Równania Hamiltona

Wykład 13

Karol Kołodziej

(przy współpracy Bartosza Dziewita)

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

Wstęp

Układ N punktów materialnych z k więzami holonomicznymi ma $n = 3N - k$ stopni swobody. Możemy go opisać n równaniami Lagrange'a II-go rodzaju, które są równaniami różniczkowymi drugiego rzędu.

Pokażemy, że n równań różniczkowych drugiego rzędu można przekształcić w $2n$ równań pierwszego rzędu. Na ogół udaje się to zrobić przez wprowadzenie pędów uogólnionych:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

Wstęp

Układ N punktów materialnych z k więzami holonomicznymi ma $n = 3N - k$ stopni swobody. Możemy go opisać n równaniami Lagrange'a II-go rodzaju, które są równaniami różniczkowymi drugiego rzędu.
Pokażemy, że n równań różniczkowych drugiego rzędu można przekształcić w $2n$ równań pierwszego rzędu. Na ogół udaje się to zrobić przez wprowadzenie pędów uogólnionych:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

jako nowych współrzędnych.

Wstęp

Układ N punktów materialnych z k więzami holonomicznymi ma $n = 3N - k$ stopni swobody. Możemy go opisać n równaniami Lagrange'a II-go rodzaju, które są równaniami różniczkowymi drugiego rzędu.
Pokażemy, że n równań różniczkowych drugiego rzędu można przekształcić w $2n$ równań pierwszego rzędu. Na ogół udaje się to zrobić przez wprowadzenie pędów uogólnionych:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

jako nowych współrzędnych.

Przestrzeń fazowa

Przypomnijmy, że pędy uogólnione odpowiadają zwykłym pędom mechanicznym, np.

$$m\dot{x} \quad \text{lub} \quad mr^2\dot{\varphi},$$

tylko wówczas, gdy potencjał nie zależy od prędkości.
Zmienne

$$q_i, p_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

rozpinają $2n$ wymiarową przestrzeń, zwaną przestrzenią fazową.

Przestrzeń fazowa

Przypomnijmy, że pędy uogólnione odpowiadają zwykłym pędom mechanicznym, np.

$$m\dot{x} \quad \text{lub} \quad mr^2\dot{\varphi},$$

tylko wówczas, gdy potencjał nie zależy od prędkości.
Zmienne

$$q_i, p_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

rozpinają $2n$ wymiarową przestrzeń, zwaną przestrzenią fazową.

Transformacja Legendre'a

Transformacja Legendre'a opisuje przejście od zmiennych x i y w funkcji $f(x, y)$ do nowych zmiennych $u \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ i y w nowej funkcji $g(u, y)$.

Rozważmy różniczkę zupełną funkcji $f(x, y)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y,$$

gdzie

$$u \equiv \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v \equiv \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Transformacja Legendre'a

Transformacja Legendre'a opisuje przejście od zmiennych x i y w funkcji $f(x, y)$ do nowych zmiennych $u \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ i y w nowej funkcji $g(u, y)$.
Rozważmy różniczkę zupełną funkcji $f(x, y)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y,$$

gdzie

$$u \equiv \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v \equiv \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Zauważmy, że zależność funkcji f od zmiennych x i y sprawia, że w jej różniczce zupełnej występują wyrazy proporcjonalne do przyrostów $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$.

Transformacja Legendre'a

Transformacja Legendre'a opisuje przejście od zmiennych x i y w funkcji $f(x, y)$ do nowych zmiennych $u \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ i y w nowej funkcji $g(u, y)$.
Rozważmy różniczkę zupełną funkcji $f(x, y)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y,$$

gdzie

$$u \equiv \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v \equiv \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Zauważmy, że zależność funkcji f od zmiennych x i y sprawia, że w jej różniczce zupełnej występują wyrazy proporcjonalne do przyrostów $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$.

Transformacja Legendre'a

Zdefiniujmy funkcję g

$$g \equiv ux - f,$$

której różniczka zupełna wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g &= u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u - \mathrm{d}f = u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u - u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y \\ &= x\mathrm{d}u - v\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Transformacja Legendre'a

Zdefiniujmy funkcję g

$$g \equiv ux - f,$$

której różniczka zupełna wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g &= u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u - \mathrm{d}f = u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u - u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y \\ &= x\mathrm{d}u - v\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Zatem g jest funkcją zmiennych u i y, $g = g(u, y)$.

Transformacja Legendre'a

Zdefiniujmy funkcję g

$$g \equiv ux - f,$$

której różniczka zupełna wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g &= u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u - \mathrm{d}f = u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u - u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y \\ &= x\mathrm{d}u - v\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Zatem g jest funkcją zmiennych u i y, $g = g(u, y)$. Dlatego

$$\mathrm{d}g = \frac{\partial g}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\partial g}{\partial u}, \quad v = -\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Transformacja Legendre'a

Zdefiniujmy funkcję g

$$g \equiv ux - f,$$

której różniczka zupełna wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g &= u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u - \mathrm{d}f = u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u - u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y \\ &= x\mathrm{d}u - v\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Zatem g jest funkcją zmiennych u i y, $g = g(u, y)$. Dlatego

$$\mathrm{d}g = \frac{\partial g}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\partial g}{\partial u}, \quad v = -\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Funkcję $g(u, y)$ nazywamy transformatą Legendre'a funkcji $f(x, y)$.

Transformacja Legendre'a

Zdefiniujmy funkcję g

$$g \equiv ux - f,$$

której różniczka zupełna wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g &= u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u - \mathrm{d}f = u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u - u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y \\ &= x\mathrm{d}u - v\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Zatem g jest funkcją zmiennych u i y, $g = g(u, y)$. Dlatego

$$\mathrm{d}g = \frac{\partial g}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\partial g}{\partial u}, \quad v = -\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Funkcję $g(u, y)$ nazywamy transformatą Legendre'a funkcji $f(x, y)$.

Transformata Legendre'a funkcji Lagrange'a

Zdefiniujmy funkcję Hamiltona H jako transformatę Legendre'a funkcji Lagrange'a $L(q, \dot{q}, t)$

$$H \equiv \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t), \qquad \text{gdzie} \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

a n jest liczbą stopni swobody.

Obliczmy różniczkę zupełną funkcji H

$$\mathrm{d}H = \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \mathrm{d}p_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t$$

Transformata Legendre'a funkcji Lagrange'a

Zdefiniujmy funkcję Hamiltona H jako transformatę Legendre'a funkcji Lagrange'a $L(q, \dot{q}, t)$

$$H \equiv \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t), \qquad \text{gdzie} \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

a n jest liczbą stopni swobody.
Obliczmy różniczkę zupełną funkcji H

$$\mathrm{d}H = \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \mathrm{d}p_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t$$

$$=$$

Transformata Legendre'a funkcji Lagrange'a

Zdefiniujmy funkcję Hamiltona H jako transformatę Legendre'a funkcji Lagrange'a $L(q, \dot{q}, t)$

$$H \equiv \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t), \qquad \text{gdzie} \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

a n jest liczbą stopni swobody.
Obliczmy różniczkę zupełną funkcji H

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \mathrm{d}p_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}q_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Transformata Legendre'a funkcji Lagrange'a

Zdefiniujmy funkcję Hamiltona H jako transformatę Legendre'a funkcji Lagrange'a $L(q, \dot{q}, t)$

$$H \equiv \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t), \qquad \text{gdzie} \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

a n jest liczbą stopni swobody.
Obliczmy różniczkę zupełną funkcji H

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \mathrm{d}p_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}q_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \dot{p}_i \mathrm{d}q_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

Transformata Legendre'a funkcji Lagrange'a

Zdefiniujmy funkcję Hamiltona H jako transformatę Legendre'a funkcji Lagrange'a $L(q, \dot{q}, t)$

$$H \equiv \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t), \qquad \text{gdzie} \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

a n jest liczbą stopni swobody.
Obliczmy różniczkę zupełną funkcji H

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \mathrm{d}p_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}q_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \dot{p}_i \mathrm{d}q_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równań Lagrange'a II rodzaju

Transformata Legendre'a funkcji Lagrange'a

Zdefiniujmy funkcję Hamiltona H jako transformatę Legendre'a funkcji Lagrange'a $L(q, \dot{q}, t)$

$$H \equiv \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t), \qquad \text{gdzie} \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

a n jest liczbą stopni swobody.
Obliczmy różniczkę zupełną funkcji H

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \mathrm{d}p_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}q_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \dot{p}_i \mathrm{d}q_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równań Lagrange'a II rodzaju i z definicji pędu uogólnionego.

Transformata Legendre'a funkcji Lagrange'a

Zdefiniujmy funkcję Hamiltona H jako transformatę Legendre'a funkcji Lagrange'a $L(q, \dot{q}, t)$

$$H \equiv \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t), \qquad \text{gdzie} \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

a n jest liczbą stopni swobody.
Obliczmy różniczkę zupełną funkcji H

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \mathrm{d}p_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}q_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \dot{p}_i \mathrm{d}q_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równań Lagrange'a II rodzaju i z definicji pędu uogólnionego.

Równania Hamiltona

Wzór

$$\mathrm{d}H = \sum_{i=1}^{n} (\dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \dot{p}_i \mathrm{d}q_i) - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t,$$

pokazuje, że funkcja Hamiltona jest funkcją $2n+1$ zmiennych q_i, p_i, t, a zatem jej różniczka zupełna ma postać:

$$\mathrm{d}H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t.$$

Równania Hamiltona

Wzór

$$\mathrm{d}H = \sum_{i=1}^{n} (\dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \dot{p}_i \mathrm{d}q_i) - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t,$$

pokazuje, że funkcja Hamiltona jest funkcją $2n+1$ zmiennych q_i, p_i, t, a zatem jej różniczka zupełna ma postać:

$$\mathrm{d}H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t.$$

Dla więzów holonomicznych wszystkie zmienne są niezależne, więc możemy porównać współczynniki przy niezależnych przyrostach $\mathrm{d}q_i$, $\mathrm{d}p_i$ i $\mathrm{d}t$,

Równania Hamiltona

Wzór

$$\mathrm{d}H = \sum_{i=1}^{n} (\dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \dot{p}_i \mathrm{d}q_i) - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t,$$

pokazuje, że funkcja Hamiltona jest funkcją $2n+1$ zmiennych q_i, p_i, t, a zatem jej różniczka zupełna ma postać:

$$\mathrm{d}H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t.$$

Dla więzów holonomicznych wszystkie zmienne są niezależne, więc możemy porównać współczynniki przy niezależnych przyrostach $\mathrm{d}q_i$, $\mathrm{d}p_i$ i $\mathrm{d}t$, co daje

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots n \quad \text{i} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Równania Hamiltona

Wzór

$$\mathrm{d}H = \sum_{i=1}^{n} (\dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \dot{p}_i \mathrm{d}q_i) - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t,$$

pokazuje, że funkcja Hamiltona jest funkcją $2n+1$ zmiennych q_i, p_i, t, a zatem jej różniczka zupełna ma postać:

$$\mathrm{d}H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t.$$

Dla więzów holonomicznych wszystkie zmienne są niezależne, więc możemy porównać współczynniki przy niezależnych przyrostach $\mathrm{d}q_i$, $\mathrm{d}p_i$ i $\mathrm{d}t$, co daje

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots n \quad \text{i} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Równania Hamiltona

Układ $2n$ równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots n$$

nazywamy równaniami Hamiltona, albo inaczej równaniami kanonicznymi.

Funkcja Hamiltona dana jest wzorem

$$H(q, p, t) \equiv \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t),$$

Równania Hamiltona

Układ $2n$ równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots n$$

nazywamy równaniami Hamiltona, albo inaczej równaniami kanonicznymi.

Funkcja Hamiltona dana jest wzorem

$$H(q, p, t) \equiv \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t),$$

przy czym prędkości uogólnione $\dot{q}_i$ eliminujemy korzystając z układu równań definiującego pędy kanonicznie sprzężone

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \ldots, n \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t).$$

Równania Hamiltona

Układ $2n$ równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots n$$

nazywamy równaniami Hamiltona, albo inaczej równaniami kanonicznymi.
Funkcja Hamiltona dana jest wzorem

$$H(q, p, t) \equiv \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t),$$

przy czym prędkości uogólnione $\dot{q}_i$ eliminujemy korzystając z układu równań definiującego pędy kanonicznie sprzężone

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \ldots, n \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t).$$

Równania Hamiltona

Jawne zależności od czasu funkcji Lagrange'a i funkcji Hamiltona wiążą się wzorem

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Zauważmy, że w równaniach kanonicznych

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots n$$

współrzędne uogólnione q_i i odpowiadające im pędy p_i,

Równania Hamiltona

Jawne zależności od czasu funkcji Lagrange'a i funkcji Hamiltona wiążą się wzorem

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Zauważmy, że w równaniach kanonicznych

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots n$$

współrzędne uogólnione q_i i odpowiadające im pędy p_i, z wyjątkiem różnicy znaku,

Równania Hamiltona

Jawne zależności od czasu funkcji Lagrange'a i funkcji Hamiltona wiążą się wzorem

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Zauważmy, że w równaniach kanonicznych

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots n$$

współrzędne uogólnione q_i i odpowiadające im pędy p_i, z wyjątkiem różnicy znaku, pełnią *symetryczne* role.

Równania Hamiltona

Jawne zależności od czasu funkcji Lagrange'a i funkcji Hamiltona wiążą się wzorem

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Zauważmy, że w równaniach kanonicznych

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots n$$

współrzędne uogólnione q_i i odpowiadające im pędy p_i, z wyjątkiem różnicy znaku, pełnią *symetryczne* role.
Właśnie to uzasadnia nazwę *pęd kanonicznie sprzężony.*

Równania Hamiltona

Jawne zależności od czasu funkcji Lagrange'a i funkcji Hamiltona wiążą się wzorem

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Zauważmy, że w równaniach kanonicznych

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots n$$

współrzędne uogólnione q_i i odpowiadające im pędy p_i, z wyjątkiem różnicy znaku, pełnią *symetryczne* role.
Właśnie to uzasadnia nazwę *pęd kanonicznie sprzężony.*

Równania Hamiltona

Równania kanoniczne są spełnione dla więzów holonomicznych.
Ich jednoznaczne rozwiązanie wymaga podania $2n$ warunków początkowych na współrzędne i pędy kanonicznie sprzężone

$$q_{i0} = q_i(0), \quad p_{i0} = p_i(0), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Równania Hamiltona

Równania kanoniczne są spełnione dla więzów holonomicznych. Ich jednoznaczne rozwiązanie wymaga podania $2n$ warunków początkowych na współrzędne i pędy kanonicznie sprzężone

$$q_{i0} = q_i(0), \quad p_{i0} = p_i(0), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Równania Hamiltona, które tworzą układ $2n$ równań różniczkowych pierwszego rzędu,

Równania Hamiltona

Równania kanoniczne są spełnione dla więzów holonomicznych. Ich jednoznaczne rozwiązanie wymaga podania $2n$ warunków początkowych na współrzędne i pędy kanonicznie sprzężone

$$q_{i0} = q_i(0), \quad p_{i0} = p_i(0), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Równania Hamiltona, które tworzą układ $2n$ równań różniczkowych pierwszego rzędu, są równoważne równaniom Lagrange'a II-go rodzaju, które tworzą układ n równań różniczkowych drugiego rzędu,

Równania Hamiltona

Równania kanoniczne są spełnione dla więzów holonomicznych. Ich jednoznaczne rozwiązanie wymaga podania $2n$ warunków początkowych na współrzędne i pędy kanonicznie sprzężone

$$q_{i0} = q_i(0), \quad p_{i0} = p_i(0), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Równania Hamiltona, które tworzą układ $2n$ równań różniczkowych pierwszego rzędu, są równoważne równaniom Lagrange'a II-go rodzaju, które tworzą układ n równań różniczkowych drugiego rzędu, tylko jeśli potrafimy wyeliminować prędkości uogólnione z funkcji Hamiltona

$$H = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)$$

Równania Hamiltona

Równania kanoniczne są spełnione dla więzów holonomicznych. Ich jednoznaczne rozwiązanie wymaga podania $2n$ warunków początkowych na współrzędne i pędy kanonicznie sprzężone

$$q_{i0} = q_i(0), \quad p_{i0} = p_i(0), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Równania Hamiltona, które tworzą układ $2n$ równań różniczkowych pierwszego rzędu, są równoważne równaniom Lagrange'a II-go rodzaju, które tworzą układ n równań różniczkowych drugiego rzędu, tylko jeśli potrafimy wyeliminować prędkości uogólnione z funkcji Hamiltona

$$H = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)$$

Równania Hamiltona

korzystając z równań

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}, \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Paul Dirac po raz pierwszy wskazał, że rozwiązanie powyższego układu równań nie zawsze jest możliwe.
P.A.M. Dirac, Canadian Journal of Mathematics 2 (1950) 129.

