

Mechanika relatywistyczna

Wykład 15

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

Wszystkie obiekty, które przy transformacji Lorentza transformują się tak jak

- kontrawariantny czterowektor położenia $x^\mu = (ct, \vec{x})$, tzn.

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu,$$

nazywamy czterowektorami kontrawariantnymi.

- kowariantny czterowektor położenia $x_\mu = (ct, -\vec{x})$, tzn.

$$x'_\mu = x_\nu \Lambda^{-1\nu}_\mu = x_\nu \Lambda^{T\nu}_\mu,$$

nazywamy czterowektorami kowariantnymi.

Wzory transformacyjne dla wektora prędkości były skomplikowane, gdyż w jego definicji

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

występują zarówno składowe przestrzenne, jak i składowa czasowa czterowektora położenia $x^\mu = (ct, \vec{x})$.

Wzory transformacyjne dla wektora prędkości były skomplikowane, gdyż w jego definicji

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

występują zarówno składowe przestrzenne, jak i składowa czasowa czterowektora położenia $x^\mu = (ct, \vec{x})$.

Zdefiniujemy czterowektor prędkości

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt_0},$$

gdzie t_0 jest **czasem własnym**, mierzonym w układzie spoczynkowym cząstki.

Wzory transformacyjne dla wektora prędkości były skomplikowane, gdyż w jego definicji

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

występują zarówno składowe przestrzenne, jak i składowa czasowa czterowektora położenia $x^\mu = (ct, \vec{x})$.
Zdefiniujemy czterowektor prędkości

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt_0},$$

gdzie t_0 jest **czasem własnym**, mierzonym w układzie spoczynkowym cząstki.

Czas w układzie, w którym cząstka porusza się z prędkością $\vec{v}$, wiąże się z czasem własnym wzorem

$$dt = \gamma dt_0 \Rightarrow \frac{d}{dt_0} = \frac{dt}{dt_0} \frac{d}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}$$

i kontrawariantny czterowektor prędkości przybiera postać

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt_0} = \gamma \frac{d}{dt} (ct, \vec{x}) = \gamma \left(\frac{d(ct)}{dt}, \frac{d\vec{x}}{dt} \right) = \gamma (c, \vec{v}).$$

Czas w układzie, w którym cząstka porusza się z prędkością $\vec{v}$, wiąże się z czasem własnym wzorem

$$dt = \gamma dt_0 \Rightarrow \frac{d}{dt_0} = \frac{dt}{dt_0} \frac{d}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}$$

i kontrawariantny czterowektor prędkości przybiera postać

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt_0} = \gamma \frac{d}{dt} (ct, \vec{x}) = \gamma \left(\frac{d(ct)}{dt}, \frac{d\vec{x}}{dt} \right) = \gamma (c, \vec{v}).$$

Zdefiniujmy kontrawariantny czterowektor pędu

$$p^\mu = mu^\mu = m\gamma (c, \vec{v}).$$

Czas w układzie, w którym cząstka porusza się z prędkością $\vec{v}$, wiąże się z czasem własnym wzorem

$$dt = \gamma dt_0 \Rightarrow \frac{d}{dt_0} = \frac{dt}{dt_0} \frac{d}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}$$

i kontrawariantny czterowektor prędkości przybiera postać

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt_0} = \gamma \frac{d}{dt} (ct, \vec{x}) = \gamma \left(\frac{d(ct)}{dt}, \frac{d\vec{x}}{dt} \right) = \gamma (c, \vec{v}).$$

Zdefiniujmy kontrawariantny czterowektor pędu

$$p^\mu = mu^\mu = m\gamma (c, \vec{v}).$$

Ponieważ czynnik Lorentza γ jest bezwymiarowy, to widzimy, że relatywistyczny pęd ciała o masie m należałoby zdefiniować jako

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v},$$

a relatywistyczną energię jako

$$E = \gamma mc^2.$$

Czterowektor energii–pędu

Ponieważ czynnik Lorentza γ jest bezwymiarowy, to widzimy, że relatywistyczny pęd ciała o masie m należałoby zdefiniować jako

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v},$$

a relatywistyczną energię jako

$$E = \gamma mc^2.$$

Zatem czterowektor energii–pędu możemy zapisać w formie

$$p^\mu = (m\gamma c, m\gamma \vec{v}) = (E/c, \vec{p}).$$

Ponieważ czynnik Lorentza γ jest bezwymiarowy, to widzimy, że relatywistyczny pęd ciała o masie m należałoby zdefiniować jako

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v},$$

a relatywistyczną energię jako

$$E = \gamma mc^2.$$

Zatem czterowektor energii–pędu możemy zapisać w formie

$$p^\mu = (m\gamma c, m\gamma \vec{v}) = (E/c, \vec{p}).$$

Zauważmy, że energia ciała o masie m ,

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

w układzie spoczynkowym, gdzie $\vec{v} = \vec{0}$, jest niezerowa i wynosi

$$E_0 = mc^2.$$

Tak właśnie powinien wyglądać słynny wzór Einsteina, w którym często zapomina się albo czynnika γ , albo indeksu 0.

Zauważmy, że energia ciała o masie m ,

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

w układzie spoczynkowym, gdzie $\vec{v} = \vec{0}$, jest niezerowa i wynosi

$$E_0 = mc^2.$$

Tak właśnie powinien wyglądać słynny wzór Einsteina, w którym często zapomina się albo czynnika γ , albo indeksu 0.

Relatywistyczna energia i pęd

Znajdźmy przybliżenie nierelatywistyczne wzoru na energię ciała

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Jeżeli $|\vec{v}| \ll c \Rightarrow x = \frac{v^2}{c^2} \ll 1$ i możemy zastosować przybliżenia

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x} \approx 1 + \frac{1}{2}x,$$

Znajdźmy przybliżenie nierelatywistyczne wzoru na energię ciała

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Jeżeli $|\vec{v}| \ll c \Rightarrow x = \frac{v^2}{c^2} \ll 1$ i możemy zastosować przybliżenia

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx \frac{1}{1-\frac{1}{2}x} \approx 1 + \frac{1}{2}x,$$

które wynikają z następujących przybliżonych równości

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 &= 1 - x + \frac{1}{4}x^2 \approx 1 - x, \\ \left(1 + \frac{1}{2}x\right)\left(1 - \frac{1}{2}x\right) &= 1 - \frac{1}{4}x^2 \approx 1.\end{aligned}$$

Znajdźmy przybliżenie nierelatywistyczne wzoru na energię ciała

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Jeżeli $|\vec{v}| \ll c \Rightarrow x = \frac{v^2}{c^2} \ll 1$ i możemy zastosować przybliżenia

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx \frac{1}{1-\frac{1}{2}x} \approx 1 + \frac{1}{2}x,$$

które wynikają z następujących przybliżonych równości

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 &= 1 - x + \frac{1}{4}x^2 \approx 1 - x, \\ \left(1 + \frac{1}{2}x\right)\left(1 - \frac{1}{2}x\right) &= 1 - \frac{1}{4}x^2 \approx 1.\end{aligned}$$

Wtedy

$$E \approx mc^2 \left(1 + \frac{\vec{v}^2}{2c^2} \right) = mc^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = E_0 + T.$$

Dla pędu w przybliżeniu nierelatywistycznym otrzymamy natomiast

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v} \approx m\vec{v} \left(1 + \frac{\vec{v}^2}{2c^2} \right) \approx m\vec{v}.$$

Wtedy

$$E \approx mc^2 \left(1 + \frac{\vec{v}^2}{2c^2} \right) = mc^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = E_0 + T.$$

Dla pędu w przybliżeniu nierelatywistycznym otrzymamy natomiast

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v} \approx m\vec{v} \left(1 + \frac{\vec{v}^2}{2c^2} \right) \approx m\vec{v}.$$

Obliczmy kwadrat normy czteropędu

$$\begin{aligned}\|p\|^2 &= p \cdot p = E^2/c^2 - \vec{p}^2 = \gamma^2 m^2 c^2 - \gamma^2 m^2 \vec{v}^2 \\ &= m^2 c^2 \gamma^2 \left(1 - \vec{v}^2/c^2\right) = m^2 c^2.\end{aligned}$$

Wzór ten często pisze się w formie

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4.$$

Jest to oczywiście niezmiennik relatywistyczny.

Obliczmy kwadrat normy czteropędu

$$\begin{aligned}\|p\|^2 &= p \cdot p = E^2/c^2 - \vec{p}^2 = \gamma^2 m^2 c^2 - \gamma^2 m^2 \vec{v}^2 \\ &= m^2 c^2 \gamma^2 \left(1 - \vec{v}^2/c^2\right) = m^2 c^2.\end{aligned}$$

Wzór ten często pisze się w formie

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4.$$

Jest to oczywiście **niezmiennik relatywistyczny**.

Zatem, w dowolnym układzie odniesienia, energia wiąże się z pędem wzorem

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4},$$

gdzie odrzuciliśmy drugie, ujemne rozwiązanie.

Obliczmy kwadrat normy czteropędu

$$\begin{aligned}\|p\|^2 &= p \cdot p = E^2/c^2 - \vec{p}^2 = \gamma^2 m^2 c^2 - \gamma^2 m^2 \vec{v}^2 \\ &= m^2 c^2 \gamma^2 \left(1 - \vec{v}^2/c^2\right) = m^2 c^2.\end{aligned}$$

Wzór ten często pisze się w formie

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4.$$

Jest to oczywiście **niezmiennik relatywistyczny**.

Zatem, w dowolnym układzie odniesienia, energia wiąże się z pędem wzorem

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4},$$

gdzie odrzuciliśmy drugie, ujemne rozwiązanie.

