Wówczas drugie równanie przyjmie postać

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi.$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego, którego rozwiązanie ogólne ma postać

$$\varphi(t) = A \cos(\omega t + \alpha).$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Stałe dowolne A i α wyznaczymy z warunków początkowych $\varphi(0) = \varphi_0$ i $\dot{\varphi}(0) = 0$.

W tym celu obliczmy najpierw

$$\dot{\varphi}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \alpha)$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Stałe dowolne A i α wyznaczymy z warunków początkowych $\varphi(0) = \varphi_0$ i $\dot{\varphi}(0) = 0$.

W tym celu obliczmy najpierw

$$\dot{\varphi}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \alpha)$$

i wstawmy $t = 0$ do wzorów na $\varphi(t)$ i $\dot{\varphi}(t)$

$$\begin{cases} \varphi(t) = A \cos(\omega t + \alpha), \\ \dot{\varphi}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(0) = A \cos \alpha = \varphi_0, \\ \dot{\varphi}(0) = -\omega A \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Stałe dowolne A i α wyznaczymy z warunków początkowych $\varphi(0) = \varphi_0$ i $\dot{\varphi}(0) = 0$.

W tym celu obliczmy najpierw

$$\dot{\varphi}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \alpha)$$

i wstawmy $t = 0$ do wzorów na $\varphi(t)$ i $\dot{\varphi}(t)$

$$\begin{cases} \varphi(t) = A \cos(\omega t + \alpha), \\ \dot{\varphi}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(0) = A \cos \alpha = \varphi_0, \\ \dot{\varphi}(0) = -\omega A \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Najprostszym, fizycznym rozwiązaniem tego układu równań jest $A = \varphi_0$ i $\alpha = 0$.

Równania ruchu dla układów z więzami

Stałe dowolne A i α wyznaczmy z warunków początkowych $\varphi(0) = \varphi_0$ i $\dot{\varphi}(0) = 0$.

W tym celu obliczmy najpierw

$$\dot{\varphi}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \alpha)$$

i wstawmy $t = 0$ do wzorów na $\varphi(t)$ i $\dot{\varphi}(t)$

$$\begin{cases} \varphi(t) = A \cos(\omega t + \alpha), \\ \dot{\varphi}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(0) = A \cos \alpha = \varphi_0, \\ \dot{\varphi}(0) = -\omega A \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Najprostszym, fizycznym rozwiązaniem tego układu równań jest $A = \varphi_0$ i $\alpha = 0$. W takim razie rozwiązanie dla zmiennej kątowej ma postać

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega t.$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Stałe dowolne A i α wyznaczymy z warunków początkowych $\varphi(0) = \varphi_0$ i $\dot{\varphi}(0) = 0$.

W tym celu obliczmy najpierw

$$\dot{\varphi}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \alpha)$$

i wstawmy $t = 0$ do wzorów na $\varphi(t)$ i $\dot{\varphi}(t)$

$$\begin{cases} \varphi(t) = A \cos(\omega t + \alpha), \\ \dot{\varphi}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(0) = A \cos \alpha = \varphi_0, \\ \dot{\varphi}(0) = -\omega A \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Najprostszym, fizycznym rozwiązaniem tego układu równań jest $A = \varphi_0$ i $\alpha = 0$. W takim razie rozwiązanie dla zmiennej kątowej ma postać

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega t.$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Wstawmy to rozwiązanie do wzoru na $\ddot{x}_1(t)$

$$\ddot{x}_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \ddot{\varphi} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \left(-\omega^2 \varphi_0 \cos \omega t \right) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \cos \omega t.$$

Scałkujemy obustronnie równanie

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \cos \omega t.$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Wstawmy to rozwiązanie do wzoru na $\ddot{x}_1(t)$

$$\ddot{x}_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \ddot{\varphi} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \left(-\omega^2 \varphi_0 \cos \omega t \right) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \cos \omega t.$$

Scałkujmy obustronnie równanie

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \cos \omega t.$$

$$\int_0^t \ddot{x}_1(\tau) d\tau =$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Wstawmy to rozwiązanie do wzoru na $\ddot{x}_1(t)$

$$\ddot{x}_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}l\ddot{\varphi} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}l\left(-\omega^2\varphi_0\cos\omega t\right) = \frac{m_2}{m_1}g\varphi_0\cos\omega t.$$

Scałkujmy obustronnie równanie

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{m_2}{m_1}g\varphi_0\cos\omega t.$$

$$\int_0^t \ddot{x}_1(\tau)d\tau = \dot{x}_1(\tau)\Big|_0^t = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_1(0) =$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Wstawmy to rozwiązanie do wzoru na $\ddot{x}_1(t)$

$$\ddot{x}_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}l\ddot{\varphi} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}l\left(-\omega^2\varphi_0\cos\omega t\right) = \frac{m_2}{m_1}g\varphi_0\cos\omega t.$$

Scałkujemy obustronnie równanie

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{m_2}{m_1}g\varphi_0\cos\omega t.$$

$$\int_0^t \ddot{x}_1(\tau)d\tau = \dot{x}_1(\tau)\Big|_0^t = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_1(0) = \frac{m_2}{m_1}g\varphi_0 \int_0^t \cos\omega\tau d\tau$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Wstawmy to rozwiązanie do wzoru na $\ddot{x}_1(t)$

$$\ddot{x}_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \ddot{\varphi} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \left(-\omega^2 \varphi_0 \cos \omega t \right) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \cos \omega t.$$