Równania Hamiltona

korzystając z równań

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}, \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Paul Dirac po raz pierwszy wskazał, że rozwiązanie powyższego układu równań nie zawsze jest możliwe.
P.A.M. Dirac, Canadian Journal of Mathematics 2 (1950) 129.

Przykład 1. Rozważmy układ fizyczny o dwóch stopniach swobody opisywany funkcją Lagrange'a

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - V(q_1, q_2).$$

Równania Hamiltona

korzystając z równań

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}, \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Paul Dirac po raz pierwszy wskazał, że rozwiązanie powyższego układu równań nie zawsze jest możliwe.
P.A.M. Dirac, Canadian Journal of Mathematics 2 (1950) 129.
Przykład 1. Rozważmy układ fizyczny o dwóch stopniach swobody opisywany funkcją Lagrange'a

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - V(q_1, q_2).$$

Równania Hamiltona

Znajdźmy pędy kanonicznie sprzężone do współrzędnych q_1 i q_2

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left[\frac{m}{2}\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)^2 - V(q_1, q_2)\right] = m\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right) \\ p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2}\left[\frac{m}{2}\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)^2 - V(q_1, q_2)\right] = m\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right) \end{cases}$$

Widzimy, że oba pędy są równe, $p_1 = p_2$, a więc z powyższego układu równań nie da się jednoznacznie wyznaczyć prędkości uogólnionych $\dot{q}_1$ i $\dot{q}_2$.

Równania Hamiltona

Znajdźmy pędy kanonicznie sprzężone do współrzędnych q_1 i q_2

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left[\frac{m}{2}\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)^2 - V(q_1, q_2)\right] = m\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right) \\ p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2}\left[\frac{m}{2}\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)^2 - V(q_1, q_2)\right] = m\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right) \end{cases}$$

Widzimy, że oba pędy są równe, $p_1 = p_2$, a więc z powyższego układu równań nie da się jednoznacznie wyznaczyć prędkości uogólnionych $\dot{q}_1$ i $\dot{q}_2$.

Funkcja Hamiltona

Znajdźmy funkcję Hamiltona dla cząstki swobodnej poruszającej się w przestrzeni trójwymiarowej.

Funkcja Lagrange'a dana jest wzorem

$$L = T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2,$$

Funkcja Hamiltona

Znajdźmy funkcję Hamiltona dla cząstki swobodnej poruszającej się w przestrzeni trójwymiarowej.
Funkcja Lagrange'a dana jest wzorem

$$L = T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2,$$

a pęd kanonicznie sprzężony do wektora położenia $\vec{r}$ wyraża się wzorem

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m}.$$

Funkcja Hamiltona

Znajdźmy funkcję Hamiltona dla cząstki swobodnej poruszającej się w przestrzeni trójwymiarowej.
Funkcja Lagrange'a dana jest wzorem

$$L = T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2,$$

a pęd kanonicznie sprzężony do wektora położenia $\vec{r}$ wyraża się wzorem

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m}.$$

Funkcja Hamiltona jest równa

$$H = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{p} - L = \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{p} - \frac{1}{2} m \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\vec{p}}{m} = \frac{\vec{p}^2}{2m}.$$

Funkcja Hamiltona

Znajdźmy funkcję Hamiltona dla cząstki swobodnej poruszającej się w przestrzeni trójwymiarowej.
Funkcja Lagrange'a dana jest wzorem

$$L = T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2,$$

a pęd kanonicznie sprzężony do wektora położenia $\vec{r}$ wyraża się wzorem

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m}.$$

Funkcja Hamiltona jest równa

$$H = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{p} - L = \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{p} - \frac{1}{2} m \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\vec{p}}{m} = \frac{\vec{p}^2}{2m}.$$

Funkcja Hamiltona

Znajdźmy teraz funkcję Hamiltona dla cząstki naładowanej poruszającej się w polu elektromagnetycznym.

Funkcja Lagrange'a takiej cząstki dana jest wzorem

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - q \left(\varphi - \vec{A} \cdot \dot{\vec{r}} \right),$$

gdzie skorzystaliśmy ze wzoru na potencjał uogólniony siły Lorentza (patrz *Wykład 4*).

Funkcja Hamiltona

Znajdźmy teraz funkcję Hamiltona dla cząstki naładowanej poruszającej się w polu elektromagnetycznym.
Funkcja Lagrange'a takiej cząstki dana jest wzorem

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - q \left(\varphi - \vec{A} \cdot \dot{\vec{r}} \right),$$

gdzie skorzystaliśmy ze wzoru na potencjał uogólniony siły Lorentza (patrz *Wykład 4*). Przypomnijmy, że $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$ jest potencjałem skalarnym, a $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ – potencjałem wektorowym pola elektromagnetycznego.

Funkcja Hamiltona

Znajdźmy teraz funkcję Hamiltona dla cząstki naładowanej poruszającej się w polu elektromagnetycznym.
Funkcja Lagrange'a takiej cząstki dana jest wzorem

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - q \left(\varphi - \vec{A} \cdot \dot{\vec{r}} \right),$$

gdzie skorzystaliśmy ze wzoru na potencjał uogólniony siły Lorentza (patrz *Wykład 4*). Przypomnijmy, że $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$ jest potencjałem skalarnym, a $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ – potencjałem wektorowym pola elektromagnetycznego.
Pęd kanonicznie sprzężony wyraża się wzorem

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \frac{1}{m} \left(\vec{p} - q\vec{A} \right),$$

Funkcja Hamiltona

Znajdźmy teraz funkcję Hamiltona dla cząstki naładowanej poruszającej się w polu elektromagnetycznym.
Funkcja Lagrange'a takiej cząstki dana jest wzorem

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - q \left(\varphi - \vec{A} \cdot \dot{\vec{r}} \right),$$

gdzie skorzystaliśmy ze wzoru na potencjał uogólniony siły Lorentza (patrz *Wykład 4*). Przypomnijmy, że $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$ jest potencjałem skalarnym, a $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ – potencjałem wektorowym pola elektromagnetycznego.
Pęd kanonicznie sprzężony wyraża się wzorem

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \frac{1}{m} \left(\vec{p} - q\vec{A} \right),$$

Funkcja Hamiltona

a funkcja Hamiltona jest równa

$$
\begin{aligned}
H &= \dot{\vec{r}}\vec{p} - L = \dot{\vec{r}} \cdot \left(m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}\right) - \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + q\varphi - q\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}} \\
&= \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + q\varphi = \frac{1}{2}m\left[\frac{1}{m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)\right]^2 + q\varphi.
\end{aligned}
$$

Porównując funkcje Hamiltona cząstki swobodnej i cząstki w polu elektromagnetycznym

$$
H = \frac{\vec{p}^2}{2m} \qquad \text{i} \qquad H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 + q\varphi
$$

Funkcja Hamiltona

a funkcja Hamiltona jest równa

$$\begin{aligned} H &= \dot{\vec{r}}\vec{p} - L = \dot{\vec{r}} \cdot \left(m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}\right) - \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + q\varphi - q\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + q\varphi = \frac{1}{2}m\left[\frac{1}{m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)\right]^2 + q\varphi. \end{aligned}$$

Porównując funkcje Hamiltona cząstki swobodnej i cząstki w polu elektromagnetycznym

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} \qquad \text{i} \qquad H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 + q\varphi$$

widzimy, że uwzględnienie oddziaływania z zewnętrznym polem polega na zamianie

$$\vec{p} \longrightarrow \vec{p} - q\vec{A}$$

Funkcja Hamiltona

a funkcja Hamiltona jest równa

$$\begin{aligned} H &= \dot{\vec{r}}\vec{p} - L = \dot{\vec{r}} \cdot \left(m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}\right) - \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + q\varphi - q\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + q\varphi = \frac{1}{2}m\left[\frac{1}{m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)\right]^2 + q\varphi. \end{aligned}$$

Porównując funkcje Hamiltona cząstki swobodnej i cząstki w polu elektromagnetycznym

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} \qquad \text{i} \qquad H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 + q\varphi$$

widzimy, że uwzględnienie oddziaływania z zewnętrznym polem polega na zamianie

$$\vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A}$$

Funkcja i równania Hamiltona

oraz dodaniu wyrazu $q\varphi$ reprezentującego energię oddziaływania ładunku q z polem elektrycznym.

Jest to tak zwana reguła minimalnego sprzężenia cząstki naładowanej z zewnętrznym polem elektromagnetycznym.

Funkcja i równania Hamiltona

oraz dodaniu wyrazu $q\varphi$ reprezentującego energię oddziaływania ładunku q z polem elektrycznym.
Jest to tak zwana reguła minimalnego sprzężenia cząstki naładowanej z zewnętrznym polem elektromagnetycznym.
Jako przykład zastosowania tej reguły oraz równań Hamiltona rozważmy ruch cząstki naładowanej w stałym jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$.

Funkcja i równania Hamiltona

oraz dodaniu wyrazu $q\varphi$ reprezentującego energię oddziaływania ładunku q z polem elektrycznym.
Jest to tak zwana reguła minimalnego sprzężenia cząstki naładowanej z zewnętrznym polem elektromagnetycznym.
Jako przykład zastosowania tej reguły oraz równań Hamiltona rozważmy ruch cząstki naładowanej w stałym jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$.
Przykład 2. Wybierzmy osie układu współrzędnych tak aby $\vec{B} = (0, 0, B)$, gdzie $B = \mathrm{const}$. Ładunek elektryczny cząstki q przyjmujemy za dany, a natężenie pola elektrycznego $\vec{E} = 0$.

Funkcja i równania Hamiltona

oraz dodaniu wyrazu $q\varphi$ reprezentującego energię oddziaływania ładunku q z polem elektrycznym.
Jest to tak zwana reguła minimalnego sprzężenia cząstki naładowanej z zewnętrznym polem elektromagnetycznym.
Jako przykład zastosowania tej reguły oraz równań Hamiltona rozważmy ruch cząstki naładowanej w stałym jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$.
Przykład 2. Wybierzmy osie układu współrzędnych tak aby $\vec{B} = (0, 0, B)$, gdzie $B = \mathrm{const}$. Ładunek elektryczny cząstki q przyjmujemy za dany, a natężenie pola elektrycznego $\vec{E} = 0$.

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Natężenie pola elektrycznego i indukcja magnetyczna wiążą się z potencjałami wzorami

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} \quad , \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t) \, .$$

Pole magnetyczne jest statyczne i jednorodne więc

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \, ,$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Natężenie pola elektrycznego i indukcja magnetyczna wiążą się z potencjałami wzorami

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} \quad , \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t) \, .$$

Pole magnetyczne jest statyczne i jednorodne więc

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \, ,$$

a pole elektryczne $\vec{E} = 0$, skąd

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r})}{\partial t} = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\vec{r},t) = \varphi(t) \, .$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Natężenie pola elektrycznego i indukcja magnetyczna wiążą się z potencjałami wzorami

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} \quad , \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t) \, .$$

Pole magnetyczne jest statyczne i jednorodne więc

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \, ,$$

a pole elektryczne $\vec{E} = 0$, skąd

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r})}{\partial t} = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\vec{r},t) = \varphi(t) \, .$$

Przyjmijmy dla prostoty $\varphi = 0$.

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Natężenie pola elektrycznego i indukcja magnetyczna wiążą się z potencjałami wzorami

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} \quad , \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t) \, .$$

Pole magnetyczne jest statyczne i jednorodne więc

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \, ,$$

a pole elektryczne $\vec{E} = 0$, skąd

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r})}{\partial t} = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\vec{r},t) = \varphi(t) \, .$$

Przyjmijmy dla prostoty $\varphi = 0$.

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Równanie

$$\vec{B} = (0, 0, B) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

możemy rozpisać w składowych

$$\begin{cases} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B. \end{cases}$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Równanie

$$\vec{B} = (0, 0, B) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

możemy rozpisać w składowych

$$\begin{cases} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B. \end{cases}$$

Zauważmy, że funkcja:

$$\vec{A} = (0, xB, 0)$$

jest rozwiązaniem tego układu równań.

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Równanie

$$\vec{B} = (0, 0, B) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

możemy rozpisać w składowych

$$\begin{cases} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B. \end{cases}$$

Zauważmy, że funkcja:

$$\vec{A} = (0, xB, 0)$$

jest rozwiązaniem tego układu równań.

Innym rozwiązaniem jest funkcja

$$\vec{A}' = (-yB, 0, 0).$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Równanie

$$\vec{B} = (0, 0, B) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

możemy rozpisać w składowych

$$\begin{cases} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B. \end{cases}$$

Zauważmy, że funkcja:

$$\vec{A} = (0, xB, 0)$$

jest rozwiązaniem tego układu równań.

Innym rozwiązaniem jest funkcja

$$\vec{A}' = (-yB, 0, 0).$$

Istnienie więcej niż jednego rozwiązania wiąże się z

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Równanie

$$\vec{B} = (0, 0, B) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

możemy rozpisać w składowych

$$\begin{cases} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B. \end{cases}$$

Zauważmy, że funkcja:

$$\vec{A} = (0, xB, 0)$$

jest rozwiązaniem tego układu równań.

Innym rozwiązaniem jest funkcja

$$\vec{A}' = (-yB, 0, 0).$$

Istnienie więcej niż jednego rozwiązania wiąże się z

Cząstka w stałym polu magnetycznym

niezmienniczością cechowania elektrodynamiki, która polega na tym, że potencjały możemy *przecechować* nie zmieniając wektorów $\vec{E}$ i $\vec{B}$.

Cząstka w stałym polu magnetycznym

niezmienniczością cechowania elektrodynamiki, która polega na tym, że potencjały możemy *przecechować* nie zmieniając wektorów $\vec{E}$ i $\vec{B}$. W szczególności, rozważmy transformację cechowania

$$\vec{A} \;\rightarrow\; \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda(\vec{r}),$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

niezmienniczością cechowania elektrodynamiki, która polega na tym, że potencjały możemy *przecechować* nie zmieniając wektorów $\vec{E}$ i $\vec{B}$. W szczególności, rozważmy transformację cechowania

$$\vec{A} \;\rightarrow\; \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda(\vec{r}),$$

przy której wektor indukcji przekształci się następująco

$$\vec{B}' \;=\; \vec{\nabla} \times \vec{A}'$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

niezmienniczością cechowania elektrodynamiki, która polega na tym, że potencjały możemy *przecechować* nie zmieniając wektorów $\vec{E}$ i $\vec{B}$. W szczególności, rozważmy transformację cechowania

$$\vec{A} \;\rightarrow\; \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda(\vec{r}),$$

przy której wektor indukcji przekształci się następująco

$$\vec{B}' \;=\; \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{A}}_{\vec{B}} + \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\lambda\right)$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

niezmienniczością cechowania elektrodynamiki, która polega na tym, że potencjały możemy *przecechować* nie zmieniając wektorów $\vec{E}$ i $\vec{B}$. W szczególności, rozważmy transformację cechowania

$$\vec{A} \;\rightarrow\; \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda(\vec{r}),$$

przy której wektor indukcji przekształci się następująco

$$\vec{B}' \;=\; \vec{\nabla}\times\vec{A}' = \underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{A}}_{\vec{B}} + \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\lambda\right) = \vec{B} + \hat{e}_i\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\vec{\nabla}\lambda\right)_k$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

niezmienniczością cechowania elektrodynamiki, która polega na tym, że potencjały możemy *przecechować* nie zmieniając wektorów $\vec{E}$ i $\vec{B}$. W szczególności, rozważmy transformację cechowania

$$\vec{A} \;\rightarrow\; \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda(\vec{r}),$$

przy której wektor indukcji przekształci się następująco

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{A}}_{\vec{B}} + \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\lambda\right) = \vec{B} + \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\vec{\nabla}\lambda\right)_k$$

$$=$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

niezmienniczością cechowania elektrodynamiki, która polega na tym, że potencjały możemy *przecechować* nie zmieniając wektorów $\vec{E}$ i $\vec{B}$. W szczególności, rozważmy transformację cechowania

$$\vec{A} \;\rightarrow\; \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda(\vec{r}),$$

przy której wektor indukcji przekształci się następująco

$$\begin{aligned}\vec{B}' &= \vec{\nabla}\times\vec{A}' = \underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{A}}_{\vec{B}} + \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\lambda\right) = \vec{B} + \hat{e}_i\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\vec{\nabla}\lambda\right)_k \\ &= \vec{B} + \hat{e}_i\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_k}\right)\end{aligned}$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