Zasada zachowania energii–pędu

Podobnie jak zrobiliśmy to w przypadku nierelatywistycznym, można pokazać, że **symetria układu fizycznego**, a więc niezmienniczość funkcji Lagrange'a, **względem translacji**

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu, \quad a^\mu = \text{const.}$$

proceedzi do **zasady zachowania czteropędu** układu.

Ponieważ w czasoprzestrzeni Minkowskiego czas traktujemy na podobnych zasadach jak współrzędne przestrzenne, to dowodu zasady zachowania energii nie trzeba przeprowadzać osobno.

Zasada zachowania energii–pędu

Podobnie jak zrobiliśmy to w przypadku nierelatywistycznym, można pokazać, że **symetria układu fizycznego**, a więc niezmienniczość funkcji Lagrange'a, **względem translacji**

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu, \quad a^\mu = \text{const.}$$

proceedzi do **zasady zachowania czteropędu** układu.

Ponieważ w czasoprzestrzeni Minkowskiego czas traktujemy na podobnych zasadach jak współrzędne przestrzenne, to dowodu zasady zachowania energii nie trzeba przeprowadzać osobno.

Wynika ona z zasady zachowania czteropędu

$$\sum_i p_i^\mu = \sum_i (E_i/c, \vec{p}_i) = \text{const} \Leftrightarrow \sum_i E_i = \text{const} \quad \text{ i } \quad \sum_i \vec{p}_i = \text{const.}$$

Zasada zachowania energii–pędu

Podobnie jak zrobiliśmy to w przypadku nierelatywistycznym, można pokazać, że **symetria układu fizycznego**, a więc niezmienniczość funkcji Lagrange'a, **względem translacji**

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu, \quad a^\mu = \text{const.}$$

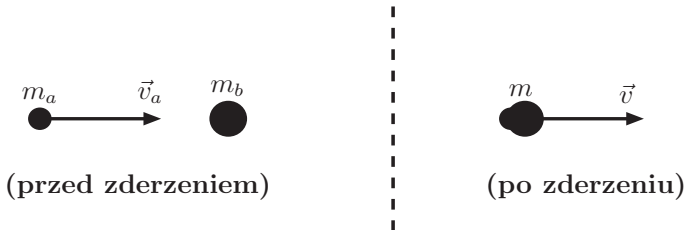
proceedzi do **zasady zachowania czteropędu** układu.

Ponieważ w czasoprzestrzeni Minkowskiego czas traktujemy na podobnych zasadach jak współrzędne przestrzenne, to dowodu zasady zachowania energii nie trzeba przeprowadzać osobno.

Wynika ona z zasady zachowania czteropędu

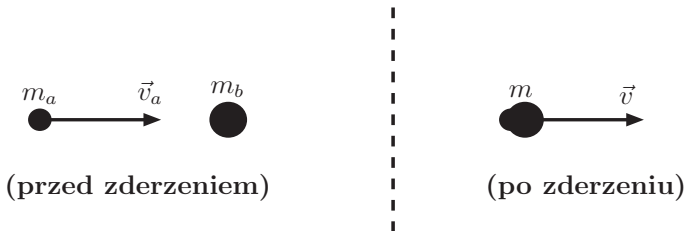
$$\sum_i p_i^\mu = \sum_i (E_i/c, \vec{p}_i) = \text{const} \Leftrightarrow \sum_i E_i = \text{const} \quad \text{ i } \quad \sum_i \vec{p}_i = \text{const.}$$

Przykład 1. Relatywistyczna kulka z plasteliny o masie m_a i prędkości $\vec{v}_a$ zderza się ze spoczywającą kulką o masie m_b . Obie kulki sklejają się tworząc jedną kulkę. Jaka jest masa m i prędkość $\vec{v}$ kulki utworzonej w wyniku zderzenia?



Zasada zachowania energii–pędu

Przykład 1. Relatywistyczna kulka z plasteliny o masie m_a i prędkości $\vec{v}_a$ zderza się ze spoczywającą kulką o masie m_b . Obie kulki sklejają się tworząc jedną kulkę. Jaka jest masa m i prędkość $\vec{v}$ kulki utworzonej w wyniku zderzenia?



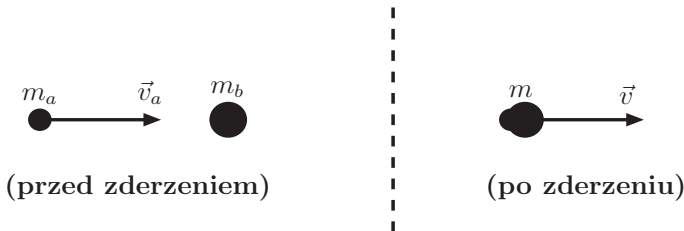
Zasada zachowania czteropędu daje

$$p_a + p_b = p,$$

gdzie p_a, p_b – czteropędy **przed**, a p – czteropęd **po** zderzeniu.

Zasada zachowania energii–pędu

Przykład 1. Relatywistyczna kulka z plasteliny o masie m_a i prędkości $\vec{v}_a$ zderza się ze spoczywającą kulką o masie m_b . Obie kulki sklejają się tworząc jedną kulkę. Jaka jest masa m i prędkość $\vec{v}$ kulki utworzonej w wyniku zderzenia?



Zasada zachowania czteropędu daje

$$p_a + p_b = p,$$

gdzie p_a, p_b – czteropędy **przed**, a p – czteropęd **po** zderzeniu.

Zasada zachowania energii-pędu

$$p_a = \left(\frac{E_a}{c}, \vec{p}_a \right) = \gamma_a m_a (c, \vec{v}_a), \quad p_b = (m_b c, \vec{0}).$$

$$(p_a + p_b)^2 = p^2 = m^2 c^2 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{c^2} (p_a + p_b)^2$$

$$m^2 = \frac{1}{c^2} (p_a^2 + p_b^2 + 2p_a \cdot p_b) = \frac{1}{c^2} (m_a^2 c^2 + m_b^2 c^2 + 2p_a \cdot p_b)$$

Zasada zachowania energii-pędu

$$p_a = \left(\frac{E_a}{c}, \vec{p}_a \right) = \gamma_a m_a (c, \vec{v}_a), \quad p_b = (m_b c, \vec{0}).$$

$$(p_a + p_b)^2 = p^2 = m^2 c^2 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{c^2} (p_a + p_b)^2$$

$$m^2 = \frac{1}{c^2} (p_a^2 + p_b^2 + 2p_a \cdot p_b) = \frac{1}{c^2} (m_a^2 c^2 + m_b^2 c^2 + 2p_a \cdot p_b)$$

$$p_a \cdot p_b = \frac{E_a}{c} m_b c - \vec{p}_a \cdot \vec{0} = E_a m_b \Rightarrow m^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2 \frac{E_a m_b}{c^2}$$

Zasada zachowania energii-pędu

$$p_a = \left(\frac{E_a}{c}, \vec{p}_a \right) = \gamma_a m_a (c, \vec{v}_a), \quad p_b = (m_b c, \vec{0}).$$

$$(p_a + p_b)^2 = p^2 = m^2 c^2 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{c^2} (p_a + p_b)^2$$

$$m^2 = \frac{1}{c^2} (p_a^2 + p_b^2 + 2p_a \cdot p_b) = \frac{1}{c^2} (m_a^2 c^2 + m_b^2 c^2 + 2p_a \cdot p_b)$$

$$p_a \cdot p_b = \frac{E_a}{c} m_b c - \vec{p}_a \cdot \vec{0} = E_a m_b \Rightarrow m^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2 \frac{E_a m_b}{c^2}$$

$$m = \sqrt{m_a^2 + m_b^2 + 2\gamma_a m_a m_b}, \quad \text{gdzie} \quad \gamma_a = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}_a^2/c^2}}.$$

$$p_a = \left(\frac{E_a}{c}, \vec{p}_a \right) = \gamma_a m_a (c, \vec{v}_a), \quad p_b = (m_b c, \vec{0}).$$

$$(p_a + p_b)^2 = p^2 = m^2 c^2 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{c^2} (p_a + p_b)^2$$

$$m^2 = \frac{1}{c^2} (p_a^2 + p_b^2 + 2p_a \cdot p_b) = \frac{1}{c^2} (m_a^2 c^2 + m_b^2 c^2 + 2p_a \cdot p_b)$$

$$p_a \cdot p_b = \frac{E_a}{c} m_b c - \vec{p}_a \cdot \vec{0} = E_a m_b \Rightarrow m^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2 \frac{E_a m_b}{c^2}$$

$$m = \sqrt{m_a^2 + m_b^2 + 2\gamma_a m_a m_b}, \quad \text{gdzie} \quad \gamma_a = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}_a^2/c^2}}.$$

Zasada zachowania energii–pędu

Znajdźmy końcową prędkość. Ze wzorów na energię i pęd

$$E = \gamma mc^2, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{E}.$$

Zasada zachowania energii–pędu

Znajdźmy końcową prędkość. Ze wzorów na energię i pęd

$$E = \gamma mc^2, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{E}.$$

Z zasady zachowania czteropędu

$$E = E_a + m_b c^2, \quad \vec{p} = \vec{p}_a = \gamma_a m_a \vec{v}_a \quad \Rightarrow$$

$$\vec{v} = \frac{\gamma_a m_a \vec{v}_a c^2}{E_a + m_b c^2} = \frac{\gamma_a m_a \vec{v}_a c^2}{\gamma_a m_a c^2 + m_b c^2} = \frac{\gamma_a m_a}{\gamma_a m_a + m_b} \vec{v}_a.$$

