Wstęp matematyczny

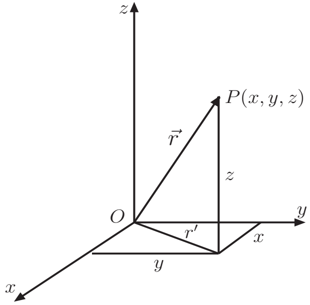
Część 3

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

Wektor położenia punktu

W układzie kartezjańskim wektor położenia (wodzący) $\vec{r}$ łączący początek układu O z punktem $P(x, y, z)$ ma współrzędne:

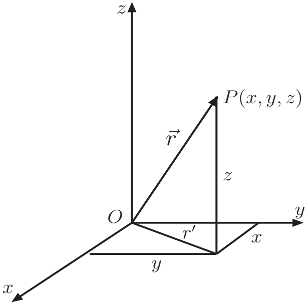


$$\vec{r} = [x - 0, y - 0, z - 0] = [x, y, z].$$

$\Rightarrow$

Wektor położenia punktu

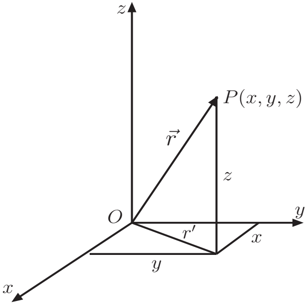
W układzie kartezjańskim wektor położenia (wodzący) $\vec{r}$ łączący początek układu O z punktem $P(x, y, z)$ ma współrzędne:



$$\vec{r} = [x - 0, y - 0, z - 0] = [x, y, z].$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{r}| = \sqrt{r'^2 + z^2}$$

W układzie kartezjańskim wektor położenia (wodzący) $\vec{r}$ łączący początek układu O z punktem $P(x, y, z)$ ma współrzędne:

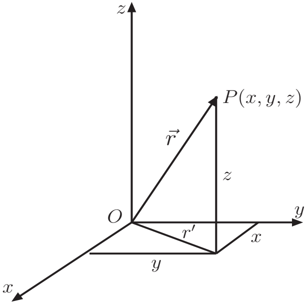


$$\vec{r} = [x - 0, y - 0, z - 0] = [x, y, z].$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{r}| = \sqrt{r'^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Wektor położenia punktu

W układzie kartezjańskim wektor położenia (wodzący) $\vec{r}$ łączący początek układu O z punktem $P(x, y, z)$ ma współrzędne:



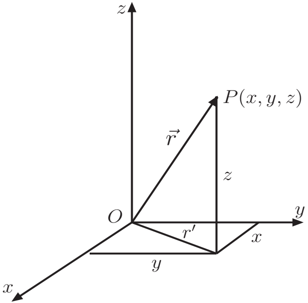
$$\vec{r} = [x - 0, y - 0, z - 0] = [x, y, z].$$

$$\Rightarrow \; |\vec{r}| = \sqrt{r'^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Zauważmy, że wektor ten ma dokładnie takie same współrzędne jak punkt P.

Wektor położenia punktu

W układzie kartezjańskim wektor położenia (wodzący) $\vec{r}$ łączący początek układu O z punktem $P(x, y, z)$ ma współrzędne:



$$\vec{r} = [x - 0, y - 0, z - 0] = [x, y, z].$$

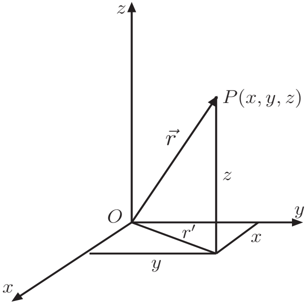
$$\Rightarrow \; |\vec{r}| = \sqrt{r'^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Zauważmy, że wektor ten ma dokładnie takie same współrzędne jak punkt P.

Dlatego możemy użyć go do opisu położenia punktu materialnego w trakcie ruchu.