niezmienniczością cechowania elektrodynamiki, która polega na tym, że potencjały możemy *przecechować* nie zmieniając wektorów $\vec{E}$ i $\vec{B}$. W szczególności, rozważmy transformację cechowania

$$\vec{A} \;\rightarrow\; \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda(\vec{r}),$$

przy której wektor indukcji przekształci się następująco

$$\begin{aligned}
\vec{B}' &= \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{A}}_{\vec{B}} + \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\lambda\right) = \vec{B} + \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\vec{\nabla}\lambda\right)_k \\
&= \vec{B} + \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_k}\right) = \vec{B} + \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_j \partial x_k}
\end{aligned}$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

niezmienniczością cechowania elektrodynamiki, która polega na tym, że potencjały możemy *przecechować* nie zmieniając wektorów $\vec{E}$ i $\vec{B}$. W szczególności, rozważmy transformację cechowania

$$\vec{A} \;\rightarrow\; \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda(\vec{r}),$$

przy której wektor indukcji przekształci się następująco

$$\begin{aligned}
\vec{B}' &= \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{A}}_{\vec{B}} + \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\lambda\right) = \vec{B} + \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\vec{\nabla}\lambda\right)_k \\
&= \vec{B} + \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_k}\right) = \vec{B} + \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_j \partial x_k} = \vec{B},
\end{aligned}$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

niezmienniczością cechowania elektrodynamiki, która polega na tym, że potencjały możemy *przecechować* nie zmieniając wektorów $\vec{E}$ i $\vec{B}$. W szczególności, rozważmy transformację cechowania

$$\vec{A} \;\rightarrow\; \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda(\vec{r}),$$

przy której wektor indukcji przekształci się następująco

$$\begin{aligned}\vec{B}' &= \vec{\nabla}\times\vec{A}' = \underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{A}}_{\vec{B}} + \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\lambda\right) = \vec{B} + \hat{e}_i\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\vec{\nabla}\lambda\right)_k \\ &= \vec{B} + \hat{e}_i\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_k}\right) = \vec{B} + \hat{e}_i\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_j\partial x_k} = \vec{B},\end{aligned}$$

gdzie drugi wyraz po lewej stronie ostatniej równości znika,

Cząstka w stałym polu magnetycznym

niezmienniczością cechowania elektrodynamiki, która polega na tym, że potencjały możemy *przecechować* nie zmieniając wektorów $\vec{E}$ i $\vec{B}$. W szczególności, rozważmy transformację cechowania

$$\vec{A} \;\rightarrow\; \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda(\vec{r}),$$

przy której wektor indukcji przekształci się następująco

$$\begin{aligned}\vec{B}' &= \vec{\nabla}\times\vec{A}' = \underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{A}}_{\vec{B}} + \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\lambda\right) = \vec{B} + \hat{e}_i\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\vec{\nabla}\lambda\right)_k \\ &= \vec{B} + \hat{e}_i\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_k}\right) = \vec{B} + \hat{e}_i\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_j\partial x_k} = \vec{B},\end{aligned}$$

gdzie drugi wyraz po lewej stronie ostatniej równości znika,

Cząstka w stałym polu magnetycznym

gdyż jest zwężeniem tensora antysymetrycznego ε_{ijk} z tensorem symetrycznym $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_j \partial x_k}$. Rzeczywiście

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_j \partial x_k} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ikj} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_k \partial x_j} \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_j \partial x_k} = 0,
\end{aligned}$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

gdyż jest zwężeniem tensora antysymetrycznego ε_{ijk} z tensorem symetrycznym $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_j \partial x_k}$. Rzeczywiście

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_j \partial x_k} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ikj} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_k \partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_j \partial x_k} = 0, \end{aligned}$$

gdzie w drugim wyrazie po prawej stronie pierwszej równości dokonaliśmy zamiany wskaźników sumacyjnych $j \leftrightarrow k$,

Cząstka w stałym polu magnetycznym

gdyż jest zwężeniem tensora antysymetrycznego ε_{ijk} z tensorem symetrycznym $\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_j \partial x_k}$. Rzeczywiście

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_j \partial x_k} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ikj}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_k \partial x_j} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_j \partial x_k} = 0,
\end{aligned}$$

gdzie w drugim wyrazie po prawej stronie pierwszej równości dokonaliśmy zamiany wskaźników sumacyjnych $j \leftrightarrow k$, a w ostatniej równości skorzystaliśmy z antysymetrii tensora ε_{ijk} i przestawiliśmy pochodne, co jest możliwe, jeśli $\lambda(\vec{r})$ jest funkcją klasy $\mathcal{C}^2$.

Cząstka w stałym polu magnetycznym

gdyż jest zwężeniem tensora antysymetrycznego ε_{ijk} z tensorem symetrycznym $\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_j \partial x_k}$. Rzeczywiście

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_j \partial x_k} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ikj}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_k \partial x_j} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_j \partial x_k} = 0,
\end{aligned}$$

gdzie w drugim wyrazie po prawej stronie pierwszej równości dokonaliśmy zamiany wskaźników sumacyjnych $j \leftrightarrow k$, a w ostatniej równości skorzystaliśmy z antysymetrii tensora ε_{ijk} i przestawiliśmy pochodne, co jest możliwe, jeśli $\lambda(\vec{r})$ jest funkcją klasy $\mathcal{C}^2$.

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Wybierzmy pierwsze rozwiązanie

$$\vec{A} = (0, xB, 0)$$

i zmodyfikujmy odpowiednio funkcję Hamiltona cząstki swobodnej

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Wybierzmy pierwsze rozwiązanie

$$\vec{A} = (0, xB, 0)$$

i zmodyfikujmy odpowiednio funkcję Hamiltona cząstki swobodnej

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$$

podstawiając $\vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A} = (p_x, p_y - qxB, p_z)$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_z^2\right) + \frac{1}{2m}\left(p_y - qxB\right)^2 .$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Wybierzmy pierwsze rozwiązanie

$$\vec{A} = (0, xB, 0)$$

i zmodyfikujmy odpowiednio funkcję Hamiltona cząstki swobodnej

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$$

podstawiając $\vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A} = (p_x, p_y - qxB, p_z)$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_z^2\right) + \frac{1}{2m}\left(p_y - qxB\right)^2 .$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Wstawmy funkcję Hamiltona

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_z^2\right) + \frac{1}{2m}\left(p_y - qxB\right)^2$$

do równań Hamiltona

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \text{gdzie} \quad q_i = x, y, z.$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m},$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Wstawmy funkcję Hamiltona

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_z^2\right) + \frac{1}{2m}\left(p_y - qxB\right)^2$$

do równań Hamiltona

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \text{gdzie} \quad q_i = x, y, z.$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \qquad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{m}\left(p_y - qxB\right)\left(-qB\right),$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Wstawmy funkcję Hamiltona

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_z^2\right) + \frac{1}{2m}\left(p_y - qxB\right)^2$$

do równań Hamiltona

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \text{gdzie} \quad q_i = x, y, z.$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \qquad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{m}\left(p_y - qxB\right)\left(-qB\right),$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{1}{m}\left(p_y - qxB\right),$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Wstawmy funkcję Hamiltona

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_z^2\right) + \frac{1}{2m}\left(p_y - qxB\right)^2$$

do równań Hamiltona

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \text{gdzie} \quad q_i = x, y, z.$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \qquad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{m}\left(p_y - qxB\right)\left(-qB\right),$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{1}{m}\left(p_y - qxB\right), \qquad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0,$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Wstawmy funkcję Hamiltona

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_z^2\right) + \frac{1}{2m}\left(p_y - qxB\right)^2$$

do równań Hamiltona

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \text{gdzie} \quad q_i = x, y, z.$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \qquad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{m}\left(p_y - qxB\right)\left(-qB\right),$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{1}{m}\left(p_y - qxB\right), \qquad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0,$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m},$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Wstawmy funkcję Hamiltona

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_z^2\right) + \frac{1}{2m}\left(p_y - qxB\right)^2$$

do równań Hamiltona

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \text{gdzie} \quad q_i = x, y, z.$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \qquad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{m}\left(p_y - qxB\right)\left(-qB\right),$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{1}{m}\left(p_y - qxB\right), \qquad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0,$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}, \qquad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0.$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Wstawmy funkcję Hamiltona

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_z^2\right) + \frac{1}{2m}\left(p_y - qxB\right)^2$$

do równań Hamiltona

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \text{gdzie} \quad q_i = x, y, z.$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \qquad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{m}\left(p_y - qxB\right)\left(-qB\right),$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{1}{m}\left(p_y - qxB\right), \qquad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0,$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}, \qquad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0.$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Uporządkujmy ten układ równań

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{p_x}{m}, & \dot{p}_x = \frac{qB}{m}\left(p_y - qBx\right), \\ \dot{y} = \frac{1}{m}\left(p_y - qBx\right), & \dot{p}_y = 0, \\ \dot{z} = \frac{p_z}{m}, & \dot{p}_z = 0 \end{cases}$$

i wprowadźmy oznaczenie

$$\omega \equiv \frac{qB}{m} - \text{częstość cyklotronowa.}$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Uporządkujmy ten układ równań

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{p_x}{m}, & \dot{p}_x = \frac{qB}{m}\left(p_y - qBx\right), \\ \dot{y} = \frac{1}{m}\left(p_y - qBx\right), & \dot{p}_y = 0, \\ \dot{z} = \frac{p_z}{m}, & \dot{p}_z = 0 \end{cases}$$

i wprowadźmy oznaczenie

$$\omega \equiv \frac{qB}{m} - \text{częstość cyklotronowa.}$$

$$\begin{cases} p_x = m\dot{x}, & \dot{p}_x = \omega(p_y - m\omega x), \\ p_y = m(\dot{y} + \omega x), & \dot{p}_y = 0 \;\Rightarrow\; p_y = \text{const}, \\ p_z = m\dot{z}, & \dot{p}_z = 0 \;\Rightarrow\; p_z = \text{const}. \end{cases}$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Uporządkujmy ten układ równań

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{p_x}{m}, & \dot{p}_x = \frac{qB}{m}\left(p_y - qBx\right), \\ \dot{y} = \frac{1}{m}\left(p_y - qBx\right), & \dot{p}_y = 0, \\ \dot{z} = \frac{p_z}{m}, & \dot{p}_z = 0 \end{cases}$$

i wprowadźmy oznaczenie

$$\omega \equiv \frac{qB}{m} - \text{częstość cyklotronowa.}$$

$$\begin{cases} p_x = m\dot{x}, & \dot{p}_x = \omega(p_y - m\omega x), \\ p_y = m(\dot{y} + \omega x), & \dot{p}_y = 0 \;\Rightarrow\; p_y = \text{const}, \\ p_z = m\dot{z}, & \dot{p}_z = 0 \;\Rightarrow\; p_z = \text{const}. \end{cases}$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Ostatnia para równań daje

$$\dot{z}(t) = \frac{p_z}{m} = \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad z(t) = \frac{p_z}{m} t + z_0,$$

a więc w kierunku osi Oz cząstka porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Ostatnia para równań daje

$$\dot{z}(t) = \frac{p_z}{m} = \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad z(t) = \frac{p_z}{m} t + z_0,$$

a więc w kierunku osi Oz cząstka porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Wstawiając $p_x = m\dot{x}$ do równania na $\dot{p}_x$ otrzymamy

$$m\ddot{x} + m\omega^2 x = \omega p_y \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = \frac{\omega p_y}{m} = \mathrm{const.}$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Ostatnia para równań daje

$$\dot{z}(t) = \frac{p_z}{m} = \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad z(t) = \frac{p_z}{m} t + z_0,$$

a więc w kierunku osi Oz cząstka porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Wstawiając $p_x = m\dot{x}$ do równania na $\dot{p}_x$ otrzymamy

$$m\ddot{x} + m\omega^2 x = \omega p_y \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = \frac{\omega p_y}{m} = \mathrm{const}.$$

Rozwiązanie ogólne $x(t)$ takiego niejednorodnego równania różniczkowego jest sumą

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t),$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Ostatnia para równań daje

$$\dot{z}(t) = \frac{p_z}{m} = \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad z(t) = \frac{p_z}{m} t + z_0,$$

a więc w kierunku osi Oz cząstka porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.
Wstawiając $p_x = m\dot{x}$ do równania na $\dot{p}_x$ otrzymamy

$$m\ddot{x} + m\omega^2 x = \omega p_y \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = \frac{\omega p_y}{m} = \mathrm{const}.$$

Rozwiązanie ogólne $x(t)$ takiego niejednorodnego równania różniczkowego jest sumą

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t),$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

gdzie $x_0(t)$ jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0,$$

a $x_1(t)$ jest rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{\omega p_y}{m}.$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

gdzie $x_0(t)$ jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0,$$

a $x_1(t)$ jest rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{\omega p_y}{m}.$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego ma postać

$$x_0(t) = A \sin(\omega t + \delta),$$

gdzie A i δ są stałymi dowolnymi.

Cząstka w stałym polu magnetycznym

gdzie $x_0(t)$ jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0,$$

a $x_1(t)$ jest rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{\omega p_y}{m}.$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego ma postać

$$x_0(t) = A \sin(\omega t + \delta),$$

gdzie A i δ są stałymi dowolnymi. W celu sprawdzenia obliczmy

$$\dot{x}_0(t) = \omega A \cos(\omega t + \delta) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_0(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \delta) = -\omega^2 x_0(t).$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

gdzie $x_0(t)$ jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0,$$

a $x_1(t)$ jest rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{\omega p_y}{m}.$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego ma postać

$$x_0(t) = A \sin(\omega t + \delta),$$

gdzie A i δ są stałymi dowolnymi. W celu sprawdzenia obliczmy

$$\dot{x}_0(t) = \omega A \cos(\omega t + \delta) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_0(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \delta) = -\omega^2 x_0(t).$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Poszukajmy szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{\omega p_y}{m}.$$

w formie stałej $x_1(t) = C$. Wstawiając tą postać do równania otrzymamy

$$\omega^2 C = \frac{\omega p_y}{m} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{p_y}{m\omega}.$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Poszukajmy szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{\omega p_y}{m}.$$

w formie stałej $x_1(t) = C$. Wstawiając tą postać do równania otrzymamy

$$\omega^2 C = \frac{\omega p_y}{m} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{p_y}{m\omega}.$$

W takim razie ogólne rozwiązanie naszego równania ma postać

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta) + \frac{p_y}{m\omega}.$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Poszukajmy szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{\omega p_y}{m}.$$

w formie stałej $x_1(t) = C$. Wstawiając tą postać do równania otrzymamy

$$\omega^2 C = \frac{\omega p_y}{m} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{p_y}{m\omega}.$$

W takim razie ogólne rozwiązanie naszego równania ma postać

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta) + \frac{p_y}{m\omega}.$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Wstawmy znalezione rozwiązanie $x(t)$ do równania na $\dot{y}$

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m} - \omega x,$$

wówczas dostaniemy równanie

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m} - \omega \left[A \sin(\omega t + \delta) + \frac{p_y}{m\omega} \right] = -A\omega \sin(\omega t + \delta),$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Wstawmy znalezione rozwiązanie $x(t)$ do równania na $\dot{y}$

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m} - \omega x,$$

wówczas dostaniemy równanie

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m} - \omega \left[A \sin(\omega t + \delta) + \frac{p_y}{m\omega} \right] = -A\omega \sin(\omega t + \delta),$$

skąd po obustronnym scałkowaniu otrzymamy

$$y(t) = A \cos(\omega t + \delta) + C_1,$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Wstawmy znalezione rozwiązanie $x(t)$ do równania na $\dot{y}$

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m} - \omega x,$$

wówczas dostaniemy równanie

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m} - \omega \left[A \sin(\omega t + \delta) + \frac{p_y}{m\omega} \right] = -A\omega \sin(\omega t + \delta),$$

skąd po obustronnym scałkowaniu otrzymamy

$$y(t) = A \cos(\omega t + \delta) + C_1,$$

gdzie dowolną stałą addytywną oznaczyliśmy C_1.

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Wstawmy znalezione rozwiązanie $x(t)$ do równania na $\dot{y}$

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m} - \omega x,$$

wówczas dostaniemy równanie

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m} - \omega \left[A \sin(\omega t + \delta) + \frac{p_y}{m\omega} \right] = -A\omega \sin(\omega t + \delta),$$

skąd po obustronnym scałkowaniu otrzymamy

$$y(t) = A \cos(\omega t + \delta) + C_1,$$

gdzie dowolną stałą addytywną oznaczyliśmy C_1.