Zasada zachowania energii–pędu

Znajdźmy końcową prędkość. Ze wzorów na energię i pęd

$$E = \gamma mc^2, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{E}.$$

Z zasady zachowania czteropędu

$$E = E_a + m_b c^2, \quad \vec{p} = \vec{p}_a = \gamma_a m_a \vec{v}_a \quad \Rightarrow$$

$$\vec{v} = \frac{\gamma_a m_a \vec{v}_a c^2}{E_a + m_b c^2} = \frac{\gamma_a m_a \vec{v}_a c^2}{\gamma_a m_a c^2 + m_b c^2} = \frac{\gamma_a m_a}{\gamma_a m_a + m_b} \vec{v}_a.$$

W granicy nierelatywistycznej

$$|\vec{v}_a| \ll c \Rightarrow \gamma_a = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}_a^2/c^2}} \rightarrow 1,$$

więc

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{\gamma_a m_a}{\gamma_a m_a + m_b} \vec{v}_a \rightarrow \frac{m_a}{m_a + m_b} \vec{v}_a, \\ m &= \sqrt{m_a^2 + m_b^2 + 2\gamma_a m_a m_b} \rightarrow m_a + m_b.\end{aligned}$$

W granicy nierelatywistycznej

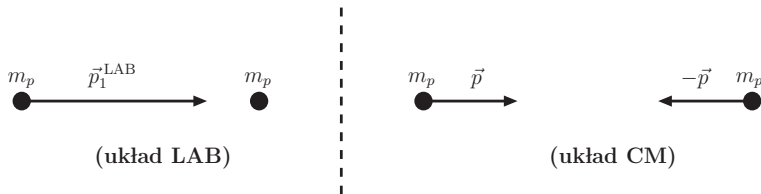
$$|\vec{v}_a| \ll c \Rightarrow \gamma_a = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}_a^2/c^2}} \rightarrow 1,$$

więc

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{\gamma_a m_a}{\gamma_a m_a + m_b} \vec{v}_a \rightarrow \frac{m_a}{m_a + m_b} \vec{v}_a, \\ m &= \sqrt{m_a^2 + m_b^2 + 2\gamma_a m_a m_b} \rightarrow m_a + m_b.\end{aligned}$$

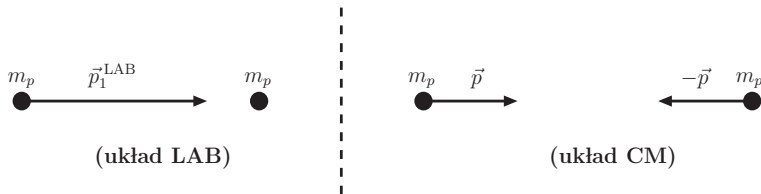
Układ środka masy

Wiązka protonów zderza się z protonami tarczy. Jaki jest związek pomiędzy energią całkowitą dwóch zderzających się protonów w układzie laboratoryjnym (LAB), w którym tarcza spoczywa, z ich energią całkowitą w układzie środka masy (CM), w którym $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$?



Układ środka masy

Wiązka protonów zderza się z protonami tarczy. Jaki jest związek pomiędzy energią całkowitą dwóch zderzających się protonów w układzie laboratoryjnym (LAB), w którym tarcza spoczywa, z ich energią całkowitą w układzie środka masy (CM), w którym $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$?



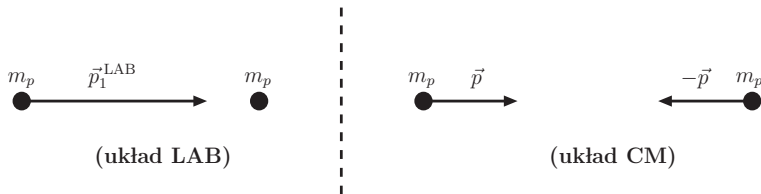
Porównajmy

$$\left(p_1^{\text{LAB}} + p_2^{\text{LAB}}\right)^2 = \left(p_1^{\text{CM}} + p_2^{\text{CM}}\right)^2.$$

Kwadrat czterowektora jest niezmiennikiem.

Układ środka masy

Wiązka protonów zderza się z protonami tarczy. Jaki jest związek pomiędzy energią całkowitą dwóch zderzających się protonów w układzie laboratoryjnym (LAB), w którym tarcza spoczywa, z ich energią całkowitą w układzie środka masy (CM), w którym $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$?



Porównajmy

$$\left(p_1^{\text{LAB}} + p_2^{\text{LAB}}\right)^2 = \left(p_1^{\text{CM}} + p_2^{\text{CM}}\right)^2.$$

Kwadrat czterowektora jest niezmiennikiem.

Stąd

$$\frac{(E_1^{\text{LAB}} + m_p c^2)^2}{c^2} - (\vec{p}_1^{\text{LAB}} + \vec{0})^2 = \frac{(E_1^{\text{CM}} + E_2^{\text{CM}})^2}{c^2} - \vec{0}^2,$$

Pomnóżmy obie strony tego równania przez c^2 i zauważmy, że

$$E_1^{\text{CM}} + E_2^{\text{CM}} = E^{\text{CM}},$$

gdzie E^{CM} jest całkowitą energią w układzie środka masy, wówczas dostaniemy

Stąd

$$\frac{(E_1^{\text{LAB}} + m_p c^2)^2}{c^2} - (\vec{p}_1^{\text{LAB}} + \vec{0})^2 = \frac{(E_1^{\text{CM}} + E_2^{\text{CM}})^2}{c^2} - \vec{0}^2,$$

Pomnóżmy obie strony tego równania przez c^2 i zauważmy, że

$$E_1^{\text{CM}} + E_2^{\text{CM}} = E^{\text{CM}},$$

gdzie E^{CM} jest całkowitą energią w układzie środka masy, wówczas dostaniemy

$$\underbrace{(E_1^{\text{LAB}})^2 - (\vec{p}_1^{\text{LAB}})^2 c^2}_{m_p^2 c^4} + m_p^2 c^4 + 2E_1^{\text{LAB}} m_p c^2 = (E^{\text{CM}})^2.$$

Stąd

$$\frac{(E_1^{\text{LAB}} + m_p c^2)^2}{c^2} - (\vec{p}_1^{\text{LAB}} + \vec{0})^2 = \frac{(E_1^{\text{CM}} + E_2^{\text{CM}})^2}{c^2} - \vec{0}^2,$$

Pomnóżmy obie strony tego równania przez c^2 i zauważmy, że

$$E_1^{\text{CM}} + E_2^{\text{CM}} = E^{\text{CM}},$$

gdzie E^{CM} jest całkowitą energią w układzie środka masy, wówczas dostaniemy

$$\underbrace{(E_1^{\text{LAB}})^2 - (\vec{p}_1^{\text{LAB}})^2 c^2}_{m_p^2 c^4} + m_p^2 c^4 + 2E_1^{\text{LAB}} m_p c^2 = (E^{\text{CM}})^2.$$

a zatem

$$2m_p c^2 \underbrace{\left(E_1^{\text{LAB}} + m_p c^2 \right)}_{E^{\text{LAB}}} = \left(E^{\text{CM}} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad E^{\text{LAB}} = \frac{\left(E^{\text{CM}} \right)^2}{2m_p c^2}.$$

Przykład 2. Jaka musi być całkowita energia protonów w układzie laboratoryjnym, aby energia całkowita w układzie środka masy wynosiła 20 GeV?

a zatem

$$2m_p c^2 \underbrace{\left(E_1^{\text{LAB}} + m_p c^2 \right)}_{E^{\text{LAB}}} = \left(E^{\text{CM}} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad E^{\text{LAB}} = \frac{\left(E^{\text{CM}} \right)^2}{2m_p c^2}.$$

Przykład 2. Jaka musi być całkowita energia protonów w układzie laboratoryjnym, aby energia całkowita w układzie środka masy wynosiła 20 GeV?

$$m_p = 938.27203 \pm 0.00008 \text{ MeV}/c^2 \quad \Rightarrow \quad m_p c^2 \approx 1 \text{ GeV}$$

$$E^{\text{LAB}} = \frac{\left(E^{\text{CM}} \right)^2}{2m_p c^2} \approx \frac{20^2}{2} \text{ GeV} = 200 \text{ GeV}.$$

a zatem

$$2m_p c^2 \underbrace{\left(E_1^{\text{LAB}} + m_p c^2 \right)}_{E^{\text{LAB}}} = \left(E^{\text{CM}} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad E^{\text{LAB}} = \frac{\left(E^{\text{CM}} \right)^2}{2m_p c^2}.$$

Przykład 2. Jaka musi być całkowita energia protonów w układzie laboratoryjnym, aby energia całkowita w układzie środka masy wynosiła 20 GeV?

$$m_p = 938.27203 \pm 0.00008 \text{ MeV}/c^2 \quad \Rightarrow \quad m_p c^2 \approx 1 \text{ GeV}$$

$$E^{\text{LAB}} = \frac{\left(E^{\text{CM}} \right)^2}{2m_p c^2} \approx \frac{20^2}{2} \text{ GeV} = 200 \text{ GeV}.$$

Dlatego buduje się akceleratory wiązek przeciwbieżnych, w których zderza się ze sobą wiązki cząstek biegnących naprzeciw siebie z takimi samymi pędami.

Dlatego buduje się akceleratory wiązek przeciwbieżnych, w których zderza się ze sobą wiązki cząstek biegnących naprzeciw siebie z takimi samymi pędami.

W akceleratorach wiązek przeciwbieżnych, jeżeli zderzane są cząstki punktowe o tej samej masie, jak np. elektron i pozyton, to układ laboratoryjny pokrywa się z układem środka masy, w którym sumaryczny pęd jest zerowy i cała energia może być wykorzystana na wygenerowanie masy (energii spoczynkowej) produktów reakcji.

Dlatego buduje się akceleratory wiązek przeciwbieżnych, w których zderza się ze sobą wiązki cząstek biegnących naprzeciw siebie z takimi samymi pędami.