Wektor położenia punktu

W układzie kartezjańskim wektor położenia (wodzący) $\vec{r}$ łączący początek układu O z punktem $P(x, y, z)$ ma współrzędne:



$$\vec{r} = [x - 0, y - 0, z - 0] = [x, y, z].$$

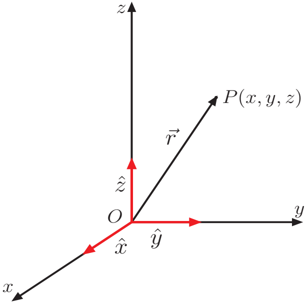
$$\Rightarrow \quad |\vec{r}| = \sqrt{r'^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Zauważmy, że wektor ten ma dokładnie takie same współrzędne jak punkt P.

Dlatego możemy użyć go do opisu położenia punktu materialnego w trakcie ruchu.

Wersory

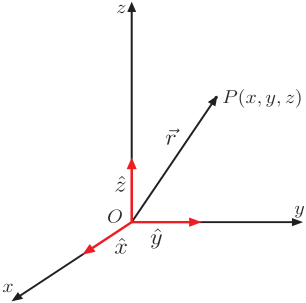
Zdefiniujmy wersory, czyli wektory jednostkowe wzdłuż osi układu kartezjańskiego.



Wersory spełniają relacje:

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1,$$

Zdefiniujmy wersory, czyli wektory jednostkowe wzdłuż osi układu kartezjańskiego.

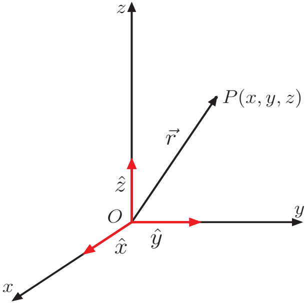


Wersory spełniają relacje:

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1, \quad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}.$$

Wersory

Zdefiniujmy wersory, czyli wektory jednostkowe wzdłuż osi układu kartezjańskiego.

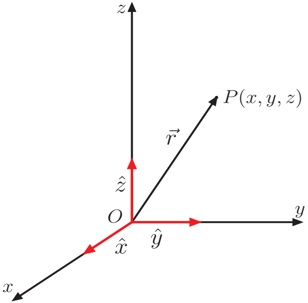


Wersory spełniają relacje:

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1, \quad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}.$$

Ostatnia równość oznacza, że układ kartezjański jest prawoskrętny.

Zdefiniujmy wersory, czyli wektory jednostkowe wzdłuż osi układu kartezjańskiego.



Wersory spełniają relacje:

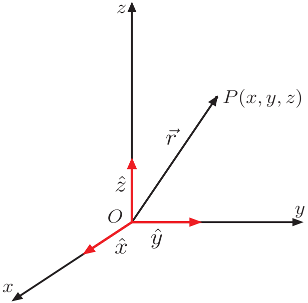
$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1, \quad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}.$

Ostatnia równość oznacza, że układ kartezjański jest prawoskrętny.

Przy użyciu wersorów wektor ten możemy zapisać w formie:

$$\vec{r} = [x, y, z] = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}$$

Zdefiniujmy wersory, czyli wektory jednostkowe wzdłuż osi układu kartezjańskiego.



Wersory spełniają relacje:

$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1, \quad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}.$

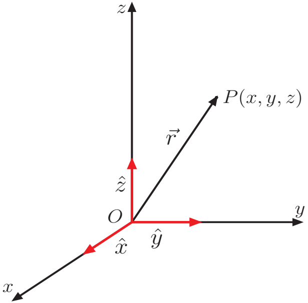
Ostatnia równość oznacza, że układ kartezjański jest prawoskrętny.

Przy użyciu wersorów wektor ten możemy zapisać w formie:

$$\vec{r} = [x, y, z] = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z} = [x_1, x_2, x_3]$$

Wersory

Zdefiniujmy wersory, czyli wektory jednostkowe wzdłuż osi układu kartezjańskiego.



Wersory spełniają relacje:

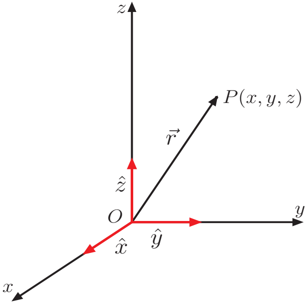
$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1, \quad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}.$$

Ostatnia równość oznacza, że układ kartezjański jest prawoskrętny.

