Dynamika bryły sztywnej

Wykład 11

Karol Kołodziej

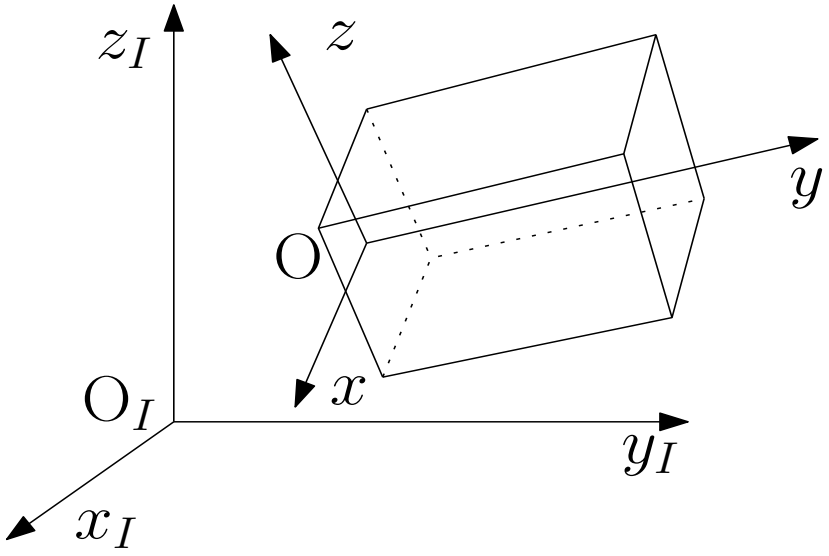
Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

Bryła sztywna

Ruch bryły sztywnej możemy rozłożyć na:

- ruch tranlacyjny – każdy element bryły porusza się z tą samą prędkością,
- ruch obrotowy względem początku dowolnie wybranego układu współrzędnych – prędkość kątowa $\vec{\omega}(t)$ jest równoległa do chwilowej osi obrotu przechodzącej przez O.

Ruch bryły możemy obserwować z układu inercjalnego I, albo z układu związanego z bryłą, na ogół nieinercjalnego.

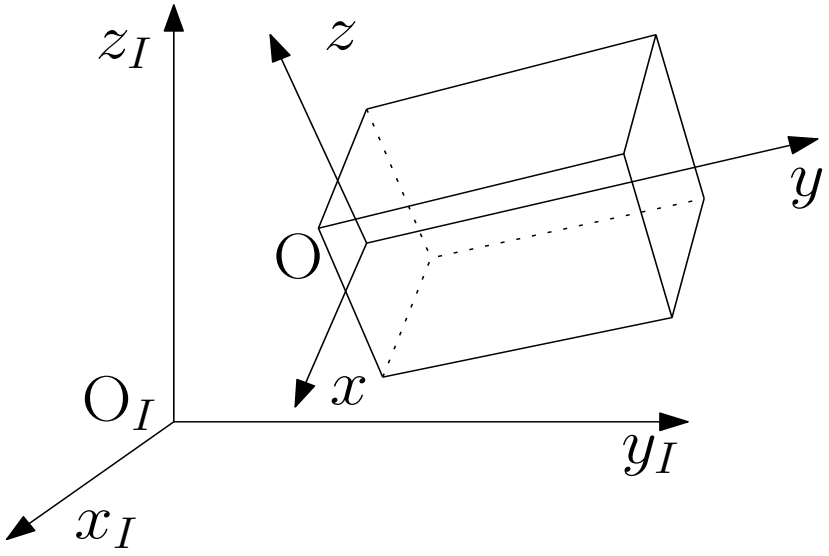


Bryła sztywna

Ruch bryły sztywnej możemy rozłożyć na:

- ruch tranlacyjny – każdy element bryły porusza się z tą samą prędkością,
- ruch obrotowy względem początku dowolnie wybranego układu współrzędnych – prędkość kątowa $\vec{\omega}(t)$ jest równoległa do chwilowej osi obrotu przechodzącej przez O.

Ruch bryły możemy obserwować z układu inercjalnego I, albo z układu związanego z bryłą, na ogół nieinercjalnego.



Bryła sztywna

Swobodnie poruszająca się bryła sztywna ma 6 stopni swobody: 3 translacyjne i 3 obrotowe.

Położenie bryły sztywnej jest wyznaczone przez współrzędne trzech niewspółliniowych punktów. Z definicji bryły sztywnej mamy trzy warunki:

Bryła sztywna

Swobodnie poruszająca się bryła sztywna ma 6 stopni swobody: 3 translacyjne i 3 obrotowe.
Położenie bryły sztywnej jest wyznaczone przez współrzędne trzech niewspółliniowych punktów. Z definicji bryły sztywnej mamy trzy warunki:

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \text{const.}, \quad |\vec{r}_1 - \vec{r}_3| = \text{const.}, \quad |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| = \text{const.}$$

Bryła sztywna

Swobodnie poruszająca się bryła sztywna ma 6 stopni swobody: 3 translacyjne i 3 obrotowe.
Położenie bryły sztywnej jest wyznaczone przez współrzędne trzech niewspółliniowych punktów. Z definicji bryły sztywnej mamy trzy warunki:

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \text{const.}, \quad |\vec{r}_1 - \vec{r}_3| = \text{const.}, \quad |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| = \text{const.}$$

Dlatego liczba stopni swobody bryły sztywnej wynosi

$$3 \times 3 - 3 = 6.$$

Bryła sztywna

Swobodnie poruszająca się bryła sztywna ma 6 stopni swobody: 3 translacyjne i 3 obrotowe.
Położenie bryły sztywnej jest wyznaczone przez współrzędne trzech niewspółliniowych punktów. Z definicji bryły sztywnej mamy trzy warunki:

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \text{const.}, \quad |\vec{r}_1 - \vec{r}_3| = \text{const.}, \quad |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| = \text{const.}$$

Dlatego liczba stopni swobody bryły sztywnej wynosi

$$3 \times 3 - 3 = 6.$$

Bryła sztywna

Prędkość $\vec{v}_I$ pewnego punktu P bryły w inercjalnym układzie odniesienia wyraża się wzorem

$$\vec{v}_I = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Zauważmy, że $\vec{v}' = 0$, bo bryła sztywna spoczywa w związanym z nią układzie xyz.

Bryła sztywna

Prędkość $\vec{v}_I$ pewnego punktu P bryły w inercjalnym układzie odniesienia wyraża się wzorem

$$\vec{v}_I = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Zauważmy, że $\vec{v}' = 0$, bo bryła sztywna spoczywa w związanym z nią układzie xyz.

$\vec{v}_O$ jest prędkością początku O w układzie inercjalnym, zależną od wyboru punktu O,

Bryła sztywna

Prędkość $\vec{v}_I$ pewnego punktu P bryły w inercjalnym układzie odniesienia wyraża się wzorem

$$\vec{v}_I = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Zauważmy, że $\vec{v}' = 0$, bo bryła sztywna spoczywa w związanym z nią układzie xyz.
$\vec{v}_O$ jest prędkością początku O w układzie inercjalnym, zależną od wyboru punktu O,
$\vec{\omega}$ jest prędkością kątowa bryły sztywnej w układzie inercjalnym, niezależną od wyboru punktu O,

Bryła sztywna

Prędkość $\vec{v}_I$ pewnego punktu P bryły w inercjalnym układzie odniesienia wyraża się wzorem

$$\vec{v}_I = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Zauważmy, że $\vec{v}' = 0$, bo bryła sztywna spoczywa w związanym z nią układzie xyz.
$\vec{v}_O$ jest prędkością początku O w układzie inercjalnym, zależną od wyboru punktu O,
$\vec{\omega}$ jest prędkością kątowa bryły sztywnej w układzie inercjalnym, niezależną od wyboru punktu O,
$\vec{r}$ jest wektorem położenia punktu P w układzie bryły.

Bryła sztywna

Prędkość $\vec{v}_I$ pewnego punktu P bryły w inercjalnym układzie odniesienia wyraża się wzorem

$$\vec{v}_I = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Zauważmy, że $\vec{v}' = 0$, bo bryła sztywna spoczywa w związanym z nią układzie xyz.
$\vec{v}_O$ jest prędkością początku O w układzie inercjalnym, zależną od wyboru punktu O,
$\vec{\omega}$ jest prędkością kątowa bryły sztywnej w układzie inercjalnym, niezależną od wyboru punktu O,
$\vec{r}$ jest wektorem położenia punktu P w układzie bryły.