W akceleratorach wiązek przeciwbieżnych, jeżeli zderzane są cząstki punktowe o tej samej masie, jak np. elektron i pozyton, to układ laboratoryjny pokrywa się z układem środka masy, w którym sumaryczny pęd jest zerowy i cała energia może być wykorzystana na wygenerowanie masy (energii spoczynkowej) produktów reakcji. Wielki Zderzacz Hadronów LHC w CERN-ie jest też tego rodzaju akceleratorem, ale zderzane w nim protony są cząstkami złożonymi. Ich składniki, tzw. partony, czyli kwarki i gluony, unoszą różne ułamki pędu macierzystych protonów, dlatego układ środka masy zderzających się partonów porusza się w układzie laboratoryjnym.

Dlatego buduje się akceleratory wiązek przeciwbieżnych, w których zderza się ze sobą wiązki cząstek biegnących naprzeciw siebie z takimi samymi pędami.

W akceleratorach wiązek przeciwbieżnych, jeżeli zderzane są cząstki punktowe o tej samej masie, jak np. elektron i pozyton, to układ laboratoryjny pokrywa się z układem środka masy, w którym sumaryczny pęd jest zerowy i cała energia może być wykorzystana na wygenerowanie masy (energii spoczynkowej) produktów reakcji. Wielki Zderzacz Hadronów LHC w CERN-ie jest też tego rodzaju akceleratorem, ale zderzane w nim protony są cząstkami złożonymi. Ich składniki, tzw. partony, czyli kwarki i gluony, unoszą różne ułamki pędu macierzystych protonów, dlatego układ środka masy zderzających się partonów porusza się w układzie laboratoryjnym.

Czteropęd cząstki bezmasowej

Zauważmy, że dla cząstki bezmasowej, (np. fotonu), $m = 0$,

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = 0 \Rightarrow E^2 = \vec{p}^2 c^2 \Rightarrow |\vec{p}| = \frac{E}{c}.$$

Cząstka bezmasowa o niezerowej energii ma relatywistyczny pęd,

Czteropęd cząstki bezmasowej

Zauważmy, że dla cząstki bezmasowej, (np. fotonu), $m = 0$,

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = 0 \Rightarrow E^2 = \vec{p}^2 c^2 \Rightarrow |\vec{p}| = \frac{E}{c}.$$

Cząstka bezmasowa o niezerowej energii ma relatywistyczny pęd, a jej czteropęd

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) = (|\vec{p}|, \vec{p})$$

jest czterowektorem o zerowej normie, gdyż

$$\|p^\mu\|^2 = p \cdot p = (p^0)^2 - (\vec{p})^2 = |\vec{p}|^2 - |\vec{p}|^2 = 0.$$

Czteropęd cząstki bezmasowej

Zauważmy, że dla cząstki bezmasowej, (np. fotonu), $m = 0$,

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = 0 \Rightarrow E^2 = \vec{p}^2 c^2 \Rightarrow |\vec{p}| = \frac{E}{c}.$$

Cząstka bezmasowa o niezerowej energii ma relatywistyczny pęd, a jej czteropęd

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) = (|\vec{p}|, \vec{p})$$

jest czterowektorem o zerowej normie, gdyż

$$\|p^\mu\|^2 = p \cdot p = (p^0)^2 - (\vec{p})^2 = |\vec{p}|^2 - |\vec{p}|^2 = 0.$$

Czterowektor falowy

Przypomnijmy postulat Einsteina (*dla światła*)

$$E = h\nu = \hbar\omega, \quad \text{gdzie} \quad \omega = 2\pi\nu, \quad \hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$$

i postulat de Broglie'go (*dla fotonu lub cząstki masowej*)

$$\vec{p} = \hbar\vec{k},$$

gdzie $\vec{k}$ – wektor falowy, który wiąże się z długością fali λ wzorem

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Czterowektor falowy

Przypomnijmy postulat Einsteina (*dla światła*)

$$E = h\nu = \hbar\omega, \quad \text{gdzie} \quad \omega = 2\pi\nu, \quad \hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$$

i postulat de Broglie'go (*dla fotonu lub cząstki masowej*)

$$\vec{p} = \hbar\vec{k},$$

gdzie $\vec{k}$ – wektor falowy, który wiąże się z długością fali λ wzorem

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Zdefiniujmy czterowektor falowy wzorem

$$p^\mu = \hbar k^\mu = \hbar \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right).$$

Czterowektor falowy

Przypomnijmy postulat Einsteina (*dla światła*)

$$E = h\nu = \hbar\omega, \quad \text{gdzie} \quad \omega = 2\pi\nu, \quad \hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$$

i postulat de Broglie'go (*dla fotonu lub cząstki masowej*)

$$\vec{p} = \hbar\vec{k},$$

gdzie $\vec{k}$ – wektor falowy, który wiąże się z długością fali λ wzorem

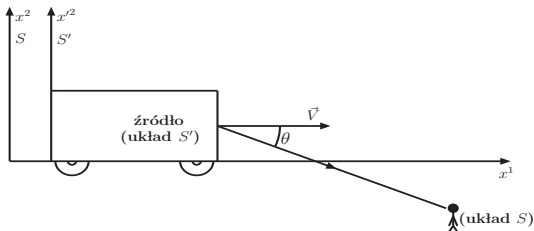
$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Zdefiniujmy czterowektor falowy wzorem

$$p^\mu = \hbar k^\mu = \hbar \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right).$$

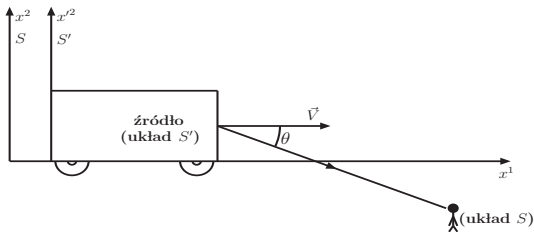
Efekt Dopplera dla światła

k^μ jest na pewno poprawnie zdefiniowanym czterowektorem.



Efekt Dopplera dla światła

k^μ jest na pewno poprawnie zdefiniowanym czterowektorem.

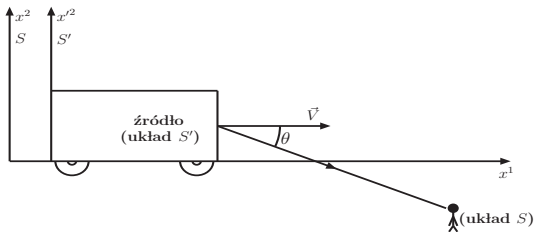


Prędkość względna układów S i S' $\vec{V} = (v, 0, 0)$, dlatego składowa k^0 transformuje się wg wzoru

$$k'^0 = \gamma (k^0 - \beta k^1), \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Efekt Dopplera dla światła

k^μ jest na pewno poprawnie zdefiniowanym czterowektorem.



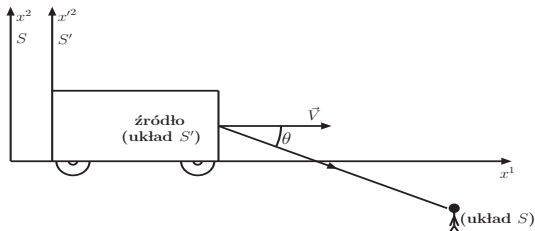
Prędkość względna układów S i S' $\vec{V} = (v, 0, 0)$, dlatego składowa k^0 transformuje się wg wzoru

$$k'^0 = \gamma (k^0 - \beta k^1), \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Podstawmy $k^0 = \frac{\omega}{c}$, $k^1 = |\vec{k}| \cos \theta = \frac{\omega}{c} \cos \theta$, $k'^0 = \frac{\omega'}{c}$.

Efekt Dopplera dla światła

k^μ jest na pewno poprawnie zdefiniowanym czterowektorem.



Prędkość względna układów S i S' $\vec{V} = (v, 0, 0)$, dlatego składowa k^0 transformuje się wg wzoru

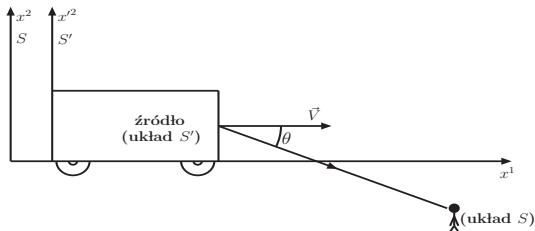
$$k'^0 = \gamma (k^0 - \beta k^1), \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Podstawmy $k^0 = \frac{\omega}{c}$, $k^1 = |\vec{k}| \cos \theta = \frac{\omega}{c} \cos \theta$, $k'^0 = \frac{\omega'}{c}$.

$$\Rightarrow \omega' = \gamma \omega (1 - \beta \cos \theta) \Rightarrow \omega = \frac{\omega'}{\gamma (1 - \beta \cos \theta)}.$$

Efekt Dopplera dla światła

k^μ jest na pewno poprawnie zdefiniowanym czterowektorem.



Prędkość względna układów S i S' $\vec{V} = (v, 0, 0)$, dlatego składowa k^0 transformuje się wg wzoru

$$k'^0 = \gamma (k^0 - \beta k^1), \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Podstawmy $k^0 = \frac{\omega}{c}$, $k^1 = |\vec{k}| \cos \theta = \frac{\omega}{c} \cos \theta$, $k'^0 = \frac{\omega'}{c}$.

$$\Rightarrow \omega' = \gamma \omega (1 - \beta \cos \theta) \Rightarrow \omega = \frac{\omega'}{\gamma (1 - \beta \cos \theta)}.$$

Ponieważ ω' jest częstotliwością światła mierzoną w układzie źródła, które porusza się względem obserwatora z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$, to oznaczmy $\omega' = \omega_0$. Wówczas

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)},$$

gdzie

ω – częstotliwość światła mierzona przez obserwatora,

θ – kąt pomiędzy wektorem prędkości źródła $\vec{V}$ a kierunkiem obserwacji światła.