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Podsumujmy wyniki

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &\equiv x(t) - \frac{p_y}{m\omega} = A\sin(\omega t + \delta), \\ \bar{y}(t) &\equiv y(t) - C_1 = A\cos(\omega t + \delta). \end{aligned}$$

Podnieśmy każde z równań do kwadratu i dodajmy stronami

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = A^2 \equiv r^2 = \mathrm{const.}$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Podsumujmy wyniki

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &\equiv x(t) - \frac{p_y}{m\omega} = A\sin(\omega t + \delta), \\ \bar{y}(t) &\equiv y(t) - C_1 = A\cos(\omega t + \delta). \end{aligned}$$

Podnieśmy każde z równań do kwadratu i dodajmy stronami

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = A^2 \equiv r^2 = \mathrm{const.}$$

Otrzymaliśmy równanie okręgu.

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} \bar{x}(t) &= r\sin(\omega t + \delta) \\ \bar{y}(t) &= r\cos(\omega t + \delta) \end{aligned}\right\} \text{ ruch jednostajny po okręgu,} \\ z(t) = \frac{p_z}{m}t + z \quad \text{– ruch jednostajny prostoliniowy.} \end{cases}$$

Cząstka w stałym polu magnetycznym

Podsumujmy wyniki

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &\equiv x(t) - \frac{p_y}{m\omega} = A\sin(\omega t + \delta), \\ \bar{y}(t) &\equiv y(t) - C_1 = A\cos(\omega t + \delta). \end{aligned}$$

Podnieśmy każde z równań do kwadratu i dodajmy stronami

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = A^2 \equiv r^2 = \mathrm{const.}$$

Otrzymaliśmy równanie okręgu.

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} \bar{x}(t) &= r\sin(\omega t + \delta) \\ \bar{y}(t) &= r\cos(\omega t + \delta) \end{aligned}\right\} \text{ ruch jednostajny po okręgu,} \\ z(t) = \frac{p_z}{m}t + z \quad \text{– ruch jednostajny prostoliniowy.} \end{cases}$$

Równania Hamiltona

Podany sposób konstrukcji funkcji Hamiltona jest żmudny.

Jeśli więzy są skleronomiczne,

Równania Hamiltona

Podany sposób konstrukcji funkcji Hamiltona jest żmudny.
Jeśli więzy są skleronomiczne, nie wykonujemy transformacji do układu poruszającego się,

Równania Hamiltona

Podany sposób konstrukcji funkcji Hamiltona jest żmudny.
Jeśli więzy są skleronomiczne, nie wykonujemy transformacji do układu poruszającego się, a siły są zachowawcze,

Równania Hamiltona

Podany sposób konstrukcji funkcji Hamiltona jest żmudny.
Jeśli więzy są skleronomiczne, nie wykonujemy transformacji do układu poruszającego się, a siły są zachowawcze, to funkcja Hamiltona wyraża się wzorem

Równania Hamiltona

Podany sposób konstrukcji funkcji Hamiltona jest żmudny. Jeśli więzy są skleronomiczne, nie wykonujemy transformacji do układu poruszającego się, a siły są zachowawcze, to funkcja Hamiltona wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - (T - V) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - T + V \\ &= 2T - T + V = T + V = E, \end{aligned}$$

Równania Hamiltona

Podany sposób konstrukcji funkcji Hamiltona jest żmudny. Jeśli więzy są skleronomiczne, nie wykonujemy transformacji do układu poruszającego się, a siły są zachowawcze, to funkcja Hamiltona wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - (T - V) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - T + V \\ &= 2T - T + V = T + V = E, \end{aligned}$$

a więc jest równa całkowitej energii układu.

Równania Hamiltona

Podany sposób konstrukcji funkcji Hamiltona jest żmudny. Jeśli więzy są skleronomiczne, nie wykonujemy transformacji do układu poruszającego się, a siły są zachowawcze, to funkcja Hamiltona wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - (T - V) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - T + V \\ &= 2T - T + V = T + V = E, \end{aligned}$$

a więc jest równa całkowitej energii układu.

Przykład 3. Cząstka trójatomowa wykonuje drgania liniowe. Dwa skrajne atomy mają masę m_1, a masa atomu centralnego jest równa m_2. Oddziaływanie pomiędzy atomami zależy od ich wzajemnej odległości.

Równania Hamiltona

Podany sposób konstrukcji funkcji Hamiltona jest żmudny. Jeśli więzy są skleronomiczne, nie wykonujemy transformacji do układu poruszającego się, a siły są zachowawcze, to funkcja Hamiltona wyraża się wzorem

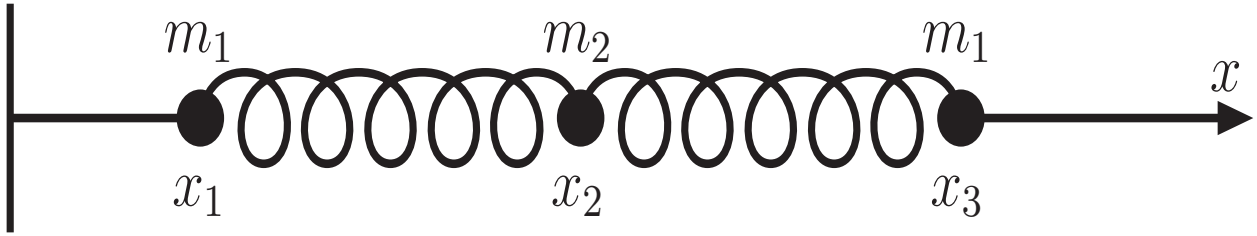
$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - (T - V) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - T + V \\ &= 2T - T + V = T + V = E, \end{aligned}$$

a więc jest równa całkowitej energii układu.

Przykład 3. Cząstka trójatomowa wykonuje drgania liniowe. Dwa skrajne atomy mają masę m_1, a masa atomu centralnego jest równa m_2. Oddziaływanie pomiędzy atomami zależy od ich wzajemnej odległości.

Cząstka trójatomowa

Reprezentujemy je przez sprężyny.

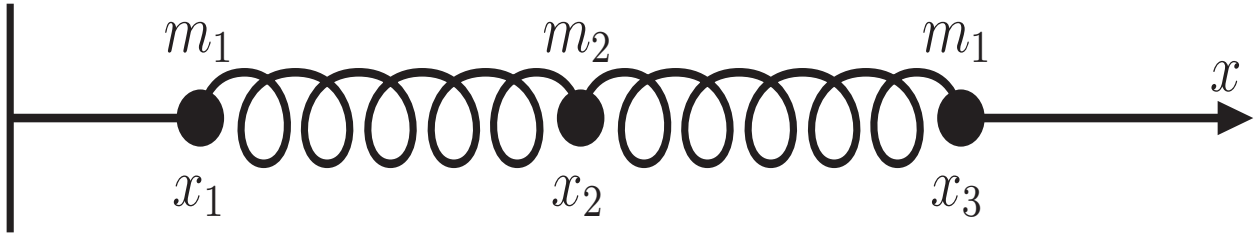


Funkcja Hamiltona w tym przypadku jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej

$$H = T + V = \frac{1}{2m_1}\left(p_1^2 + p_3^2\right) + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{K}{2}\left(x_2 - x_1\right)^2 + \frac{K}{2}\left(x_3 - x_2\right)^2 .$$

Cząstka trójatomowa

Reprezentujemy je przez sprężyny.



Funkcja Hamiltona w tym przypadku jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej

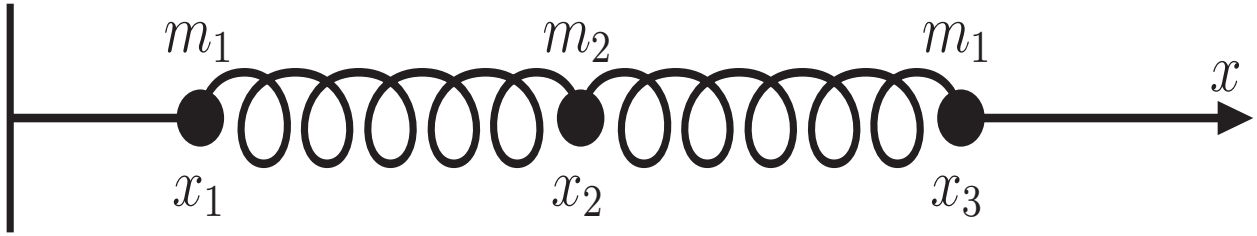
$$H = T + V = \frac{1}{2m_1}\left(p_1^2 + p_3^2\right) + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{K}{2}\left(x_2 - x_1\right)^2 + \frac{K}{2}\left(x_3 - x_2\right)^2 .$$

Postać energii potencjalnej wynika z prawa Hooke'a

$$F = -Kx, \quad \text{ale} \quad F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \quad \Leftrightarrow \quad V = \frac{1}{2}Kx^2.$$

Cząstka trójatomowa

Reprezentujemy je przez sprężyny.



Funkcja Hamiltona w tym przypadku jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej

$$H = T + V = \frac{1}{2m_1}\left(p_1^2 + p_3^2\right) + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{K}{2}\left(x_2 - x_1\right)^2 + \frac{K}{2}\left(x_3 - x_2\right)^2 .$$

Postać energii potencjalnej wynika z prawa Hooke'a

$$F = -Kx, \quad \text{ale} \quad F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \quad \Leftrightarrow \quad V = \frac{1}{2}Kx^2.$$

Cząstka trójatomowa

$$H = \frac{1}{2m_1}\left(p_1^2 + p_3^2\right) + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{K}{2}\left(x_2 - x_1\right)^2 + \frac{K}{2}\left(x_3 - x_2\right)^2$$

prowadzi do następujących równań ruchu

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m_1}, \qquad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -K(x_2 - x_1)\cdot(-1),$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m_2}, \qquad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -K(x_2 - x_1) - K(x_3 - x_2)\cdot(-1),$$

$$\dot{x}_3 = \frac{\partial H}{\partial p_3} = \frac{p_3}{m_1}, \qquad \dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = -K(x_3 - x_2).$$

Cząstka trójatomowa

$$H = \frac{1}{2m_1}\left(p_1^2 + p_3^2\right) + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{K}{2}\left(x_2 - x_1\right)^2 + \frac{K}{2}\left(x_3 - x_2\right)^2$$

prowadzi do następujących równań ruchu

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m_1}, \qquad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -K(x_2 - x_1)\cdot(-1),$$
$$\dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m_2}, \qquad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -K(x_2 - x_1) - K(x_3 - x_2)\cdot(-1),$$
$$\dot{x}_3 = \frac{\partial H}{\partial p_3} = \frac{p_3}{m_1}, \qquad \dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = -K(x_3 - x_2).$$

Taki układ 6 równań pierwszego rzędu wcale nie jest prostszy niż układ 3 równań drugiego rzędu.

Cząstka trójatomowa

$$H = \frac{1}{2m_1}\left(p_1^2 + p_3^2\right) + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{K}{2}\left(x_2 - x_1\right)^2 + \frac{K}{2}\left(x_3 - x_2\right)^2$$

prowadzi do następujących równań ruchu

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m_1}, \qquad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -K(x_2 - x_1)\cdot(-1),$$
$$\dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m_2}, \qquad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -K(x_2 - x_1) - K(x_3 - x_2)\cdot(-1),$$
$$\dot{x}_3 = \frac{\partial H}{\partial p_3} = \frac{p_3}{m_1}, \qquad \dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = -K(x_3 - x_2).$$

Taki układ 6 równań pierwszego rzędu wcale nie jest prostszy niż układ 3 równań drugiego rzędu.

Cząstka trójatomowa

Eliminując pędy dostaniemy układ równań drugiego rzędu

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = K(x_2 - x_1), \\ m_2\ddot{x}_2 = K(x_1 - 2x_2 + x_3), \\ m_1\ddot{x}_3 = -K(x_3 - x_2). \end{cases}$$

Poszukujemy rozwiązań w postaci drgań własnych,

Cząstka trójatomowa

Eliminując pędy dostaniemy układ równań drugiego rzędu

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = K(x_2 - x_1), \\ m_2\ddot{x}_2 = K(x_1 - 2x_2 + x_3), \\ m_1\ddot{x}_3 = -K(x_3 - x_2). \end{cases}$$

Poszukujemy rozwiązań w postaci drgań własnych, przy których wszystkie punkty drgają z tą samą częstością.

Cząstka trójatomowa

Eliminując pędy dostaniemy układ równań drugiego rzędu

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = K(x_2 - x_1), \\ m_2\ddot{x}_2 = K(x_1 - 2x_2 + x_3), \\ m_1\ddot{x}_3 = -K(x_3 - x_2). \end{cases}$$

Poszukujemy rozwiązań w postaci drgań własnych, przy których wszystkie punkty drgają z tą samą częstością. Podstawmy

$$x_j = C_j e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_j = C_j i\omega e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_j = -C_j\omega^2 e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2, 3,$$

Cząstka trójatomowa

Eliminując pędy dostaniemy układ równań drugiego rzędu

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = K(x_2 - x_1), \\ m_2\ddot{x}_2 = K(x_1 - 2x_2 + x_3), \\ m_1\ddot{x}_3 = -K(x_3 - x_2). \end{cases}$$

Poszukujemy rozwiązań w postaci drgań własnych, przy których wszystkie punkty drgają z tą samą częstością. Podstawmy

$$x_j = C_j e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_j = C_j i\omega e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_j = -C_j\omega^2 e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\begin{cases} -m_1 C_1\omega^2 e^{i\omega t} = K(C_2 - C_1)e^{i\omega t}, \\ -m_2 C_2\omega^2 e^{i\omega t} = K(C_1 - 2C_2 + C_3)e^{i\omega t}, \\ -m_1 C_3\omega^2 e^{i\omega t} = -K(C_3 - C_2)e^{i\omega t}. \end{cases}$$

Cząstka trójatomowa

Eliminując pędy dostaniemy układ równań drugiego rzędu

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = K(x_2 - x_1), \\ m_2\ddot{x}_2 = K(x_1 - 2x_2 + x_3), \\ m_1\ddot{x}_3 = -K(x_3 - x_2). \end{cases}$$

Poszukujemy rozwiązań w postaci drgań własnych, przy których wszystkie punkty drgają z tą samą częstością. Podstawmy

$$x_j = C_j e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_j = C_j i\omega e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_j = -C_j\omega^2 e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\begin{cases} -m_1 C_1\omega^2 e^{i\omega t} = K(C_2 - C_1)e^{i\omega t}, \\ -m_2 C_2\omega^2 e^{i\omega t} = K(C_1 - 2C_2 + C_3)e^{i\omega t}, \\ -m_1 C_3\omega^2 e^{i\omega t} = -K(C_3 - C_2)e^{i\omega t}. \end{cases}$$

Cząstka trójatomowa

Pomnóżmy obie strony każdego z równań przez $e^{-i\omega t}$ i uporządkujmy.

$$\begin{cases} \left(-m_1\omega^2 + K\right) C_1 - KC_2 = 0, \\ -KC_1 + \left(-m_2\omega^2 + 2K\right) C_2 - KC_3 = 0, \\ -KC_2 + \left(-m_1\omega^2 + K\right) C_3 = 0. \end{cases}$$

Jest to jednorodny układ równań liniowych na współczynniki C_j, $j = 1, 2, 3$.

Cząstka trójatomowa

Pomnóżmy obie strony każdego z równań przez $e^{-i\omega t}$ i uporządkujmy.

$$\begin{cases} \left(-m_1\omega^2 + K\right) C_1 - KC_2 = 0, \\ -KC_1 + \left(-m_2\omega^2 + 2K\right) C_2 - KC_3 = 0, \\ -KC_2 + \left(-m_1\omega^2 + K\right) C_3 = 0. \end{cases}$$

Jest to jednorodny układ równań liniowych na współczynniki C_j, $j = 1, 2, 3$. Jeżeli wszystkie 3 równania są niezależne, to istnieje tylko jedno rozwiązanie

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

Cząstka trójatomowa

Pomnóżmy obie strony każdego z równań przez $e^{-i\omega t}$ i uporządkujmy.

$$\begin{cases} \left(-m_1\omega^2 + K\right) C_1 - KC_2 = 0, \\ -KC_1 + \left(-m_2\omega^2 + 2K\right) C_2 - KC_3 = 0, \\ -KC_2 + \left(-m_1\omega^2 + K\right) C_3 = 0. \end{cases}$$

Jest to jednorodny układ równań liniowych na współczynniki C_j, $j = 1, 2, 3$. Jeżeli wszystkie 3 równania są niezależne, to istnieje tylko jedno rozwiązanie

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

Takie zerowe rozwiązanie jest nieinteresujące fizycznie.

