MECHANIKA KWANTOWA

Karol Kołodziej

Zestaw 4

1. Udowodnić indukcyjnie wzór Leibnitza

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[u(x)v(x)\right] = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{\mathrm{d}^m u(x)}{\mathrm{d}x^m}\, \frac{\mathrm{d}^{n-m} v(x)}{\mathrm{d}x^{n-m}}.$$

2. Wielomiany Legendre'a $P_n(w)$, $n = 0, 1, 2, ...$, określone w przedziale domkniętym $[-1, 1]$ można zdefiniować poprzez tzw. wzór Rodriguesa

$$P_n(w) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}w^n} \left(w^2 - 1\right)^n, \qquad w \in [-1, 1].$$

Wykorzystując wzór Leibnitza zróżniczkować $(n + 1)$-krotnie tożsamość

$$\left(w^2 - 1\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} \left(w^2 - 1\right)^n = 2nw \left(w^2 - 1\right)^n$$

i pokazać, że wielomiany Legendre'a spełniają następujące równanie różniczkowe II rzędu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} \left[\left(1 - w^2\right) \frac{\mathrm{d}P_n(w)}{\mathrm{d}w}\right] + n(n + 1)P_n(w) = 0.$$

3. Pokazać, że wielomiany Legendre'a $P_n(w)$, $n = 0, 1, 2, ...$, są ortogonalne w przedziale domkniętym $[-1, 1]$, tzn. że

$$\int_{-1}^{1} P_n(w)P_m(w)\, \mathrm{d}w = 0, \qquad \text{dla} \quad n \neq m.$$

Wskazówka. Skorzystać z równania różniczkowego z zad. 2.

4. Pokazać, że stowarzyszone funkcje Legendrea $P_l^m(w)$ zdefiniowane na odcinku $[-1, 1]$ wzorem

$$P_l^m(w) = \left(1 - w^2\right)^{\frac{1}{2}|m|} \frac{\mathrm{d}^{|m|}}{\mathrm{d}w^{|m|}} P_l(w),$$

gdzie $P_l(w)$, $l = 0, 1, 2, ...$, jest wielomianem Legendre'a, a m jest liczbą całkowitą, przy czym $|m| \leq l$, spełniają następujące równanie różniczkowe II rzędu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} \left[\left(1 - w^2\right) \frac{\mathrm{d}P_l^m(w)}{\mathrm{d}w}\right] + \left[l(l + 1) - \frac{m^2}{1 - w^2}\right] P_l^m(w) = 0.$$

5. Pokazać, że stowarzyszone funkcje Legendre'a $P_l^m(w)$ spełniają następującą relację ortogonalności na odcinku $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(w)P_{l'}^m(w)\, \mathrm{d}w = \frac{2}{2l + 1} \frac{(l + |m|)!}{(l - |m|)!}\, \delta_{ll'}.$$

Literatura do zadań 1–5: F.W. Byron, R.W. Fuller, tom I, rozdz. 5