Ponieważ ω' jest częstotliwością światła mierzoną w układzie źródła, które porusza się względem obserwatora z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$, to oznaczmy $\omega' = \omega_0$. Wówczas

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)},$$

gdzie

ω – częstotliwość światła mierzona przez obserwatora,

θ – kąt pomiędzy wektorem prędkości źródła $\vec{V}$ a kierunkiem obserwacji światła.

Efekt Dopplera dla światła

Jeżeli źródło porusza się w kierunku obserwatora znajdującego się na dodatniej półosi Ox , tzn. $\theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 1$, to

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1 - \beta)},$$

Efekt Dopplera dla światła

Jeżeli źródło porusza się w kierunku obserwatora znajdującego się na dodatniej półosi Ox , tzn. $\theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 1$, to

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1 - \beta)},$$

a uwzględniając, że

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta)(1 + \beta)}}$$

otrzymamy

Efekt Dopplera dla światła

Jeżeli źródło porusza się w kierunku obserwatora znajdującego się na dodatniej półosi Ox , tzn. $\theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 1$, to

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1 - \beta)},$$

a uwzględniając, że

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta)(1 + \beta)}}$$

otrzymamy

$$\omega = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \omega_0.$$

Efekt Dopplera dla światła

Jeżeli źródło porusza się w kierunku obserwatora znajdującego się na dodatniej półosi Ox , tzn. $\theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 1$, to

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1 - \beta)},$$

a uwzględniając, że

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta)(1 + \beta)}}$$

otrzymamy

$$\omega = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \omega_0.$$

Efekt Dopplera dla światła

Ponieważ źródło porusza się zawsze z prędkością mniejszą od prędkości światła w próżni, to

$$-1 < \beta = v/c < 1$$

i z wzoru

$$\omega = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \omega_0$$

widzimy, że

- jeśli źródło oddala się od obserwatora, tzn.

$$\beta < 0$$

Efekt Dopplera dla światła

Ponieważ źródło porusza się zawsze z prędkością mniejszą od prędkości światła w próżni, to

$$-1 < \beta = v/c < 1$$

i z wzoru

$$\omega = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \omega_0$$

widzimy, że

- jeśli źródło oddala się od obserwatora, tzn.

$$\beta < 0 \Rightarrow \omega < \omega_0, \quad (\text{przesunięcie ku czerwieni})$$

Efekt Dopplera dla światła

Ponieważ źródło porusza się zawsze z prędkością mniejszą od prędkości światła w próżni, to

$$-1 < \beta = v/c < 1$$

i z wzoru

$$\omega = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \omega_0$$

widzimy, że

- jeśli źródło oddala się od obserwatora, tzn.
 $\beta < 0 \Rightarrow \omega < \omega_0$, *(przesunięcie ku czerwieni)*
- jeśli źródło zbliża się do obserwatora, tzn.
 $\beta > 0$

Efekt Dopplera dla światła

Ponieważ źródło porusza się zawsze z prędkością mniejszą od prędkości światła w próżni, to

$$-1 < \beta = v/c < 1$$

i z wzoru

$$\omega = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \omega_0$$

widzimy, że

- jeśli źródło oddala się od obserwatora, tzn.
 $\beta < 0 \Rightarrow \omega < \omega_0$, *(przesunięcie ku czerwieni)*
- jeśli źródło zbliża się do obserwatora, tzn.
 $\beta > 0 \Rightarrow \omega > \omega_0$. *(przesunięcie do fioletu)*

Efekt Dopplera dla światła

Ponieważ źródło porusza się zawsze z prędkością mniejszą od prędkości światła w próżni, to

$$-1 < \beta = v/c < 1$$

i z wzoru

$$\omega = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \omega_0$$

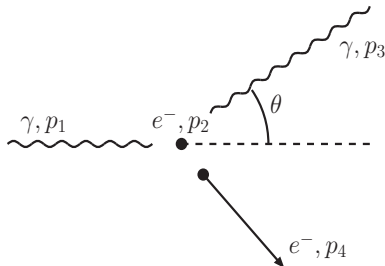
widzimy, że

- jeśli źródło oddala się od obserwatora, tzn.
 $\beta < 0 \Rightarrow \omega < \omega_0$, *(przesunięcie ku czerwieni)*
- jeśli źródło zbliża się do obserwatora, tzn.
 $\beta > 0 \Rightarrow \omega > \omega_0$. *(przesunięcie do fioletu)*

Efekt Comptona – Arthur Compton 1923 r.

Promieniowanie rentgenowskie rozpraszamy na spoczywających elektronach. Jaki jest wzrost długości fali promieniowania rentgenowskiego wynikający z odrzutu elektronu?

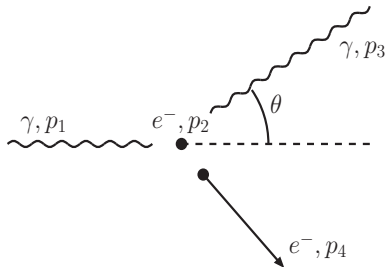
Założmy, że rozpraszane są pojedyncze kwanty promieniowania - fotony.



Efekt Comptona – Arthur Compton 1923 r.

Promieniowanie rentgenowskie rozpraszamy na spoczywających elektronach. Jaki jest wzrost długości fali promieniowania rentgenowskiego wynikający z odrzutu elektronu?

Założmy, że rozpraszane są pojedyncze kwanty promieniowania - fotony.



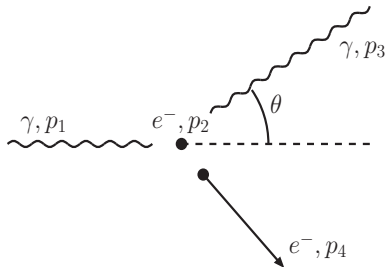
Skorzystajmy z zasady zachowania czteropędu

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

Efekt Comptona – Arthur Compton 1923 r.

Promieniowanie rentgenowskie rozpraszamy na spoczywających elektronach. Jaki jest wzrost długości fali promieniowania rentgenowskiego wynikający z odrzutu elektronu?

Założmy, że rozpraszane są pojedyncze kwanty promieniowania - fotony.



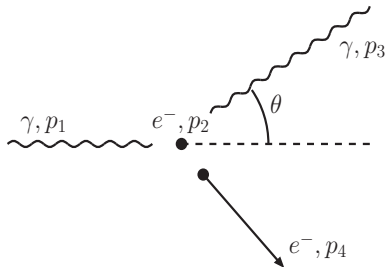
Skorzystajmy z zasady zachowania czteropędu

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \Rightarrow$$

Efekt Comptona – Arthur Compton 1923 r.

Promieniowanie rentgenowskie rozpraszamy na spoczywających elektronach. Jaki jest wzrost długości fali promieniowania rentgenowskiego wynikający z odrzutu elektronu?

Założmy, że rozpraszane są pojedyncze kwanty promieniowania - fotony.



Skorzystajmy z zasady zachowania czteropędu

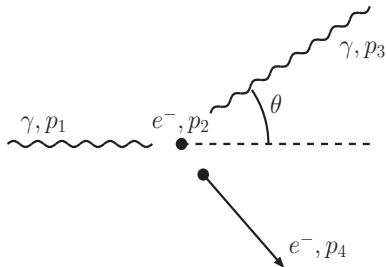
$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \Rightarrow$$

$$[(p_1 - p_3) + p_2]^2$$

Efekt Comptona – Arthur Compton 1923 r.

Promieniowanie rentgenowskie rozpraszamy na spoczywających elektronach. Jaki jest wzrost długości fali promieniowania rentgenowskiego wynikający z odrzutu elektronu?

Założmy, że rozpraszane są pojedyncze kwanty promieniowania - fotony.



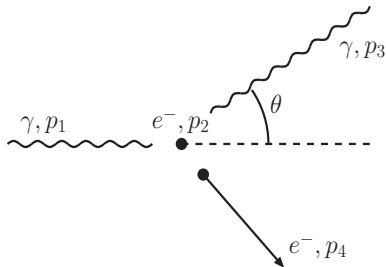
Skorzystajmy z zasady zachowania czteropędu

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= p_3 + p_4 \Rightarrow \\ [(p_1 - p_3) + p_2]^2 &= \end{aligned}$$

Efekt Comptona – Arthur Compton 1923 r.

Promieniowanie rentgenowskie rozpraszamy na spoczywających elektronach. Jaki jest wzrost długości fali promieniowania rentgenowskiego wynikający z odrzutu elektronu?

Założmy, że rozpraszane są pojedyncze kwanty promieniowania - fotony.



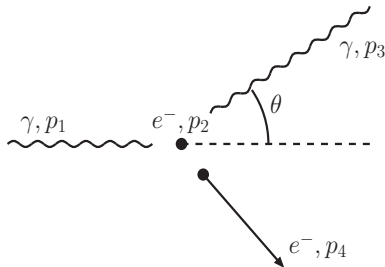
Skorzystajmy z zasady zachowania czteropędu

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= p_3 + p_4 \Rightarrow \\ [(p_1 - p_3) + p_2]^2 &= p_4^2 \end{aligned}$$

Efekt Comptona – Arthur Compton 1923 r.

Promieniowanie rentgenowskie rozpraszamy na spoczywających elektronach. Jaki jest wzrost długości fali promieniowania rentgenowskiego wynikający z odrzutu elektronu?

Założmy, że rozpraszane są pojedyncze kwanty promieniowania - fotony.