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Załóżmy, że bryła składa się z N punktów materialnych o masie m_α. Wtedy jej energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_{I\alpha}^2 =$$

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Załóżmy, że bryła składa się z N punktów materialnych o masie m_α. Wtedy jej energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_{I\alpha}^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \left[\vec{v}_O + (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)\right]^2$$

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Załóżmy, że bryła składa się z N punktów materialnych o masie m_α. Wtedy jej energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_{I\alpha}^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \left[\vec{v}_O + (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)\right]^2$$

$$=$$

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Załóżmy, że bryła składa się z N punktów materialnych o masie m_α. Wtedy jej energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_{I\alpha}^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \left[\vec{v}_O + (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)\right]^2$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_O^2 + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2$$

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Załóżmy, że bryła składa się z N punktów materialnych o masie m_α. Wtedy jej energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$
\begin{aligned}
T = & \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_{I\alpha}^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \left[\vec{v}_O + (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)\right]^2 \\
= & \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_O^2 + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 \\
= &
\end{aligned}
$$

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Załóżmy, że bryła składa się z N punktów materialnych o masie m_α. Wtedy jej energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$
\begin{aligned}
T = & \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_{I\alpha}^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \left[\vec{v}_O + (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)\right]^2 \\
= & \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_O^2 + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 \\
= & \underbrace{\frac{1}{2} m \vec{v}_O^2}_{T_{\text{post.}}} + \vec{v}_O \cdot \left(\vec{\omega} \times \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha\right) + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2}_{T_{\text{obr.}}},
\end{aligned}
$$

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Załóżmy, że bryła składa się z N punktów materialnych o masie m_α. Wtedy jej energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$
\begin{aligned}
T = & \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_{I\alpha}^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \left[\vec{v}_O + (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)\right]^2 \\
= & \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_O^2 + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 \\
= & \underbrace{\frac{1}{2} m \vec{v}_O^2}_{T_{\text{post.}}} + \vec{v}_O \cdot \left(\vec{\omega} \times \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha\right) + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2}_{T_{\text{obr.}}},
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
m \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha
$$

jest masą bryły.

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Załóżmy, że bryła składa się z N punktów materialnych o masie m_α. Wtedy jej energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$
\begin{aligned}
T = & \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_{I\alpha}^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \left[\vec{v}_O + (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)\right]^2 \\
= & \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_O^2 + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 \\
= & \underbrace{\frac{1}{2} m \vec{v}_O^2}_{T_{\text{post.}}} + \vec{v}_O \cdot \left(\vec{\omega} \times \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha\right) + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2}_{T_{\text{obr.}}},
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
m \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha
$$

jest masą bryły.

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Jeśli nie ma więzów, to początek O najlepiej wybrać w środku masy S. Wówczas

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha = 0$$

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Jeśli nie ma więzów, to początek O najlepiej wybrać w środku masy S. Wówczas

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha = 0$$

i widzimy, że

$$T = T_{\text{post.}} + T_{\text{obr.}},$$

gdzie
$T_{\text{post.}}$ – energia ruchu postępowego środka masy,
$T_{\text{obr.}}$ – energia ruchu obrotowego względem środka masy.

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Jeśli nie ma więzów, to początek O najlepiej wybrać w środku masy S. Wówczas

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha = 0$$

i widzimy, że

$$T = T_{\text{post.}} + T_{\text{obr.}},$$

gdzie
$T_{\text{post.}}$ – energia ruchu postępowego środka masy,
$T_{\text{obr.}}$ – energia ruchu obrotowego względem środka masy.

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Jeśli są więzy, to przynajmniej jeden punkt bryły spoczywa.
Wybieramy początek układu inercjalnego O_I i początek układu związanego z bryłą O w jednym z nieruchomych punktów bryły.

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Jeśli są więzy, to przynajmniej jeden punkt bryły spoczywa. Wybieramy początek układu inercjalnego O_I i początek układu związanego z bryłą O w jednym z nieruchomych punktów bryły. Wówczas $\vec{v}_O = 0$ i otrzymujemy

$$T = T_{\text{obr.}},$$

a więc energia kinetyczna bryły jest równa energii jej ruchu obrotowego względem punktu O.

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Jeśli są więzy, to przynajmniej jeden punkt bryły spoczywa. Wybieramy początek układu inercjalnego O_I i początek układu związanego z bryłą O w jednym z nieruchomych punktów bryły. Wówczas $\vec{v}_O = 0$ i otrzymujemy

$$T = T_{\text{obr.}},$$

a więc energia kinetyczna bryły jest równa energii jej ruchu obrotowego względem punktu O.

Rozważmy energię kinetyczną ruchu obrotowego

$$T_{\text{obr.}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha\right)^2 .$$

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Jeśli są więzy, to przynajmniej jeden punkt bryły spoczywa. Wybieramy początek układu inercjalnego O_I i początek układu związanego z bryłą O w jednym z nieruchomych punktów bryły. Wówczas $\vec{v}_O = 0$ i otrzymujemy

$$T = T_{\text{obr.}},$$

a więc energia kinetyczna bryły jest równa energii jej ruchu obrotowego względem punktu O.
Rozważmy energię kinetyczną ruchu obrotowego

$$T_{\text{obr.}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha\right)^2 .$$

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Oznaczmy $\vec{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \equiv (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3})$ i rozważmy kwadrat iloczynu wektorowego

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 \quad =$$

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Oznaczmy $\vec{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \equiv (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3})$ i rozważmy kwadrat iloczynu wektorowego

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 \quad = \quad (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)_i =$$

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Oznaczmy $\vec{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \equiv (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3})$ i rozważmy kwadrat iloczynu wektorowego

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 \quad = \quad (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j x_{\alpha k} \varepsilon_{imn} \omega_m x_{\alpha n}$$

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Oznaczmy $\vec{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \equiv (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3})$ i rozważmy kwadrat iloczynu wektorowego

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 &= (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j x_{\alpha k} \varepsilon_{imn} \omega_m x_{\alpha n} \\ &= \end{aligned}$$

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Oznaczmy $\vec{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \equiv (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3})$ i rozważmy kwadrat iloczynu wektorowego

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 &= (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j x_{\alpha k} \varepsilon_{imn} \omega_m x_{\alpha n} \\ &= (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) \omega_j x_{\alpha k} \omega_m x_{\alpha n} \end{aligned}$$

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Oznaczmy $\vec{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \equiv (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3})$ i rozważmy kwadrat iloczynu wektorowego

$$
\begin{aligned}
(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 &= (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j x_{\alpha k} \varepsilon_{imn} \omega_m x_{\alpha n} \\
&= (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) \omega_j x_{\alpha k} \omega_m x_{\alpha n} \\
&=
\end{aligned}
$$

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Oznaczmy $\vec{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \equiv (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3})$ i rozważmy kwadrat iloczynu wektorowego

$$\begin{aligned}
(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 &= (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j x_{\alpha k}\varepsilon_{imn}\omega_m x_{\alpha n} \\
&= (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\,\omega_j x_{\alpha k}\omega_m x_{\alpha n} \\
&= \omega_j\omega_j x_{\alpha k}x_{\alpha k} - \omega_j x_{\alpha j}\omega_k x_{\alpha k}.
\end{aligned}$$

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Oznaczmy $\vec{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \equiv (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3})$ i rozważmy kwadrat iloczynu wektorowego

$$\begin{aligned}
(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 &= (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j x_{\alpha k}\varepsilon_{imn}\omega_m x_{\alpha n} \\
&= (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\,\omega_j x_{\alpha k}\omega_m x_{\alpha n} \\
&= \omega_j\omega_j x_{\alpha k}x_{\alpha k} - \omega_j x_{\alpha j}\omega_k x_{\alpha k}.
\end{aligned}$$

W takim razie

$$\begin{aligned}
T_{\text{obr.}} &= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \left[\omega_i\omega_i x_{\alpha k}x_{\alpha k} - \omega_i x_{\alpha i}\omega_j x_{\alpha j}\right] \\
&=
\end{aligned}$$

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Oznaczmy $\vec{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \equiv (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3})$ i rozważmy kwadrat iloczynu wektorowego

$$\begin{aligned}
(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 &= (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j x_{\alpha k}\varepsilon_{imn}\omega_m x_{\alpha n} \\
&= (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\,\omega_j x_{\alpha k}\omega_m x_{\alpha n} \\
&= \omega_j\omega_j x_{\alpha k}x_{\alpha k} - \omega_j x_{\alpha j}\omega_k x_{\alpha k}.
\end{aligned}$$