Przy użyciu wersorów wektor ten możemy zapisać w formie:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= [x, y, z] = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z} \\ &= [x_1, x_2, x_3] = x_1\,\hat{e}_1 + x_2\,\hat{e}_2 + x_3\,\hat{e}_3. \end{aligned}$$

Zdefiniujmy wersory, czyli wektory jednostkowe wzdłuż osi układu kartezjańskiego.



Wersory spełniają relacje:

$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1, \quad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}.$

Ostatnia równość oznacza, że układ kartezjański jest prawoskrętny.

Przy użyciu wersorów wektor ten możemy zapisać w formie:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= [x, y, z] = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z} \\ &= [x_1, x_2, x_3] = x_1\,\hat{e}_1 + x_2\,\hat{e}_2 + x_3\,\hat{e}_3. \end{aligned}$$

Przyjęliśmy tutaj konwencję

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3,$$
$$\hat{x} = \hat{e}_1, \quad \hat{y} = \hat{e}_2, \quad \hat{z} = \hat{e}_3,$$

Wektor położenia

Przyjęliśmy tutaj konwencję

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3,$$
$$\hat{x} = \hat{e}_1, \quad \hat{y} = \hat{e}_2, \quad \hat{z} = \hat{e}_3,$$

która, jak się przekonamy dalej, jest bardzo wygodna.

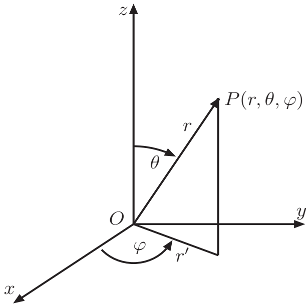
Wektor położenia

Przyjęliśmy tutaj konwencję

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3,$$
$$\hat{x} = \hat{e}_1, \quad \hat{y} = \hat{e}_2, \quad \hat{z} = \hat{e}_3,$$

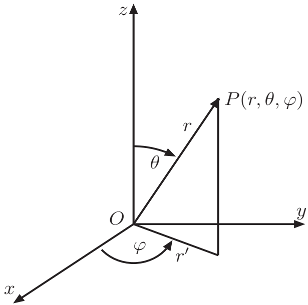
która, jak się przekonamy dalej, jest bardzo wygodna.

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

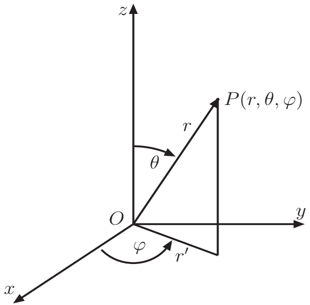
W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x \\ \\ \end{cases}$$

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.

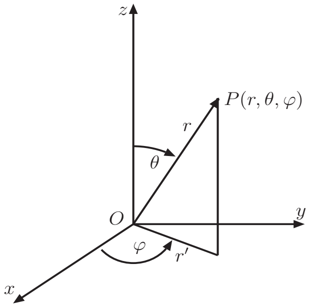


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = \\ \end{cases}$$

Układ sferyczny

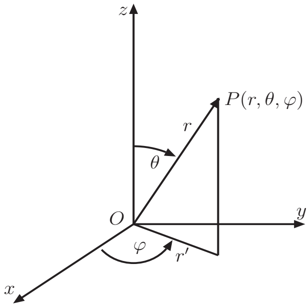
W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi \\ \end{cases}$$

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.

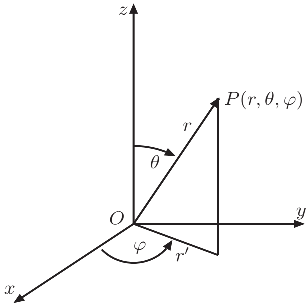


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ \end{cases}$$

Układ sferyczny

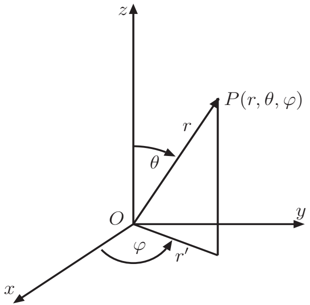
W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y \end{cases}$$

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.