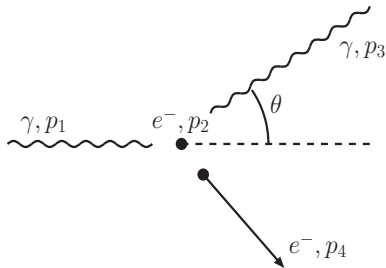
Skorzystajmy z zasady zachowania czteropędu

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= p_3 + p_4 \Rightarrow \\ [(p_1 - p_3) + p_2]^2 &= p_4^2 = m_e^2 c^2, \end{aligned}$$

Efekt Comptona – Arthur Compton 1923 r.

Promieniowanie rentgenowskie rozpraszamy na spoczywających elektronach. Jaki jest wzrost długości fali promieniowania rentgenowskiego wynikający z odrzutu elektronu?

Założmy, że rozpraszane są pojedyncze kwanty promieniowania - fotony.



Skorzystajmy z zasady zachowania czteropędu

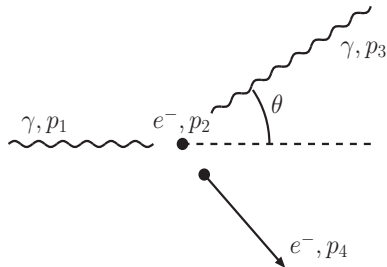
$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= p_3 + p_4 \Rightarrow \\ [(p_1 - p_3) + p_2]^2 &= p_4^2 = m_e^2 c^2, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy związek $p_4^2 = m_e^2 c^2$.

Efekt Comptona – Arthur Compton 1923 r.

Promieniowanie rentgenowskie rozpraszamy na spoczywających elektronach. Jaki jest wzrost długości fali promieniowania rentgenowskiego wynikający z odrzutu elektronu?

Założmy, że rozpraszane są pojedyncze kwanty promieniowania - fotony.



Skorzystajmy z zasady zachowania czteropędu

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= p_3 + p_4 \Rightarrow \\ [(p_1 - p_3) + p_2]^2 &= p_4^2 = m_e^2 c^2, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy związek $p_4^2 = m_e^2 c^2$.

Przekształćmy lewą stronę równania

$$\begin{aligned} [(p_1 - p_3) + p_2]^2 &= (p_1 - p_3)^2 + 2(p_1 - p_3) \cdot p_2 + p_2^2 \\ &= p_1^2 - 2p_1 \cdot p_3 + p_3^2 + 2p_1 \cdot p_2 - 2p_3 \cdot p_2 + p_2^2 = m_e^2 c^2. \end{aligned}$$

Uwzględniając relację $p_2^2 = m_e^2 c^2$ i bezmasowość fotonu, tzn. $p_1^2 = p_3^2 = 0$, dostaniemy

$$-2p_1 \cdot p_3 + 2p_1 \cdot p_2 - 2p_3 \cdot p_2 = 0,$$

Przekształćmy lewą stronę równania

$$\begin{aligned} [(p_1 - p_3) + p_2]^2 &= (p_1 - p_3)^2 + 2(p_1 - p_3) \cdot p_2 + p_2^2 \\ &= p_1^2 - 2p_1 \cdot p_3 + p_3^2 + 2p_1 \cdot p_2 - 2p_3 \cdot p_2 + p_2^2 = m_e^2 c^2. \end{aligned}$$

Uwzględniając relację $p_2^2 = m_e^2 c^2$ i bezmasowość fotonu, tzn. $p_1^2 = p_3^2 = 0$, dostaniemy

$$-2p_1 \cdot p_3 + 2p_1 \cdot p_2 - 2p_3 \cdot p_2 = 0,$$

a po prostych przekształceniach otrzymamy

$$p_1 \cdot p_2 - p_3 \cdot p_2 = p_1 \cdot p_3.$$

Przekształćmy lewą stronę równania

$$\begin{aligned} [(p_1 - p_3) + p_2]^2 &= (p_1 - p_3)^2 + 2(p_1 - p_3) \cdot p_2 + p_2^2 \\ &= p_1^2 - 2p_1 \cdot p_3 + p_3^2 + 2p_1 \cdot p_2 - 2p_3 \cdot p_2 + p_2^2 = m_e^2 c^2. \end{aligned}$$

Uwzględniając relację $p_2^2 = m_e^2 c^2$ i bezmasowość fotonu, tzn. $p_1^2 = p_3^2 = 0$, dostaniemy

$$-2p_1 \cdot p_3 + 2p_1 \cdot p_2 - 2p_3 \cdot p_2 = 0,$$

a po prostych przekształceniach otrzymamy

$$p_1 \cdot p_2 - p_3 \cdot p_2 = p_1 \cdot p_3.$$

Czteropędy cząstek początkowych mają postać

$$p_1 = (|\vec{p}_1|, 0, 0, |\vec{p}_1|) = \frac{\hbar\omega_0}{c} (1, 0, 0, 1), \quad p_2 = (m_e c, 0, 0, 0),$$

a czteropędy cząstek końcowych wyrażają się wzorami

$$p_3 = \frac{\hbar\omega}{c} (1, \hat{k}) = \frac{\hbar\omega}{c} (1, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad p_4 = \left(\frac{E_4}{c}, \vec{p}_4 \right).$$

Czteropędy cząstek początkowych mają postać

$$p_1 = (|\vec{p}_1|, 0, 0, |\vec{p}_1|) = \frac{\hbar\omega_0}{c} (1, 0, 0, 1), \quad p_2 = (m_e c, 0, 0, 0),$$

a czteropędy cząstek końcowych wyrażają się wzorami

$$p_3 = \frac{\hbar\omega}{c} (1, \hat{k}) = \frac{\hbar\omega}{c} (1, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad p_4 = \left(\frac{E_4}{c}, \vec{p}_4 \right).$$

Skąd, wykorzystując wzór $a \cdot b = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$, otrzymamy

$$p_1 \cdot p_2 - p_3 \cdot p_2 = \frac{\hbar(\omega_0 - \omega)}{c} m_e c = \hbar m_e (\omega_0 - \omega)$$

$$p_1 \cdot p_3 = \frac{\hbar^2 \omega_0 \omega}{c^2} (1 - \cos \theta).$$

Czteropędy cząstek początkowych mają postać

$$p_1 = (|\vec{p}_1|, 0, 0, |\vec{p}_1|) = \frac{\hbar\omega_0}{c} (1, 0, 0, 1), \quad p_2 = (m_e c, 0, 0, 0),$$

a czteropędy cząstek końcowych wyrażają się wzorami

$$p_3 = \frac{\hbar\omega}{c} (1, \hat{k}) = \frac{\hbar\omega}{c} (1, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad p_4 = \left(\frac{E_4}{c}, \vec{p}_4 \right).$$

Skąd, wykorzystując wzór $a \cdot b = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$, otrzymamy

$$p_1 \cdot p_2 - p_3 \cdot p_2 = \frac{\hbar(\omega_0 - \omega)}{c} m_e c = \hbar m_e (\omega_0 - \omega)$$

$$p_1 \cdot p_3 = \frac{\hbar^2 \omega_0 \omega}{c^2} (1 - \cos \theta).$$

Wstawiając te wyniki do równania

$$p_1 \cdot p_2 - p_3 \cdot p_2 = p_1 \cdot p_3$$

otrzymamy

$$\hbar m_e (\omega_0 - \omega) = \frac{\hbar^2 \omega_0 \omega}{c^2} (1 - \cos \theta).$$

Wstawiając te wyniki do równania

$$p_1 \cdot p_2 - p_3 \cdot p_2 = p_1 \cdot p_3$$

otrzymamy

$$\hbar m_e (\omega_0 - \omega) = \frac{\hbar^2 \omega_0 \omega}{c^2} (1 - \cos \theta).$$

Podzielmy obie strony przez $\hbar m_e \omega_0 \omega$, wówczas dostaniemy

$$\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0} = \frac{\hbar}{m_e c^2} (1 - \cos \theta).$$

Wstawiając te wyniki do równania

$$p_1 \cdot p_2 - p_3 \cdot p_2 = p_1 \cdot p_3$$

otrzymamy

$$\hbar m_e (\omega_0 - \omega) = \frac{\hbar^2 \omega_0 \omega}{c^2} (1 - \cos \theta).$$

Podzielmy obie strony przez $\hbar m_e \omega_0 \omega$, wówczas dostaniemy

$$\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0} = \frac{\hbar}{m_e c^2} (1 - \cos \theta).$$

Aby przejść do związku dla długości fali skorzystajmy ze związków

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

i pomnóżmy związek dla częstości obustronnie przez $2\pi c$, wówczas otrzymamy związek

$$\frac{2\pi c}{\omega} - \frac{2\pi c}{\omega_0} = \frac{2\pi c\hbar}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) = \frac{2\pi\hbar}{m_e c} (1 - \cos \theta),$$

Aby przejść do związku dla długości fali skorzystajmy ze związków

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

i pomnóżmy związek dla częstości obustronnie przez $2\pi c$, wówczas otrzymamy związek

$$\frac{2\pi c}{\omega} - \frac{2\pi c}{\omega_0} = \frac{2\pi c\hbar}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) = \frac{2\pi\hbar}{m_e c} (1 - \cos \theta),$$

który możemy wyrazić przez długość fali promieniowania rentgenowskiego

$$\Delta\lambda \equiv \lambda - \lambda_0 = \frac{2\pi\hbar}{m_e c} (1 - \cos \theta).$$

Aby przejść do związku dla długości fali skorzystajmy ze związków

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

i pomnóżmy związek dla częstości obustronnie przez $2\pi c$, wówczas otrzymamy związek

$$\frac{2\pi c}{\omega} - \frac{2\pi c}{\omega_0} = \frac{2\pi c\hbar}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) = \frac{2\pi\hbar}{m_e c} (1 - \cos \theta),$$

który możemy wyrazić przez długość fali promieniowania rentgenowskiego

$$\Delta\lambda \equiv \lambda - \lambda_0 = \frac{2\pi\hbar}{m_e c} (1 - \cos \theta).$$