Cząstka trójatomowa

Pomnóżmy obie strony każdego z równań przez $e^{-i\omega t}$ i uporządkujmy.

$$\begin{cases} \left(-m_1\omega^2 + K\right) C_1 - KC_2 = 0, \\ -KC_1 + \left(-m_2\omega^2 + 2K\right) C_2 - KC_3 = 0, \\ -KC_2 + \left(-m_1\omega^2 + K\right) C_3 = 0. \end{cases}$$

Jest to jednorodny układ równań liniowych na współczynniki C_j, $j = 1, 2, 3$. Jeżeli wszystkie 3 równania są niezależne, to istnieje tylko jedno rozwiązanie

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

Takie zerowe rozwiązanie jest nieinteresujące fizycznie.

Cząstka trójatomowa

Niezerowe rozwiązania mogą istnieć tylko jeśli równania układu są zależne, a to ma miejsce, gdy wyznacznik układu się zeruje.

Cząstka trójatomowa

Niezerowe rozwiązania mogą istnieć tylko jeśli równania układu są zależne, a to ma miejsce, gdy wyznacznik układu się zeruje.

$$
\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + K & -K & 0 \\ -K & -m_2\omega^2 + 2K & -K \\ 0 & -K & -m_1\omega^2 + K \end{vmatrix} \\
= & \left(-m_1\omega^2 + K\right)^2 \left(-m_2\omega^2 + 2K\right) - 2 \cdot (-K)^2 \left(-m_1\omega^2 + K\right) \\
= & \left(-m_1\omega^2 + K\right) \left[\left(-m_1\omega^2 + K\right) \left(-m_2\omega^2 + 2K\right) - 2K^2\right] \\
= & \left(-m_1\omega^2 + K\right) \left[m_1 m_2 \omega^4 - (2m_1 + m_2) K\omega^2 + 2K^2 - 2K^2\right] \\
= & \left(-m_1\omega^2 + K\right) \omega^2 \left[m_1 m_2 \omega^2 - (2m_1 + m_2) K\right] = 0.
\end{aligned}
$$

Cząstka trójatomowa

Niezerowe rozwiązania mogą istnieć tylko jeśli równania układu są zależne, a to ma miejsce, gdy wyznacznik układu się zeruje.

$$
\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + K & -K & 0 \\ -K & -m_2\omega^2 + 2K & -K \\ 0 & -K & -m_1\omega^2 + K \end{vmatrix} \\
= & \left(-m_1\omega^2 + K\right)^2 \left(-m_2\omega^2 + 2K\right) - 2 \cdot (-K)^2 \left(-m_1\omega^2 + K\right) \\
= & \left(-m_1\omega^2 + K\right) \left[\left(-m_1\omega^2 + K\right) \left(-m_2\omega^2 + 2K\right) - 2K^2\right] \\
= & \left(-m_1\omega^2 + K\right) \left[m_1 m_2 \omega^4 - (2m_1 + m_2) K\omega^2 + 2K^2 - 2K^2\right] \\
= & \left(-m_1\omega^2 + K\right) \omega^2 \left[m_1 m_2 \omega^2 - (2m_1 + m_2) K\right] = 0.
\end{aligned}
$$

Cząstka trójatomowa

Równanie

$$\left(-m_1\omega^2 + K\right)\omega^2\left[m_1 m_2\omega^2 - (2m_1 + m_2)\,K\right] = 0$$

ma 3 rozwiązania

$$\omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 0,$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m_1} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m_1}},$$

$$\omega^2 = \frac{2K}{m_2} + \frac{K}{m_1} \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{K}{m_1} + \frac{2K}{m_2}} = \sqrt{\left(1 + \frac{2m_1}{m_2}\right)\frac{K}{m_1}}\,.$$

Cząstka trójatomowa

Równanie

$$\left(-m_1\omega^2 + K\right)\omega^2\left[m_1 m_2\omega^2 - (2m_1 + m_2)\,K\right] = 0$$

ma 3 rozwiązania

$$\omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 0,$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m_1} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m_1}},$$

$$\omega^2 = \frac{2K}{m_2} + \frac{K}{m_1} \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{K}{m_1} + \frac{2K}{m_2}} = \sqrt{\left(1 + \frac{2m_1}{m_2}\right)\frac{K}{m_1}}\,.$$

Zauważmy, że $\omega_3 > \omega_2$.

Cząstka trójatomowa

Równanie

$$\left(-m_1\omega^2 + K\right)\omega^2\left[m_1 m_2\omega^2 - (2m_1 + m_2)\,K\right] = 0$$

ma 3 rozwiązania

$$\omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 0,$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m_1} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m_1}},$$

$$\omega^2 = \frac{2K}{m_2} + \frac{K}{m_1} \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{K}{m_1} + \frac{2K}{m_2}} = \sqrt{\left(1 + \frac{2m_1}{m_2}\right)\frac{K}{m_1}}\,.$$

Zauważmy, że $\omega_3 > \omega_2$.

Cząstka trójatomowa

Jeżeli $\omega = \omega_1 = 0$, to nasz układ sprowadza się do

$$\begin{cases} KC_1 - KC_2 = 0 & \Rightarrow \quad C_1 = C_2 \\ -KC_1 + 2KC_2 - KC_3 = 0 & \qquad\qquad \Rightarrow \quad \text{tożsamość} \\ -KC_2 + KC_3 = 0 & \Rightarrow \quad C_2 = C_3 \end{cases}$$

a więc $\omega = 0$ i $C_1 = C_2 = C_3 \quad \Rightarrow \quad$ brak drgań.

Cząstka trójatomowa

Jeżeli $\omega = \omega_1 = 0$, to nasz układ sprowadza się do

$$\begin{cases} KC_1 - KC_2 = 0 & \Rightarrow \quad C_1 = C_2 \\ -KC_1 + 2KC_2 - KC_3 = 0 & \Rightarrow \quad \text{tożsamość} \\ -KC_2 + KC_3 = 0 & \Rightarrow \quad C_2 = C_3 \end{cases}$$

a więc $\omega = 0$ i $C_1 = C_2 = C_3 \quad \Rightarrow \quad$ brak drgań.

Jeżeli $\omega = \omega_2$ (mniejsza częstość) $\quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{K}{m_1}$

$$\begin{cases} 0 \cdot C_1 - KC_2 = 0 & \Rightarrow \quad C_2 = 0 \\ -KC_1 + \left(-m_2 \frac{K}{m_1} + 2K\right) C_2 - KC_3 = 0 & \Rightarrow \quad C_3 = -C_1 \\ -KC_2 + 0 \cdot C_3 = 0 & \Rightarrow \quad C_2 = 0 \end{cases}$$

Cząstka trójatomowa

Jeżeli $\omega = \omega_1 = 0$, to nasz układ sprowadza się do

$$\begin{cases} KC_1 - KC_2 = 0 & \Rightarrow \quad C_1 = C_2 \\ -KC_1 + 2KC_2 - KC_3 = 0 & \Rightarrow \quad \text{tożsamość} \\ -KC_2 + KC_3 = 0 & \Rightarrow \quad C_2 = C_3 \end{cases}$$

a więc $\omega = 0$ i $C_1 = C_2 = C_3 \quad \Rightarrow \quad$ brak drgań.
Jeżeli $\omega = \omega_2$ (mniejsza częstość) $\quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{K}{m_1}$

$$\begin{cases} 0 \cdot C_1 - KC_2 = 0 & \Rightarrow \quad C_2 = 0 \\ -KC_1 + \left(-m_2 \frac{K}{m_1} + 2K\right) C_2 - KC_3 = 0 & \Rightarrow \quad C_3 = -C_1 \\ -KC_2 + 0 \cdot C_3 = 0 & \Rightarrow \quad C_2 = 0 \end{cases}$$

Skrajne atomy drgają w przeciwne strony z taką samą amplitudą, a atom środkowy spoczywa.

Cząstka trójatomowa

Jeżeli $\omega = \omega_1 = 0$, to nasz układ sprowadza się do

$$\begin{cases} KC_1 - KC_2 = 0 & \Rightarrow \quad C_1 = C_2 \\ -KC_1 + 2KC_2 - KC_3 = 0 & \Rightarrow \quad \text{tożsamość} \\ -KC_2 + KC_3 = 0 & \Rightarrow \quad C_2 = C_3 \end{cases}$$

a więc $\omega = 0$ i $C_1 = C_2 = C_3 \quad \Rightarrow \quad$ brak drgań.
Jeżeli $\omega = \omega_2$ (mniejsza częstość) $\quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{K}{m_1}$

$$\begin{cases} 0 \cdot C_1 - KC_2 = 0 & \Rightarrow \quad C_2 = 0 \\ -KC_1 + \left(-m_2 \frac{K}{m_1} + 2K\right) C_2 - KC_3 = 0 & \Rightarrow \quad C_3 = -C_1 \\ -KC_2 + 0 \cdot C_3 = 0 & \Rightarrow \quad C_2 = 0 \end{cases}$$

Skrajne atomy drgają w przeciwne strony z taką samą amplitudą, a atom środkowy spoczywa.

Cząstka trójatomowa

Jeżeli $\omega = \omega_3$ (większa częstość) $\Rightarrow$ $\omega^2 = \frac{2K}{m_2} + \frac{K}{m_1}$

$$\begin{cases} \left(-K - 2\frac{m_1}{m_2}K + K\right) C_1 - KC_2 = 0 & \Rightarrow \; C_2 = -2\frac{m_1}{m_2}C_1 \\ -KC_1 + \left(-2K - \frac{m_2}{m_1}K + 2K\right) C_2 - KC_3 & \\ = -KC_1 + 2KC_1 - KC_3 = 0 & \Rightarrow \; C_1 = C_3 \\ -KC_2 + \left(-K - 2\frac{m_1}{m_2}K + K\right) C_3 = 0 & \Rightarrow \; C_2 = -2\frac{m_1}{m_2}C_3 \end{cases}$$

a więc atomy skrajne drgają w tą samą stronę z taką samą amplitudą,

Cząstka trójatomowa

Jeżeli $\omega = \omega_3$ (większa częstość) $\Rightarrow$ $\omega^2 = \frac{2K}{m_2} + \frac{K}{m_1}$

$$\begin{cases} \left(-K - 2\frac{m_1}{m_2}K + K\right) C_1 - KC_2 = 0 & \Rightarrow \; C_2 = -2\frac{m_1}{m_2}C_1 \\ -KC_1 + \left(-2K - \frac{m_2}{m_1}K + 2K\right) C_2 - KC_3 & \\ = -KC_1 + 2KC_1 - KC_3 = 0 & \Rightarrow \; C_1 = C_3 \\ -KC_2 + \left(-K - 2\frac{m_1}{m_2}K + K\right) C_3 = 0 & \Rightarrow \; C_2 = -2\frac{m_1}{m_2}C_3 \end{cases}$$

a więc atomy skrajne drgają w tą samą stronę z taką samą amplitudą, a atom środkowy drga w przeciwną stronę.

Cząstka trójatomowa

Jeżeli $\omega = \omega_3$ (większa częstość) $\Rightarrow$ $\omega^2 = \frac{2K}{m_2} + \frac{K}{m_1}$

$$\begin{cases} \left(-K - 2\frac{m_1}{m_2}K + K\right) C_1 - KC_2 = 0 & \Rightarrow \; C_2 = -2\frac{m_1}{m_2} C_1 \\ -KC_1 + \left(-2K - \frac{m_2}{m_1}K + 2K\right) C_2 - KC_3 & \\ = -KC_1 + 2KC_1 - KC_3 = 0 & \Rightarrow \; C_1 = C_3 \\ -KC_2 + \left(-K - 2\frac{m_1}{m_2}K + K\right) C_3 = 0 & \Rightarrow \; C_2 = -2\frac{m_1}{m_2} C_3 \end{cases}$$

a więc atomy skrajne drgają w tą samą stronę z taką samą amplitudą, a atom środkowy drga w przeciwną stronę.

Funkcja Hamiltona

Fakt, że dla więzów skleronomicznych i układów zachowawczych funkcja Hamiltona wyraża się wzorem:

$$H = T + V,$$

pozwala zapamiętać znaki w równaniach kanonicznych

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots n.$$

Funkcja Hamiltona

Fakt, że dla więzów skleronomicznych i układów zachowawczych funkcja Hamiltona wyraża się wzorem:

$$H = T + V,$$

pozwala zapamiętać znaki w równaniach kanonicznych

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots n.$$

Wystarczy pamiętać, że zmiana pędu w czasie jest równa sile, a siła jest równa gradientowi energii potencjalnej z przeciwnym znakiem:

$$\dot{p}_i = F_i \qquad \text{a} \qquad F_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Funkcja Hamiltona

Fakt, że dla więzów skleronomicznych i układów zachowawczych funkcja Hamiltona wyraża się wzorem:

$$H = T + V,$$

pozwala zapamiętać znaki w równaniach kanonicznych

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots n.$$

Wystarczy pamiętać, że zmiana pędu w czasie jest równa sile, a siła jest równa gradientowi energii potencjalnej z przeciwnym znakiem:

$$\dot{p}_i = F_i \qquad \text{a} \qquad F_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Funkcja Hamiltona

Zastanówmy się kiedy funkcja Hamiltona H jest stałą ruchu?

$$H = \mathrm{const} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0,
\end{aligned}$$

gdzie w drugiej równości skorzystaliśmy z równań kanonicznych.

Funkcja Hamiltona

Zastanówmy się kiedy funkcja Hamiltona H jest stałą ruchu?

$$H = \mathrm{const} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0,
\end{aligned}$$

gdzie w drugiej równości skorzystaliśmy z równań kanonicznych.
Widzimy, że funkcja Hamiltona jest wielkością zachowaną jeśli H i L nie zależą jawnie od czasu.

Funkcja Hamiltona

Zastanówmy się kiedy funkcja Hamiltona H jest stałą ruchu?

$$H = \mathrm{const} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0,
\end{aligned}$$

gdzie w drugiej równości skorzystaliśmy z równań kanonicznych. Widzimy, że funkcja Hamiltona jest wielkością zachowaną jeśli H i L nie zależą jawnie od czasu.

Funkcja Hamiltona

Fakt, że H jest zachowane nie musi oznaczać, że $H = E$.

Przykład 4. Koralik ślizgający się po drucie, który obraca się w płaszczyźnie xOy ze stałą prędkością kątową ω.

Funkcja Hamiltona

Fakt, że H jest zachowane nie musi oznaczać, że $H = E$.

Przykład 4. Koralik ślizgający się po drucie, który obraca się w płaszczyźnie xOy ze stałą prędkością kątową ω.

Funkcja Lagrange'a:

$$L = T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right) = E.$$

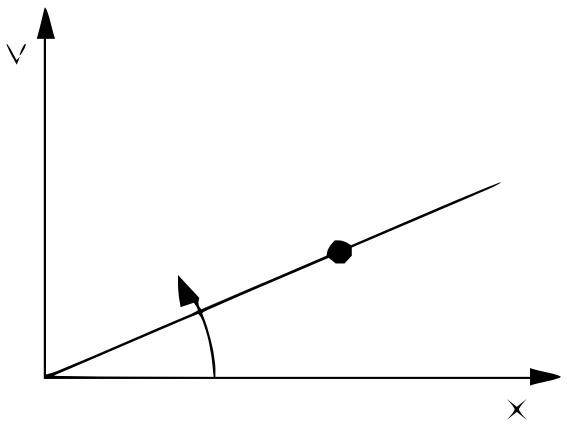
Funkcja Hamiltona

Fakt, że H jest zachowane nie musi oznaczać, że $H = E$.

Przykład 4. Koralik ślizgający się po drucie, który obraca się w płaszczyźnie xOy ze stałą prędkością kątową ω.

Funkcja Lagrange'a:

$$L = T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \omega^2 \right) = E.$$



Warunek więzów (reonomicznych):

$$\varphi = \omega t, \quad \text{jeśli} \quad \varphi(0) = 0.$$

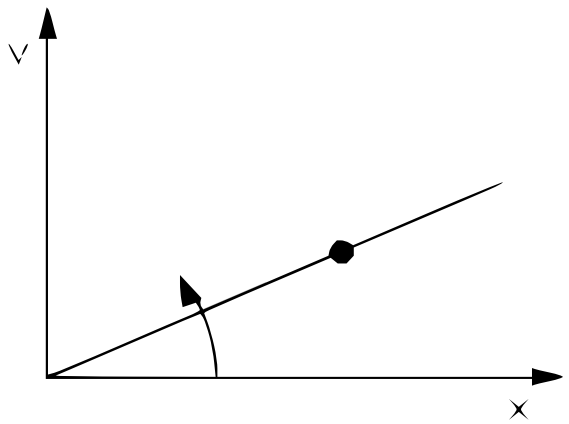
Funkcja Hamiltona

Fakt, że H jest zachowane nie musi oznaczać, że $H = E$.