Scałkujmy obustronnie równanie

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \cos \omega t.$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \ddot{x}_1(\tau) d\tau &= \dot{x}_1(\tau) \Big|_0^t = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_1(0) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \int_0^t \cos \omega \tau d\tau \\ &= \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \frac{1}{\omega} \sin \omega \tau \Big|_0^t = \end{aligned}$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Wstawmy to rozwiązanie do wzoru na $\ddot{x}_1(t)$

$$\ddot{x}_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \ddot{\varphi} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \left(-\omega^2 \varphi_0 \cos \omega t \right) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \cos \omega t.$$

Scałkujmy obustronnie równanie

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \cos \omega t.$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \ddot{x}_1(\tau) d\tau &= \dot{x}_1(\tau) \Big|_0^t = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_1(0) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \int_0^t \cos \omega \tau d\tau \\ &= \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \frac{1}{\omega} \sin \omega \tau \Big|_0^t = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \frac{1}{\omega} \sin \omega t. \end{aligned}$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Wstawmy to rozwiązanie do wzoru na $\ddot{x}_1(t)$

$$\ddot{x}_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \ddot{\varphi} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \left(-\omega^2 \varphi_0 \cos \omega t \right) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \cos \omega t.$$

Scałkujmy obustronnie równanie

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \cos \omega t.$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \ddot{x}_1(\tau) d\tau &= \dot{x}_1(\tau) \Big|_0^t = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_1(0) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \int_0^t \cos \omega \tau d\tau \\ &= \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \frac{1}{\omega} \sin \omega \tau \Big|_0^t = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \frac{1}{\omega} \sin \omega t. \end{aligned}$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Scałkujmy ponownie równanie

$$\dot{x}_1(t) = \frac{m_2}{m_1} \frac{g\varphi_0}{\omega} \sin \omega t.$$

$$\int_0^t \dot{x}_1(\tau) d\tau = x_1(\tau) \Big|_0^t = x_1(t) - x_1(0) = x_1(t)$$

=

Równania ruchu dla układów z więzami

Scałkujmy ponownie równanie

$$\dot{x}_1(t) = \frac{m_2}{m_1} \frac{g\varphi_0}{\omega} \sin \omega t.$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{x}_1(\tau) d\tau &= x_1(\tau) \Big|_0^t = x_1(t) - x_1(0) = x_1(t) \\ &= \frac{m_2}{m_1} \frac{g\varphi_0}{\omega} \int_0^t \sin \omega \tau d\tau \\ &= \frac{m_2}{m_1} \frac{g\varphi_0}{\omega} \left(-\frac{1}{\omega} \cos \omega \tau \right) \Big|_0^t = -\frac{m_2}{m_1} g\varphi_0 \frac{1}{\omega^2} (\cos \omega t - 1) \\ &= \frac{m_2}{m_1} g\varphi_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{l}{g} (1 - \cos \omega t) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \varphi_0 (1 - \cos \omega t). \end{aligned}$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Scałkujmy ponownie równanie

$$\dot{x}_1(t) = \frac{m_2}{m_1} \frac{g\varphi_0}{\omega} \sin \omega t.$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{x}_1(\tau) d\tau &= x_1(\tau) \Big|_0^t = x_1(t) - x_1(0) = x_1(t) \\ &= \frac{m_2}{m_1} \frac{g\varphi_0}{\omega} \int_0^t \sin \omega \tau d\tau \\ &= \frac{m_2}{m_1} \frac{g\varphi_0}{\omega} \left(-\frac{1}{\omega} \cos \omega \tau \right) \Big|_0^t = -\frac{m_2}{m_1} g\varphi_0 \frac{1}{\omega^2} (\cos \omega t - 1) \\ &= \frac{m_2}{m_1} g\varphi_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{l}{g} (1 - \cos \omega t) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \varphi_0 (1 - \cos \omega t). \end{aligned}$$

Odpowiedź. Rozwiązanie spełniające warunki zadania ma postać

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega t, \quad x_1(t) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \varphi_0 (1 - \cos \omega t),$$

gdzie

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l}}.$$

Podsumowanie

- Układy fizyczne z więzami holonomicznymi można rozwiązywać przy użyciu równań Newtona.
- Wymaga to jednak wprowadzenia do równań ruchu sił reakcji więzów, które następnie eliminuje się poprzez analizę geometryczną więzów.
- Równań Newtona nie można rozwiązać jednoznacznie bez dodatkowych założeń co do natury sił reakcji więzów.

W dalszym ciągu kursu mechaniki poznamy formalizm, w którym nie ma potrzeby wprowadzania sił reakcji więzów.

Podsumowanie

- Układy fizyczne z więzami holonomicznymi można rozwiązywać przy użyciu równań Newtona.
- Wymaga to jednak wprowadzenia do równań ruchu sił reakcji więzów, które następnie eliminuje się poprzez analizę geometryczną więzów.
- Równań Newtona nie można rozwiązać jednoznacznie bez dodatkowych założeń co do natury sił reakcji więzów.

W dalszym ciągu kursu mechaniki poznamy formalizm, w którym nie ma potrzeby wprowadzania sił reakcji więzów.