W takim razie

$$\begin{aligned}
T_{\text{obr.}} &= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \left[\omega_i\omega_i x_{\alpha k}x_{\alpha k} - \omega_i x_{\alpha i}\omega_j x_{\alpha j}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left[\delta_{ij} x_{\alpha k}x_{\alpha k} - x_{\alpha i}x_{\alpha j}\right]\omega_i\omega_j.
\end{aligned}$$

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Oznaczmy $\vec{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \equiv (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3})$ i rozważmy kwadrat iloczynu wektorowego

$$\begin{aligned}
(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 &= (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j x_{\alpha k}\varepsilon_{imn}\omega_m x_{\alpha n} \\
&= (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\,\omega_j x_{\alpha k}\omega_m x_{\alpha n} \\
&= \omega_j\omega_j x_{\alpha k}x_{\alpha k} - \omega_j x_{\alpha j}\omega_k x_{\alpha k}.
\end{aligned}$$

W takim razie

$$\begin{aligned}
T_{\text{obr.}} &= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \left[\omega_i\omega_i x_{\alpha k}x_{\alpha k} - \omega_i x_{\alpha i}\omega_j x_{\alpha j}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left[\delta_{ij} x_{\alpha k}x_{\alpha k} - x_{\alpha i}x_{\alpha j}\right]\omega_i\omega_j.
\end{aligned}$$

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Definiujemy tensor bezwładności

$$I_{ij} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left[\delta_{ij} x_{\alpha k} x_{\alpha k} - x_{\alpha i} x_{\alpha j}\right].$$

Wówczas energia kinetyczna ruchu obrotowego wyraża się wzorem

$$T_{\text{obr.}} = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j.$$

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Definiujemy tensor bezwładności

$$I_{ij} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left[\delta_{ij} x_{\alpha k} x_{\alpha k} - x_{\alpha i} x_{\alpha j}\right].$$

Wówczas energia kinetyczna ruchu obrotowego wyraża się wzorem

$$T_{\text{obr.}} = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j.$$

Jeśli bryła obraca się względem ustalonej osi,

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Definiujemy tensor bezwładności

$$I_{ij} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left[\delta_{ij} x_{\alpha k} x_{\alpha k} - x_{\alpha i} x_{\alpha j}\right].$$

Wówczas energia kinetyczna ruchu obrotowego wyraża się wzorem

$$T_{\text{obr.}} = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j.$$

Jeśli bryła obraca się względem ustalonej osi, tzn. tylko jedna ze składowych, np. $\omega_i = \omega \neq 0$,

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Definiujemy tensor bezwładności

$$I_{ij} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left[\delta_{ij} x_{\alpha k} x_{\alpha k} - x_{\alpha i} x_{\alpha j}\right].$$

Wówczas energia kinetyczna ruchu obrotowego wyraża się wzorem

$$T_{\text{obr.}} = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j.$$

Jeśli bryła obraca się względem ustalonej osi, tzn. tylko jedna ze składowych, np. $\omega_i = \omega \neq 0$, lub jeśli $I_{ij} = I\delta_{ij}$, gdzie I jest momentem bezwładności względem osi obrotu, to

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Definiujemy tensor bezwładności

$$I_{ij} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left[\delta_{ij} x_{\alpha k} x_{\alpha k} - x_{\alpha i} x_{\alpha j}\right].$$

Wówczas energia kinetyczna ruchu obrotowego wyraża się wzorem

$$T_{\text{obr.}} = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j.$$

Jeśli bryła obraca się względem ustalonej osi, tzn. tylko jedna ze składowych, np. $\omega_i = \omega \neq 0$, lub jeśli $I_{ij} = I\delta_{ij}$, gdzie I jest momentem bezwładności względem osi obrotu, to

$$T_{\text{obr.}} = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Energia kinetyczna i tensor bezwładności bryły

Definiujemy tensor bezwładności

$$I_{ij} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left[\delta_{ij} x_{\alpha k} x_{\alpha k} - x_{\alpha i} x_{\alpha j}\right].$$

Wówczas energia kinetyczna ruchu obrotowego wyraża się wzorem

$$T_{\text{obr.}} = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j.$$

Jeśli bryła obraca się względem ustalonej osi, tzn. tylko jedna ze składowych, np. $\omega_i = \omega \neq 0$, lub jeśli $I_{ij} = I\delta_{ij}$, gdzie I jest momentem bezwładności względem osi obrotu, to

$$T_{\text{obr.}} = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Tensor bezwładności

Jeśli bryła sztywna ma ciągły rozkład masy, to

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \quad \rightarrow \quad \int \mathrm{d}m(\vec{x}) \quad = \quad \int \rho\left(\vec{x}\right) \mathrm{d}^3 x,$$

gdzie $\mathrm{d}m(\vec{x})$ jest infinitezymalnym elementem masy, którego położenie jest opisywane wektorem $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathrm{d}^3 x = \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3$ jest elementem objętości, a

$$\rho(\vec{x}) = \frac{\mathrm{d}m(\vec{x})}{\mathrm{d}^3 x} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}m(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) \mathrm{d}^3 x$$

jest gęstością masy.

Tensor bezwładności wyraża się wówczas wzorem

$$I_{ij} = \int \rho\left(\vec{x}\right) \left[\delta_{ij} x_k x_k - x_i x_j\right] \mathrm{d}^3 x.$$

Tensor bezwładności

Jeśli bryła sztywna ma ciągły rozkład masy, to

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \quad \rightarrow \quad \int \mathrm{d}m(\vec{x}) \quad = \quad \int \rho\left(\vec{x}\right) \mathrm{d}^3 x,$$

gdzie $\mathrm{d}m(\vec{x})$ jest infinitezymalnym elementem masy, którego położenie jest opisywane wektorem $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathrm{d}^3 x = \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3$ jest elementem objętości, a

$$\rho(\vec{x}) = \frac{\mathrm{d}m(\vec{x})}{\mathrm{d}^3 x} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}m(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) \mathrm{d}^3 x$$

jest gęstością masy.
Tensor bezwładności wyraża się wówczas wzorem

$$I_{ij} = \int \rho\left(\vec{x}\right) \left[\delta_{ij} x_k x_k - x_i x_j\right] \mathrm{d}^3 x.$$

Tensor bezwładności

Tensor bezwładności

$$I_{ij} = \int \rho(\vec{x}) \left[\delta_{ij} x_k x_k - x_i x_j\right] \mathrm{d}^3 x$$

możemy zapisać w formie macierzowej ($x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$)

$$I = \int \rho(\vec{x}) \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}^3 x.$$

Tensor bezwładności

Tensor bezwładności

$$I_{ij} = \int \rho(\vec{x}) \left[\delta_{ij} x_k x_k - x_i x_j\right] \mathrm{d}^3 x$$

możemy zapisać w formie macierzowej ($x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$)

$$I = \int \rho(\vec{x}) \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}^3 x.$$

Elementy diagonalne tensora bezwładności nazywają się momentami bezwładności,

Tensor bezwładności

Tensor bezwładności

$$I_{ij} = \int \rho(\vec{x}) \left[\delta_{ij} x_k x_k - x_i x_j\right] \mathrm{d}^3 x$$

możemy zapisać w formie macierzowej ($x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$)

$$I = \int \rho(\vec{x}) \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}^3 x.$$

Elementy diagonalne tensora bezwładności nazywają się momentami bezwładności, a elementy pozadiagonalne – momentami dewiacji.

