

Ruch w nieinercyjnym układzie odniesienia

Wykład 10

Karol Kołodziej

(przy współpracy Bartosza Dziewita)

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

Ruch w nieinercyjnym układzie odniesienia

Kolejne dwa wykłady poświęcimy dyskusji zagadnień, które ilustrują zastosowania wprowadzonego wcześniej **formalizmu nierelatywistycznej mechaniki teoretycznej**.

Na początek rozważymy **ruch punktu materialnego w nieinercyjnym układzie odniesienia**.

Ruch w nieinercyjnym układzie odniesienia

Kolejne dwa wykłady poświęcimy dyskusji zagadnień, które ilustrują zastosowania wprowadzonego wcześniej **formalizmu nierelatywistycznej mechaniki teoretycznej**.

Na początek rozważymy **ruch punktu materialnego w nieinercyjnym układzie odniesienia**.

Przejdzie do nieinercyjnego układu odniesienia realizujemy przez transformację punktową

$$q_i \rightarrow Q_i = Q_i(q, t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Ruch w nieinercyjnym układzie odniesienia

Kolejne dwa wykłady poświęcimy dyskusji zagadnień, które ilustrują zastosowania wprowadzonego wcześniej **formalizmu nierelatywistycznej mechaniki teoretycznej**.

Na początek rozważymy **ruch punktu materialnego w nieinercyjnym układzie odniesienia**.

Przejdzie do nieinercyjnego układu odniesienia realizujemy przez **transformację punktową**

$$q_i \rightarrow Q_i = Q_i(q, t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Wykorzystamy fakt, że transformacje punktowe nie zmieniają postaci równań Lagrange'a II rodzaju.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial Q_i} = 0,$$

Ruch w nieinercyjnym układzie odniesienia

Kolejne dwa wykłady poświęcimy dyskusji zagadnień, które ilustrują zastosowania wprowadzonego wcześniej **formalizmu nierelatywistycznej mechaniki teoretycznej**.

Na początek rozważymy **ruch punktu materialnego w nieinercyjnym układzie odniesienia**.

Przejdzie do nieinercyjnego układu odniesienia realizujemy przez **transformację punktową**

$$q_i \rightarrow Q_i = Q_i(q, t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Wykorzystamy fakt, że transformacje punktowe nie zmieniają postaci równań Lagrange'a II rodzaju.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial Q_i} = 0,$$

gdzie nową funkcję Lagrange'a tworzymy wstawiając odwrotne równania transformacyjne do funkcji wyjściowej.

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right) = L'(Q, \dot{Q}, t).$$

Transformację z inercjalnego układu odniesienia S do układu S' poruszającego się ruchem przyspieszonym można przeprowadzić dokonując:

- 1 przesunięcia równoległego początku układu współrzędnych,
- 2 obrotu względem początku układu.

gdzie nową funkcję Lagrange'a tworzymy wstawiając odwrotne równania transformacyjne do funkcji wyjściowej.

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right) = L'(Q, \dot{Q}, t).$$

Transformację z inercjalnego układu odniesienia S do układu S' poruszającego się ruchem przyspieszonym można przeprowadzić dokonując:

- 1 przesunięcia równoległego początku układu współrzędnych,
- 2 obrotu względem początku układu.

Transformacje z punktu 1 są proste, dlatego ograniczmy się do obrotów.

gdzie nową funkcję Lagrange'a tworzymy wstawiając odwrotne równania transformacyjne do funkcji wyjściowej.

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right) = L'(Q, \dot{Q}, t).$$

Transformację z inercjalnego układu odniesienia S do układu S' poruszającego się ruchem przyspieszonym można przeprowadzić dokonując:

- 1 przesunięcia równoległego początku układu współrzędnych,
- 2 obrotu względem początku układu.

Transformacje z punktu 1 są proste, dlatego **ograniczmy się do obrotów.**

Ruch w nieinercyjnym układzie odniesienia

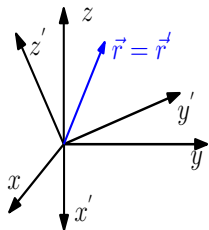
Zakładamy, że początki układów S i S' pokrywają się.

Rozważmy jeden punkt materialny bez więzów.

Wektor położenia ma postać

w układzie S : $\vec{r}(t) = x_i(t)\hat{x}_i,$

w układzie S' : $\vec{r}(t) = x'_i(t)\hat{x}'_i(t),$



gdzie $\hat{x}_i$ i $\hat{x}'_i(t)$ są odpowiednio wersorami osi układu S i S' .

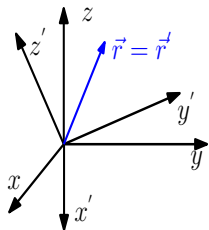
Ruch w nieinercyjnym układzie odniesienia

Zakładamy, że początki układów S i S' pokrywają się.
Rozważmy jeden punkt materialny bez więzów.

Wektor położenia ma postać

w układzie S : $\vec{r}(t) = x_i(t)\hat{x}_i,$

w układzie S' : $\vec{r}(t) = x'_i(t)\hat{x}'_i(t),$



gdzie $\hat{x}_i$ i $\hat{x}'_i(t)$ są odpowiednio wersorami osi układu S i S' .

Prędkości i przyspieszenia w obu układach są różne.

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}_i(t)\hat{x}_i = \vec{v}(t),$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}'_i(t)\hat{x}'_i(t) + x'_i(t)\dot{\hat{x}}'_i(t),$$

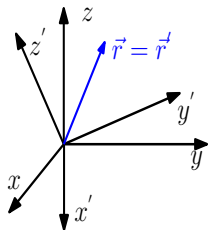
Ruch w nieinercjalnym układzie odniesienia

Zakładamy, że początki układów S i S' pokrywają się.
Rozważmy jeden punkt materialny bez więzów.

Wektor położenia ma postać

w układzie S : $\vec{r}(t) = x_i(t)\hat{x}_i,$

w układzie S' : $\vec{r}(t) = x'_i(t)\hat{x}'_i(t),$



gdzie $\hat{x}_i$ i $\hat{x}'_i(t)$ są odpowiednio wersorami osi układu S i S' .
Prędkości i przyspieszenia w obu układach są różne.

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}_i(t)\hat{x}_i = \vec{v}(t),$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}'_i(t)\hat{x}'_i(t) + x'_i(t)\dot{\hat{x}}'_i(t),$$

gdyż wersory układu S' obracają się w układzie S , a więc zmieniają się w czasie.

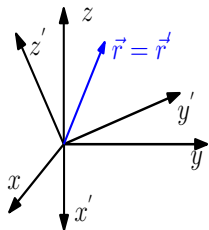
Ruch w nieinercyjnym układzie odniesienia

Zakładamy, że początki układów S i S' pokrywają się.
Rozważmy jeden punkt materialny bez więzów.

Wektor położenia ma postać

w układzie S : $\vec{r}(t) = x_i(t)\hat{x}_i,$

w układzie S' : $\vec{r}(t) = x'_i(t)\hat{x}'_i(t),$



gdzie $\hat{x}_i$ i $\hat{x}'_i(t)$ są odpowiednio wersorami osi układu S i S' .
Prędkości i przyspieszenia w obu układach są różne.

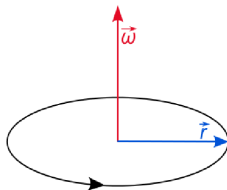
$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}_i(t)\hat{x}_i = \vec{v}(t),$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}'_i(t)\hat{x}'_i(t) + x'_i(t)\dot{\hat{x}}'_i(t),$$

gdyż wersory układu S' obracają się w układzie S , a więc zmieniają się w czasie.

Ruch w nieinercyjnym układzie odniesienia

Wprowadźmy wektor, a właściwie pseudowektor, prędkości kątowej $\vec{\omega}$ skierowany wzdłuż chwilowej osi obrotu, którego zwrot określamy zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.

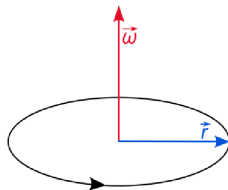


Wtedy zmianę wersora układu primowanego w czasie $\hat{x}'_i(t)$ możemy wyrazić następująco:

$$\dot{\hat{x}}'_i(t) = \vec{\omega} \times \hat{x}'_i(t).$$

Ruch w nieinercyjnym układzie odniesienia

Wprowadźmy wektor, a właściwie pseudowektor, prędkości kątowej $\vec{\omega}$ skierowany wzdłuż chwilowej osi obrotu, którego zwrot określamy zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.



Wtedy zmianę wektora układu primowanego w czasie $\dot{\hat{x}}'_i(t)$ możemy wyrazić następująco:

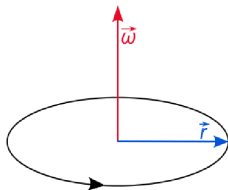
$$\dot{\hat{x}}'_i(t) = \vec{\omega} \times \hat{x}'_i(t).$$

Uwzględniając ten wzór w równaniu

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}'_i(t)\hat{x}'_i(t) + x'_i(t)\dot{\hat{x}}'_i(t)$$

Ruch w nieinercyjnym układzie odniesienia

Wprowadźmy wektor, a właściwie pseudowektor, prędkości kątowej $\vec{\omega}$ skierowany wzdłuż chwilowej osi obrotu, którego zwrot określamy zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.



Wtedy zmianę wektora układu primowanego w czasie $\dot{\hat{x}}'_i(t)$ możemy wyrazić następująco:

$$\dot{\hat{x}}'_i(t) = \vec{\omega} \times \hat{x}'_i(t).$$

Uwzględniając ten wzór w równaniu

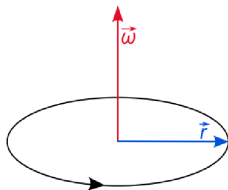
$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}'_i(t)\hat{x}'_i(t) + x'_i(t)\dot{\hat{x}}'_i(t)$$

otrzymamy

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}'_i(t)\hat{x}'_i(t) + \vec{\omega} \times x'_i(t)\hat{x}'_i(t) = \vec{v}'(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}(t).$$

Ruch w nieinercyjnym układzie odniesienia

Wprowadźmy wektor, a właściwie pseudowektor, prędkości kątowej $\vec{\omega}$ skierowany wzdłuż chwilowej osi obrotu, którego zwrot określamy zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.



Wtedy zmianę wektora układu primowanego w czasie $\dot{\hat{x}}'_i(t)$ możemy wyrazić następująco:

$$\dot{\hat{x}}'_i(t) = \vec{\omega} \times \hat{x}'_i(t).$$

Uwzględniając ten wzór w równaniu

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}'_i(t)\hat{x}'_i(t) + x'_i(t)\dot{\hat{x}}'_i(t)$$

otrzymamy

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}'_i(t)\hat{x}'_i(t) + \vec{\omega} \times x'_i(t)\hat{x}'_i(t) = \vec{v}'(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}(t).$$

Otrzymaliśmy wzór transformacyjny dla prędkości

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

gdzie $\vec{v}$ jest prędkością punktu w układzie inercyjnym,

Otrzymaliśmy wzór transformacyjny dla prędkości

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

gdzie $\vec{v}$ jest prędkością punktu w układzie inercyjnym,
 $\vec{v}'$ jest jego prędkością w układzie nieinercyjnym,

Otrzymaliśmy wzór transformacyjny dla prędkości

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

gdzie $\vec{v}$ jest prędkością punktu w układzie inercyjnym,

$\vec{v}'$ jest jego prędkością w układzie nieinercyjnym,

a $\vec{\omega}$ jest prędkością kątową, z którą układ nieinercyjny porusza się względem układu inercyjnego.

Otrzymaliśmy wzór transformacyjny dla prędkości

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

gdzie $\vec{v}$ jest prędkością punktu w układzie inercyjnym,
 $\vec{v}'$ jest jego prędkością w układzie nieinercyjnym,
a $\vec{\omega}$ jest prędkością kątową, z którą układ nieinercyjny porusza się
względem układu inercyjnego.

