MECHANIKA KWANTOWA

Karol Kołodziej

Zestaw 3

1. Korzystając ze wzoru $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_i = \varepsilon_{ijk}A_jB_k$ i z tożsamości tensorowej

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

udowodnić następujące tożsamości wektorowe:

$$\begin{aligned}
&\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C} = \left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{A},\\
&\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C},\\
&\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right) = \vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right).
\end{aligned}$$

Wskazówka: W dwóch pierwszych tożsamościach rozważyć i-tą składową wektora po stronie lewej i pokazać, że jest ona równa i-tej składowej wektora po stronie prawej.

Ponieważ operatory orbitalnego momentu pędu spełniają nastepujące relacje komutacji:

$$[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k, \qquad \left[\vec{L}^2, L_i\right] = 0,$$

to stany własne orbitalnego momentu pędu wybiera się zwykle w następujacy sposób:

$$\begin{aligned}
\vec{L}^2\,|lm\rangle &= l(l+1)\,\hbar^2\;|lm\rangle\,,\\
L_z\,|lm\rangle &= m\hbar\;|lm\rangle\,,
\end{aligned}$$

gdzie, jak pokażemy w dalszej części kursu, $l = 0, 1, 2, ...$ i $m = 0, \pm1, ..., \pm l$.

2. Pokazać, że dla wartości oczekiwanych w stanie $|lm\rangle$ zachodzi
   (a) $\langle lm\,|L_x\,|lm\rangle = \langle lm\,|L_y\,|lm\rangle = 0$,
   (b) $\langle lm\,|L_xL_y + L_yL_x|\,lm\rangle = 0$,
   (c) $\langle lm\,|L_x^2\,|lm\rangle = \langle lm\,|L_y^2\,|lm\rangle$.

3. Jaką relację nieoznaczoności spełniają składowe L_1 i L_2 operatora orbitalnego momentu pędu, dla których $[L_1, L_2] = i\hbar L_3$? W których stanach własnych $|lm\rangle$ operatorów $\vec{L}^2$ i L_3 można jednocześnie najdokładniej zmierzyć L_1 i L_2?

4. Pokazać, że wariancja kąta azymutalnego φ i wariancja trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu L_3 w stanie kwantowym opisywanym funkcją falową $\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\varphi$ wynoszą odpowiednio $\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\right)$ i $\hbar^2$.

5. Udowodnić, że jeśli operator A komutuje z dwoma składowymi momentu pędu, to komutuje również z trzecią.

6. Macierze Pauliego, $\sigma_i, \ i = 1, 2, 3$, można zdefiniować jako macierze 2×2 spełniające warunki:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \qquad \{\sigma_i, \sigma_j\} \equiv \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

   Udowodnić, że

   (a) $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$,

   (b) $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = i$,

   (c) $\mathrm{Tr}\ \sigma_i = 0$,

   (d) $\det \sigma_i = -1$.

7. Niech $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ i $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$ będą dowolnymi wektorami o składowych rzeczywistych lub zespolonych, a $\vec{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$, gdzie $\sigma_i, \ i = 1, 2, 3$ są macierzami Pauliego. Oznaczmy $\hat{a} \equiv \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$. Udowodnić, że

   (a) $\hat{a}^2 = \vec{a}^2$,

   (b) $\left\{\hat{a}, \hat{b}\right\} = 2\vec{a} \cdot \vec{b}$,

   (c) $\hat{a} \cdot \hat{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$.

8. Udowodnić, że

$$\begin{aligned} e^{i\varphi\frac{1}{2}\sigma_3}\ \sigma_1\ e^{-i\varphi\frac{1}{2}\sigma_3} &= \sigma_1 \cos\varphi - \sigma_2 \sin\varphi, \\ e^{i\varphi\frac{1}{2}\sigma_3}\ \sigma_2\ e^{-i\varphi\frac{1}{2}\sigma_3} &= \sigma_2 \cos\varphi + \sigma_1 \sin\varphi, \end{aligned}$$

   gdzie $\sigma_i, \ i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego.

Literatura: J.B. Brojan, J. Mostowski, K. Wódkiewicz, *Zbiór zadań z mechaniki kwantowej.*