Tensor bezwładności

Tensor bezwładności

$$I_{ij} = \int \rho(\vec{x}) \left[\delta_{ij} x_k x_k - x_i x_j\right] \mathrm{d}^3 x$$

możemy zapisać w formie macierzowej ($x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$)

$$I = \int \rho(\vec{x}) \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}^3 x.$$

Elementy diagonalne tensora bezwładności nazywają się momentami bezwładności, a elementy pozadiagonalne – momentami dewiacji. Tensor bezwładności jest symetryczny.

$$I_{ji} = I_{ij}.$$

Tensor bezwładności

Tensor bezwładności

$$I_{ij} = \int \rho(\vec{x}) \left[\delta_{ij} x_k x_k - x_i x_j\right] \mathrm{d}^3 x$$

możemy zapisać w formie macierzowej ($x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$)

$$I = \int \rho(\vec{x}) \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}^3 x.$$

Elementy diagonalne tensora bezwładności nazywają się momentami bezwładności, a elementy pozadiagonalne – momentami dewiacji. Tensor bezwładności jest symetryczny.

$$I_{ji} = I_{ij}.$$

Tensor bezwładności

Dlatego można go zawsze sprowadzić do postaci diagonalnej przez transformację ortogonalną (obrót). Odpowiednie momenty diagonalne nazywają się wówczas głównymi momentami bezwładności

Tensor bezwładności

Dlatego można go zawsze sprowadzić do postaci diagonalnej przez transformację ortogonalną (obrót). Odpowiednie momenty diagonalne nazywają się wówczas głównymi momentami bezwładności

$$I_{ii} \equiv I_i,$$

Tensor bezwładności

Dlatego można go zawsze sprowadzić do postaci diagonalnej przez transformację ortogonalną (obrót). Odpowiednie momenty diagonalne nazywają się wówczas głównymi momentami bezwładności

$$I_{ii} \equiv I_i,$$

a odpowiednie osie nazywają się głównymi osiami bezwładności.

Tensor bezwładności

Dlatego można go zawsze sprowadzić do postaci diagonalnej przez transformację ortogonalną (obrót). Odpowiednie momenty diagonalne nazywają się wówczas głównymi momentami bezwładności

$$I_{ii} \equiv I_i,$$

a odpowiednie osie nazywają się głównymi osiami bezwładności.

Dla ciał symetrycznych jedna z głównych osi - przechodząca przez środek masy - pokrywa się z osią symetrii, a pozostałe dwie osie są do niej ortogonalne.

Tensor bezwładności

Dlatego można go zawsze sprowadzić do postaci diagonalnej przez transformację ortogonalną (obrót). Odpowiednie momenty diagonalne nazywają się wówczas głównymi momentami bezwładności

$$I_{ii} \equiv I_i,$$

a odpowiednie osie nazywają się głównymi osiami bezwładności. Dla ciał symetrycznych jedna z głównych osi - przechodząca przez środek masy - pokrywa się z osią symetrii, a pozostałe dwie osie są do niej ortogonalne. Np., jeżeli oś symetrii bryły utożsamimy z osią Oz układu kartezjańskiego lub cylindrycznego i założymy, że gęstość masy zależy tylko od odległości od osi obrotu $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, tzn. $\rho(r)$, wtedy moment bezwładności względem osi symetrii dany jest wzorem

$$I = \int \rho(r) r^2 \mathrm{d}^3 x = \int r^2 \mathrm{d}m,$$

gdzie całkowanie przebiega po całej objętości lub masie bryły.

Tensor bezwładności

Dlatego można go zawsze sprowadzić do postaci diagonalnej przez transformację ortogonalną (obrót). Odpowiednie momenty diagonalne nazywają się wówczas głównymi momentami bezwładności

$$I_{ii} \equiv I_i,$$

a odpowiednie osie nazywają się głównymi osiami bezwładności. Dla ciał symetrycznych jedna z głównych osi - przechodząca przez środek masy - pokrywa się z osią symetrii, a pozostałe dwie osie są do niej ortogonalne. Np., jeżeli oś symetrii bryły utożsamimy z osią Oz układu kartezjańskiego lub cylindrycznego i założymy, że gęstość masy zależy tylko od odległości od osi obrotu $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, tzn. $\rho(r)$, wtedy moment bezwładności względem osi symetrii dany jest wzorem

$$I = \int \rho(r) r^2 \mathrm{d}^3 x = \int r^2 \mathrm{d}m,$$

gdzie całkowanie przebiega po całej objętości lub masie bryły.

Moment pędu bryły sztywnej

W układzie inercjalnym bryła ma całkowity moment pędu

$$\vec{L}_{\text{całk.}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{p}_{I\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times (m_\alpha \vec{v}_{I\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{v}_{I\alpha}.$$

Wstawmy związki

$$\begin{aligned} \vec{r}_{I\alpha} &= \vec{r}_O + \vec{r}_\alpha, \\ \vec{v}_{I\alpha} &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha, \end{aligned}$$

Moment pędu bryły sztywnej

W układzie inercjalnym bryła ma całkowity moment pędu

$$\vec{L}_{\text{całk.}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{p}_{I\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times (m_\alpha \vec{v}_{I\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{v}_{I\alpha}.$$

Wstawmy związki

$$\begin{aligned} \vec{r}_{I\alpha} &= \vec{r}_O + \vec{r}_\alpha, \\ \vec{v}_{I\alpha} &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha, \end{aligned}$$

wówczas dostaniemy

$$\begin{aligned} \vec{L}_{\text{całk.}} &= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha (\vec{r}_O + \vec{r}_\alpha) \times (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left[\vec{r}_O \times \vec{v}_O + \vec{r}_O \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) + \vec{r}_\alpha \times \vec{v}_O + \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)\right]. \end{aligned}$$

Moment pędu bryły sztywnej

W układzie inercjalnym bryła ma całkowity moment pędu

$$\vec{L}_{\text{całk.}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{p}_{I\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times (m_\alpha \vec{v}_{I\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{v}_{I\alpha}.$$

Wstawmy związki

$$\begin{aligned} \vec{r}_{I\alpha} &= \vec{r}_O + \vec{r}_\alpha, \\ \vec{v}_{I\alpha} &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha, \end{aligned}$$

wówczas dostaniemy

$$\begin{aligned} \vec{L}_{\text{całk.}} &= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\vec{r}_O + \vec{r}_\alpha\right) \times \left(\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left[\vec{r}_O \times \vec{v}_O + \vec{r}_O \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha\right) + \vec{r}_\alpha \times \vec{v}_O + \vec{r}_\alpha \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha\right)\right]. \end{aligned}$$

Moment pędu bryły sztywnej

Co możemy dalej przekształcić

$$\vec{L}_{\text{całk.}} = m\vec{r}_O \times \vec{v}_O + \vec{r}_O \times \left[\vec{\omega} \times \left(\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha\right)\right] + \left(\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha\right) \times \vec{v}_O$$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)\,.$$

Jeśli bryła jest swobodna, to wybieramy O w środku masy, $\vec{r}_O = \vec{r}_S$.

Moment pędu bryły sztywnej

Co możemy dalej przekształcić

$$\vec{L}_{\text{całk.}} = m\vec{r}_O \times \vec{v}_O + \vec{r}_O \times \left[\vec{\omega} \times \left(\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha\right)\right] + \left(\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha\right) \times \vec{v}_O$$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)\,.$$

Jeśli bryła jest swobodna, to wybieramy O w środku masy, $\vec{r}_O = \vec{r}_S$. Wówczas $\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha = 0$

Moment pędu bryły sztywnej

Co możemy dalej przekształcić

$$\vec{L}_{\text{całk.}} = m\vec{r}_O \times \vec{v}_O + \vec{r}_O \times \left[\vec{\omega} \times \left(\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha\right)\right] + \left(\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha\right) \times \vec{v}_O$$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)\,.$$

Jeśli bryła jest swobodna, to wybieramy O w środku masy, $\vec{r}_O = \vec{r}_S$. Wówczas $\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha = 0$ i całkowity moment pędu wyraża się wzorem

$$\vec{L}_{\text{całk.}} = m\vec{r}_S \times \vec{v}_S + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) = \vec{r}_S \times (m\vec{v}_S) + \vec{L}.$$

Moment pędu bryły sztywnej

Co możemy dalej przekształcić

$$\vec{L}_{\text{całk.}} = m\vec{r}_O \times \vec{v}_O + \vec{r}_O \times \left[\vec{\omega} \times \left(\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha\right)\right] + \left(\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha\right) \times \vec{v}_O$$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)\,.$$

Jeśli bryła jest swobodna, to wybieramy O w środku masy, $\vec{r}_O = \vec{r}_S$. Wówczas $\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha = 0$ i całkowity moment pędu wyraża się wzorem

$$\vec{L}_{\text{całk.}} = m\vec{r}_S \times \vec{v}_S + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) = \vec{r}_S \times (m\vec{v}_S) + \vec{L}.$$

Moment pędu bryły sztywnej

Jeśli są więzy, to wybieramy początek układu inercjalnego O_I i początek układu związanego z bryłą O w jednym z nieruchomych punktów bryły. Wtedy $\vec{r}_O = 0$ i $\vec{v}_O = 0$ i całkowity moment pędu ma postać

$$\vec{L}_{\text{całk.}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) = \vec{L}.$$