Zdefiniujmy komptonowską długość fali elektronu

$$\lambda_e = \frac{2\pi\hbar}{m_e c} = \frac{h}{m_e c},$$

przy czym [Particle Data Group 2014]

$$\frac{\lambda_e}{2\pi} = \frac{\hbar}{m_e c} = 3.861\,592\,6800(25) \times 10^{-13} \text{m},$$

Zdefiniujmy komptonowską długość fali elektronu

$$\lambda_e = \frac{2\pi\hbar}{m_e c} = \frac{h}{m_e c},$$

przy czym [Particle Data Group 2014]

$$\frac{\lambda_e}{2\pi} = \frac{\hbar}{m_e c} = 3.861\,592\,6800(25) \times 10^{-13} \text{m},$$

wówczas zmiana długości fali wyraża się wzorem

$$\Delta\lambda = \lambda_e (1 - \cos \theta).$$

Zdefiniujmy komptonowską długość fali elektronu

$$\lambda_e = \frac{2\pi\hbar}{m_e c} = \frac{h}{m_e c},$$

przy czym [Particle Data Group 2014]

$$\frac{\lambda_e}{2\pi} = \frac{\hbar}{m_e c} = 3.861\,592\,6800(25) \times 10^{-13} \text{m},$$

wówczas zmiana długości fali wyraża się wzorem

$$\Delta\lambda = \lambda_e (1 - \cos \theta).$$

Największa zmiana długości fali następuje przy rozpraszaniu do tyłu, a najmniejsza przy rozpraszaniu do przodu.

Zdefiniujmy komptonowską długość fali elektronu

$$\lambda_e = \frac{2\pi\hbar}{m_e c} = \frac{h}{m_e c},$$

przy czym [Particle Data Group 2014]

$$\frac{\lambda_e}{2\pi} = \frac{\hbar}{m_e c} = 3.861\,592\,6800(25) \times 10^{-13} \text{m},$$

wówczas zmiana długości fali wyraża się wzorem

$$\Delta\lambda = \lambda_e (1 - \cos \theta).$$

Największa zmiana długości fali następuje przy rozpraszaniu do tyłu, a najmniejsza przy rozpraszaniu do przodu.

Doświadczenie Comptona było jednym z pierwszych dowodów na **korpuskularną naturę promieniowania elektromagnetycznego**.

Około roku 1920 większość fizyków, w tym również Compton, nie akceptowała hipotezy kwantów światła zaproponowanej przez Plancka i Einsteina traktując ją jedynie jako model matematyczny pozwalający wyjaśnić pewne zjawiska, jak **widmo promieniowania ciała doskonale czarnego, czy zjawisko fotoelektryczne**.

Doświadczenie Comptona było jednym z pierwszych dowodów na **korpuskularną naturę promieniowania elektromagnetycznego**.

Około roku 1920 większość fizyków, w tym również Compton, nie akceptowała hipotezy kwantów światła zaproponowanej przez Plancka i Einsteina traktując ją jedynie jako model matematyczny pozwalający wyjaśnić pewne zjawiska, jak **widmo promieniowania ciała doskonale czarnego, czy zjawisko fotoelektryczne**.

Aby poprawnie opisać zjawisko Comptona musieliśmy założyć, że fotony niosą nie tylko energię, ale i pęd i rozpraszają się w zderzeniach z pojedynczymi elektronami, czyli że zachowują się jak klasyczne cząstki.

Doświadczenie Comptona było jednym z pierwszych dowodów na **korpuskularną naturę promieniowania elektromagnetycznego**.

Około roku 1920 większość fizyków, w tym również Compton, nie akceptowała hipotezy kwantów światła zaproponowanej przez Plancka i Einsteina traktując ją jedynie jako model matematyczny pozwalający wyjaśnić pewne zjawiska, jak **widmo promieniowania ciała doskonale czarnego, czy zjawisko fotoelektryczne**.

Aby poprawnie opisać zjawisko Comptona musieliśmy założyć, że **fotony niosą nie tylko energię, ale i pęd i rozpraszają się w zderzeniach z pojedynczymi elektronami, czyli że zachowują się jak klasyczne cząstki**.

Z drugiej strony jednak, pomiar energii rozproszonego promieniowania, tzn. jego długości fali, opierał się o zjawisko dyfrakcji, a więc wykorzystywał falową naturę promieniowania elektromagnetycznego.

Siła w teorii względności

Pojęcie siły w teorii względności jest dość skomplikowane, m.in. dlatego, że wektor

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

nie jest dobrze określoną częścią przestrzenną czterowektora.

Siła w teorii względności

Pojęcie siły w teorii względności jest dość skomplikowane, m.in. dlatego, że wektor

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

nie jest dobrze określoną częścią przestrzenną czterowektora.

Ponadto, masa, która wiąże się z energią w układzie spoczynkowym wzorem

$$E_0 = mc^2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{E_0}{c^2},$$

nie musi być wielkością stałą dla ciał złożonych. Np. jeśli podgrzejemy takie ciało, to jego energia wewnętrzna wzrośnie.

Siła w teorii względności

Pojęcie siły w teorii względności jest dość skomplikowane, m.in. dlatego, że wektor

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

nie jest dobrze określoną częścią przestrzenną czterowektora. Ponadto, **masa**, która wiąże się z energią w układzie spoczynkowym wzorem

$$E_0 = mc^2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{E_0}{c^2},$$

nie musi być wielkością stałą dla ciał złożonych. Np. jeśli podgrzejemy takie ciało, to jego energia wewnętrzna wzrośnie.

Zmiany masy wynikające ze zmiany energii wewnętrznej są na ogół nieznaczne. Dlatego założymy, że masa ciała nie zmienia się w czasie.

Siła w teorii względności

Pojęcie siły w teorii względności jest dość skomplikowane, m.in. dlatego, że wektor

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

nie jest dobrze określoną częścią przestrzenną czterowektora. Ponadto, **masa**, która wiąże się z energią w układzie spoczynkowym wzorem

$$E_0 = mc^2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{E_0}{c^2},$$

nie musi być wielkością stałą dla ciał złożonych. Np. jeśli podgrzejemy takie ciało, to jego energia wewnętrzna wzrośnie. Zmiany masy wynikające ze zmiany energii wewnętrznej są na ogół nieznaczne. **Dlatego założymy, że masa ciała nie zmienia się w czasie.**

Mimo skomplikowanych własności transformacyjnych definicja

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

dobrze zgadza się z siłą Lorentza

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

działającą na ładunek q w polu elektromagnetycznym o natężeniu $\vec{E}$ i indukcji $\vec{B}$.

Mimo skomplikowanych własności transformacyjnych definicja

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

dobrze zgadza się z siłą Lorentza

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

działającą na ładunek q w polu elektromagnetycznym o natężeniu $\vec{E}$ i indukcji $\vec{B}$.

Siła w teorii względności

Nasza definicja spełnia również związek pomiędzy **przyrostem energii kinetycznej ciała, a pracą nad nim wykonaną**.

Aby się o tym przekonać, zróżniczkujemy związek

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \quad / \quad E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 &\Rightarrow 2E \frac{dE}{dt} = 2\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} c^2 \\ \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{c^2}{E} \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} &= \frac{c^2}{\gamma m c^2} \gamma m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F}, \end{aligned}$$

Nasza definicja spełnia również związek pomiędzy **przyrostem energii kinetycznej ciała**, a **pracą nad nim wykonaną**.

Aby się o tym przekonać, zróżniczkujemy związek

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \quad / \quad E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 &\Rightarrow 2E \frac{dE}{dt} = 2\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} c^2 \\ \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{c^2}{E} \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{c^2}{\gamma m c^2} \gamma m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{v} \cdot \vec{F}, \end{aligned}$$

a więc

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} \Rightarrow dE = \vec{F} \cdot d\vec{x}.$$

Nasza definicja spełnia również związek pomiędzy **przyrostem energii kinetycznej ciała, a pracą nad nim wykonaną**.

Aby się o tym przekonać, zróżniczkujemy związek

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \quad / \quad E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 &\Rightarrow 2E \frac{dE}{dt} = 2\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} c^2 \\ \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{c^2}{E} \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{c^2}{\gamma m c^2} \gamma m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{v} \cdot \vec{F}, \end{aligned}$$

a więc

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} \Rightarrow dE = \vec{F} \cdot d\vec{x}.$$

Uwzględniając, że

$$E = mc^2 + T,$$

gdzie T jest energią kinetyczną ciała, otrzymamy

$$dT = \vec{F} \cdot d\vec{x}.$$

Uwzględniając, że

$$E = mc^2 + T,$$

gdzie T jest energią kinetyczną ciała, otrzymamy

$$dT = \vec{F} \cdot d\vec{x}.$$

Przyrost energii kinetycznej ciała jest równy wykonanej nad nim pracy.

Uwzględniając, że

$$E = mc^2 + T,$$

gdzie T jest energią kinetyczną ciała, otrzymamy

$$dT = \vec{F} \cdot d\vec{x}.$$

Przyrost energii kinetycznej ciała jest równy wykonanej nad nim pracy.

Ruch w polu stałej siły

Założmy, że $\vec{F} = \text{const.}$ W chwili $t = 0$ ciało spoczywa w początku układu, czyli $\vec{x}(0) = \vec{0}$ i $\vec{v}(0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}(0) = \vec{0}$. Wówczas

$$d\vec{p} = \vec{F}dt \Rightarrow \vec{p} = \vec{F}t.$$

$$E^2 = (\gamma mc^2)^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2 \Rightarrow \gamma = \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}},$$

gdzie odrzuciliśmy ujemne rozwiązanie.

