Mechanika Kwantowa

Zagadnienia egzaminacyjne dla Fizyki Medycznej

Karol Kołodziej

1. Problemy klasycznej fizyki nierelatywistycznej, które doprowadziły do powstania mechaniki kwantowej oraz pierwsze próby ich wyjaśnienia.

2. Omówić eksperyment dyfrakcyjny. Co oznacza pojęcie dualizmu korpuskularno-falowego?

3. "Wyprowadzenie" równania falowego Schrödingera z klasycznego wzoru na energię całkowitą cząstki; interpretacja fizyczna funkcji falowej.

4. Twierdzenia Ehrenfesta, przykłady. Kiedy jest spełnione? Jaką zasadę ilustruje?

5. Separacja równania Schrödingera dla potencjału niezależnego jawnie od czasu; równanie własne operatora Hamiltona i operatora energii. Stan stacjonarny układu fizycznego.

6. Warunki ciągłości funkcji falowej i jej gradientu; warunki graniczne na powierzchni nieskończonego skoku potencjału.

7. Cząstka w jednowymiarowej, prostokątnej, nieskończonej studni potencjału.

8. Cząstka w jednowymiarowej, prostokątnej, skończonej studni potencjału.

9. Przedyskutować własności parzystości rozwiązań jednowymiarowego równania Shrödingera dla cząstki w studni potencjału symetrycznej względem początku układu współrzędnych.

10. Przestrzen Hilberta stanów kwantowomechanicznych; iloczyn skalarny; nierówność Schwartza; operatory liniowe i funkcjonały liniowe w przestrzeni Hilberta.

11. Komutator operatorów liniowych i jego własności. Pokazać, że operatory położenia x_i i pędu $p_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$, cząstki spełniają następujące relacje komutacji

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \qquad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

12. Obliczyć następujące komutatory

$$[L_i, x_j], \quad [L_i, p_j], \quad [L_i, L_j], \quad \left[\vec{L}^2, L_i\right],$$

gdzie x_i, p_i i L_i, $i = 1, 2, 3$, są odpowiednio operatorami położenia, pędu i orbitalnego momentu pędu cząstki.

13. Definicja operatora hermitowsko sprzężonego do operatora liniowego w przestrzeni Hilberta; własności sprzężenia hermitowskiego.

14. Pokazać, że wartości własne operatora hermitowskiego w przestrzeni Hilberta nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi.

15. Pokazać, że wektory własne operatora hermitowskiego w przestrzeni Hilberta odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne.

16. Definicja operatora unitarnego w przestrzeni Hilberta; pokazać, że operator unitarny nie zmienia normy wektora stanu kwantowomechanicznego.

17. Zupełne ortogonalne układy wektorów w przestrzeni Hilberta. Rozwinięcie w szereg Fouriera.

18. Postulaty interpretacyjne mechaniki kwantowej.

19. Pokazać, że operator pędu, a co za tym idzie również operator Hamiltona cząstki w polu o potencjale rzeczywistym jest hermitowski.

20. Znaleźć funkcje własne operatora pędu w reprezentacji położeniowej. Czy należą one do przestrzeni Hilberta stanów kwantowomechanicznych? Pokazać ortogonalność funkcji własnych operatora pędu i znaleźć ich normalizację w sześciennym pudełku o skończonym rozmiarze L. Jakie są dozwolone wartości wektora falowego przy założeniu periodycznych warunków brzegowych?

21. Zasada nieoznaczoności Heisenberga. Przykłady zmiennych komplementarnych.

22. Jednowymiarowy kwantowy oscylator harmoniczny.

    (a) Omówić, jaką rolę spełniają operatory:

    $$a = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,(p - im\omega x) \qquad \text{i} \qquad a^{\dagger} = \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,(p + im\omega x)\,.$$

    (b) Podać wzór na dozwolone poziomy energetyczne.

    (c) Omówić funkcje własne energii.

23. Atom wodoru.

    (a) Omówić separację dwuciałowego równania Schrödingera do równań opisujących ruch względny elektronu i jądra oraz swobodny ruch środka masy układu.

    (b) Omówić separację równania Schrödingera opisującego ruch względny elektronu i jądra we współrzędnych sferycznych na część radialną i kątową. Która część determinuje poziomy energetyczne atomu? Co można powiedzieć o części kątowej?

    (c) Degeneracja poziomów energetycznych.

24. Jednowymiarowe rozpraszanie cząstki na prostokątnej barierze potencjału. Jak definiujemy współczynniki przejścia i odbicia. Omówić zjawisko tunelowania.

25. Rozpraszanie w trzech wymiarach. Postać asymptotyczna na dużych odległościach fali rozproszonej. Przekrój czynny na rozpraszanie.

26. Obraz Heisenberga:

    (a) definicja wektora stanu i operatora reprezentującego zmienną dynamiczną,

    (b) ewolucja czasowa operatora reprezentującego zmienną dynamiczną,

27. Symetrie w mechanice kwantowej.

    (a) Operator pędu jako generator tranlacji przestrzennej.

    (b) Niezależny jawnie od czasu operator Hamiltona jako generator translacji czasowej.

(c) Operator momentu pędu jako generator obrotu. Przypadek cząstki skalarnej i wektorowej.
(d) Związek symetrii układu kwantowomechanicznego z degeneracją wartości własnych energii.

28. Operator całkowitego momentu pędu.

    (a) Podać równania własne, dopuszczalne wartości odpowiednich liczb kwantowych i zakresy zmienności.
    (b) Reprezentacja macierzowa dla spinu 1/2.
    (c) Składanie stanów własnych momentu pędu.

29. Równanie Schrödingera dla układu n cząstek identycznych. Jakie warunki musi spełniać funkcja falowa układu n cząstek identycznych?

30. Konstrukcja wektorów stanu dla układu 2 identycznych bozonów i 2 identycznych fermionów. Jak to zrobić w przypadku n cząstek?

31. Zakaz Pauliego i jego konsekwencje na przykładzie układu okresowego pierwiastków.

32. Podać i objaśnić przykłady zjawisk fizycznych, w których istotną rolę odgrywa kondensacja Bosego–Einsteina.