Moment pędu bryły sztywnej

Jeśli są więzy, to wybieramy początek układu inercjalnego O_I i początek układu związanego z bryłą O w jednym z nieruchomych punktów bryły. Wtedy $\vec{r}_O = 0$ i $\vec{v}_O = 0$ i całkowity moment pędu ma postać

$$\vec{L}_{\text{całk.}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) = \vec{L}.$$

Oznaczmy $\vec{r}_\alpha \equiv (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3})$ i obliczmy

$$[\vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)]_i =$$

Moment pędu bryły sztywnej

Jeśli są więzy, to wybieramy początek układu inercjalnego O_I i początek układu związanego z bryłą O w jednym z nieruchomych punktów bryły. Wtedy $\vec{r}_O = 0$ i $\vec{v}_O = 0$ i całkowity moment pędu ma postać

$$\vec{L}_{\text{całk.}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) = \vec{L}.$$

Oznaczmy $\vec{r}_\alpha \equiv (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3})$ i obliczmy

$$[\vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)]_i = \varepsilon_{ijk} x_{\alpha j} (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)_k =$$

Moment pędu bryły sztywnej

Jeśli są więzy, to wybieramy początek układu inercjalnego O_I i początek układu związanego z bryłą O w jednym z nieruchomych punktów bryły. Wtedy $\vec{r}_O = 0$ i $\vec{v}_O = 0$ i całkowity moment pędu ma postać

$$\vec{L}_{\text{całk.}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) = \vec{L}.$$

Oznaczmy $\vec{r}_\alpha \equiv (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3})$ i obliczmy

$$[\vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)]_i = \varepsilon_{ijk} x_{\alpha j} (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)_k = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} x_{\alpha j} \omega_m x_{\alpha n} =$$

Moment pędu bryły sztywnej

Jeśli są więzy, to wybieramy początek układu inercjalnego O_I i początek układu związanego z bryłą O w jednym z nieruchomych punktów bryły. Wtedy $\vec{r}_O = 0$ i $\vec{v}_O = 0$ i całkowity moment pędu ma postać

$$\vec{L}_{\text{całk.}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) = \vec{L}.$$

Oznaczmy $\vec{r}_\alpha \equiv (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3})$ i obliczmy

$$[\vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)]_i = \varepsilon_{ijk} x_{\alpha j} (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)_k = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} x_{\alpha j} \omega_m x_{\alpha n} =$$
$$(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}) x_{\alpha j} \omega_m x_{\alpha n} =$$

Moment pędu bryły sztywnej

Jeśli są więzy, to wybieramy początek układu inercjalnego O_I i początek układu związanego z bryłą O w jednym z nieruchomych punktów bryły. Wtedy $\vec{r}_O = 0$ i $\vec{v}_O = 0$ i całkowity moment pędu ma postać

$$\vec{L}_{\text{całk.}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) = \vec{L}.$$

Oznaczmy $\vec{r}_\alpha \equiv (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3})$ i obliczmy

$$\begin{aligned}[\vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)]_i &= \varepsilon_{ijk} x_{\alpha j} \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha\right)_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn} x_{\alpha j}\omega_m x_{\alpha n} = \\ &\left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right) x_{\alpha j}\omega_m x_{\alpha n} = x_{\alpha j}\omega_i x_{\alpha j} - x_{\alpha j}\omega_j x_{\alpha i}.\end{aligned}$$

Moment pędu bryły sztywnej

Jeśli są więzy, to wybieramy początek układu inercjalnego O_I i początek układu związanego z bryłą O w jednym z nieruchomych punktów bryły. Wtedy $\vec{r}_O = 0$ i $\vec{v}_O = 0$ i całkowity moment pędu ma postać

$$\vec{L}_{\text{całk.}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) = \vec{L}.$$

Oznaczmy $\vec{r}_\alpha \equiv (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3})$ i obliczmy

$$\begin{aligned}[\vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)]_i &= \varepsilon_{ijk} x_{\alpha j} \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha\right)_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn} x_{\alpha j}\omega_m x_{\alpha n} = \\ &\left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right) x_{\alpha j}\omega_m x_{\alpha n} = x_{\alpha j}\omega_i x_{\alpha j} - x_{\alpha j}\omega_j x_{\alpha i}.\end{aligned}$$

Moment pędu bryły sztywnej

Wtedy

$$L_i = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left[\vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)\right]_i = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(x_{\alpha j} x_{\alpha j} \omega_i - x_{\alpha j} \omega_j x_{\alpha i}\right)$$

Moment pędu bryły sztywnej

Wtedy

$$L_i = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left[\vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)\right]_i = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(x_{\alpha j} x_{\alpha j} \omega_i - x_{\alpha j} \omega_j x_{\alpha i}\right)$$

$$=$$

Moment pędu bryły sztywnej

Wtedy

$$
\begin{aligned}
L_i &= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left[\vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)\right]_i = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(x_{\alpha j} x_{\alpha j} \omega_i - x_{\alpha j} \omega_j x_{\alpha i}\right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(x_{\alpha k} x_{\alpha k} \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j}\right) \omega_j =
\end{aligned}
$$

Moment pędu bryły sztywnej

Wtedy

$$
\begin{aligned}
L_i &= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left[\vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)\right]_i = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(x_{\alpha j} x_{\alpha j} \omega_i - x_{\alpha j} \omega_j x_{\alpha i}\right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(x_{\alpha k} x_{\alpha k} \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j}\right) \omega_j = I_{ij} \omega_j,
\end{aligned}
$$

Moment pędu bryły sztywnej

Wtedy

$$
\begin{aligned}
L_i &= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left[\vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)\right]_i = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(x_{\alpha j} x_{\alpha j} \omega_i - x_{\alpha j} \omega_j x_{\alpha i}\right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(x_{\alpha k} x_{\alpha k} \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j}\right) \omega_j = I_{ij} \omega_j,
\end{aligned}
$$

a więc moment pędu bryły wyraża się wzorem

$$L_i = I_{ij} \omega_j, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Moment pędu bryły sztywnej

Wtedy

$$
\begin{aligned}
L_i &= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left[\vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)\right]_i = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(x_{\alpha j} x_{\alpha j} \omega_i - x_{\alpha j} \omega_j x_{\alpha i}\right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(x_{\alpha k} x_{\alpha k} \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j}\right) \omega_j = I_{ij} \omega_j,
\end{aligned}
$$

a więc moment pędu bryły wyraża się wzorem

$$
L_i = I_{ij} \omega_j, \qquad i = 1, 2, 3.
$$

Moment pędu bryły sztywnej

Jeśli jako osie układu związanego z bryłą wybierzemy główne osie bezwładności, to otrzymamy związki

$$L_1 = I_1\omega_1, \qquad L_2 = I_2\omega_2, \qquad L_3 = I_3\omega_3.$$

Widzimy, że tylko przy ruchu obrotowym względem którejś z głównych osi bezwładności moment pędu ma kierunek prędkości kątowej.

Moment pędu bryły sztywnej

Jeśli jako osie układu związanego z bryłą wybierzemy główne osie bezwładności, to otrzymamy związki

$$L_1 = I_1\omega_1, \qquad L_2 = I_2\omega_2, \qquad L_3 = I_3\omega_3.$$

Widzimy, że tylko przy ruchu obrotowym względem którejś z głównych osi bezwładności moment pędu ma kierunek prędkości kątowej.

Ruch środka masy bryły sztywnej

Rozważmy ruch wybranego elementu bryły

$$m_\alpha \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} + \sum_{\beta=1}^{N} \vec{F}_{\alpha\beta},$$

gdzie $\vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}}$ jest wypadkową siłą zewnętrzną działającą na element α,

Ruch środka masy bryły sztywnej

Rozważmy ruch wybranego elementu bryły

$$m_\alpha \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} + \sum_{\beta=1}^{N} \vec{F}_{\alpha\beta},$$

gdzie $\vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}}$ jest wypadkową siłą zewnętrzną działającą na element α, a

$$\sum_{\beta=1}^{N} \vec{F}_{\alpha\beta}, \qquad \vec{F}_{\alpha\alpha} = 0,$$

to siła wywierana na ten element przez pozostałe elementy bryły.