Podstawmy związek

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

do funkcji Lagrange'a punktu materialnego

$$L(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - V(\vec{r})$$

=

Podstawmy związek

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

do funkcji Lagrange'a punktu materialnego

$$\begin{aligned} L(\vec{r}, \vec{v}) &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - V(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 + m \vec{v}' \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 - V(\vec{r}) \end{aligned}$$

Podstawmy związek

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

do funkcji Lagrange'a punktu materialnego

$$\begin{aligned} L(\vec{r}, \vec{v}) &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - V(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 + m \vec{v}' \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 - V(\vec{r}) = L'(\vec{r}, \vec{v}') . \end{aligned}$$

Podstawmy związek

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

do funkcji Lagrange'a punktu materialnego

$$\begin{aligned} L(\vec{r}, \vec{v}) &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - V(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 + m \vec{v}' \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 - V(\vec{r}) = L'(\vec{r}, \vec{v}') . \end{aligned}$$

Wyraźmy nową funkcję Lagrange'a przez składowe wektorów

$$L' = \frac{1}{2} m \dot{x}'_i \dot{x}'_i + m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m - V$$

Podstawmy związek

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

do funkcji Lagrange'a punktu materialnego

$$\begin{aligned} L(\vec{r}, \vec{v}) &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - V(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 + m \vec{v}' \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 - V(\vec{r}) = L'(\vec{r}, \vec{v}') . \end{aligned}$$

Wyraźmy nową funkcję Lagrange'a przez składowe wektorów

$$L' = \frac{1}{2} m \dot{x}'_i \dot{x}'_i + m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m - V$$

i obliczmy jej pochodne występujące w równaniach Lagrange'a II rodzaju.

Podstawmy związek

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

do funkcji Lagrange'a punktu materialnego

$$\begin{aligned} L(\vec{r}, \vec{v}) &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - V(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 + m \vec{v}' \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 - V(\vec{r}) = L'(\vec{r}, \vec{v}') . \end{aligned}$$

Wyraźmy nową funkcję Lagrange'a przez składowe wektorów

$$L' = \frac{1}{2} m \dot{x}'_i \dot{x}'_i + m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m - V$$

i obliczmy jej pochodne występujące w równaniach Lagrange'a II rodzaju.

$$L' = \frac{1}{2} m \dot{x}'_i \dot{x}'_i + m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m - V,$$
$$\frac{\partial L'}{\partial x'_n}$$

$$L' = \frac{1}{2} m \dot{x}'_i \dot{x}'_i + m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m - V,$$
$$\frac{\partial L'}{\partial x'_n} =$$

$$L' = \frac{1}{2} m \dot{x}'_i \dot{x}'_i + m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m - V,$$
$$\frac{\partial L'}{\partial x'_n} = m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j \delta_{kn} + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{ilm} \omega_l (\delta_{kn} x'_m + x'_k \delta_{mn}) - \frac{\partial V}{\partial x'_n}$$

$$\begin{aligned}
 L' &= \frac{1}{2} m \dot{x}'_i \dot{x}'_i + m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m - V, \\
 \frac{\partial L'}{\partial x'_n} &= m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j \delta_{kn} + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{ilm} \omega_l (\delta_{kn} x'_m + x'_k \delta_{mn}) - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L' &= \frac{1}{2}m\dot{x}'_i\dot{x}'_i + m\dot{x}'_i\varepsilon_{ijk}\omega_jx'_k + \frac{1}{2}m\varepsilon_{ijk}\omega_jx'_k\varepsilon_{ilm}\omega_lx'_m - V, \\ \frac{\partial L'}{\partial x'_n} &= m\dot{x}'_i\varepsilon_{ijk}\omega_j\delta_{kn} + \frac{1}{2}m\varepsilon_{ijk}\omega_j\varepsilon_{ilm}\omega_l(\delta_{kn}x'_m + x'_k\delta_{mn}) - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\ &= m\varepsilon_{ijn}\dot{x}'_i\omega_j + \frac{1}{2}m\varepsilon_{ijn}\omega_j\varepsilon_{ilm}\omega_lx'_m + \frac{1}{2}m\varepsilon_{ijk}\omega_j\varepsilon_{iln}\omega_lx'_k - \frac{\partial V}{\partial x'_n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L' &= \frac{1}{2} m \dot{x}'_i \dot{x}'_i + m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m - V, \\
 \frac{\partial L'}{\partial x'_n} &= m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j \delta_{kn} + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{ilm} \omega_l (\delta_{kn} x'_m + x'_k \delta_{mn}) - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= m \varepsilon_{ijn} \dot{x}'_i \omega_j + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijn} \omega_j \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{iln} \omega_l x'_k - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L' &= \frac{1}{2} m \dot{x}'_i \dot{x}'_i + m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m - V, \\
 \frac{\partial L'}{\partial x'_n} &= m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j \delta_{kn} + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{ilm} \omega_l (\delta_{kn} x'_m + x'_k \delta_{mn}) - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= m \varepsilon_{ijn} \dot{x}'_i \omega_j + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijn} \omega_j \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{iln} \omega_l x'_k - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= -m \varepsilon_{nji} \omega_j \dot{x}'_i - \frac{1}{2} m \varepsilon_{nji} \omega_j (\vec{\omega} \times \vec{r})_i - \frac{1}{2} m \varepsilon_{nli} \omega_l (\vec{\omega} \times \vec{r})_i - \frac{\partial V}{\partial x'_n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L' &= \frac{1}{2} m \dot{x}'_i \dot{x}'_i + m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m - V, \\
 \frac{\partial L'}{\partial x'_n} &= m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j \delta_{kn} + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{ilm} \omega_l (\delta_{kn} x'_m + x'_k \delta_{mn}) - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= m \varepsilon_{ijn} \dot{x}'_i \omega_j + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijn} \omega_j \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{iln} \omega_l x'_k - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= -m \varepsilon_{nji} \omega_j \dot{x}'_i - \frac{1}{2} m \varepsilon_{nji} \omega_j (\vec{\omega} \times \vec{r})_i - \frac{1}{2} m \varepsilon_{nli} \omega_l (\vec{\omega} \times \vec{r})_i - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L' &= \frac{1}{2} m \dot{x}'_i \dot{x}'_i + m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m - V, \\
 \frac{\partial L'}{\partial x'_n} &= m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j \delta_{kn} + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{ilm} \omega_l (\delta_{kn} x'_m + x'_k \delta_{mn}) - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= m \varepsilon_{ijn} \dot{x}'_i \omega_j + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijn} \omega_j \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{iln} \omega_l x'_k - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= -m \varepsilon_{nji} \omega_j \dot{x}'_i - \frac{1}{2} m \varepsilon_{nji} \omega_j (\vec{\omega} \times \vec{r})_i - \frac{1}{2} m \varepsilon_{nli} \omega_l (\vec{\omega} \times \vec{r})_i - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= -m (\vec{\omega} \times \vec{v}')_n - m [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]_n - \frac{\partial V}{\partial x'_n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L' &= \frac{1}{2} m \dot{x}'_i \dot{x}'_i + m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m - V, \\
 \frac{\partial L'}{\partial x'_n} &= m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j \delta_{kn} + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{ilm} \omega_l (\delta_{kn} x'_m + x'_k \delta_{mn}) - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= m \varepsilon_{ijn} \dot{x}'_i \omega_j + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijn} \omega_j \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{iln} \omega_l x'_k - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= -m \varepsilon_{nji} \omega_j \dot{x}'_i - \frac{1}{2} m \varepsilon_{nji} \omega_j (\vec{\omega} \times \vec{r})_i - \frac{1}{2} m \varepsilon_{nli} \omega_l (\vec{\omega} \times \vec{r})_i - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= -m (\vec{\omega} \times \vec{v}')_n - m [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]_n - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_n} &= m \dot{x}'_n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L' &= \frac{1}{2} m \dot{x}'_i \dot{x}'_i + m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m - V, \\
 \frac{\partial L'}{\partial x'_n} &= m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j \delta_{kn} + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{ilm} \omega_l (\delta_{kn} x'_m + x'_k \delta_{mn}) - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= m \varepsilon_{ijn} \dot{x}'_i \omega_j + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijn} \omega_j \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{iln} \omega_l x'_k - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= -m \varepsilon_{nji} \omega_j \dot{x}'_i - \frac{1}{2} m \varepsilon_{nji} \omega_j (\vec{\omega} \times \vec{r})_i - \frac{1}{2} m \varepsilon_{nli} \omega_l (\vec{\omega} \times \vec{r})_i - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= -m (\vec{\omega} \times \vec{v}')_n - m [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]_n - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_n} &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L' &= \frac{1}{2} m \dot{x}'_i \dot{x}'_i + m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m - V, \\
 \frac{\partial L'}{\partial x'_n} &= m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j \delta_{kn} + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{ilm} \omega_l (\delta_{kn} x'_m + x'_k \delta_{mn}) - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= m \varepsilon_{ijn} \dot{x}'_i \omega_j + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijn} \omega_j \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{iln} \omega_l x'_k - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= -m \varepsilon_{nji} \omega_j \dot{x}'_i - \frac{1}{2} m \varepsilon_{nji} \omega_j (\vec{\omega} \times \vec{r})_i - \frac{1}{2} m \varepsilon_{nli} \omega_l (\vec{\omega} \times \vec{r})_i - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= -m (\vec{\omega} \times \vec{v}')_n - m [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]_n - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_n} &= m \dot{x}'_i \delta_{in} + m \delta_{in} \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L' &= \frac{1}{2} m \dot{x}'_i \dot{x}'_i + m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m - V, \\
 \frac{\partial L'}{\partial x'_n} &= m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j \delta_{kn} + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{ilm} \omega_l (\delta_{kn} x'_m + x'_k \delta_{mn}) - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= m \varepsilon_{ijn} \dot{x}'_i \omega_j + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijn} \omega_j \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{iln} \omega_l x'_k - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= -m \varepsilon_{nji} \omega_j \dot{x}'_i - \frac{1}{2} m \varepsilon_{nji} \omega_j (\vec{\omega} \times \vec{r})_i - \frac{1}{2} m \varepsilon_{nli} \omega_l (\vec{\omega} \times \vec{r})_i - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= -m (\vec{\omega} \times \vec{v}')_n - m [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]_n - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_n} &= m \dot{x}'_i \delta_{in} + m \delta_{in} \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k = m \dot{x}'_n + m \varepsilon_{nj k} \omega_j x'_k.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L' &= \frac{1}{2} m \dot{x}'_i \dot{x}'_i + m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m - V, \\
 \frac{\partial L'}{\partial x'_n} &= m \dot{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j \delta_{kn} + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{ilm} \omega_l (\delta_{kn} x'_m + x'_k \delta_{mn}) - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= m \varepsilon_{ijn} \dot{x}'_i \omega_j + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijn} \omega_j \varepsilon_{ilm} \omega_l x'_m + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{iln} \omega_l x'_k - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= -m \varepsilon_{nji} \omega_j \dot{x}'_i - \frac{1}{2} m \varepsilon_{nji} \omega_j (\vec{\omega} \times \vec{r})_i - \frac{1}{2} m \varepsilon_{nli} \omega_l (\vec{\omega} \times \vec{r})_i - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 &= -m (\vec{\omega} \times \vec{v}')_n - m [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]_n - \frac{\partial V}{\partial x'_n} \\
 \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_n} &= m \dot{x}'_i \delta_{in} + m \delta_{in} \varepsilon_{ijk} \omega_j x'_k = m \dot{x}'_n + m \varepsilon_{nj k} \omega_j x'_k.
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_n} = \frac{d}{dt} (m\dot{x}'_n + m\varepsilon_{nj k} \omega_j x'_k) = m\ddot{x}'_n + m\varepsilon_{nj k} \dot{\omega}_j x'_k + m\varepsilon_{nj k} \omega_j \dot{x}'_k$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_n} = \frac{d}{dt} (m\dot{x}'_n + m\varepsilon_{nj k} \omega_j x'_k) = m\ddot{x}'_n + m\varepsilon_{nj k} \dot{\omega}_j x'_k + m\varepsilon_{nj k} \omega_j \dot{x}'_k$$
$$=$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_n} &= \frac{d}{dt} (m\dot{x}'_n + m\varepsilon_{nj k} \omega_j x'_k) = m\ddot{x}'_n + m\varepsilon_{nj k} \dot{\omega}_j x'_k + m\varepsilon_{nj k} \omega_j \dot{x}'_k \\ &= m\ddot{x}'_n + m \left(\vec{\dot{\omega}} \times \vec{r} \right)_n + m \left(\vec{\omega} \times \vec{v}' \right)_n.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_n} &= \frac{d}{dt} (m\dot{x}'_n + m\varepsilon_{nj k} \omega_j x'_k) = m\ddot{x}'_n + m\varepsilon_{nj k} \dot{\omega}_j x'_k + m\varepsilon_{nj k} \omega_j \dot{x}'_k \\ &= m\ddot{x}'_n + m(\vec{\dot{\omega}} \times \vec{r})_n + m(\vec{\omega} \times \vec{v}')_n.\end{aligned}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_n} = \frac{\partial L'}{\partial x'_n}, \quad n = 1, 2, 3,$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_n} &= \frac{d}{dt} (m\dot{x}'_n + m\varepsilon_{nj k} \omega_j x'_k) = m\ddot{x}'_n + m\varepsilon_{nj k} \dot{\omega}_j x'_k + m\varepsilon_{nj k} \omega_j \dot{x}'_k \\ &= m\ddot{x}'_n + m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r})_n + m(\vec{\omega} \times \vec{v}')_n.\end{aligned}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_n} = \frac{\partial L'}{\partial x'_n}, \quad n = 1, 2, 3,$$