Przykład 4. Koralik ślizgający się po drucie, który obraca się w płaszczyźnie xOy ze stałą prędkością kątową ω.

Funkcja Lagrange'a:

$$L = T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \omega^2 \right) = E.$$



Warunek więzów (reonomicznych):

$$\varphi = \omega t, \quad \text{jeśli} \quad \varphi(0) = 0.$$

Układ ma jeden stopień swobody,

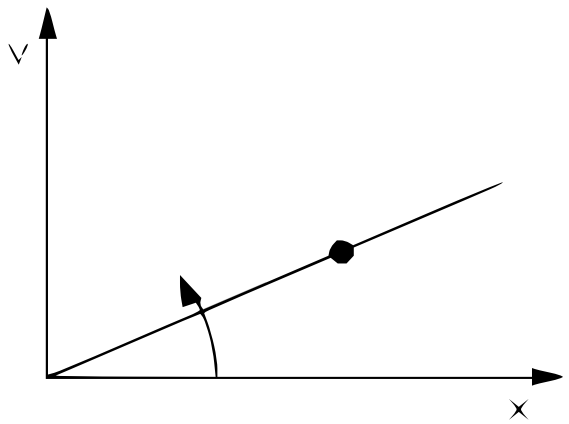
Funkcja Hamiltona

Fakt, że H jest zachowane nie musi oznaczać, że $H = E$.

Przykład 4. Koralik ślizgający się po drucie, który obraca się w płaszczyźnie xOy ze stałą prędkością kątową ω.

Funkcja Lagrange'a:

$$L = T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right) = E.$$



Warunek więzów (reonomicznych):

$$\varphi = \omega t, \quad \text{jeśli} \quad \varphi(0) = 0.$$

Układ ma jeden stopień swobody, więc funkcja Hamiltona jest równa

$$H = \dot{r}p_r - L, \quad \text{gdzie} \quad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m}.$$

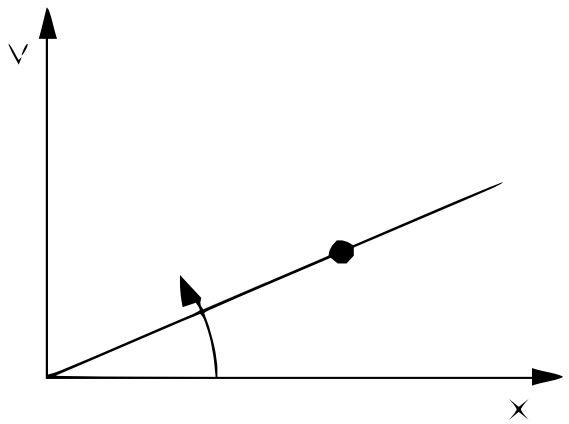
Funkcja Hamiltona

Fakt, że H jest zachowane nie musi oznaczać, że $H = E$.

Przykład 4. Koralik ślizgający się po drucie, który obraca się w płaszczyźnie xOy ze stałą prędkością kątową ω.

Funkcja Lagrange'a:

$$L = T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \omega^2 \right) = E.$$



Warunek więzów (reonomicznych):

$$\varphi = \omega t, \quad \text{jeśli} \quad \varphi(0) = 0.$$

Układ ma jeden stopień swobody, więc funkcja Hamiltona jest równa

$$H = \dot{r} p_r - L, \quad \text{gdzie} \quad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m}.$$

Funkcja Hamiltona

Wstawmy wyrażenie na p_r do H

$$H = \frac{p_r^2}{m} - \frac{1}{2}m\frac{p_r^2}{m^2} - \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{1}{2}mr^2\omega^2 \neq E,$$

mimo, że

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \text{ czyli } \quad H = \text{const}, \quad \text{to} \quad H \neq E.$$

Funkcja Hamiltona

Wstawmy wyrażenie na p_r do H

$$H = \frac{p_r^2}{m} - \frac{1}{2}m\frac{p_r^2}{m^2} - \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{1}{2}mr^2\omega^2 \neq E,$$

mimo, że

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \text{ czyli } \quad H = \text{const}, \quad \text{to} \quad H \neq E.$$

Może się również zdarzyć, że funkcja Hamiltona nie będzie wielkością zachowaną, ale będzie równa całkowitej energii,

Funkcja Hamiltona

Wstawmy wyrażenie na p_r do H

$$H = \frac{p_r^2}{m} - \frac{1}{2}m\frac{p_r^2}{m^2} - \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{1}{2}mr^2\omega^2 \neq E,$$

mimo, że

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \text{ czyli } \quad H = \text{const}, \quad \text{to} \quad H \neq E.$$

Może się również zdarzyć, że funkcja Hamiltona nie będzie wielkością zachowaną, ale będzie równa całkowitej energii, tzn.

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \neq 0 \quad \text{lecz} \quad H = E.$$

Funkcja Hamiltona

Wstawmy wyrażenie na p_r do H

$$H = \frac{p_r^2}{m} - \frac{1}{2}m\frac{p_r^2}{m^2} - \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{1}{2}mr^2\omega^2 \neq E,$$

mimo, że

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \text{ czyli } \quad H = \text{const}, \quad \text{to} \quad H \neq E.$$

Może się również zdarzyć, że funkcja Hamiltona nie będzie wielkością zachowaną, ale będzie równa całkowitej energii, tzn.

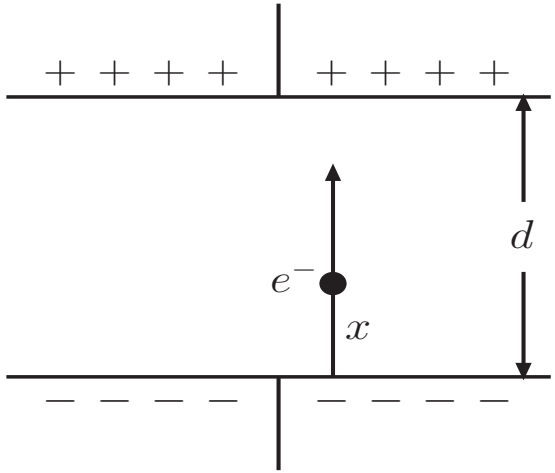
$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \neq 0 \quad \text{lecz} \quad H = E.$$

Funkcja Hamiltona

Przykład 5. Elektron porusza się prostopadle do okładek kondensatora płaskiego, którego napięcie rośnie liniowo w czasie zgodnie z wzorem $U = \lambda t$, gdzie λ jest znanym współczynnikiem. Odległość okładek wynosi d.

Napięcie U między okładkami wiąże się z natężeniem pola elektrycznego $\mathcal{E}$ wzorem

$$U = \mathcal{E} d = \lambda t \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \frac{\lambda}{d} t.$$

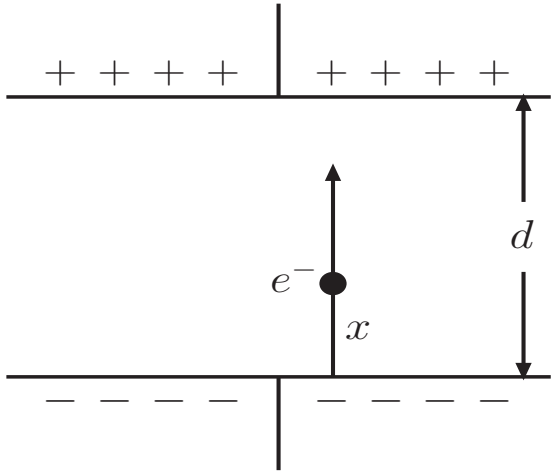


Funkcja Hamiltona

Przykład 5. Elektron porusza się prostopadle do okładek kondensatora płaskiego, którego napięcie rośnie liniowo w czasie zgodnie z wzorem $U = \lambda t$, gdzie λ jest znanym współczynnikiem. Odległość okładek wynosi d.

Napięcie U między okładkami wiąże się z natężeniem pola elektrycznego $\mathcal{E}$ wzorem

$$U = \mathcal{E} d = \lambda t \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \frac{\lambda}{d} t.$$



Energia potencjalna elektronu w odległości x od katody wynosi

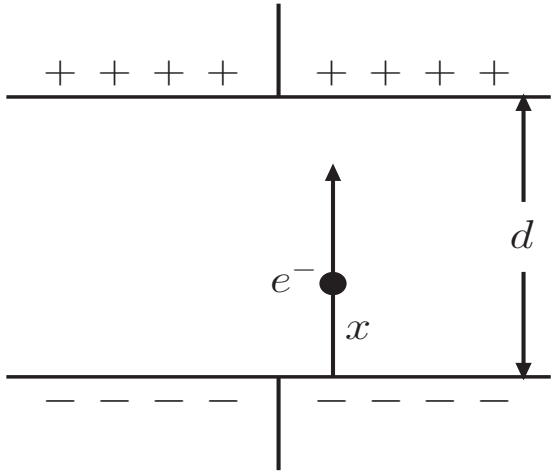
$$V = Fx = -e\mathcal{E}x = -\underbrace{e\frac{\lambda}{d}}_{\text{const} \equiv A} tx = -Axt,$$

Funkcja Hamiltona

Przykład 5. Elektron porusza się prostopadle do okładek kondensatora płaskiego, którego napięcie rośnie liniowo w czasie zgodnie z wzorem $U = \lambda t$, gdzie λ jest znanym współczynnikiem. Odległość okładek wynosi d.

Napięcie U między okładkami wiąże się z natężeniem pola elektrycznego $\mathcal{E}$ wzorem

$$U = \mathcal{E} d = \lambda t \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \frac{\lambda}{d} t.$$



Energia potencjalna elektronu w odległości x od katody wynosi

$$V = Fx = -e\mathcal{E}x = -\underbrace{e\frac{\lambda}{d}}_{\text{const} \equiv A} tx = -Axt,$$

Funkcja Hamiltona

więc funkcja Hamiltona jest równa

$$H = E = T + V = \frac{p^2}{2m} - Axt \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} \neq 0.$$

Znajdźmy równanie ruchu

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{x}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = At,$$

$$m\ddot{x} = At \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{A}{m}\, t.$$

Funkcja Hamiltona

więc funkcja Hamiltona jest równa

$$H = E = T + V = \frac{p^2}{2m} - Axt \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} \neq 0.$$

Znajdźmy równanie ruchu

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{x}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = At,$$

$$m\ddot{x} = At \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{A}{m}\, t.$$

Całkując obustronnie ostatnie otrzymamy

$$\dot{x} = \frac{A}{2m} t^2 + C_1, \quad \text{gdzie} \quad C_1 = \text{const.}$$

Funkcja Hamiltona

więc funkcja Hamiltona jest równa

$$H = E = T + V = \frac{p^2}{2m} - Axt \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} \neq 0.$$

Znajdźmy równanie ruchu

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{x}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = At,$$

$$m\ddot{x} = At \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{A}{m}\, t.$$

Całkując obustronnie ostatnie otrzymamy

$$\dot{x} = \frac{A}{2m} t^2 + C_1, \quad \text{gdzie} \quad C_1 = \text{const}.$$

Funkcja Hamiltona

Całkując obustronnie po raz drugi otrzymamy

$$x(t) = \frac{A}{6m} t^3 + C_1 t + C_2, \quad \text{gdzie} \quad C_2 = \text{const.}$$

Przyjmijmy warunki początkowe $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, wówczas

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0,$$

Funkcja Hamiltona

Całkując obustronnie po raz drugi otrzymamy

$$x(t) = \frac{A}{6m}t^3 + C_1 t + C_2, \quad \text{gdzie} \quad C_2 = \text{const.}$$

Przyjmijmy warunki początkowe $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, wówczas

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0,$$

a więc ostatecznie rozwiązanie ma postać

$$x(t) = \frac{A}{6m}t^3 \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{x} = m\frac{A}{2m}t^2 = \frac{A}{2}t^2,$$

Funkcja Hamiltona

Całkując obustronnie po raz drugi otrzymamy

$$x(t) = \frac{A}{6m}t^3 + C_1 t + C_2, \quad \text{gdzie} \quad C_2 = \text{const.}$$

Przyjmijmy warunki początkowe $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, wówczas

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0,$$

a więc ostatecznie rozwiązanie ma postać

$$x(t) = \frac{A}{6m}t^3 \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{x} = m\frac{A}{2m}t^2 = \frac{A}{2}t^2,$$

a funkcja Hamiltona ma postać

$$H = \frac{p^2}{2m} - Axt = \frac{A^2 t^4}{8m} - A\frac{A}{6m}t^4 = \frac{A^2}{24m}t^2.$$

Funkcja Hamiltona

Całkując obustronnie po raz drugi otrzymamy

$$x(t) = \frac{A}{6m}t^3 + C_1 t + C_2, \quad \text{gdzie} \quad C_2 = \text{const.}$$

Przyjmijmy warunki początkowe $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, wówczas

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0,$$

a więc ostatecznie rozwiązanie ma postać

$$x(t) = \frac{A}{6m}t^3 \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{x} = m\frac{A}{2m}t^2 = \frac{A}{2}t^2,$$

a funkcja Hamiltona ma postać

$$H = \frac{p^2}{2m} - Axt = \frac{A^2t^4}{8m} - A\frac{A}{6m}t^4 = \frac{A^2}{24m}t^2.$$

Nawiasy Poissona

Rozważmy funkcję różniczkowalną $f(q, p, t)$ zmiennych $q_i(t)$, $p_i(t)$ i t . Taką funkcję będziemy nazywać obserwablą.

Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Nawiasy Poissona

Rozważmy funkcję różniczkowalną $f(q, p, t)$ zmiennych $q_i(t)$, $p_i(t)$ i t . Taką funkcję będziemy nazywać obserwablą.
Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Skorzystajmy z równań kanonicznych

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Nawiasy Poissona

Rozważmy funkcję różniczkowalną $f(q, p, t)$ zmiennych $q_i(t)$, $p_i(t)$ i t . Taką funkcję będziemy nazywać obserwablą.
Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Skorzystajmy z równań kanonicznych

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Nawiasy Poissona

Dla dwóch obserwabli $f(q,p,t)$ i $g(q,p,t)$ definiujemy nawiasy Poissona

$$[f,g]_{q,p} \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

Indeksy q, p na ogół będziemy pomijać.

Nawiasy Poissona

Dla dwóch obserwabli $f(q,p,t)$ i $g(q,p,t)$ definiujemy nawiasy Poissona

$$[f,g]_{q,p} \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

Indeksy q, p na ogół będziemy pomijać.

Przy użyciu nawiasów Poissona możemy zapisać

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = [f,H] + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Nawiasy Poissona

Dla dwóch obserwabli $f(q,p,t)$ i $g(q,p,t)$ definiujemy nawiasy Poissona

$$[f,g]_{q,p} \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

Indeksy q, p na ogół będziemy pomijać.
Przy użyciu nawiasów Poissona możemy zapisać

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = [f,H] + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Widzimy, że jeśli f nie zależy jawnie od czasu i $[f,H]=0$, to f jest wielkością zachowaną.

Nawiasy Poissona

Dla dwóch obserwabli $f(q,p,t)$ i $g(q,p,t)$ definiujemy nawiasy Poissona

$$[f,g]_{q,p} \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

Indeksy q, p na ogół będziemy pomijać.
Przy użyciu nawiasów Poissona możemy zapisać

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = [f,H] + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Widzimy, że jeśli f nie zależy jawnie od czasu i $[f,H]=0$, to f jest wielkością zachowaną.

Nawiasy Poissona

Obliczmy

$$[p_i, f] = \sum_{j=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_j}}_{0} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_j}}_{\delta_{ij}} \frac{\partial f}{\partial q_j} \right) = -\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial q_j} = -\frac{\partial f}{\partial q_i},$$

gdyż zmienne p_i i q_i są niezależne.

Nawiasy Poissona

Obliczmy

$$[p_i, f] = \sum_{j=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_j}}_{0} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_j}}_{\delta_{ij}} \frac{\partial f}{\partial q_j} \right) = -\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial q_j} = -\frac{\partial f}{\partial q_i},$$

gdyż zmienne p_i i q_i są niezależne.