Ruch środka masy bryły sztywnej

Rozważmy ruch wybranego elementu bryły

$$m_\alpha \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} + \sum_{\beta=1}^{N} \vec{F}_{\alpha\beta},$$

gdzie $\vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}}$ jest wypadkową siłą zewnętrzną działającą na element α, a

$$\sum_{\beta=1}^{N} \vec{F}_{\alpha\beta}, \qquad \vec{F}_{\alpha\alpha} = 0,$$

to siła wywierana na ten element przez pozostałe elementy bryły.

Ruch środka masy bryły sztywnej

Współrzędne środka masy wyrażają się wzorem

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha},$$

a jego równanie ruchu ma postać

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}}_S &= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} + \sum_{\beta=1}^{N}\vec{F}_{\alpha\beta}\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\vec{F}_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Ruch środka masy bryły sztywnej

Współrzędne środka masy wyrażają się wzorem

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha},$$

a jego równanie ruchu ma postać

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}}_S &= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} + \sum_{\beta=1}^{N}\vec{F}_{\alpha\beta}\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\vec{F}_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Podwójna suma po prawej stronie znika, gdyż

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\vec{F}_{\alpha\beta} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{31} + \cdots = 0,$$

Ruch środka masy bryły sztywnej

Współrzędne środka masy wyrażają się wzorem

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha},$$

a jego równanie ruchu ma postać

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}}_S &= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} + \sum_{\beta=1}^{N}\vec{F}_{\alpha\beta}\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\vec{F}_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Podwójna suma po prawej stronie znika, gdyż

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\vec{F}_{\alpha\beta} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{31} + \cdots = 0,$$

Ruch środka masy bryły sztywnej

a z III zasady dynamiki wynika, że $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{31} = -\vec{F}_{13}$, itd.
Zatem równanie ruchu środka masy bryły ma postać

$$m\ddot{\vec{r}}_S = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha}^{\text{zewn.}} = \vec{F}^{\text{zewn.}}.$$

Ruch środka masy bryły sztywnej

a z III zasady dynamiki wynika, że $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{31} = -\vec{F}_{13}$, itd. Zatem równanie ruchu środka masy bryły ma postać

$$m\ddot{\vec{r}}_S = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} = \vec{F}^{\text{zewn.}}.$$

Środek masy porusza się tak, jakby cała masa była w nim skupiona, a wypadkowa siła zewnętrzna doń przyłożona.

Ruch środka masy bryły sztywnej

a z III zasady dynamiki wynika, że $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{31} = -\vec{F}_{13}$, itd. Zatem równanie ruchu środka masy bryły ma postać

$$m\ddot{\vec{r}}_S = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} = \vec{F}^{\text{zewn.}}.$$

Środek masy porusza się tak, jakby cała masa była w nim skupiona, a wypadkowa siła zewnętrzna doń przyłożona. Zatem punkt przyłożenia siły zewnętrznej do bryły nie wpływa na ruch środka masy.

Ruch środka masy bryły sztywnej

a z III zasady dynamiki wynika, że $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{31} = -\vec{F}_{13}$, itd. Zatem równanie ruchu środka masy bryły ma postać

$$m\ddot{\vec{r}}_S = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha}^{\text{zewn.}} = \vec{F}^{\text{zewn.}}.$$

Środek masy porusza się tak, jakby cała masa była w nim skupiona, a wypadkowa siła zewnętrzna doń przyłożona. Zatem punkt przyłożenia siły zewnętrznej do bryły nie wpływa na ruch środka masy.

Ruch obrotowy bryły

Rozważmy ponownie równanie ruchu elementu α

$$m_\alpha \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} + \sum_{\beta=1}^{N} \vec{F}_{\alpha\beta}.$$

Pomnóżmy to równanie wektorowo przez $\vec{r}_{I\alpha}$ i wysumujmy po α

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}}}_{\vec{N}^{\text{zewn.}}} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{F}_{\alpha\beta},$$

$$=$$

Ruch obrotowy bryły

Rozważmy ponownie równanie ruchu elementu α

$$m_\alpha \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} + \sum_{\beta=1}^{N} \vec{F}_{\alpha\beta}.$$

Pomnóżmy to równanie wektorowo przez $\vec{r}_{I\alpha}$ i wysumujmy po α

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} &= \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}}}_{\vec{N}^{\text{zewn.}}} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{F}_{\alpha\beta}, \\
&= \vec{N}^{\text{zewn.}} + \vec{r}_{I1} \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_{I2} \times \vec{F}_{21}
\end{aligned}$$

Ruch obrotowy bryły

Rozważmy ponownie równanie ruchu elementu α

$$m_\alpha \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} + \sum_{\beta=1}^{N} \vec{F}_{\alpha\beta}.$$

Pomnóżmy to równanie wektorowo przez $\vec{r}_{I\alpha}$ i wysumujmy po α

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} &= \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}}}_{\vec{N}^{\text{zewn.}}} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{F}_{\alpha\beta}, \\
&= \vec{N}^{\text{zewn.}} + \vec{r}_{I1} \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_{I2} \times \vec{F}_{21} \\
&+
\end{aligned}$$

Ruch obrotowy bryły

Rozważmy ponownie równanie ruchu elementu α

$$m_\alpha \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} + \sum_{\beta=1}^{N} \vec{F}_{\alpha\beta}.$$

Pomnóżmy to równanie wektorowo przez $\vec{r}_{I\alpha}$ i wysumujmy po α

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} &= \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}}}_{\vec{N}^{\text{zewn.}}} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{F}_{\alpha\beta}, \\
&= \vec{N}^{\text{zewn.}} + \vec{r}_{I1} \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_{I2} \times \vec{F}_{21} \\
&+ \vec{r}_{I1} \times \vec{F}_{13} + \vec{r}_{I3} \times \vec{F}_{31} + \ldots
\end{aligned}$$

Ruch obrotowy bryły

Rozważmy ponownie równanie ruchu elementu α

$$m_\alpha \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} + \sum_{\beta=1}^{N} \vec{F}_{\alpha\beta}.$$

Pomnóżmy to równanie wektorowo przez $\vec{r}_{I\alpha}$ i wysumujmy po α

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} &= \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}}}_{\vec{N}^{\text{zewn.}}} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{F}_{\alpha\beta}, \\
&= \vec{N}^{\text{zewn.}} + \vec{r}_{I1} \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_{I2} \times \vec{F}_{21} \\
&+ \vec{r}_{I1} \times \vec{F}_{13} + \vec{r}_{I3} \times \vec{F}_{31} + \ldots
\end{aligned}$$

Ruch obrotowy bryły

Wyrazy po prawej stronie możemy pogrupować w pary, np.

$$\vec{r}_{l1} \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_{l2} \times \vec{F}_{21} = (\vec{r}_{l1} - \vec{r}_{l2}) \times \vec{F}_{12}.$$

Ruch obrotowy bryły

Wyrazy po prawej stronie możemy pogrupować w pary, np.

$$\vec{r}_{I1} \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_{I2} \times \vec{F}_{21} = (\vec{r}_{I1} - \vec{r}_{I2}) \times \vec{F}_{12}.$$

Siła działająca pomiędzy punktami 1 i 2 ma kierunek wektora

$$\vec{r}_{I1} - \vec{r}_{I2},$$

Ruch obrotowy bryły

Wyrazy po prawej stronie możemy pogrupować w pary, np.

$$\vec{r}_{I1} \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_{I2} \times \vec{F}_{21} = (\vec{r}_{I1} - \vec{r}_{I2}) \times \vec{F}_{12}.$$

Siła działająca pomiędzy punktami 1 i 2 ma kierunek wektora

$$\vec{r}_{I1} - \vec{r}_{I2},$$

więc $\quad (\vec{r}_{I1} - \vec{r}_{I2}) \times \vec{F}_{12} = 0.$

Ruch obrotowy bryły

Wyrazy po prawej stronie możemy pogrupować w pary, np.

$$\vec{r}_{I1} \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_{I2} \times \vec{F}_{21} = (\vec{r}_{I1} - \vec{r}_{I2}) \times \vec{F}_{12}.$$

Siła działająca pomiędzy punktami 1 i 2 ma kierunek wektora

$$\vec{r}_{I1} - \vec{r}_{I2},$$

więc $(\vec{r}_{I1} - \vec{r}_{I2}) \times \vec{F}_{12} = 0.$

Zaniedbujemy przy tym efekty relatywistyczne, które mogą dawać siłę działającą w innym kierunku,

Ruch obrotowy bryły

Wyrazy po prawej stronie możemy pogrupować w pary, np.

$$\vec{r}_{I1} \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_{I2} \times \vec{F}_{21} = (\vec{r}_{I1} - \vec{r}_{I2}) \times \vec{F}_{12}.$$

Siła działająca pomiędzy punktami 1 i 2 ma kierunek wektora

$$\vec{r}_{I1} - \vec{r}_{I2},$$

więc $(\vec{r}_{I1} - \vec{r}_{I2}) \times \vec{F}_{12} = 0.$
Zaniedbujemy przy tym efekty relatywistyczne, które mogą dawać siłę działającą w innym kierunku, jak to ma miejsce np. w przypadku siły Lorentza.