mają zatem postać

$$\begin{aligned}m\ddot{x}'_n &= -m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r})_n - m(\vec{\omega} \times \vec{v}')_n \\ &\quad - m(\vec{\omega} \times \vec{v}')_n - m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]_n - \frac{\partial V}{\partial x'_n}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_n} &= \frac{d}{dt} (m\dot{x}'_n + m\varepsilon_{nj k} \omega_j x'_k) = m\ddot{x}'_n + m\varepsilon_{nj k} \dot{\omega}_j x'_k + m\varepsilon_{nj k} \omega_j \dot{x}'_k \\ &= m\ddot{x}'_n + m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r})_n + m(\vec{\omega} \times \vec{v}')_n.\end{aligned}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_n} = \frac{\partial L'}{\partial x'_n}, \quad n = 1, 2, 3,$$

mają zatem postać

$$\begin{aligned}m\ddot{x}'_n &= -m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r})_n - m(\vec{\omega} \times \vec{v}')_n \\ &\quad - m(\vec{\omega} \times \vec{v}')_n - m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]_n - \frac{\partial V}{\partial x'_n}.\end{aligned}$$

Uporządkujmy

$$m\ddot{x}'_n = -\frac{\partial V}{\partial x'_n} - m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r})_n - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}')_n - m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]_n$$

i przepiszmy w formie wektorowej

$$m\vec{a}' = -\vec{\nabla}' V - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}),$$

gdzie operator nabra w przetransformowanych współrzędnych kartezjańskich wyraża się wzorem

$$\vec{\nabla}' \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x'_1}, \frac{\partial}{\partial x'_2}, \frac{\partial}{\partial x'_3} \right].$$

Uporządkujmy

$$m\ddot{x}'_n = -\frac{\partial V}{\partial x'_n} - m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r})_n - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}')_n - m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]_n$$

i przepiszmy w formie wektorowej

$$m\vec{a}' = -\vec{\nabla}' V - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}),$$

gdzie operator nabra w przetransformowanych współrzędnych kartezjańskich wyraża się wzorem

$$\vec{\nabla}' \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x'_1}, \frac{\partial}{\partial x'_2}, \frac{\partial}{\partial x'_3} \right].$$

Jest to równanie ruchu punktu o masie m w układzie S' obracającym się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ w układzie S .

Uporządkujmy

$$m\ddot{x}'_n = -\frac{\partial V}{\partial x'_n} - m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r})_n - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}')_n - m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]_n$$

i przepiszmy w formie wektorowej

$$m\vec{a}' = -\vec{\nabla}' V - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}),$$

gdzie operator nabra w przetransformowanych współrzędnych kartezjańskich wyraża się wzorem

$$\vec{\nabla}' \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x'_1}, \frac{\partial}{\partial x'_2}, \frac{\partial}{\partial x'_3} \right].$$

Jest to równanie ruchu punktu o masie m w układzie S' obracającym się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ w układzie S .

Porównajmy równanie ruchu punktu o masie m w układzie S' obracającym się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ w układzie S

$$m\vec{a}' = -\vec{\nabla}'V - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}),$$

z równaniem ruchu punktu w układzie inercyjnym S

$$m\vec{a} = -\vec{\nabla}V = \vec{F}.$$

Porównajmy równanie ruchu punktu o masie m w układzie S' obracającym się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ w układzie S

$$m\vec{a}' = -\vec{\nabla}' V - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}),$$

z równaniem ruchu punktu w układzie inercyjnym S

$$m\vec{a} = -\vec{\nabla} V = \vec{F}.$$

3 dodatkowe wyrazy po prawej stronie równania ruchu w układzie nieinercyjnym S'

$$m\vec{a}' = -\vec{\nabla}'V - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

reprezentują siły bezwładności.

3 dodatkowe wyrazy po prawej stronie równania ruchu w układzie nieinercyjnym S'

$$m\vec{a}' = -\vec{\nabla}'V - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

reprezentują siły bezwładności.

Przeanalizujemy je kolejno.

- $-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ jest siłą bezwładności będącą reakcją na przyspieszenie kątowe układu. Jeśli obrót jest jednostajny, tzn. $\dot{\vec{\omega}} = 0$, to siła ta nie występuje.

3 dodatkowe wyrazy po prawej stronie równania ruchu w układzie nieinercyjnym S'

$$m\vec{a}' = -\vec{\nabla}'V - m\vec{\dot{\omega}} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

reprezentują siły bezwładności.

Przeanalizujemy je kolejno.

- $-m\vec{\dot{\omega}} \times \vec{r}$ jest siłą bezwładności będącą reakcją na przyspieszenie kątowe układu. Jeśli obrót jest jednostajny, tzn. $\vec{\dot{\omega}} = 0$, to siła ta nie występuje.
- $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ jest siłą Coriolisa, która działa na ciało poruszające się w układzie nieinercyjnym S' z niezerową prędkością $\vec{v}'$. Siła ta działa w kierunku prostopadłym do prędkości $\vec{\omega}$ i $\vec{v}'$.

3 dodatkowe wyrazy po prawej stronie równania ruchu w układzie nieinercyjnym S'

$$m\vec{a}' = -\vec{\nabla}'V - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

reprezentują siły bezwładności.

Przeanalizujemy je kolejno.

- $-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ jest siłą bezwładności będącą reakcją na przyspieszenie kątowe układu. Jeśli obrót jest jednostajny, tzn. $\dot{\vec{\omega}} = 0$, to siła ta nie występuje.
- $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ jest siłą Coriolisa, która działa na ciało poruszające się w układzie nieinercyjnym S' z niezerową prędkością $\vec{v}'$. Siła ta działa w kierunku prostopadłym do prędkości $\vec{\omega}$ i $\vec{v}'$.

- $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ jest siłą odśrodkową.

Przyjrzyjmy się bliżej wzorowi na siłę odśrodkową, który na pierwszy rzut oka różni się od wzoru na siłę dośrodkową poznanego w ramach wcześniejszych studiów mechaniki.

- $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ jest siłą odśrodkową.

Przyjrzyjmy się bliżej wzorowi na siłę odśrodkową, który na pierwszy rzut oka różni się od wzoru na siłę dośrodkową poznanego w ramach wcześniejszych studiów mechaniki.

Obliczmy najpierw wyrażenie

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) =$$

- $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ jest siłą odśrodkową.

Przyjrzyjmy się bliżej wzorowi na siłę odśrodkową, który na pierwszy rzut oka różni się od wzoru na siłę dośrodkową poznanego w ramach wcześniejszych studiów mechaniki.

Obliczmy najpierw wyrażenie

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \hat{x}_i' \varepsilon_{ijk} \omega_j (\vec{\omega} \times \vec{r})_k =$$

- $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ jest siłą odśrodkową.

Przyjrzyjmy się bliżej wzorowi na siłę odśrodkową, który na pierwszy rzut oka różni się od wzoru na siłę dośrodkową poznanego w ramach wcześniejszych studiów mechaniki.

Obliczmy najpierw wyrażenie

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \hat{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j (\vec{\omega} \times \vec{r})_k = \hat{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{kmn} \omega_m x'_n$$

- $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ jest siłą odśrodkową.

Przyjrzyjmy się bliżej wzorowi na siłę odśrodkową, który na pierwszy rzut oka różni się od wzoru na siłę dośrodkową poznanego w ramach wcześniejszych studiów mechaniki.

Obliczmy najpierw wyrażenie

$$\begin{aligned}\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \hat{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j (\vec{\omega} \times \vec{r})_k = \hat{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{kmn} \omega_m x'_n \\ &= \end{aligned}$$

- $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ jest siłą odśrodkową.

Przyjrzyjmy się bliżej wzorowi na siłę odśrodkową, który na pierwszy rzut oka różni się od wzoru na siłę dośrodkową poznanego w ramach wcześniejszych studiów mechaniki.

Obliczmy najpierw wyrażenie

$$\begin{aligned}\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \hat{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j (\vec{\omega} \times \vec{r})_k = \hat{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{kmn} \omega_m x'_n \\ &= \hat{x}'_i (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \omega_j \omega_m x'_n\end{aligned}$$

- $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ jest siłą odśrodkową.

Przyjrzyjmy się bliżej wzorowi na siłę odśrodkową, który na pierwszy rzut oka różni się od wzoru na siłę dośrodkową poznanego w ramach wcześniejszych studiów mechaniki.

Obliczmy najpierw wyrażenie

$$\begin{aligned}\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \hat{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j (\vec{\omega} \times \vec{r})_k = \hat{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{kmn} \omega_m x'_n \\ &= \hat{x}'_i (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \omega_j \omega_m x'_n \\ &= \end{aligned}$$

- $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ jest siłą odśrodkową.

Przyjrzyjmy się bliżej wzorowi na siłę odśrodkową, który na pierwszy rzut oka różni się od wzoru na siłę dośrodkową poznanego w ramach wcześniejszych studiów mechaniki.

Obliczmy najpierw wyrażenie

$$\begin{aligned}\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \hat{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j (\vec{\omega} \times \vec{r})_k = \hat{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{kmn} \omega_m x'_n \\ &= \hat{x}'_i (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \omega_j \omega_m x'_n \\ &= \hat{x}'_i \omega_j \omega_j x'_i - \hat{x}'_i x'_i \omega_j \omega_j =\end{aligned}$$

- $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ jest siłą odśrodkową.

Przyjrzyjmy się bliżej wzorowi na siłę odśrodkową, który na pierwszy rzut oka różni się od wzoru na siłę dośrodkową poznanego w ramach wcześniejszych studiów mechaniki.

Obliczmy najpierw wyrażenie

$$\begin{aligned}\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \hat{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j (\vec{\omega} \times \vec{r})_k = \hat{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{kmn} \omega_m x'_n \\ &= \hat{x}'_i (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \omega_j \omega_m x'_n \\ &= \hat{x}'_i \omega_j \omega_j x'_i - \hat{x}'_i x'_i \omega_j \omega_j = \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \vec{\omega}^2.\end{aligned}$$

- $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ jest siłą odśrodkową.