Podobnie

$$[q_i, f] = \sum_{j=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_j}}_{\delta_{ij}} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_j}}_{0} \frac{\partial f}{\partial q_j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial p_j} = \frac{\partial f}{\partial p_i}.$$

Nawiasy Poissona

Obliczmy

$$[p_i, f] = \sum_{j=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_j}}_{0} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_j}}_{\delta_{ij}} \frac{\partial f}{\partial q_j} \right) = -\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial q_j} = -\frac{\partial f}{\partial q_i},$$

gdyż zmienne p_i i q_i są niezależne.
Podobnie

$$[q_i, f] = \sum_{j=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_j}}_{\delta_{ij}} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_j}}_{0} \frac{\partial f}{\partial q_j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial p_j} = \frac{\partial f}{\partial p_i}.$$

Nawiasy Poissona

Przy użyciu związków

$$[p_i, f] = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \quad \text{i} \quad [q_i, f] = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

równania kanoniczne możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} &= [q_i, H], \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} &= [p_i, H], \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Nawiasy Poissona

Przy użyciu związków

$$[p_i, f] = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \quad \text{i} \quad [q_i, f] = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

równania kanonicze możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} &= [q_i, H], \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} &= [p_i, H], \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Ta postać równań kanonicznych jest w pełni symetryczna.

Nawiasy Poissona

Przy użyciu związków

$$[p_i, f] = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \quad \text{i} \quad [q_i, f] = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

równania kanonicze możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} &= [q_i, H], \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} &= [p_i, H], \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Ta postać równań kanonicznych jest w pełni symetryczna.
Jednak trzeba pamiętać o przeciwnym znaku obu wyrazów pod sumą w definicji nawiasów Poissona.

Nawiasy Poissona

Przy użyciu związków

$$[p_i, f] = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \quad \text{i} \quad [q_i, f] = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

równania kanonicze możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} &= [q_i, H], \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} &= [p_i, H], \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Ta postać równań kanonicznych jest w pełni symetryczna. Jednak trzeba pamiętać o przeciwnym znaku obu wyrazów pod sumą w definicji nawiasów Poissona.

Własności nawiasów Poissona

Dla dowolnych obserwabli f, g, h oraz c_1, c_2, c niezależnych od q i p zachodzą następujące własności.

i) Liniowość ze względu na pierwszy argument
$[c_1 f + c_2 g, h] = c_1[f, h] + c_2[g, h]$

Dowód: $[c_1 f + c_2 g, h] =$

Własności nawiasów Poissona

Dla dowolnych obserwabli f, g, h oraz c_1, c_2, c niezależnych od q i p zachodzą następujące własności.

i) Liniowość ze względu na pierwszy argument
$[c_1 f + c_2 g, h] = c_1[f, h] + c_2[g, h]$

Dowód: $[c_1 f + c_2 g, h] =$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial q_i} (c_1 f + c_2 g) \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} (c_1 f + c_2 g) \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) =$$

Własności nawiasów Poissona

Dla dowolnych obserwabli f, g, h oraz c_1, c_2, c niezależnych od q i p zachodzą następujące własności.

i) Liniowość ze względu na pierwszy argument
$[c_1 f + c_2 g, h] = c_1[f, h] + c_2[g, h]$

Dowód: $[c_1 f + c_2 g, h] =$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial q_i} (c_1 f + c_2 g) \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} (c_1 f + c_2 g) \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(c_1 \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} + c_2 \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - c_1 \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} - c_2 \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) =$$

Własności nawiasów Poissona

Dla dowolnych obserwabli f, g, h oraz c_1, c_2, c niezależnych od q i p zachodzą następujące własności.

i) Liniowość ze względu na pierwszy argument
$[c_1 f + c_2 g, h] = c_1[f, h] + c_2[g, h]$

Dowód: $[c_1 f + c_2 g, h] =$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial q_i}(c_1 f + c_2 g)\frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i}(c_1 f + c_2 g)\frac{\partial h}{\partial q_i}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(c_1\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i} + c_2\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i} - c_1\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i} - c_2\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}\right) =$$

$$c_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}\right) + c_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}\right) =$$

Własności nawiasów Poissona

Dla dowolnych obserwabli f, g, h oraz c_1, c_2, c niezależnych od q i p zachodzą następujące własności.

i) Liniowość ze względu na pierwszy argument
$[c_1 f + c_2 g, h] = c_1[f, h] + c_2[g, h]$

Dowód: $[c_1 f + c_2 g, h] =$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial q_i}(c_1 f + c_2 g)\frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i}(c_1 f + c_2 g)\frac{\partial h}{\partial q_i}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(c_1\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i} + c_2\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i} - c_1\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i} - c_2\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}\right) =$$

$$c_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}\right) + c_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}\right) =$$

$$c_1[f, h] + c_2[g, h].$$

Własności nawiasów Poissona

Dla dowolnych obserwabli f, g, h oraz c_1, c_2, c niezależnych od q i p zachodzą następujące własności.

i) Liniowość ze względu na pierwszy argument
$[c_1 f + c_2 g, h] = c_1[f, h] + c_2[g, h]$

Dowód: $[c_1 f + c_2 g, h] =$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial q_i}(c_1 f + c_2 g)\frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i}(c_1 f + c_2 g)\frac{\partial h}{\partial q_i}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(c_1\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i} + c_2\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i} - c_1\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i} - c_2\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}\right) =$$

$$c_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}\right) + c_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}\right) =$$

$$c_1[f, h] + c_2[g, h].$$

Własności nawiasów Poissona

ii) Antysymetria

$[f, g] = -[g, f]$

Dowód:

$$[f, g] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) =$$

Własności nawiasów Poissona

ii) Antysymetria

$[f, g] = -[g, f]$

Dowód:

$$[f, g] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) =$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) = -[g, f].$$

Własności nawiasów Poissona

ii) Antysymetria
$[f, g] = -[g, f]$
Dowód:

$$
\begin{aligned}
[f, g] &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) = \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) = -[g, f].
\end{aligned}
$$

iii) $[c, f] = 0.$

Własności nawiasów Poissona

ii) Antysymetria
$[f, g] = -[g, f]$
Dowód:

$$[f, g] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) = -[g, f].$$

iii) $[c, f] = 0.$
Dowód:

$$[c, f] = \sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial c}{\partial q_i}}_{0} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \underbrace{\frac{\partial c}{\partial p_i}}_{0} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) = 0.$$

Własności nawiasów Poissona

ii) Antysymetria
$[f, g] = -[g, f]$
Dowód:

$$[f, g] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) = -[g, f].$$

iii) $[c, f] = 0.$
Dowód:

$$[c, f] = \sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial c}{\partial q_i}}_{0} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \underbrace{\frac{\partial c}{\partial p_i}}_{0} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) = 0.$$

Własności nawiasów Poissona

iv) $[fg, h] = f[g, h] + [f, h]g$

Dowód:

$$[fg, h] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial(fg)}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial(fg)}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) =$$

Własności nawiasów Poissona

iv) $[fg, h] = f[g, h] + [f, h]g$

Dowód:

$$[fg, h] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial (fg)}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial (fg)}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} g \frac{\partial h}{\partial p_i} + f \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} g \frac{\partial h}{\partial q_i} - f \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) =$$

Własności nawiasów Poissona

iv) $[fg, h] = f[g, h] + [f, h]g$

Dowód:

$$[fg, h] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial (fg)}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial (fg)}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} g \frac{\partial h}{\partial p_i} + f \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} g \frac{\partial h}{\partial q_i} - f \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) =$$

$$f \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) g =$$

Własności nawiasów Poissona

iv) $[fg, h] = f[g, h] + [f, h]g$

Dowód:

$$[fg, h] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial (fg)}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial (fg)}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} g \frac{\partial h}{\partial p_i} + f \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} g \frac{\partial h}{\partial q_i} - f \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) =$$

$$f \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) g =$$

$$f[g, h] + [f, h]g.$$

Własności nawiasów Poissona

iv) $[fg, h] = f[g, h] + [f, h]g$
Dowód:

$$[fg, h] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial (fg)}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial (fg)}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} g \frac{\partial h}{\partial p_i} + f \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} g \frac{\partial h}{\partial q_i} - f \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) =$$

$$f \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) g =$$

$$f[g, h] + [f, h]g.$$

v) Tożsamość Jacobiego:

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0.$$

Własności nawiasów Poissona

iv) $[fg, h] = f[g, h] + [f, h]g$
Dowód:

$$[fg, h] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial (fg)}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial (fg)}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} g \frac{\partial h}{\partial p_i} + f \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} g \frac{\partial h}{\partial q_i} - f \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) =$$

$$f \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right) g =$$

$$f[g, h] + [f, h]g.$$

v) Tożsamość Jacobiego:

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0.$$

Własności nawiasów Poissona

Dowód:

$$[f,[g,h]] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial [g,h]}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial [g,h]}{\partial q_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j}\right)\right)$$

Własności nawiasów Poissona

Dowód:

$$[f,[g,h]] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial [g,h]}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial [g,h]}{\partial q_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j}\right)\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i}\right.$$

Własności nawiasów Poissona

Dowód:

$$[f,[g,h]] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial [g,h]}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial [g,h]}{\partial q_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j}\right)\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i}\right.$$

$$\left. - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i}\right).$$

Własności nawiasów Poissona

Dowód:

$$
\begin{aligned}
[f,[g,h]] &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial [g,h]}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial [g,h]}{\partial q_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j}\right)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i}\right. \\
&\qquad \left. - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i}\right).
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$[f,[g,h]]+[g,[h,f]]+[h,[f,g]]$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}+\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i}\right.$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= \quad & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \right. \\
& \left. - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \right)
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= \quad & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \right. \\
& \left. - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ \quad &
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= \quad & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \right. \\
& \left. - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ \quad & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \right.
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \right. \\
& \left. - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \right. \\
& \left. - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right)
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \right. \\
& \left. - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \right. \\
& \left. - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ &
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i}
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg)
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg)
\end{aligned}
$$

Odszukujemy wyrazy różniące się zamianą wskaźników $i \leftrightarrow j$ i kolejnością różniczkowania w pochodnych mieszanych.

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg)
\end{aligned}
$$

Odszukujemy wyrazy różniące się zamianą wskaźników $i \leftrightarrow j$ i kolejnością różniczkowania w pochodnych mieszanych.

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \right. \\
& \left. - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \right. \\
& \left. - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \right. \\
& \left. - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \right)
\end{aligned}
$$

Wyrazy w kolorze różowym kasują się.

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \right. \\
& \left. - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \right. \\
& \left. - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \right. \\
& \left. - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \right)
\end{aligned}
$$

Wyrazy w kolorze różowym kasują się.

Własności nawiasów Poissona

dając

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(+ \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial f}{\partial q_j} + \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg)
\end{aligned}
$$

Znów odszukujemy wyrazy różniące się zamianą wskaźników $i \leftrightarrow j$ i kolejnością różniczkowania w pochodnych mieszanych.

Własności nawiasów Poissona

dając

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(+ \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \\
& - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \\
& - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial f}{\partial q_j} + \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \\
& - \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg)
\end{aligned}
$$

Znów odszukujemy wyrazy różniące się zamianą wskaźników $i \leftrightarrow j$ i kolejnością różniczkowania w pochodnych mieszanych.

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(+ \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial f}{\partial q_j} + \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg)
\end{aligned}
$$

Wyrazy w kolorze różowym kasują się, itd.

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(+ \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial f}{\partial q_j} + \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg)
\end{aligned}
$$

Wyrazy w kolorze różowym kasują się, itd.

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial f}{\partial q_j} + \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad - \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg)
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad -\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad -\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial f}{\partial q_j} + \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \\
& \quad -\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \Bigg)
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(-\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \right. \\
& \left. - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \right. \\
& \left. - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i} \right)
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \right. \\
& \left. - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \right. \\
& \left. - \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j} \right)
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= \quad & \sum_{i,j=1}^{n} \left(+ \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ \quad & \sum_{i,j=1}^{n} \left(+ \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \right. \\
& \left. - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ \quad & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i} \right. \\
& \left. - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right)
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= \quad & \sum_{i,j=1}^{n} \left(+ \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ \quad & \sum_{i,j=1}^{n} \left(+ \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \right. \\
& \left. - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ \quad & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right. \\
& \left. - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right)
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(+ \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \\
= &
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(+ \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(- \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right)
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(+ \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(- \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ &
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(+ \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(- \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right)
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(+ \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(- \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \\
= &
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(+ \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(- \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(- \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) + \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right)
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(+ \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(- \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(- \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) + \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right) \\
= &
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(+ \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(- \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(- \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) + \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right) \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(+ \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) + \sum_{i,j=1}^{n} \left(- \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right)
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(+ \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(- \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(- \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) + \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right) \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(+ \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) + \sum_{i,j=1}^{n} \left(- \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right) = 0.
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

$$
\begin{aligned}
& [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(+ \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(- \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(- \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) + \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right) \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left(+ \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \right) + \sum_{i,j=1}^{n} \left(- \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right) = 0.
\end{aligned}
$$

Własności nawiasów Poissona

vi) Nawiasy fundamentalne:

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}, \qquad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

Dowód:

$$[q_i, p_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{0} \right)$$

Własności nawiasów Poissona

vi) Nawiasy fundamentalne:

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}, \qquad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

Dowód:

$$[q_i, p_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{0} \right) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{jk}$$

Własności nawiasów Poissona

vi) Nawiasy fundamentalne:

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}, \qquad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

Dowód:

$$[q_i, p_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{0} \right) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij}.$$

Własności nawiasów Poissona

vi) Nawiasy fundamentalne:

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}, \qquad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

Dowód:

$$[q_i, p_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{0} \right) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij}.$$

$[q_i, q_j]$

Własności nawiasów Poissona

vi) Nawiasy fundamentalne:

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}, \qquad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

Dowód:

$$[q_i, p_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{0} \right) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij}.$$

$$[q_i, q_j] =$$

Własności nawiasów Poissona

vi) Nawiasy fundamentalne:

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}, \qquad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

Dowód:

$$[q_i, p_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{0} \right) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij}.$$

$$[q_i, q_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_k}}_{\delta_{jk}} \right)$$

Własności nawiasów Poissona

vi) Nawiasy fundamentalne:

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}, \qquad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

Dowód:

$$[q_i, p_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{0} \right) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij}.$$

$$[q_i, q_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_k}}_{\delta_{jk}} \right) = 0.$$

Własności nawiasów Poissona

vi) Nawiasy fundamentalne:

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}, \qquad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

Dowód:

$$[q_i, p_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{0} \right) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij}.$$

$$[q_i, q_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_k}}_{\delta_{jk}} \right) = 0.$$

$[p_i, p_j]$

Własności nawiasów Poissona

vi) Nawiasy fundamentalne:

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}, \qquad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

Dowód:

$$[q_i, p_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{0} \right) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij}.$$

$$[q_i, q_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_k}}_{\delta_{jk}} \right) = 0.$$

$$[p_i, p_j] =$$

Własności nawiasów Poissona

vi) Nawiasy fundamentalne:

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}, \qquad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

Dowód:

$$[q_i, p_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{0} \right) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij}.$$

$$[q_i, q_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_k}}_{\delta_{jk}} \right) = 0.$$

$$[p_i, p_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{0} \right)$$

Własności nawiasów Poissona

vi) Nawiasy fundamentalne:

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}, \qquad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

Dowód:

$$[q_i, p_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{0} \right) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij}.$$

$$[q_i, q_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_k}}_{\delta_{jk}} \right) = 0.$$

$$[p_i, p_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{0} \right) = 0.$$

Własności nawiasów Poissona

vi) Nawiasy fundamentalne:

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}, \qquad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

Dowód:

$$[q_i, p_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{0} \right) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij}.$$

$$[q_i, q_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_k}}_{\delta_{jk}} \right) = 0.$$

$$[p_i, p_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}_{0} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{0} \right) = 0.$$

Własności nawiasów Poissona

Korzystając z udowodnionych własności nawiasów Poissona można udowodnić kolejne własności.

i') Liniowość ze względu na drugi argument
$[f, c_1 g + c_2 h] = c_1[f, g] + c_2[f, h]$
Dowód:

Własności nawiasów Poissona

Korzystając z udowodnionych własności nawiasów Poissona można udowodnić kolejne własności.

i') Liniowość ze względu na drugi argument
$[f, c_1 g + c_2 h] = c_1[f, g] + c_2[f, h]$
Dowód: Skorzystajmy najpierw z antysymetrii, a następnie z liniowości ze względu na pierwszy argument

$$[f, c_1 g + c_2 h] = -[c_1 g + c_2 h, f] = -c_1[g, f] - c_2[h, f]$$

Własności nawiasów Poissona

Korzystając z udowodnionych własności nawiasów Poissona można udowodnić kolejne własności.

i') Liniowość ze względu na drugi argument
$[f, c_1 g + c_2 h] = c_1[f, g] + c_2[f, h]$
Dowód: Skorzystajmy najpierw z antysymetrii, a następnie z liniowości ze względu na pierwszy argument

$$[f, c_1 g + c_2 h] = -[c_1 g + c_2 h, f] = -c_1[g, f] - c_2[h, f]$$

Korzystając ponownie z antysymetrii dostaniemy

$$[f, c_1 g + c_2 h] = -c_1[g, f] - c_2[h, f] = c_1[f, g] + c_2[f, h].$$

Własności nawiasów Poissona

Korzystając z udowodnionych własności nawiasów Poissona można udowodnić kolejne własności.

i') Liniowość ze względu na drugi argument
$[f, c_1 g + c_2 h] = c_1[f, g] + c_2[f, h]$
Dowód: Skorzystajmy najpierw z antysymetrii, a następnie z liniowości ze względu na pierwszy argument

$$[f, c_1 g + c_2 h] = -[c_1 g + c_2 h, f] = -c_1[g, f] - c_2[h, f]$$

Korzystając ponownie z antysymetrii dostaniemy

$$[f, c_1 g + c_2 h] = -c_1[g, f] - c_2[h, f] = c_1[f, g] + c_2[f, h].$$

Własności nawiasów Poissona

iii') $[f, c] = 0$.