Ruch w polu stałej siły

Założmy, że $\vec{F} = \text{const.}$ W chwili $t = 0$ ciało spoczywa w początku układu, czyli $\vec{x}(0) = \vec{0}$ i $\vec{v}(0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}(0) = \vec{0}$. Wówczas

$$d\vec{p} = \vec{F}dt \Rightarrow \vec{p} = \vec{F}t.$$

$$E^2 = (\gamma mc^2)^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2 \Rightarrow \gamma = \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}},$$

gdzie odrzuciliśmy ujemne rozwiązanie. Z definicji pędu

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m\gamma} = \frac{\vec{F}t}{m\sqrt{1 + \frac{\vec{F}^2 t^2}{m^2 c^2}}} = \frac{\vec{F}t}{m\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}}}.$$

Ruch w polu stałej siły

Założmy, że $\vec{F} = \text{const.}$ W chwili $t = 0$ ciało spoczywa w początku układu, czyli $\vec{x}(0) = \vec{0}$ i $\vec{v}(0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}(0) = \vec{0}$. Wówczas

$$d\vec{p} = \vec{F}dt \Rightarrow \vec{p} = \vec{F}t.$$

$$E^2 = (\gamma mc^2)^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2 \Rightarrow \gamma = \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}},$$

gdzie odrzuciliśmy ujemne rozwiązanie. Z definicji pędu

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m\gamma} = \frac{\vec{F}t}{m\sqrt{1 + \frac{\vec{F}^2 t^2}{m^2 c^2}}} = \frac{\vec{F}t}{m\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}}}.$$

$\Rightarrow$

Założmy, że $\vec{F} = \text{const.}$ W chwili $t = 0$ ciało spoczywa w początku układu, czyli $\vec{x}(0) = \vec{0}$ i $\vec{v}(0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}(0) = \vec{0}$. Wówczas

$$d\vec{p} = \vec{F}dt \Rightarrow \vec{p} = \vec{F}t.$$

$$E^2 = (\gamma mc^2)^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2 \Rightarrow \gamma = \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}},$$

gdzie odrzuciliśmy ujemne rozwiązanie. Z definicji pędu

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\vec{p}}{m\gamma} = \frac{\vec{F}t}{m\sqrt{1 + \frac{\vec{F}^2 t^2}{m^2 c^2}}} = \frac{\vec{F}t}{m\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}}}. \\ \Rightarrow \vec{x} &= \int \vec{v} dt = \int \frac{\vec{F}t}{m\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}}} dt = \frac{\vec{F}}{m} \int \frac{t}{\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}}} dt. \end{aligned}$$

Założmy, że $\vec{F} = \text{const.}$ W chwili $t = 0$ ciało spoczywa w początku układu, czyli $\vec{x}(0) = \vec{0}$ i $\vec{v}(0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}(0) = \vec{0}$. Wówczas

$$d\vec{p} = \vec{F}dt \Rightarrow \vec{p} = \vec{F}t.$$

$$E^2 = (\gamma mc^2)^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2 \Rightarrow \gamma = \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}},$$

gdzie odrzuciliśmy ujemne rozwiązanie. Z definicji pędu

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\vec{p}}{m\gamma} = \frac{\vec{F}t}{m\sqrt{1 + \frac{\vec{F}^2 t^2}{m^2 c^2}}} = \frac{\vec{F}t}{m\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}}}. \\ \Rightarrow \vec{x} &= \int \vec{v} dt = \int \frac{\vec{F}t}{m\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}}} dt = \frac{\vec{F}}{m} \int \frac{t}{\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}}} dt. \end{aligned}$$

Podstawmy

$$u = \sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}} \Rightarrow du = \frac{2 \frac{F^2}{m^2 c^2} t dt}{2 \sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}}} = \frac{F^2}{m^2 c^2} \frac{t dt}{u}$$
$$\Rightarrow t dt = \frac{m^2 c^2}{F^2} u du$$

i obliczmy całkę

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \frac{\vec{F}}{m} \int \frac{t dt}{\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}}} = \frac{\vec{F}}{m} \frac{m^2 c^2}{F^2} \int \frac{u du}{u} = \frac{m c^2}{F^2} \vec{F} \int du \\ &= \frac{m c^2}{F^2} \vec{F} u + \vec{C} = \frac{m c^2}{F^2} \vec{F} \sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}} + \vec{C}.\end{aligned}$$

Podstawmy

$$u = \sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}} \Rightarrow du = \frac{2 \frac{F^2}{m^2 c^2} t dt}{2 \sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}}} = \frac{F^2}{m^2 c^2} \frac{t dt}{u}$$
$$\Rightarrow t dt = \frac{m^2 c^2}{F^2} u du$$

i obliczmy całkę

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \frac{\vec{F}}{m} \int \frac{t dt}{\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}}} = \frac{\vec{F}}{m} \frac{m^2 c^2}{F^2} \int \frac{u du}{u} = \frac{m c^2}{F^2} \vec{F} \int du \\ &= \frac{m c^2}{F^2} \vec{F} u + \vec{C} = \frac{m c^2}{F^2} \vec{F} \sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}} + \vec{C}.\end{aligned}$$

Ruch w polu stałej siły

Uwzględnijmy warunek początkowy $\vec{x}(0) = \vec{0}$

$$\vec{x}(0) = \frac{mc^2}{F^2} \vec{F} \sqrt{1 + \frac{F^2 0^2}{m^2 c^2}} + \vec{C} = \frac{mc^2}{F^2} \vec{F} + \vec{C} = \vec{0} \Rightarrow \vec{C} = -\frac{mc^2}{F^2} \vec{F}.$$

Ostateczny wynik ma postać

$$\vec{x}(t) = \frac{mc^2}{F^2} \left(\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}} - 1 \right) \vec{F}.$$

Ruch w polu stałej siły

Uwzględnijmy warunek początkowy $\vec{x}(0) = \vec{0}$

$$\vec{x}(0) = \frac{mc^2}{F^2} \vec{F} \sqrt{1 + \frac{F^2 0^2}{m^2 c^2}} + \vec{C} = \frac{mc^2}{F^2} \vec{F} + \vec{C} = \vec{0} \Rightarrow \vec{C} = -\frac{mc^2}{F^2} \vec{F}.$$

Ostateczny wynik ma postać

$$\vec{x}(t) = \frac{mc^2}{F^2} \left(\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}} - 1 \right) \vec{F}.$$

Dla krótkich czasów otrzymujemy

$$\vec{x}(t) \approx \frac{mc^2}{F^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2} - 1 \right) \vec{F} = \frac{1}{2} \frac{\vec{F}}{m} t^2 = \frac{1}{2} \vec{a} t^2,$$

a więc wynik taki sam jak w przypadku nierelatywistycznym.

Ruch w polu stałej siły

Uwzględnijmy warunek początkowy $\vec{x}(0) = \vec{0}$

$$\vec{x}(0) = \frac{mc^2}{F^2} \vec{F} \sqrt{1 + \frac{F^2 0^2}{m^2 c^2}} + \vec{C} = \frac{mc^2}{F^2} \vec{F} + \vec{C} = \vec{0} \Rightarrow \vec{C} = -\frac{mc^2}{F^2} \vec{F}.$$

Ostateczny wynik ma postać

$$\vec{x}(t) = \frac{mc^2}{F^2} \left(\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}} - 1 \right) \vec{F}.$$

Dla krótkich czasów otrzymujemy

$$\vec{x}(t) \approx \frac{mc^2}{F^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2} - 1 \right) \vec{F} = \frac{1}{2} \frac{\vec{F}}{m} t^2 = \frac{1}{2} \vec{a} t^2,$$

a więc wynik taki sam jak w przypadku nierelatywistycznym.

Można zdefiniować czterowektor siły

$$K^\mu = \frac{dp^\mu}{dt_0},$$

gdzie t_0 – czas własny.

Jest to niewątpliwie poprawnie zdefiniowany czterowektor, gdyż t_0 jest lorentzowskim skalar.

Można zdefiniować czterowektor siły

$$K^\mu = \frac{dp^\mu}{dt_0},$$

gdzie t_0 – czas własny.

Jest to niewątpliwie poprawnie zdefiniowany czterowektor, gdyż t_0 jest lorentzowskim skalar. Związek z trójsiłą ma postać

$$K^\mu = \gamma \frac{dp^\mu}{dt} = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = \gamma \left(\vec{v} \cdot \vec{F} / c, \vec{F} \right).$$

Można zdefiniować czterowektor siły

$$K^\mu = \frac{dp^\mu}{dt_0},$$

gdzie t_0 – czas własny.

Jest to niewątpliwie poprawnie zdefiniowany czterowektor, gdyż t_0 jest lorentzowskim skalarą. Związek z trójsiłą ma postać

$$K^\mu = \gamma \frac{dp^\mu}{dt} = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = \gamma \left(\vec{v} \cdot \vec{F} / c, \vec{F} \right).$$

Czterosiła nie ma większego zastosowania, głównie ze względu na to, że w jej definicji występuje czas własny, a my na ogół chcemy badać ruch ciał (ewolucję układu w czasie) w dowolnym inercyjnym układzie odniesienia.

Można zdefiniować czterowektor siły

$$K^\mu = \frac{dp^\mu}{dt_0},$$

gdzie t_0 – czas własny.

Jest to niewątpliwie poprawnie zdefiniowany czterowektor, gdyż t_0 jest lorentzowskim skalarą. Związek z trójsiłą ma postać

$$K^\mu = \gamma \frac{dp^\mu}{dt} = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = \gamma \left(\vec{v} \cdot \vec{F} / c, \vec{F} \right).$$

Czterosiła nie ma większego zastosowania, głównie ze względu na to, że w jej definicji występuje czas własny, a my na ogół chcemy badać ruch ciał (ewolucję układu w czasie) w dowolnym inercyjnym układzie odniesienia.