Przyjrzyjmy się bliżej wzorowi na siłę odśrodkową, który na pierwszy rzut oka różni się od wzoru na siłę dośrodkową poznanego w ramach wcześniejszych studiów mechaniki.

Obliczmy najpierw wyrażenie

$$\begin{aligned}\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \hat{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j (\vec{\omega} \times \vec{r})_k = \hat{x}'_i \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{kmn} \omega_m x'_n \\ &= \hat{x}'_i (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \omega_j \omega_m x'_n \\ &= \hat{x}'_i \omega_j \omega_j x'_i - \hat{x}'_i x'_i \omega_j \omega_j = \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \vec{\omega}^2.\end{aligned}$$

Zapiszmy $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$, gdzie $\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\perp} = 0$, a więc $\vec{r}_{\perp} \perp \vec{\omega}$. Składową równoległą $\vec{r}_{\parallel}$ do wektora $\vec{\omega}$ możemy zapisać

$$\vec{r}_{\parallel} = r_{\parallel} \hat{\omega}, \quad \text{gdzie} \quad \hat{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}.$$

Zapiszmy $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$, gdzie $\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\perp} = 0$, a więc $\vec{r}_{\perp} \perp \vec{\omega}$. Składową równoległą $\vec{r}_{\parallel}$ do wektora $\vec{\omega}$ możemy zapisać

$$\vec{r}_{\parallel} = r_{\parallel} \hat{\omega}, \quad \text{gdzie} \quad \hat{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}.$$

Rozważmy nasze wyrażenie na siłę odśrodkową

$$-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) =$$

Zapiszmy $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$, gdzie $\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\perp} = 0$, a więc $\vec{r}_{\perp} \perp \vec{\omega}$. Składową równoległą $\vec{r}_{\parallel}$ do wektora $\vec{\omega}$ możemy zapisać

$$\vec{r}_{\parallel} = r_{\parallel} \hat{\omega}, \quad \text{gdzie} \quad \hat{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}.$$

Rozważmy nasze wyrażenie na siłę odśrodkową

$$-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -m \left[\vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \omega^2 \right]$$

Zapiszmy $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$, gdzie $\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\perp} = 0$, a więc $\vec{r}_{\perp} \perp \vec{\omega}$. Składową równoległą $\vec{r}_{\parallel}$ do wektora $\vec{\omega}$ możemy zapisać

$$\vec{r}_{\parallel} = r_{\parallel} \hat{\omega}, \quad \text{gdzie} \quad \hat{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}.$$

Rozważmy nasze wyrażenie na siłę odśrodkową

$$\begin{aligned} -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= -m \left[\vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \omega^2 \right] \\ &= \end{aligned}$$

Zapiszmy $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$, gdzie $\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\perp} = 0$, a więc $\vec{r}_{\perp} \perp \vec{\omega}$. Składową równoległą $\vec{r}_{\parallel}$ do wektora $\vec{\omega}$ możemy zapisać

$$\vec{r}_{\parallel} = r_{\parallel} \hat{\omega}, \quad \text{gdzie} \quad \hat{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}.$$

Rozważmy nasze wyrażenie na siłę odśrodkową

$$\begin{aligned} -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= -m \left[\vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \omega^2 \right] \\ &= -m \left[\vec{\omega} \omega r_{\parallel} - \omega^2 (\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}) \right] \end{aligned}$$

Zapiszmy $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$, gdzie $\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\perp} = 0$, a więc $\vec{r}_{\perp} \perp \vec{\omega}$. Składową równoległą $\vec{r}_{\parallel}$ do wektora $\vec{\omega}$ możemy zapisać

$$\vec{r}_{\parallel} = r_{\parallel} \hat{\omega}, \quad \text{gdzie} \quad \hat{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}.$$

Rozważmy nasze wyrażenie na siłę odśrodkową

$$\begin{aligned} -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= -m \left[\vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \omega^2 \right] \\ &= -m \left[\vec{\omega} \omega r_{\parallel} - \omega^2 (\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}) \right] \\ &= \end{aligned}$$

Zapiszmy $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$, gdzie $\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\perp} = 0$, a więc $\vec{r}_{\perp} \perp \vec{\omega}$. Składową równoległą $\vec{r}_{\parallel}$ do wektora $\vec{\omega}$ możemy zapisać

$$\vec{r}_{\parallel} = r_{\parallel} \hat{\omega}, \quad \text{gdzie} \quad \hat{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}.$$

Rozważmy nasze wyrażenie na siłę odśrodkową

$$\begin{aligned} -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= -m \left[\vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \vec{\omega}^2 \right] \\ &= -m \left[\vec{\omega} \omega r_{\parallel} - \omega^2 (\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}) \right] \\ &= -m \left[\omega^2 r_{\parallel} \hat{\omega} - \omega^2 r_{\parallel} \hat{\omega} - \omega^2 \vec{r}_{\perp} \right] = \end{aligned}$$

Zapiszmy $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$, gdzie $\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\perp} = 0$, a więc $\vec{r}_{\perp} \perp \vec{\omega}$. Składową równoległą $\vec{r}_{\parallel}$ do wektora $\vec{\omega}$ możemy zapisać

$$\vec{r}_{\parallel} = r_{\parallel} \hat{\omega}, \quad \text{gdzie} \quad \hat{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}.$$

Rozważmy nasze wyrażenie na siłę odśrodkową

$$\begin{aligned} -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= -m \left[\vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \vec{\omega}^2 \right] \\ &= -m \left[\vec{\omega} \omega r_{\parallel} - \omega^2 (\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}) \right] \\ &= -m \left[\omega^2 r_{\parallel} \hat{\omega} - \omega^2 r_{\parallel} \hat{\omega} - \omega^2 \vec{r}_{\perp} \right] = m\omega^2 \vec{r}_{\perp}. \end{aligned}$$

Zapiszmy $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$, gdzie $\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\perp} = 0$, a więc $\vec{r}_{\perp} \perp \vec{\omega}$. Składową równoległą $\vec{r}_{\parallel}$ do wektora $\vec{\omega}$ możemy zapisać

$$\vec{r}_{\parallel} = r_{\parallel} \hat{\omega}, \quad \text{gdzie} \quad \hat{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}.$$

Rozważmy nasze wyrażenie na siłę odśrodkową

$$\begin{aligned} -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= -m \left[\vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \vec{\omega}^2 \right] \\ &= -m \left[\vec{\omega} \omega r_{\parallel} - \omega^2 (\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}) \right] \\ &= -m \left[\omega^2 r_{\parallel} \hat{\omega} - \omega^2 r_{\parallel} \hat{\omega} - \omega^2 \vec{r}_{\perp} \right] = m\omega^2 \vec{r}_{\perp}. \end{aligned}$$

Ten wzór różni się znakiem od znanego nam wzoru na siłę dośrodkową, gdyż siła odśrodkowa jest skierowana na zewnątrz od osi obrotu.

Zapiszmy $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$, gdzie $\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\perp} = 0$, a więc $\vec{r}_{\perp} \perp \vec{\omega}$. Składową równoległą $\vec{r}_{\parallel}$ do wektora $\vec{\omega}$ możemy zapisać

$$\vec{r}_{\parallel} = r_{\parallel} \hat{\omega}, \quad \text{gdzie} \quad \hat{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}.$$

Rozważmy nasze wyrażenie na siłę odśrodkową

$$\begin{aligned} -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= -m \left[\vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \vec{\omega}^2 \right] \\ &= -m \left[\vec{\omega} \omega r_{\parallel} - \omega^2 (\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}) \right] \\ &= -m \left[\omega^2 r_{\parallel} \hat{\omega} - \omega^2 r_{\parallel} \hat{\omega} - \omega^2 \vec{r}_{\perp} \right] = m\omega^2 \vec{r}_{\perp}. \end{aligned}$$

Ten wzór różni się znakiem od znanego nam wzoru na siłę dośrodkową, gdyż siła odśrodkowa jest skierowana na zewnątrz od osi obrotu.

Rozważmy ciało o masie m na powierzchni Ziemi. Jeśli ciało spoczywa, działa na nie tylko siła ciężkości i siła odśrodkowa.

$$m\vec{g} = m\vec{g}_0 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}),$$

Rozważmy ciało o masie m na powierzchni Ziemi. Jeśli ciało spoczywa, działa na nie tylko siła ciężkości i siła odśrodkowa.

$$m\vec{g} = m\vec{g}_0 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}),$$

gdzie

- $\vec{g}_0$ – przyspieszenie grawitacyjne skierowane do środka Ziemi,

Rozważmy ciało o masie m na powierzchni Ziemi. Jeśli ciało spoczywa, działa na nie tylko siła ciężkości i siła odśrodkowa.

$$m\vec{g} = m\vec{g}_0 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}),$$

gdzie

- $\vec{g}_0$ – przyspieszenie grawitacyjne skierowane do środka Ziemi,
- $\vec{R}$ – wektor położenia ciała mierzony od środka Ziemi,

Rozważmy ciało o masie m na powierzchni Ziemi. Jeśli ciało spoczywa, działa na nie tylko siła ciężkości i siła odśrodkowa.

$$m\vec{g} = m\vec{g}_0 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}),$$

gdzie

- $\vec{g}_0$ – przyspieszenie grawitacyjne skierowane do środka Ziemi,
- $\vec{R}$ – wektor położenia ciała mierzony od środka Ziemi,
- $\vec{\omega}$ – wektor prędkości kątowej ruchu obrotowego Ziemi wokół jej osi.

Rozważmy ciało o masie m na powierzchni Ziemi. Jeśli ciało spoczywa, działa na nie tylko siła ciężkości i siła odśrodkowa.

$$m\vec{g} = m\vec{g}_0 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}),$$

gdzie

- $\vec{g}_0$ – przyspieszenie grawitacyjne skierowane do środka Ziemi,
- $\vec{R}$ – wektor położenia ciała mierzony od środka Ziemi,
- $\vec{\omega}$ – wektor prędkości kątowej ruchu obrotowego Ziemi wokół jej osi.

Uwzględniając znalezione wyrażenie na siłę odśrodkową

$$m\vec{g} = m\vec{g}_0 + m\omega^2 \vec{R}_\perp$$

i dzieląc obustronnie przez m otrzymamy

Rozważmy ciało o masie m na powierzchni Ziemi. Jeśli ciało spoczywa, działa na nie tylko siła ciężkości i siła odśrodkowa.

$$m\vec{g} = m\vec{g}_0 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}),$$

gdzie

- $\vec{g}_0$ – przyspieszenie grawitacyjne skierowane do środka Ziemi,
- $\vec{R}$ – wektor położenia ciała mierzony od środka Ziemi,
- $\vec{\omega}$ – wektor prędkości kątowej ruchu obrotowego Ziemi wokół jej osi.

Uwzględniając znalezione wyrażenie na siłę odśrodkową

$$m\vec{g} = m\vec{g}_0 + m\omega^2 \vec{R}_\perp$$

i dzieląc obustronnie przez m otrzymamy

wzór na przyspieszenie ziemskie:

$$\vec{g} = \vec{g}_0 + \omega^2 \vec{R}_\perp.$$

Dlatego wektor $\vec{g}$ nie jest w ogólności skierowany do środka Ziemi.

Ruch w nieinercyjnym układzie odniesienia

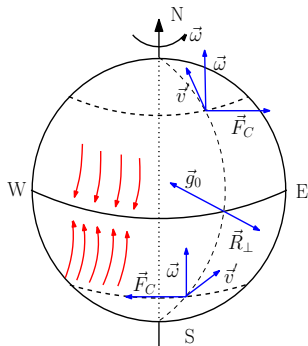
wzór na przyspieszenie ziemskie:

$$\vec{g} = \vec{g}_0 + \omega^2 \vec{R}_\perp.$$

Dlatego wektor $\vec{g}$ nie jest w ogólności skierowany do środka Ziemi.