Ruch obrotowy bryły

Wyrazy po prawej stronie możemy pogrupować w pary, np.

$$\vec{r}_{I1} \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_{I2} \times \vec{F}_{21} = (\vec{r}_{I1} - \vec{r}_{I2}) \times \vec{F}_{12}.$$

Siła działająca pomiędzy punktami 1 i 2 ma kierunek wektora

$$\vec{r}_{I1} - \vec{r}_{I2},$$

więc $(\vec{r}_{I1} - \vec{r}_{I2}) \times \vec{F}_{12} = 0.$

Zaniedbujemy przy tym efekty relatywistyczne, które mogą dawać siłę działającą w innym kierunku, jak to ma miejsce np. w przypadku siły Lorentza.

Zatem otrzymujemy równanie ruchu bryły sztywnej w formie

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \vec{N}^{\text{zewn.}}.$$

Ruch obrotowy bryły

Wyrazy po prawej stronie możemy pogrupować w pary, np.

$$\vec{r}_{I1} \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_{I2} \times \vec{F}_{21} = (\vec{r}_{I1} - \vec{r}_{I2}) \times \vec{F}_{12}.$$

Siła działająca pomiędzy punktami 1 i 2 ma kierunek wektora

$$\vec{r}_{I1} - \vec{r}_{I2},$$

więc $\quad (\vec{r}_{I1} - \vec{r}_{I2}) \times \vec{F}_{12} = 0.$

Zaniedbujemy przy tym efekty relatywistyczne, które mogą dawać siłę działającą w innym kierunku, jak to ma miejsce np. w przypadku siły Lorentza.

Zatem otrzymujemy równanie ruchu bryły sztywnej w formie

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \vec{N}^{\text{zewn.}}.$$

Ruch obrotowy bryły

Lewą stronę równania możemy zapisać

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_{I\alpha} = \dot{\vec{L}}_{\text{całk.}},$$

gdyż

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_{I\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \underbrace{\dot{\vec{r}}_{I\alpha} \times \dot{\vec{r}}_{I\alpha}}_{0} + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I\alpha}.$$

Ruch obrotowy bryły

Lewą stronę równania możemy zapisać

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_{I\alpha} = \dot{\vec{L}}_{\text{całk.}},$$

gdyż

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_{I\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \underbrace{\dot{\vec{r}}_{I\alpha} \times \dot{\vec{r}}_{I\alpha}}_{0} + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I\alpha}.$$

Zatem równanie ruchu bryły sztywnej przyjmuje postać

$$\dot{\vec{L}}_{\text{całk.}} = \vec{N}^{\text{zewn.}},$$

Ruch obrotowy bryły

Lewą stronę równania możemy zapisać

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_{I\alpha} = \dot{\vec{L}}_{\text{całk.}},$$

gdyż

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_{I\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \underbrace{\dot{\vec{r}}_{I\alpha} \times \dot{\vec{r}}_{I\alpha}}_{0} + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I\alpha}.$$

Zatem równanie ruchu bryły sztywnej przyjmuje postać

$$\dot{\vec{L}}_{\text{całk.}} = \vec{N}^{\text{zewn.}},$$

gdzie $\vec{L}_{\text{całk.}}$ i $\vec{N}^{\text{zewn.}}$ są mierzone w układzie inercjalnym.

Ruch obrotowy bryły

Lewą stronę równania możemy zapisać

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_{I\alpha} = \dot{\vec{L}}_{\text{całk.}},$$

gdyż

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_{I\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \underbrace{\dot{\vec{r}}_{I\alpha} \times \dot{\vec{r}}_{I\alpha}}_{0} + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I\alpha}.$$

Zatem równanie ruchu bryły sztywnej przyjmuje postać

$$\dot{\vec{L}}_{\text{całk.}} = \vec{N}^{\text{zewn.}},$$

gdzie $\vec{L}_{\text{całk.}}$ i $\vec{N}^{\text{zewn.}}$ są mierzone w układzie inercjalnym.

Ruch obrotowy bryły

Wróćmy do równania

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}}.$$

Wybierzmy początek układu związanego z bryłą w jej środku masy i podstawmy

$$\begin{aligned} \vec{r}_{I\alpha} &= \vec{r}_S + \vec{r}_\alpha, \\ \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} &= \ddot{\vec{r}}_S + \ddot{\vec{r}}_\alpha, \end{aligned}$$

Ruch obrotowy bryły

Wróćmy do równania

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}}.$$

Wybierzmy początek układu związanego z bryłą w jej środku masy i podstawmy

$$\begin{aligned} \vec{r}_{I\alpha} &= \vec{r}_S + \vec{r}_\alpha, \\ \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} &= \ddot{\vec{r}}_S + \ddot{\vec{r}}_\alpha, \end{aligned}$$

wówczas otrzymamy

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\vec{r}_S + \vec{r}_\alpha\right) \times \left(\ddot{\vec{r}}_S + \ddot{\vec{r}}_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\vec{r}_S + \vec{r}_\alpha\right) \times \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}}.$$

Ruch obrotowy bryły

Wróćmy do równania

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}}.$$

Wybierzmy początek układu związanego z bryłą w jej środku masy i podstawmy

$$\begin{aligned} \vec{r}_{I\alpha} &= \vec{r}_S + \vec{r}_\alpha, \\ \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} &= \ddot{\vec{r}}_S + \ddot{\vec{r}}_\alpha, \end{aligned}$$

wówczas otrzymamy

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\vec{r}_S + \vec{r}_\alpha\right) \times \left(\ddot{\vec{r}}_S + \ddot{\vec{r}}_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\vec{r}_S + \vec{r}_\alpha\right) \times \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}}.$$

Ruch obrotowy bryły

Rozpisując iloczyny otrzymamy

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\vec{r}_S + \vec{r}_\alpha\right) \times \left(\ddot{\vec{r}}_S + \ddot{\vec{r}}_\alpha\right) =$$

$$\underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha}_{m} \vec{r}_S \times \ddot{\vec{r}}_S + \vec{r}_S \times \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \ddot{\vec{r}}_S +$$

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \ddot{\vec{r}}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\vec{r}_S \times \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} + \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}}\right).$$

Ruch obrotowy bryły

Rozpisując iloczyny otrzymamy

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\vec{r}_S + \vec{r}_\alpha\right) \times \left(\ddot{\vec{r}}_S + \ddot{\vec{r}}_\alpha\right) =$$

$$\underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha}_{m} \vec{r}_S \times \ddot{\vec{r}}_S + \vec{r}_S \times \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \ddot{\vec{r}}_S +$$

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \ddot{\vec{r}}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\vec{r}_S \times \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} + \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}}\right).$$

Ponieważ $O = S$, to

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = 0$$

Ruch obrotowy bryły

Rozpisując iloczyny otrzymamy

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\vec{r}_S + \vec{r}_\alpha\right) \times \left(\ddot{\vec{r}}_S + \ddot{\vec{r}}_\alpha\right) =$$

$$\underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha}_{m} \vec{r}_S \times \ddot{\vec{r}}_S + \vec{r}_S \times \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \ddot{\vec{r}}_S +$$

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \ddot{\vec{r}}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\vec{r}_S \times \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} + \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}}\right).$$

Ponieważ $O = S$, to

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = 0$$

Ruch obrotowy bryły

i nasze równanie przyjmuje postać

$$\vec{r}_S \times \left(m\ddot{\vec{r}}_S\right) + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \ddot{\vec{r}}_\alpha = \vec{r}_S \times \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} + \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}}.$$

Pierwszy wyraz po lewej stronie redukuje się z pierwszym wyrazem po prawej stronie równania dzięki równaniu ruchu środka masy bryły

$$m\ddot{\vec{r}}_S = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} = \vec{F}^{\text{zewn.}},$$