Dowód:

Własności nawiasów Poissona

iii') $[f, c] = 0.$

Dowód: Skorzystajmy najpierw z antysymetrii, a następnie z własności (iii)

$$[f, c] = -[c, f] = 0.$$

Własności nawiasów Poissona

iii') $[f, c] = 0.$

Dowód: Skorzystajmy najpierw z antysymetrii, a następnie z własności (iii)

$$[f, c] = -[c, f] = 0.$$

iv') $[f, gh] = g[f, h] + [f, g]h$

Własności nawiasów Poissona

iii') $[f, c] = 0.$

Dowód: Skorzystajmy najpierw z antysymetrii, a następnie z własności (iii)

$$[f, c] = -[c, f] = 0.$$

iv') $[f, gh] = g[f, h] + [f, g]h$

Dowód:

Własności nawiasów Poissona

iii') $[f, c] = 0.$

Dowód: Skorzystajmy najpierw z antysymetrii, a następnie z własności (iii)

$$[f, c] = -[c, f] = 0.$$

iv') $[f, gh] = g[f, h] + [f, g]h$

Dowód: Skorzystajmy najpierw z antysymetrii, następnie z własności (iv) i na koniec ponownie z antysymetrii

$$[f, gh] = -[gh, f] = -g[h, f] - [g, f]h = g[f, h] + [f, g]h.$$

Własności nawiasów Poissona

iii') $[f, c] = 0.$

Dowód: Skorzystajmy najpierw z antysymetrii, a następnie z własności (iii)

$$[f, c] = -[c, f] = 0.$$

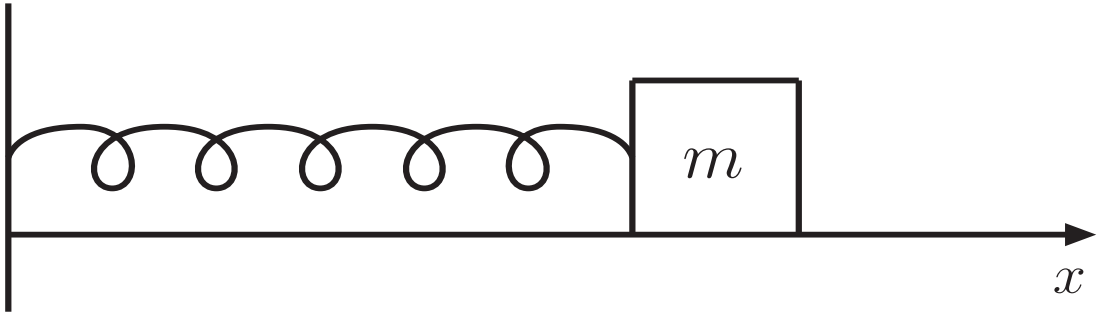
iv') $[f, gh] = g[f, h] + [f, g]h$

Dowód: Skorzystajmy najpierw z antysymetrii, następnie z własności (iv) i na koniec ponownie z antysymetrii

$$[f, gh] = -[gh, f] = -g[h, f] - [g, f]h = g[f, h] + [f, g]h.$$

Oscylator Harmoniczny

Przykład 6. Ciało o masie m ślizga się bez tarcia po podłożu pod wpływem sprężyny przyczepionej do ściany. Sprężyna spełnia prawo Hooke'a $F = -Kx$, gdzie współczynnik sprężystości K jest zadany.

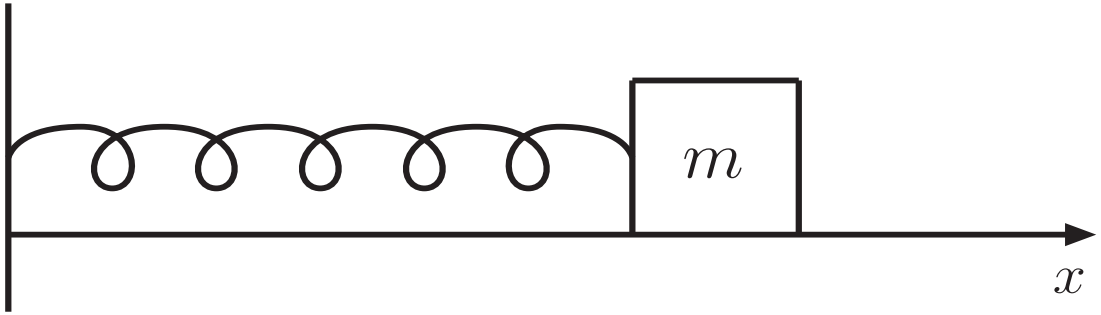


Funkcja Hamiltona jest równa całkowitej energii

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2,$$

Oscylator Harmoniczny

Przykład 6. Ciało o masie m ślizga się bez tarcia po podłożu pod wpływem sprężyny przyczepionej do ściany. Sprężyna spełnia prawo Hooke'a $F = -Kx$, gdzie współczynnik sprężystości K jest zadany.



Funkcja Hamiltona jest równa całkowitej energii

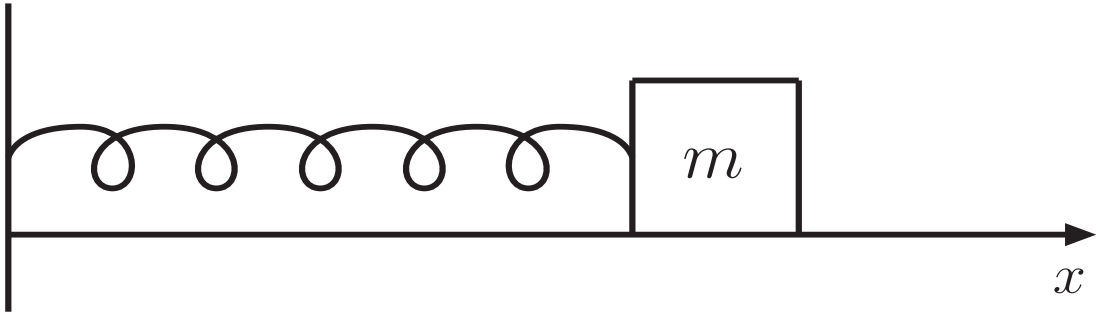
$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2,$$

a równania ruchu mają postać

$$\dot{x} = [x, H] \qquad \text{i} \qquad \dot{p} = [p, H].$$

Oscylator Harmoniczny

Przykład 6. Ciało o masie m ślizga się bez tarcia po podłożu pod wpływem sprężyny przyczepionej do ściany. Sprężyna spełnia prawo Hooke'a $F = -Kx$, gdzie współczynnik sprężystości K jest zadany.



Funkcja Hamiltona jest równa całkowitej energii

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2,$$

a równania ruchu mają postać

$$\dot{x} = [x, H] \qquad \text{i} \qquad \dot{p} = [p, H].$$

Oscylator Harmoniczny

Obliczmy

$$\dot{x} = [x, H] = \left[x, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2\right] = \frac{1}{2m}\left[x, p^2\right] + \frac{1}{2}K\left[x, x^2\right]$$
$$= \frac{1}{2m}\Big(p\underbrace{[x,p]}_{1} + \underbrace{[x,p]}_{1}p\Big) + \frac{1}{2}K\Big(x\underbrace{[x,x]}_{0} + \underbrace{[x,x]}_{0}x\Big) = \frac{p}{m}.$$

gdzie skorzystaliśmy kolejno z własności (i'), (iv') i (vi). Podobnie

$$\dot{p} = [p, H] = \left[p, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2\right] = \frac{1}{2m}\left[p, p^2\right] + \frac{1}{2}K\left[p, x^2\right]$$
$$= \frac{1}{2m}\Big(p\underbrace{[p,p]}_{0} + \underbrace{[p,p]}_{0}p\Big) + \frac{1}{2}K\Big(x\underbrace{[p,x]}_{(-1)} + \underbrace{[p,x]}_{(-1)}x\Big) = -Kx.$$

Oscylator Harmoniczny

Obliczmy

$$\dot{x} = [x, H] = \left[x, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2\right] = \frac{1}{2m}\left[x, p^2\right] + \frac{1}{2}K\left[x, x^2\right]$$
$$= \frac{1}{2m}\Big(p\underbrace{[x,p]}_{1} + \underbrace{[x,p]}_{1}p\Big) + \frac{1}{2}K\Big(x\underbrace{[x,x]}_{0} + \underbrace{[x,x]}_{0}x\Big) = \frac{p}{m}.$$

gdzie skorzystaliśmy kolejno z własności (i'), (iv') i (vi). Podobnie

$$\dot{p} = [p, H] = \left[p, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2\right] = \frac{1}{2m}\left[p, p^2\right] + \frac{1}{2}K\left[p, x^2\right]$$
$$= \frac{1}{2m}\Big(p\underbrace{[p,p]}_{0} + \underbrace{[p,p]}_{0}p\Big) + \frac{1}{2}K\Big(x\underbrace{[p,x]}_{(-1)} + \underbrace{[p,x]}_{(-1)}x\Big) = -Kx.$$

Oscylator Harmoniczny

Zauważmy, że równania

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{x}, \qquad \dot{p} = -Kx$$

sprowadzają się do równania

$$m\ddot{x} = -Kx,$$

Oscylator Harmoniczny

Zauważmy, że równania

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{x}, \qquad \dot{p} = -Kx$$

sprowadzają się do równania

$$m\ddot{x} = -Kx,$$

które mogliśmy napisać od razu na podstawie II zasady dynamiki Newtona.

Oscylator Harmoniczny

Zauważmy, że równania

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{x}, \qquad \dot{p} = -Kx$$

sprowadzają się do równania

$$m\ddot{x} = -Kx,$$

które mogliśmy napisać od razu na podstawie II zasady dynamiki Newtona.

Jednak w rozpatrywanym przykładzie nie wykorzystaliśmy definicji nawiasów Poissona lecz tylko ich własności.

Oscylator Harmoniczny

Zauważmy, że równania

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{x}, \qquad \dot{p} = -Kx$$

sprowadzają się do równania

$$m\ddot{x} = -Kx,$$

które mogliśmy napisać od razu na podstawie II zasady dynamiki Newtona.

Jednak w rozpatrywanym przykładzie nie wykorzystaliśmy definicji nawiasów Poissona lecz tylko ich własności.

Ponadto nie wykonaliśmy ani jednego różniczkowania.

Oscylator Harmoniczny

Zauważmy, że równania

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{x}, \qquad \dot{p} = -Kx$$

sprowadzają się do równania

$$m\ddot{x} = -Kx,$$

które mogliśmy napisać od razu na podstawie II zasady dynamiki Newtona.

Jednak w rozpatrywanym przykładzie nie wykorzystaliśmy definicji nawiasów Poissona lecz tylko ich własności.

Ponadto nie wykonaliśmy ani jednego różniczkowania.

Znaczenie nawiasów Poissona

Zauważmy, że jeśli zachodzi równanie:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Znaczenie nawiasów Poissona

Zauważmy, że jeśli zachodzi równanie:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

i są spełnione własności (i)–(vi), to otrzymamy takie same równania ruchu nawet jeśli wielkości q_i, p_i i nawiasy są zupełnie inne.

Znaczenie nawiasów Poissona

Zauważmy, że jeśli zachodzi równanie:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

i są spełnione własności (i)–(vi), to otrzymamy takie same równania ruchu nawet jeśli wielkości q_i, p_i i nawiasy są zupełnie inne.

Ta cecha pozwala bezpośrednio przenieść formalizm hamiltonowski wyrażony w języku nawiasów Poissona do innych działów fizyki teoretycznej.

Znaczenie nawiasów Poissona

Zauważmy, że jeśli zachodzi równanie:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

i są spełnione własności (i)–(vi), to otrzymamy takie same równania ruchu nawet jeśli wielkości q_i, p_i i nawiasy są zupełnie inne.
Ta cecha pozwala bezpośrednio przenieść formalizm hamiltonowski wyrażony w języku nawiasów Poissona do innych działów fizyki teoretycznej.

Znaczenie nawiasów Poissona

Na przykład w mechanice kwantowej zmienne dynamiczne (obserwable) reprzentujemy przez liniowe operatory hermitowskie, dla których definiujemy komutator

$$[A, B] \equiv AB - BA,$$

który spełnia własności (i)–(v).
Na zmienne położeniowe i pędy narzucamy reguły kwantyzacji

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \qquad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0,$$

gdzie $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ jest zredukowaną stałą Plancka.

Znaczenie nawiasów Poissona

Na przykład w mechanice kwantowej zmienne dynamiczne (obserwable) reprzentujemy przez liniowe operatory hermitowskie, dla których definiujemy komutator

$$[A, B] \equiv AB - BA,$$

który spełnia własności (i)–(v).
Na zmienne położeniowe i pędy narzucamy reguły kwantyzacji

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \qquad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0,$$

gdzie $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ jest zredukowaną stałą Plancka.
Widzimy bezpośredni związek reguł kwantyzacji z nawiasami fundamentalnymi, które stanowią własność (vi).

Znaczenie nawiasów Poissona

Na przykład w mechanice kwantowej zmienne dynamiczne (obserwable) reprzentujemy przez liniowe operatory hermitowskie, dla których definiujemy komutator

$$[A, B] \equiv AB - BA,$$

który spełnia własności (i)–(v).
Na zmienne położeniowe i pędy narzucamy reguły kwantyzacji

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \qquad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0,$$

gdzie $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ jest zredukowaną stałą Plancka.
Widzimy bezpośredni związek reguł kwantyzacji z nawiasami fundamentalnymi, które stanowią własność (vi).

Znaczenie nawiasów Poissona

Polega on na podstawieniu

$$\underbrace{[\ ,\ ]}_{\text{nawiasy Poissona}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{i\hbar}\underbrace{[\ ,\ ]}_{\text{komutator}}$$

we własności (vi). Jeżeli to podstawienie zrobimy w równaniu ruchu

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Znaczenie nawiasów Poissona

Polega on na podstawieniu

$$\underbrace{[\ ,\ ]}_{\text{nawiasy Poissona}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{i\hbar}\underbrace{[\ ,\ ]}_{\text{komutator}}$$

we własności (vi). Jeżeli to podstawienie zrobimy w równaniu ruchu

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}$$

to otrzymamy kwantowomechaniczne równanie ruchu dla zmiennej dynamicznej reprezentowanej przez operator A

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = [A, H] + i\hbar\frac{\partial A}{\partial t}\ .$$

Znaczenie nawiasów Poissona

Polega on na podstawieniu

$$\underbrace{[\ ,\ ]}_{\text{nawiasy Poissona}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{i\hbar}\underbrace{[\ ,\ ]}_{\text{komutator}}$$

we własności (vi). Jeżeli to podstawienie zrobimy w równaniu ruchu

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}$$

to otrzymamy kwantowomechaniczne równanie ruchu dla zmiennej dynamicznej reprezentowanej przez operator A

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = [A, H] + i\hbar\frac{\partial A}{\partial t}\ .$$

Jest to analog równania Schrödingera w obrazie Heisenberga.

Znaczenie nawiasów Poissona

Polega on na podstawieniu

$$\underbrace{[\ ,\ ]}_{\text{nawiasy Poissona}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{i\hbar}\underbrace{[\ ,\ ]}_{\text{komutator}}$$

we własności (vi). Jeżeli to podstawienie zrobimy w równaniu ruchu

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}$$

to otrzymamy kwantowomechaniczne równanie ruchu dla zmiennej dynamicznej reprezentowanej przez operator A

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = [A, H] + i\hbar\frac{\partial A}{\partial t}\ .$$

Jest to analog równania Schrödingera w obrazie Heisenberga.