Jedynie na równiku, gdzie wektory $\vec{g}_0$ i $\vec{R}_\perp$ są współliniowe i $|\vec{R}_\perp| = R_Z$ zachodzi

$$g = g_0 - \omega^2 R_\perp = g_0 - \omega^2 R_Z,$$



Ruch w nieinercyjnym układzie odniesienia

wzór na przyspieszenie ziemskie:

$$\vec{g} = \vec{g}_0 + \omega^2 \vec{R}_\perp.$$

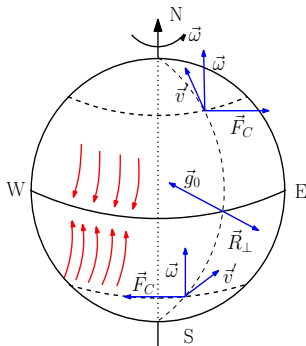
Dlatego wektor $\vec{g}$ nie jest w ogólności skierowany do środka Ziemi.

Jedynie na równiku, gdzie wektory $\vec{g}_0$ i $\vec{R}_\perp$ są współliniowe i $|\vec{R}_\perp| = R_Z$ zachodzi

$$g = g_0 - \omega^2 R_\perp = g_0 - \omega^2 R_Z,$$

a więc przyspieszenie ziemskie jest pomniejszone o

$$\begin{aligned}\omega^2 R_Z &= \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{s}} \right)^2 \cdot 6371 \cdot 10^3 \text{m} \approx \left(\frac{3,14}{12 \cdot 6^2} \right)^2 \cdot 637 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ &\approx 0,034 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.\end{aligned}$$



Ruch w nieinercjalnym układzie odniesienia

wzór na przyspieszenie ziemskie:

$$\vec{g} = \vec{g}_0 + \omega^2 \vec{R}_\perp.$$

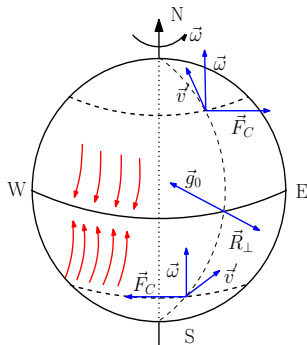
Dlatego wektor $\vec{g}$ nie jest w ogólności skierowany do środka Ziemi.

Jedynie na równiku, gdzie wektory $\vec{g}_0$ i $\vec{R}_\perp$ są współliniowe i $|\vec{R}_\perp| = R_Z$ zachodzi

$$g = g_0 - \omega^2 R_\perp = g_0 - \omega^2 R_Z,$$

a więc przyspieszenie ziemskie jest pomniejszone o

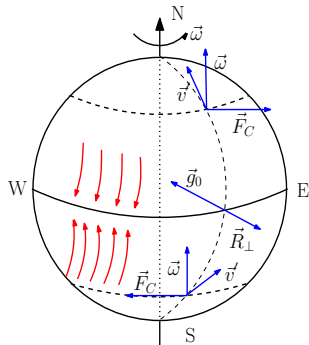
$$\begin{aligned}\omega^2 R_Z &= \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{s}} \right)^2 \cdot 6371 \cdot 10^3 \text{m} \approx \left(\frac{3,14}{12 \cdot 6^2} \right)^2 \cdot 637 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ &\approx 0,034 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.\end{aligned}$$



Ruch w nieinercyjnym układzie odniesienia

Rozważmy ciało poruszające się z prędkością $\vec{v}'$ z południa na północ.

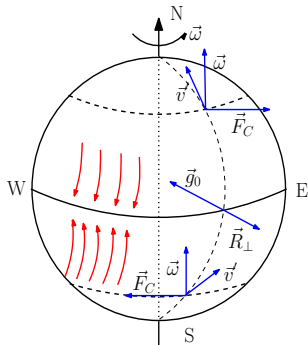
Siła Coriolisa $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ odchyła ruch ciała na półkuli południowej na zachód a na półkuli północnej na wschód. Masy powietrza napływają w kierunku równika, gdzie na skutek silnego nagrzania powstaje niskie ciśnienie. To oznacza, że na półkuli północnej poruszają się one przeciwnie do rozpatrzonej prędkości $\vec{v}'$.



Ruch w nieinercyjnym układzie odniesienia

Rozważmy ciało poruszające się z prędkością $\vec{v}'$ z południa na północ.

Siła Coriolisa $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ odchyła ruch ciała na półkuli południowej na zachód a na półkuli północnej na wschód. Masy powietrza napływają w kierunku równika, gdzie na skutek silnego nagrzania powstaje niskie ciśnienie. To oznacza, że na półkuli północnej poruszają się one przeciwnie do rozpatrzonej prędkości $\vec{v}'$.

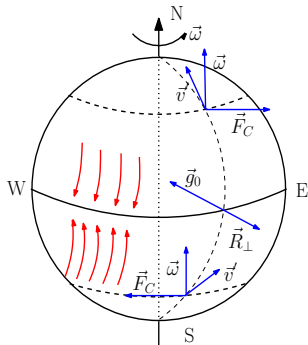


Dlatego masy powietrza są odchylane na obu półkulach na zachód.

Ruch w nieinercyjnym układzie odniesienia

Rozważmy ciało poruszające się z prędkością $\vec{v}'$ z południa na północ.

Siła Coriolisa $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ odchyła ruch ciała na półkuli południowej na zachód a na półkuli północnej na wschód. Masy powietrza napływają w kierunku równika, gdzie na skutek silnego nagrzania powstaje niskie ciśnienie. To oznacza, że na półkuli północnej poruszają się one przeciwnie do rozpatrzonej prędkości $\vec{v}'$.

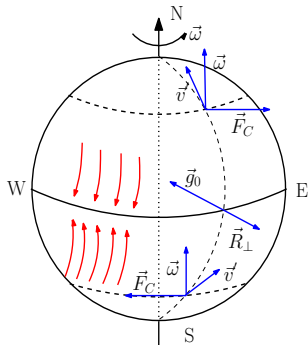


Dlatego masy powietrza są odchylane na obu półkulach na zachód.
Ma to wpływ na kształtowanie się pogody.

Ruch w nieinercyjnym układzie odniesienia

Rozważmy ciało poruszające się z prędkością $\vec{v}'$ z południa na północ.

Siła Coriolisa $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ odchyła ruch ciała na półkuli południowej na zachód a na półkuli północnej na wschód. Masy powietrza napływają w kierunku równika, gdzie na skutek silnego nagrzania powstaje niskie ciśnienie. To oznacza, że na półkuli północnej poruszają się one przeciwnie do rozpatrzonej prędkości $\vec{v}'$.



Dlatego masy powietrza są odchylane na obu półkulach na zachód. Ma to wpływ na kształtowanie się pogody.

Siła Coriolisa nie jest jednak odpowiedzialna za wiry, które tworzy woda po wyciągnięciu korka w wannie lub umywalce.

Efekt ten jest powodowany przez samo wyciągnięcie korka,

Siła Coriolisa nie jest jednak odpowiedzialna za wiry, które tworzy woda po wyciągnięciu korka w wannie lub umywalce.

Efekt ten jest powodowany przez samo wyciągnięcie korka, kształt wanny lub umywalki

Siła Coriolisa nie jest jednak odpowiedzialna za wiry, które tworzy woda po wyciągnięciu korka w wannie lub umywalce.

Efekt ten jest powodowany przez samo wyciągnięcie korka, kształt wanny lub umywalki i przede wszystkim wiry, które powstały w czasie uprzedniego nalewania wody, a nie zdążyły jeszcze się do końca uspokoić.

Siła Coriolisa nie jest jednak odpowiedzialna za wiry, które tworzy woda po wyciągnięciu korka w wannie lub umywalce.

Efekt ten jest powodowany przez samo wyciągnięcie korka, kształt wanny lub umywalki i przede wszystkim wiry, które powstały w czasie uprzedniego nalewania wody, a nie zdążyły jeszcze się do końca uspokoić. Na skutek zachowania momentu pędu wiry te nabierają większej prędkości kątowej przy zwężającym się ujściu naczynia.

Siła Coriolisa nie jest jednak odpowiedzialna za wiry, które tworzy woda po wyciągnięciu korka w wannie lub umywalce.

Efekt ten jest powodowany przez samo wyciągnięcie korka, kształt wanny lub umywalki i przede wszystkim wiry, które powstały w czasie uprzedniego nalewania wody, a nie zdążyły jeszcze się do końca uspokoić. Na skutek zachowania momentu pędu wiry te nabierają większej prędkości kątowej przy zwężającym się ujściu naczynia.

Przed wyciągnięciem korka woda spoczywa w układzie nieinercyjnym związanym z Ziemią,

Siła Coriolisa nie jest jednak odpowiedzialna za wiry, które tworzy woda po wyciągnięciu korka w wannie lub umywalce.

Efekt ten jest powodowany przez samo wyciągnięcie korka, kształt wanny lub umywalki i przede wszystkim wiry, które powstały w czasie uprzedniego nalewania wody, a nie zdążyły jeszcze się do końca uspokoić. Na skutek zachowania momentu pędu wiry te nabierają większej prędkości kątowej przy zwężającym się ujściu naczynia.

Przed wyciągnięciem korka woda spoczywa w układzie nieinercyjnym związanym z Ziemią, a zatem $\vec{v}' = 0$ i siła Coriolisa jest równa zero.

Siła Coriolisa nie jest jednak odpowiedzialna za wiry, które tworzy woda po wyciągnięciu korka w wannie lub umywalce.

Efekt ten jest powodowany przez samo wyciągnięcie korka, kształt wanny lub umywalki i przede wszystkim wiry, które powstały w czasie uprzedniego nalewania wody, a nie zdążyły jeszcze się do końca uspokoić. Na skutek zachowania momentu pędu wiry te nabierają większej prędkości kątowej przy zwężającym się ujściu naczynia.

Przed wyciągnięciem korka woda spoczywa w układzie nieinercyjnym związanym z Ziemią, a zatem $\vec{v}' = 0$ i siła Coriolisa jest równa zero.

Wahadło Foucalta

Jako przykład ruchu w układzie nieinercyjnym rozważmy **wahadło Foucalta**. Jest to wahadło matematyczne o dużych rozmiarach, które raz wprowadzone w ruch może wykonywać wahania przez wiele dni.

Wahadło Foucalta

Jako przykład ruchu w układzie nieinercyjnym rozważmy **wahadło Foucalta**. Jest to wahadło matematyczne o dużych rozmiarach, które raz wprowadzone w ruch może wykonywać wahania przez wiele dni.

Wahadło znajduje się na szerokości geograficznej φ .

Wahadło Foucaulta

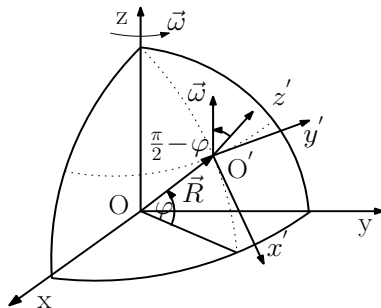
Jako przykład ruchu w układzie nieinercyjnym rozważmy **wahadło Foucaulta**. Jest to wahadło matematyczne o dużych rozmiarach, które raz wprowadzone w ruch może wykonywać wahania przez wiele dni.

Wahadło znajduje się na szerokości geograficznej φ . Wybieramy osie nieinercyjnego układu współrzędnych związanego z Ziemią tak, że

oś Ox' skierowana jest wzdłuż południka,

oś Oy' skierowana jest wzdłuż równoleżnika,

a oś Oz' skierowana jest pionowo w górę.