Ruch obrotowy bryły

i nasze równanie przyjmuje postać

$$\vec{r}_S \times \left(m\ddot{\vec{r}}_S\right) + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \ddot{\vec{r}}_\alpha = \vec{r}_S \times \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} + \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}}.$$

Pierwszy wyraz po lewej stronie redukuje się z pierwszym wyrazem po prawej stronie równania dzięki równaniu ruchu środka masy bryły

$$m\ddot{\vec{r}}_S = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} = \vec{F}^{\text{zewn.}},$$

a drugi wyraz po lewej stronie możemy zapisać w formie

$$\dot{\vec{L}}_S = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \underbrace{\dot{\vec{r}}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha}_{0} + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \ddot{\vec{r}}_\alpha.$$

Ruch obrotowy bryły

i nasze równanie przyjmuje postać

$$\vec{r}_S \times \left(m\ddot{\vec{r}}_S\right) + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \ddot{\vec{r}}_\alpha = \vec{r}_S \times \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} + \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}}.$$

Pierwszy wyraz po lewej stronie redukuje się z pierwszym wyrazem po prawej stronie równania dzięki równaniu ruchu środka masy bryły

$$m\ddot{\vec{r}}_S = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\text{zewn.}} = \vec{F}^{\text{zewn.}},$$

a drugi wyraz po lewej stronie możemy zapisać w formie

$$\dot{\vec{L}}_S = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \underbrace{\dot{\vec{r}}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha}_{0} + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \ddot{\vec{r}}_\alpha.$$

Ruch obrotowy bryły

W takim razie równanie ruchu bryły sztywnej przyjmuje postać

$$\dot{\vec{L}}_S = \vec{N}_S,$$

gdzie moment pędu $\vec{L}_S$ i moment siły $\vec{N}_S$ są mierzone względem środka masy bryły.

Ruch obrotowy bryły

W takim razie równanie ruchu bryły sztywnej przyjmuje postać

$$\dot{\vec{L}}_S = \vec{N}_S,$$

gdzie moment pędu $\vec{L}_S$ i moment siły $\vec{N}_S$ są mierzone względem środka masy bryły.

Niech $\hat{x}_i$ będą wersorami osi układu związanego z bryłą, wówczas

$$\vec{L} = L_i \hat{x}_i,$$

gdzie opuściliśmy symbol S, gdyż wszystkie wielkości określone są względem środka masy bryły.

Ruch obrotowy bryły

W takim razie równanie ruchu bryły sztywnej przyjmuje postać

$$\dot{\vec{L}}_S = \vec{N}_S,$$

gdzie moment pędu $\vec{L}_S$ i moment siły $\vec{N}_S$ są mierzone względem środka masy bryły.
Niech $\hat{x}_i$ będą wersorami osi układu związanego z bryłą, wówczas

$$\vec{L} = L_i \hat{x}_i,$$

gdzie opuściliśmy symbol S, gdyż wszystkie wielkości określone są względem środka masy bryły. Obliczmy pochodną czasową

$$\dot{\vec{L}} = \dot{L}_i \hat{x}_i + L_i \dot{\hat{x}}_i$$

Ruch obrotowy bryły

W takim razie równanie ruchu bryły sztywnej przyjmuje postać

$$\dot{\vec{L}}_S = \vec{N}_S,$$

gdzie moment pędu $\vec{L}_S$ i moment siły $\vec{N}_S$ są mierzone względem środka masy bryły.
Niech $\hat{x}_i$ będą wersorami osi układu związanego z bryłą, wówczas

$$\vec{L} = L_i \hat{x}_i,$$

gdzie opuściliśmy symbol S, gdyż wszystkie wielkości określone są względem środka masy bryły. Obliczmy pochodną czasową

$$\dot{\vec{L}} = \dot{L}_i \hat{x}_i + L_i \dot{\hat{x}}_i$$

Ruch obrotowy bryły

i przypomnijmy, że $\dot{\hat{x}}_i = \vec{\omega} \times \hat{x}_i$, a zatem

$$\dot{\vec{L}} = \dot{L}_i \hat{x}_i + L_i \vec{\omega} \times \hat{x}_i = \dot{L}_i \hat{x}_i + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{N}.$$

Znajdźmy i-tą składową ostatniego równania uwzględniając wzór $L_i = I_{ij}\omega_j$:

$$I_{ij}\dot{\omega}_j + \varepsilon_{ijk}\omega_j L_k = I_{ij}\dot{\omega}_j + \varepsilon_{ijk}\omega_j I_{km}\omega_m = N_i.$$

Ruch obrotowy bryły

i przypomnijmy, że $\dot{\hat{x}}_i = \vec{\omega} \times \hat{x}_i$, a zatem

$$\dot{\vec{L}} = \dot{L}_i \hat{x}_i + L_i \vec{\omega} \times \hat{x}_i = \dot{L}_i \hat{x}_i + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{N}.$$

Znajdźmy i-tą składową ostatniego równania uwzględniając wzór $L_i = I_{ij}\omega_j$:

$$I_{ij}\dot{\omega}_j + \varepsilon_{ijk}\omega_j L_k = I_{ij}\dot{\omega}_j + \varepsilon_{ijk}\omega_j I_{km}\omega_m = N_i.$$

Jeśli osie układu związanego z bryłą wybierzemy tak, aby pokrywały się z głównymi osiami bezwładności, a więc

$$I_{ii} = I_i, \quad I_{ij} = 0, \quad \text{dla} \;\; i \neq j,$$

to dla poszczególnych składowych możemy wykonać sumowanie po j, k i m.

Ruch obrotowy bryły

i przypomnijmy, że $\dot{\hat{x}}_i = \vec{\omega} \times \hat{x}_i$, a zatem

$$\dot{\vec{L}} = \dot{L}_i \hat{x}_i + L_i \vec{\omega} \times \hat{x}_i = \dot{L}_i \hat{x}_i + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{N}.$$

Znajdźmy i-tą składową ostatniego równania uwzględniając wzór $L_i = I_{ij}\omega_j$:

$$I_{ij}\dot{\omega}_j + \varepsilon_{ijk}\omega_j L_k = I_{ij}\dot{\omega}_j + \varepsilon_{ijk}\omega_j I_{km}\omega_m = N_i.$$

Jeśli osie układu związanego z bryłą wybierzemy tak, aby pokrywały się z głównymi osiami bezwładności, a więc

$$I_{ii} = I_i, \quad I_{ij} = 0, \quad \text{dla} \;\; i \neq j,$$

to dla poszczególnych składowych możemy wykonać sumowanie po j, k i m.

Ruch obrotowy bryły

Dla pierwszej składowej równania

$$I_{ij}\dot{\omega}_j + \varepsilon_{ijk}\omega_j I_{km}\omega_m = N_i$$

otrzymamy:

$$I_{11}\dot{\omega}_1 + \varepsilon_{123}\omega_2 I_{33}\omega_3 + \varepsilon_{132}\omega_3 I_{22}\omega_2 = I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\,\omega_2\omega_3 = N_1.$$

Postępując podobnie dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy układ równań:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\,\omega_2\omega_3 &= N_1, \\ I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\,\omega_3\omega_1 &= N_2, \\ I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\,\omega_1\omega_2 &= N_3. \end{aligned}$$

Są to równania Eulera dla bryły sztywnej w układzie, którego osie pokrywają się z jej głównymi osiami bezwładności, a początek pokrywa się ze środkiem masy bryły lub, w przypadku więzów, znajduje się w nieruchomym punkcie bryły.

Ruch obrotowy bryły

Dla pierwszej składowej równania

$$I_{ij}\dot{\omega}_j + \varepsilon_{ijk}\omega_j I_{km}\omega_m = N_i$$

otrzymamy:

$$I_{11}\dot{\omega}_1 + \varepsilon_{123}\omega_2 I_{33}\omega_3 + \varepsilon_{132}\omega_3 I_{22}\omega_2 = I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\,\omega_2\omega_3 = N_1.$$

Postępując podobnie dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy układ równań:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\,\omega_2\omega_3 &= N_1, \\ I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\,\omega_3\omega_1 &= N_2, \\ I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\,\omega_1\omega_2 &= N_3. \end{aligned}$$

Są to równania Eulera dla bryły sztywnej w układzie, którego osie pokrywają się z jej głównymi osiami bezwładności, a początek pokrywa się ze środkiem masy bryły lub, w przypadku więzów, znajduje się w nieruchomym punkcie bryły.