Wahadło Foucaulta

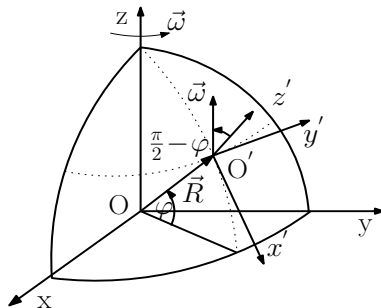
Jako przykład ruchu w układzie nieinercyjnym rozważmy **wahadło Foucaulta**. Jest to wahadło matematyczne o dużych rozmiarach, które raz wprowadzone w ruch może wykonywać wahania przez wiele dni.

Wahadło znajduje się na szerokości geograficznej φ . Wybieramy osie nieinercyjnego układu współrzędnych związanego z Ziemią tak, że

oś Ox' skierowana jest wzdłuż południka,

oś Oy' skierowana jest wzdłuż równoleżnika,

a oś Oz' skierowana jest pionowo w górę.



W tym układzie prędkość kątowna ruchu wirowego Ziemi

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \omega_x \hat{x}' + \underbrace{\omega_y \hat{y}'}_{=0} + \omega_z \hat{z}' = -\omega \cos \varphi \hat{x}' + \omega \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \hat{z}' \\ &= -\omega \cos \varphi \hat{x}' + \omega \sin \varphi \hat{z}'.\end{aligned}$$

Pomijając przesunięcie początku układu S' mamy

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}', \\ \vec{\omega} \times \vec{r}' &= \begin{vmatrix} \hat{x}' & \hat{y}' & \hat{z}' \\ -\omega \cos \varphi & 0 & \omega \sin \varphi \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = -\omega y' \sin \varphi \hat{x}' \\ &\quad + (\omega x' \sin \varphi + \omega z' \cos \varphi) \hat{y}' - \omega y' \cos \varphi \hat{z}'.\end{aligned}$$

W tym układzie prędkość kątowna ruchu wirowego Ziemi

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \omega_x \hat{x}' + \underbrace{\omega_y \hat{y}'}_{=0} + \omega_z \hat{z}' = -\omega \cos \varphi \hat{x}' + \omega \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \hat{z}' \\ &= -\omega \cos \varphi \hat{x}' + \omega \sin \varphi \hat{z}'.\end{aligned}$$

Pomijając przesunięcie początku układu S' mamy

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}', \\ \vec{\omega} \times \vec{r}' &= \begin{vmatrix} \hat{x}' & \hat{y}' & \hat{z}' \\ -\omega \cos \varphi & 0 & \omega \sin \varphi \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = -\omega y' \sin \varphi \hat{x}' \\ &\quad + (\omega x' \sin \varphi + \omega z' \cos \varphi) \hat{y}' - \omega y' \cos \varphi \hat{z}'.\end{aligned}$$

W takim razie

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r} = \dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}' + \dot{z}'\hat{z}' \\ &\quad - \omega y' \sin \varphi \hat{x}' + (\omega x' \sin \varphi + \omega z' \cos \varphi) \hat{y}' - \omega y' \cos \varphi \hat{z}' \\ &= (\dot{x}' - \omega y' \sin \varphi) \hat{x}' + (\dot{y}' + \omega x' \sin \varphi + \omega z' \cos \varphi) \hat{y}' \\ &\quad + (\dot{z}' - \omega y' \cos \varphi) \hat{z}'.\end{aligned}$$

Wstawmy to wyrażenie do funkcji Lagrange'a

$$L = T - V$$

opuszczając znak $'$, gdyż i tak wszystkie zmienne odnoszą się do układu nieinercjalnego.

W takim razie

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r} = \dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}' + \dot{z}'\hat{z}' \\ &\quad - \omega y' \sin \varphi \hat{x}' + (\omega x' \sin \varphi + \omega z' \cos \varphi) \hat{y}' - \omega y' \cos \varphi \hat{z}' \\ &= (\dot{x}' - \omega y' \sin \varphi) \hat{x}' + (\dot{y}' + \omega x' \sin \varphi + \omega z' \cos \varphi) \hat{y}' \\ &\quad + (\dot{z}' - \omega y' \cos \varphi) \hat{z}'.\end{aligned}$$

Wstawmy to wyrażenie do funkcji Lagrange'a

$$L = T - V$$

opuszczając znak $'$, gdyż i tak wszystkie zmienne odnoszą się do układu nieinercjalnego.

Energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \approx \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 - 2\omega \dot{x} y \sin \varphi + \dot{y}^2 + 2\omega \dot{y} (x \sin \varphi + z \cos \varphi) + \dot{z}^2 - 2\dot{z} \omega y \cos \varphi \right],$$

gdzie **zaniedbaliśmy małe wyrazy $\sim \omega^2$** .

Ponieważ prędkość wahadła w kierunku pionowym jest mała, to możemy również zaniedbać wyrazy $\dot{z}^2$, $\dot{z}\omega$, a ze względu na małość współrzędnej z zaniedbujemy wyraz $z\omega$,

Energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \approx \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 - 2\omega \dot{x}y \sin \varphi + \dot{y}^2 + 2\omega \dot{y} (x \sin \varphi + z \cos \varphi) + \dot{z}^2 - 2\dot{z}\omega y \cos \varphi \right],$$

gdzie **zaniedbaliśmy małe wyrazy $\sim \omega^2$** .

Ponieważ prędkość wahadła w kierunku pionowym jest mała, to możemy również zaniedbać wyrazy $\dot{z}^2$, $\dot{z}\omega$, a ze względu na małość współrzędnej z zaniedbujemy wyraz $z\omega$, a zatem

$$T \approx \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\omega (-\dot{x}y + x\dot{y}) \sin \varphi \right].$$

Energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \approx \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 - 2\omega \dot{x}y \sin \varphi + \dot{y}^2 + 2\omega \dot{y} (x \sin \varphi + z \cos \varphi) + \dot{z}^2 - 2\dot{z}\omega y \cos \varphi \right],$$

gdzie **zaniedbaliśmy małe wyrazy $\sim \omega^2$** .

Ponieważ prędkość wahadła w kierunku pionowym jest mała, to możemy również zaniedbać wyrazy $\dot{z}^2$, $\dot{z}\omega$, a ze względu na małość współrzędnej z zaniedbujemy wyraz $z\omega$, a zatem

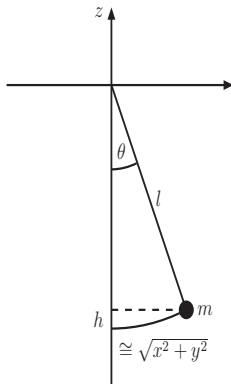
$$T \approx \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\omega (-\dot{x}y + x\dot{y}) \sin \varphi \right].$$

Energia potencjalna dla małych wychyleń θ wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} V &= mgh = mg \underbrace{l(1 - \cos \theta)}_h \\ &= mgl \left(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \right) \\ &\approx mgl \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 \right) \right) \approx \frac{1}{2}mgl\theta^2, \end{aligned}$$

gdyż dla małych kątów

$$\sin \theta \approx \theta \text{ i } \sqrt{1 - \theta^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2.$$



Wahadło Foucaulta

Energia potencjalna dla małych wychyleń θ wyraża się wzorem

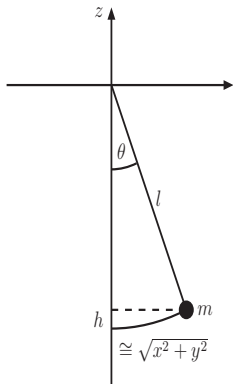
$$\begin{aligned} V &= mgh = mg \underbrace{l(1 - \cos \theta)}_h \\ &= mgl \left(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \right) \\ &\approx mgl \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 \right) \right) \approx \frac{1}{2}mgl\theta^2, \end{aligned}$$

gdyż dla małych kątów

$$\sin \theta \approx \theta \text{ i } \sqrt{1 - \theta^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2.$$

Uwzględniając, że

$$\theta \approx \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{l}$$



Wahadło Foucaulta

Energia potencjalna dla małych wychyleń θ wyraża się wzorem

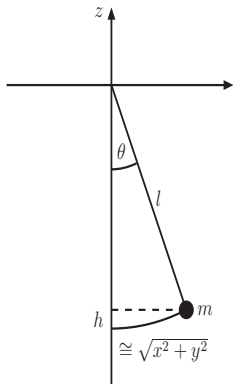
$$\begin{aligned} V &= mgh = mg \underbrace{l(1 - \cos \theta)}_h \\ &= mgl \left(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \right) \\ &\approx mgl \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 \right) \right) \approx \frac{1}{2}mgl\theta^2, \end{aligned}$$

gdź dla małych kątów

$$\sin \theta \approx \theta \text{ i } \sqrt{1 - \theta^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2.$$

Uwzględniając, że

$$\theta \approx \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{l}$$



otrzymamy

$$V \approx \frac{1}{2}mg \frac{x^2 + y^2}{l^2} = \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2).$$

Funkcja Lagrange'a w rozpatrywanym przybliżeniu wynosi

$$L \approx \frac{1}{2}m [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\omega (x\dot{y} - \dot{x}y) \sin \varphi] - \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2),$$

otrzymamy

$$V \approx \frac{1}{2}mg \frac{x^2 + y^2}{l^2} = \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2).$$

Funkcja Lagrange'a w rozpatrywanym przybliżeniu wynosi

$$L \approx \frac{1}{2}m [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\omega (x\dot{y} - \dot{x}y) \sin \varphi] - \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2),$$

W układzie nieinercyjnym ruch wahadła opisywany jest przez dwie zmienne x i y – wahadło ma dwa stopnie swobody,

otrzymamy

$$V \approx \frac{1}{2}mg \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{l^2}} = \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2).$$

Funkcja Lagrange'a w rozpatrywanym przybliżeniu wynosi

$$L \approx \frac{1}{2}m [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\omega (x\dot{y} - \dot{x}y) \sin \varphi] - \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2),$$

W układzie nieinercyjnym ruch wahadła opisywany jest przez dwie zmienne x i y – wahadło ma dwa stopnie swobody, dlatego równania Lagrange'a II rodzaju mają postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

otrzymamy

$$V \approx \frac{1}{2} mg l \frac{x^2 + y^2}{l^2} = \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2).$$

Funkcja Lagrange'a w rozpatrywanym przybliżeniu wynosi

$$L \approx \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\omega (x\dot{y} - \dot{x}y) \sin \varphi] - \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2),$$

W układzie nieinercyjnym ruch wahadła opisywany jest przez dwie zmienne x i y – wahadło ma dwa stopnie swobody, dlatego równania Lagrange'a II rodzaju mają postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

Obliczmy potrzebne pochodne funkcji Lagrange'a i napiszmy

otrzymamy

$$V \approx \frac{1}{2} mg \frac{x^2 + y^2}{l^2} = \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2).$$

Funkcja Lagrange'a w rozpatrywanym przybliżeniu wynosi

$$L \approx \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\omega (x\dot{y} - \dot{x}y) \sin \varphi] - \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2),$$

W układzie nieinercyjnym ruch wahadła opisywany jest przez dwie zmienne x i y – wahadło ma dwa stopnie swobody, dlatego równania Lagrange'a II rodzaju mają postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

Obliczmy potrzebne pochodne funkcji Lagrange'a i napiszmy

równania ruchu

$$L \approx \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\omega (x\dot{y} - \dot{x}y) \sin \varphi \right] - \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\omega \dot{y} \sin \varphi - \frac{mg}{l}x,$$

równania ruchu

$$L \approx \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\omega (x\dot{y} - \dot{x}y) \sin \varphi \right] - \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2),$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\omega \dot{y} \sin \varphi - \frac{mg}{l}x, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{1}{2}m \cancel{2}\omega y \sin \varphi,$$

równania ruchu

$$L \approx \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\omega (x\dot{y} - \dot{x}y) \sin \varphi \right] - \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2),$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\omega \dot{y} \sin \varphi - \frac{mg}{l}x, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{1}{2}m 2\omega y \sin \varphi,$$
$$m\ddot{x} - m\omega \dot{y} \sin \varphi - m\omega \dot{y} \sin \varphi + \frac{mg}{l}x = 0,$$

równania ruchu

$$L \approx \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\omega (x\dot{y} - \dot{x}y) \sin \varphi \right] - \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\omega \dot{y} \sin \varphi - \frac{mg}{l}x, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{1}{2}m \, 2\omega y \sin \varphi,$$

$$m\ddot{x} - m\omega \dot{y} \sin \varphi - m\omega \dot{y} \sin \varphi + \frac{mg}{l}x = 0,$$

$$\ddot{x} = 2\omega \dot{y} \sin \varphi - \omega_0^2 x,$$

równania ruchu

$$L \approx \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\omega (x\dot{y} - \dot{x}y) \sin \varphi \right] - \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\omega \dot{y} \sin \varphi - \frac{mg}{l}x, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{1}{2}m \, 2\omega y \sin \varphi,$$

$$m\ddot{x} - m\omega \dot{y} \sin \varphi - m\omega \dot{y} \sin \varphi + \frac{mg}{l}x = 0,$$

$$\ddot{x} = 2\omega \dot{y} \sin \varphi - \omega_0^2 x, \quad \text{gdzie} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

równania ruchu

$$L \approx \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\omega (x\dot{y} - \dot{x}y) \sin \varphi \right] - \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\omega \dot{y} \sin \varphi - \frac{mg}{l}x, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{1}{2}m 2\omega y \sin \varphi,$$

$$m\ddot{x} - m\omega \dot{y} \sin \varphi - m\omega \dot{y} \sin \varphi + \frac{mg}{l}x = 0,$$

$$\ddot{x} = 2\omega \dot{y} \sin \varphi - \omega_0^2 x, \quad \text{gdzie} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -m\omega \dot{x} \sin \varphi - \frac{mg}{l}y,$$

równania ruchu

$$L \approx \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\omega (x\dot{y} - \dot{x}y) \sin \varphi \right] - \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\omega \dot{y} \sin \varphi - \frac{mg}{l}x, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{1}{2}m 2\omega y \sin \varphi,$$

$$m\ddot{x} - m\omega \dot{y} \sin \varphi - m\omega \dot{y} \sin \varphi + \frac{mg}{l}x = 0,$$

$$\ddot{x} = 2\omega \dot{y} \sin \varphi - \omega_0^2 x, \quad \text{gdzie} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -m\omega \dot{x} \sin \varphi - \frac{mg}{l}y, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + m\omega x \sin \varphi,$$

równania ruchu

$$L \approx \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\omega (x\dot{y} - \dot{x}y) \sin \varphi \right] - \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\omega \dot{y} \sin \varphi - \frac{mg}{l} x, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{1}{2} m 2\omega y \sin \varphi,$$

$$m\ddot{x} - m\omega \dot{y} \sin \varphi - m\omega \dot{y} \sin \varphi + \frac{mg}{l} x = 0,$$

$$\ddot{x} = 2\omega \dot{y} \sin \varphi - \omega_0^2 x, \quad \text{gdzie} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -m\omega \dot{x} \sin \varphi - \frac{mg}{l} y, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + m\omega x \sin \varphi,$$

$$m\ddot{y} + m\omega \dot{x} \sin \varphi + m\omega \dot{x} \sin \varphi + \frac{mg}{l} y = 0,$$

równania ruchu

$$L \approx \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\omega (x\dot{y} - \dot{x}y) \sin \varphi \right] - \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\omega \dot{y} \sin \varphi - \frac{mg}{l} x, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{1}{2} m 2\omega y \sin \varphi,$$

$$m\ddot{x} - m\omega \dot{y} \sin \varphi - m\omega \dot{y} \sin \varphi + \frac{mg}{l} x = 0,$$

$$\ddot{x} = 2\omega \dot{y} \sin \varphi - \omega_0^2 x, \quad \text{gdzie} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -m\omega \dot{x} \sin \varphi - \frac{mg}{l} y, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + m\omega x \sin \varphi,$$

$$m\ddot{y} + m\omega \dot{x} \sin \varphi + m\omega \dot{x} \sin \varphi + \frac{mg}{l} y = 0,$$

$$\ddot{y} = -2\omega \dot{x} \sin \varphi - \omega_0^2 y.$$

równania ruchu

$$L \approx \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\omega (x\dot{y} - \dot{x}y) \sin \varphi \right] - \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\omega \dot{y} \sin \varphi - \frac{mg}{l} x, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{1}{2} m 2\omega y \sin \varphi,$$

$$m\ddot{x} - m\omega \dot{y} \sin \varphi - m\omega \dot{y} \sin \varphi + \frac{mg}{l} x = 0,$$

$$\ddot{x} = 2\omega \dot{y} \sin \varphi - \omega_0^2 x, \quad \text{gdzie} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -m\omega \dot{x} \sin \varphi - \frac{mg}{l} y, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + m\omega x \sin \varphi,$$

$$m\ddot{y} + m\omega \dot{x} \sin \varphi + m\omega \dot{x} \sin \varphi + \frac{mg}{l} y = 0,$$

$$\ddot{y} = -2\omega \dot{x} \sin \varphi - \omega_0^2 y.$$

Oznaczmy $\omega \sin \varphi = \omega_z$ i przepisemy oba równania ruchu

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_0^2 x + 2\omega_z \dot{y}, \\ \ddot{y} = -\omega_0^2 y - 2\omega_z \dot{x}. \end{cases}$$

Oznaczmy $\omega \sin \varphi = \omega_z$ i przepisujemy oba równania ruchu

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_0^2 x + 2\omega_z \dot{y}, \\ \ddot{y} = -\omega_0^2 y - 2\omega_z \dot{x}. \end{cases}$$

Wykonajmy obrót względem osi Oz układu nieinercyjnego o kąt $\omega_z t$,

Oznaczmy $\omega \sin \varphi = \omega_z$ i przepisemy oba równania ruchu

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_0^2 x + 2\omega_z \dot{y}, \\ \ddot{y} = -\omega_0^2 y - 2\omega_z \dot{x}. \end{cases}$$

Wykonajmy obrót względem osi Oz układu nieinercyjnego o kąt $\omega_z t$, czyli przejdźmy do układu poruszającego się z prędkością kątową ω_z .

Oznaczmy $\omega \sin \varphi = \omega_z$ i przepismy oba równania ruchu

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_0^2 x + 2\omega_z \dot{y}, \\ \ddot{y} = -\omega_0^2 y - 2\omega_z \dot{x}. \end{cases}$$

Wykonajmy obrót względem osi Oz układu nieinercyjnego o kąt $\omega_z t$, czyli przejdźmy do układu poruszającego się z prędkością kątową ω_z .

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (\star)$$

Obliczmy pochodne czasowe wzorów transformacyjnych, zanedbując przy tym małe wyrazy $\sim \omega_z^2$.

Oznaczmy $\omega \sin \varphi = \omega_z$ i przepismy oba równania ruchu

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_0^2 x + 2\omega_z \dot{y}, \\ \ddot{y} = -\omega_0^2 y - 2\omega_z \dot{x}. \end{cases}$$

Wykonajmy obrót względem osi Oz układu nieinercyjnego o kąt $\omega_z t$, czyli przejdźmy do układu poruszającego się z prędkością kątową ω_z .

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

Obliczmy pochodne czasowe wzorów transformacyjnych, zanedbując przy tym małe wyrazy $\sim \omega_z^2$.

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

$\dot{x}$

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

$\dot{\mathbf{x}} =$

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega_z t - x' \omega_z \sin \omega_z t + \dot{y}' \sin \omega_z t + y' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}' \cos \omega_z t - x' \omega_z \sin \omega_z t + \dot{y}' \sin \omega_z t + y' \omega_z \cos \omega_z t, \\ \dot{y} & \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega_z t - x' \omega_z \sin \omega_z t + \dot{y}' \sin \omega_z t + y' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\dot{y} =$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega_z t - x' \omega_z \sin \omega_z t + \dot{y}' \sin \omega_z t + y' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\dot{y} = -\dot{x}' \sin \omega_z t - x' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \cos \omega_z t - y' \omega_z \sin \omega_z t,$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega_z t - x' \omega_z \sin \omega_z t + \dot{y}' \sin \omega_z t + y' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\dot{y} = -\dot{x}' \sin \omega_z t - x' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \cos \omega_z t - y' \omega_z \sin \omega_z t,$$

$$\ddot{x}$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega_z t - x' \omega_z \sin \omega_z t + \dot{y}' \sin \omega_z t + y' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\dot{y} = -\dot{x}' \sin \omega_z t - x' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \cos \omega_z t - y' \omega_z \sin \omega_z t,$$

$$\ddot{x} \approx$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega_z t - x' \omega_z \sin \omega_z t + \dot{y}' \sin \omega_z t + y' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\dot{y} = -\dot{x}' \sin \omega_z t - x' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \cos \omega_z t - y' \omega_z \sin \omega_z t,$$

$$\ddot{x} \approx \ddot{x}' \cos \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega_z t - x' \omega_z \sin \omega_z t + \dot{y}' \sin \omega_z t + y' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\dot{y} = -\dot{x}' \sin \omega_z t - x' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \cos \omega_z t - y' \omega_z \sin \omega_z t,$$

$$\ddot{x} \approx \ddot{x}' \cos \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t$$

+

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega_z t - x' \omega_z \sin \omega_z t + \dot{y}' \sin \omega_z t + y' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\dot{y} = -\dot{x}' \sin \omega_z t - x' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \cos \omega_z t - y' \omega_z \sin \omega_z t,$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &\approx \ddot{x}' \cos \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t \\ &+ \ddot{y}' \sin \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega_z t - x' \omega_z \sin \omega_z t + \dot{y}' \sin \omega_z t + y' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\dot{y} = -\dot{x}' \sin \omega_z t - x' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \cos \omega_z t - y' \omega_z \sin \omega_z t,$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &\approx \ddot{x}' \cos \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t \\ &+ \ddot{y}' \sin \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega_z t - x' \omega_z \sin \omega_z t + \dot{y}' \sin \omega_z t + y' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\dot{y} = -\dot{x}' \sin \omega_z t - x' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \cos \omega_z t - y' \omega_z \sin \omega_z t,$$

$$\ddot{x} \approx \ddot{x}' \cos \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t$$

$$+ \ddot{y}' \sin \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t$$

$$= \ddot{x}' \cos \omega_z t - 2\dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t + \ddot{y}' \sin \omega_z t + 2\dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega_z t - x' \omega_z \sin \omega_z t + \dot{y}' \sin \omega_z t + y' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\dot{y} = -\dot{x}' \sin \omega_z t - x' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \cos \omega_z t - y' \omega_z \sin \omega_z t,$$

$$\ddot{x} \approx \ddot{x}' \cos \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t$$

$$+ \ddot{y}' \sin \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t$$

$$= \ddot{x}' \cos \omega_z t - 2\dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t + \ddot{y}' \sin \omega_z t + 2\dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$\ddot{y}$

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega_z t - x' \omega_z \sin \omega_z t + \dot{y}' \sin \omega_z t + y' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\dot{y} = -\dot{x}' \sin \omega_z t - x' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \cos \omega_z t - y' \omega_z \sin \omega_z t,$$

$$\ddot{x} \approx \ddot{x}' \cos \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t$$

$$+ \ddot{y}' \sin \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t$$

$$= \ddot{x}' \cos \omega_z t - 2\dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t + \ddot{y}' \sin \omega_z t + 2\dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\ddot{y} \approx$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega_z t - x' \omega_z \sin \omega_z t + \dot{y}' \sin \omega_z t + y' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\dot{y} = -\dot{x}' \sin \omega_z t - x' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \cos \omega_z t - y' \omega_z \sin \omega_z t,$$

$$\ddot{x} \approx \ddot{x}' \cos \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t$$

$$+ \ddot{y}' \sin \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t$$

$$= \ddot{x}' \cos \omega_z t - 2\dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t + \ddot{y}' \sin \omega_z t + 2\dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\ddot{y} \approx -\ddot{x}' \sin \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \cos \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \cos \omega_z t$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega_z t - x' \omega_z \sin \omega_z t + \dot{y}' \sin \omega_z t + y' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\dot{y} = -\dot{x}' \sin \omega_z t - x' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \cos \omega_z t - y' \omega_z \sin \omega_z t,$$

$$\ddot{x} \approx \ddot{x}' \cos \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t$$

$$+ \ddot{y}' \sin \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t$$

$$= \ddot{x}' \cos \omega_z t - 2\dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t + \ddot{y}' \sin \omega_z t + 2\dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\ddot{y} \approx -\ddot{x}' \sin \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \cos \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \cos \omega_z t$$

+

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega_z t - x' \omega_z \sin \omega_z t + \dot{y}' \sin \omega_z t + y' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\dot{y} = -\dot{x}' \sin \omega_z t - x' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \cos \omega_z t - y' \omega_z \sin \omega_z t,$$

$$\ddot{x} \approx \ddot{x}' \cos \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t$$

$$+ \ddot{y}' \sin \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t$$

$$= \ddot{x}' \cos \omega_z t - 2\dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t + \ddot{y}' \sin \omega_z t + 2\dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\ddot{y} \approx -\ddot{x}' \sin \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \cos \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \cos \omega_z t$$

$$+ \ddot{y}' \cos \omega_z t - \dot{y}' \omega_z \sin \omega_z t - \dot{y}' \omega_z \sin \omega_z t$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega_z t - x' \omega_z \sin \omega_z t + \dot{y}' \sin \omega_z t + y' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\dot{y} = -\dot{x}' \sin \omega_z t - x' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \cos \omega_z t - y' \omega_z \sin \omega_z t,$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &\approx \ddot{x}' \cos \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t \\ &+ \ddot{y}' \sin \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t \\ &= \ddot{x}' \cos \omega_z t - 2\dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t + \ddot{y}' \sin \omega_z t + 2\dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &\approx -\ddot{x}' \sin \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \cos \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \cos \omega_z t \\ &+ \ddot{y}' \cos \omega_z t - \dot{y}' \omega_z \sin \omega_z t - \dot{y}' \omega_z \sin \omega_z t \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega_z t - x' \omega_z \sin \omega_z t + \dot{y}' \sin \omega_z t + y' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\dot{y} = -\dot{x}' \sin \omega_z t - x' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \cos \omega_z t - y' \omega_z \sin \omega_z t,$$

$$\ddot{x} \approx \ddot{x}' \cos \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t$$

$$+ \ddot{y}' \sin \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t$$

$$= \ddot{x}' \cos \omega_z t - 2\dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t + \ddot{y}' \sin \omega_z t + 2\dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\ddot{y} \approx -\ddot{x}' \sin \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \cos \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \cos \omega_z t$$

$$+ \ddot{y}' \cos \omega_z t - \dot{y}' \omega_z \sin \omega_z t - \dot{y}' \omega_z \sin \omega_z t$$

$$= -\ddot{x}' \sin \omega_z t - 2\dot{x}' \omega_z \cos \omega_z t + \ddot{y}' \cos \omega_z t - 2\dot{y}' \omega_z \sin \omega_z t.$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t, \\ y = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t. \end{cases} \quad (*)$$

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega_z t - x' \omega_z \sin \omega_z t + \dot{y}' \sin \omega_z t + y' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\dot{y} = -\dot{x}' \sin \omega_z t - x' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \cos \omega_z t - y' \omega_z \sin \omega_z t,$$

$$\ddot{x} \approx \ddot{x}' \cos \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t$$

$$+ \ddot{y}' \sin \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t + \dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t$$

$$= \ddot{x}' \cos \omega_z t - 2\dot{x}' \omega_z \sin \omega_z t + \ddot{y}' \sin \omega_z t + 2\dot{y}' \omega_z \cos \omega_z t,$$

$$\ddot{y} \approx -\ddot{x}' \sin \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \cos \omega_z t - \dot{x}' \omega_z \cos \omega_z t$$

$$+ \ddot{y}' \cos \omega_z t - \dot{y}' \omega_z \sin \omega_z t - \dot{y}' \omega_z \sin \omega_z t$$

$$= -\ddot{x}' \sin \omega_z t - 2\dot{x}' \omega_z \cos \omega_z t + \ddot{y}' \cos \omega_z t - 2\dot{y}' \omega_z \sin \omega_z t.$$

Wstawiając wzory transformacyjne $(\star)$ wraz z pochodnymi do równań ruchu i redukując wyrazy podobne otrzymamy

$$\begin{cases} \ddot{x}' \cos \omega_z t + \ddot{y}' \sin \omega_z t = -\omega_0^2 x' \cos \omega_z t - \omega_0^2 y' \sin \omega_z t, & (1) \\ -\ddot{x}' \sin \omega_z t + \ddot{y}' \cos \omega_z t = \omega_0^2 x' \sin \omega_z t - \omega_0^2 y' \cos \omega_z t. & (2) \end{cases}$$

Utwórzmy następujące kombinacje równań (1) i (2).

$$\begin{aligned} (1) \cdot \sin \omega_z t + (2) \cdot \cos \omega_z t &\Rightarrow \ddot{y}' = -\omega_0^2 y', \\ (1) \cdot \cos \omega_z t - (2) \cdot \sin \omega_z t &\Rightarrow \ddot{x}' = -\omega_0^2 x'. \end{aligned}$$

Wstawiając wzory transformacyjne ($\star$) wraz z pochodnymi do równań ruchu i redukując wyrazy podobne otrzymamy

$$\begin{cases} \ddot{x}' \cos \omega_z t + \ddot{y}' \sin \omega_z t = -\omega_0^2 x' \cos \omega_z t - \omega_0^2 y' \sin \omega_z t, & (1) \\ -\ddot{x}' \sin \omega_z t + \ddot{y}' \cos \omega_z t = \omega_0^2 x' \sin \omega_z t - \omega_0^2 y' \cos \omega_z t. & (2) \end{cases}$$

Utwórzmy następujące kombinacje równań (1) i (2).

$$\begin{aligned} (1) \cdot \sin \omega_z t + (2) \cdot \cos \omega_z t &\Rightarrow \ddot{y}' = -\omega_0^2 y', \\ (1) \cdot \cos \omega_z t - (2) \cdot \sin \omega_z t &\Rightarrow \ddot{x}' = -\omega_0^2 x'. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy dwa niezależne równania ruchu wahadła matematycznego

$$\begin{cases} \ddot{y}' = -\omega_0^2 y' & \Leftrightarrow & y'(t) = B \sin(\omega_0 t + \beta), \\ \ddot{x}' = -\omega_0^2 x' & \Leftrightarrow & x'(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha). \end{cases}$$

Wstawiając wzory transformacyjne $(\star)$ wraz z pochodnymi do równań ruchu i redukując wyrazy podobne otrzymamy

$$\begin{cases} \ddot{x}' \cos \omega_z t + \ddot{y}' \sin \omega_z t = -\omega_0^2 x' \cos \omega_z t - \omega_0^2 y' \sin \omega_z t, & (1) \\ -\ddot{x}' \sin \omega_z t + \ddot{y}' \cos \omega_z t = \omega_0^2 x' \sin \omega_z t - \omega_0^2 y' \cos \omega_z t. & (2) \end{cases}$$

Utwórzmy następujące kombinacje równań (1) i (2).

$$\begin{aligned} (1) \cdot \sin \omega_z t + (2) \cdot \cos \omega_z t &\Rightarrow \ddot{y}' = -\omega_0^2 y', \\ (1) \cdot \cos \omega_z t - (2) \cdot \sin \omega_z t &\Rightarrow \ddot{x}' = -\omega_0^2 x'. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy dwa niezależne równania ruchu wahadła matematycznego

$$\begin{cases} \ddot{y}' = -\omega_0^2 y' & \Leftrightarrow & y'(t) = B \sin(\omega_0 t + \beta), \\ \ddot{x}' = -\omega_0^2 x' & \Leftrightarrow & x'(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha). \end{cases}$$

Każde z równań jest dokładnie takie samo, jak równanie ruchu wahadła w układzie inercyjnym.

Stąd wnioskujemy, że w układzie obracającym się z prędkością kątową ω_z względem Oz' układu nieinercyjnego związanego z wahadłem wahania w kierunku Ox' i w kierunku Oy' odbywają się w ustalonej płaszczyźnie.

Każde z równań jest dokładnie takie samo, jak równanie ruchu wahadła w układzie inercyjnym.

Stąd wnioskujemy, że w układzie obracającym się z prędkością kątową ω_z względem Oz' układu nieinercyjnego związanego z wahadłem wahania w kierunku Ox' i w kierunku Oy' odbywają się w ustalonej płaszczyźnie.

Widzimy więc, że płaszczyzna wahań wahadła Foucault'a obraca się z prędkością kątową

$$\omega_z = \omega \sin \varphi,$$

Każde z równań jest dokładnie takie samo, jak równanie ruchu wahadła w układzie inercyjnym.

Stąd wnioskujemy, że w układzie obracającym się z prędkością kątową ω_z względem Oz' układu nieinercyjnego związanego z wahadłem wahania w kierunku Ox' i w kierunku Oy' odbywają się w ustalonej płaszczyźnie.

Widzimy więc, że płaszczyzna wahań wahadła Foucault'a obraca się z prędkością kątową

$$\omega_z = \omega \sin \varphi,$$

gdzie ω to prędkość kątowna ruchu obrotowego Ziemi względem jej osi

$$\omega = \frac{2\pi}{24} \frac{\text{rad}}{\text{h}},$$

a φ jest szerokością geograficzną. Pełny obrót o kąt 2π następuje po czasie T , a więc

$$\omega_z T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_z} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{24\text{h}} \sin \varphi} \Rightarrow T = \frac{24\text{h}}{\sin \varphi}.$$

gdzie ω to prędkość kątowna ruchu obrotowego Ziemi względem jej osi

$$\omega = \frac{2\pi}{24} \frac{\text{rad}}{\text{h}},$$

a φ jest szerokością geograficzną. Pełny obrót o kąt 2π następuje po czasie T , a więc

$$\omega_z T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_z} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{24\text{h}} \sin \varphi} \Rightarrow T = \frac{24\text{h}}{\sin \varphi}.$$

Na biegunie: ($\varphi = 90^\circ$), $T = 24 \text{ h}$.

W Katowicach: ($\varphi \approx 50^\circ$), $T = 31.33 \text{ h} = 31 \text{ h } 20'$,

Blisko równika: ($\varphi \rightarrow 0$), $T \rightarrow \infty$.

gdzie ω to prędkość kątowna ruchu obrotowego Ziemi względem jej osi

$$\omega = \frac{2\pi}{24} \frac{\text{rad}}{\text{h}},$$

a φ jest szerokością geograficzną. Pełny obrót o kąt 2π następuje po czasie T , a więc

$$\omega_z T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_z} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{24\text{h}} \sin \varphi} \Rightarrow T = \frac{24\text{h}}{\sin \varphi}.$$

Na biegunie: ($\varphi = 90^\circ$), $T = 24 \text{ h}$.

W Katowicach: ($\varphi \approx 50^\circ$), $T = 31.33 \text{ h} = 31 \text{ h } 20'$,

Blisko równika: ($\varphi \rightarrow 0$), $T \rightarrow \infty$.