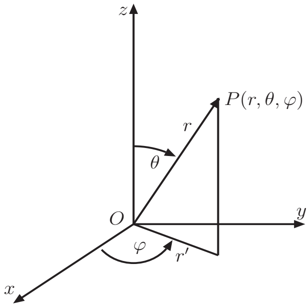


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = \end{cases}$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.

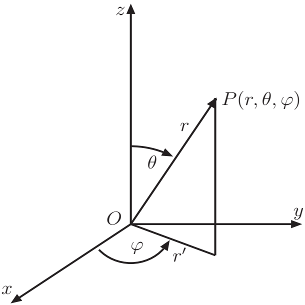


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = r' \sin\varphi \\ \end{cases}$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.

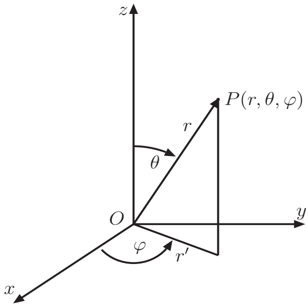


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$
\begin{cases}
x = r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\
y = r' \sin\varphi = r \sin\theta \sin\varphi,
\end{cases}
$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.

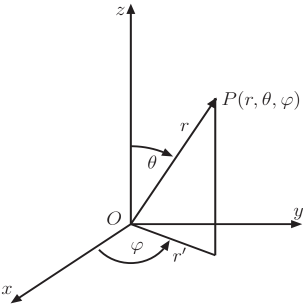


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = r' \sin\varphi = r \sin\theta \sin\varphi, \\ z \end{cases}$$

Układ sferyczny

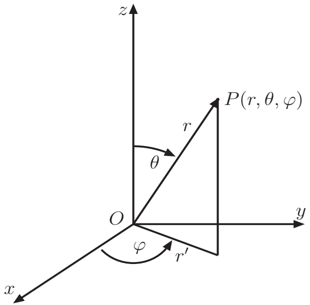
W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = r' \sin\varphi = r \sin\theta \sin\varphi, \\ z = \end{cases}$$

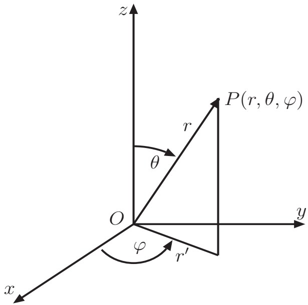
W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = r' \sin\varphi = r \sin\theta \sin\varphi, \\ z = r \cos\theta, \end{cases}$$

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.

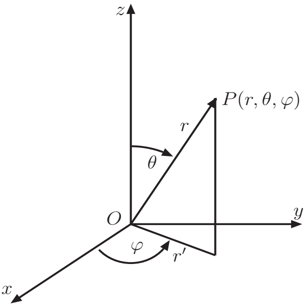


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r' \sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

gdzie $r' = r\sin\theta$.

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



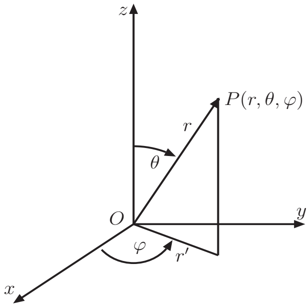
Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x &= r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= r' \sin\varphi = r \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= r \cos\theta, \end{cases}$$

gdzie $r' = r \sin\theta$.

Zakresy zmienności współrzędnych sferycznych:

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = r' \sin\varphi = r \sin\theta \sin\varphi, \\ z = r \cos\theta, \end{cases}$$

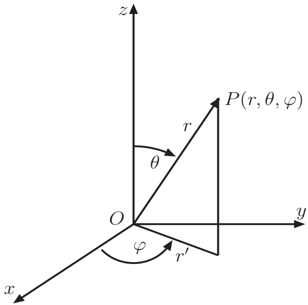
gdzie $r' = r \sin\theta$.

Zakresy zmienności współrzędnych sferycznych:

$$0 \leqslant r < \infty,$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

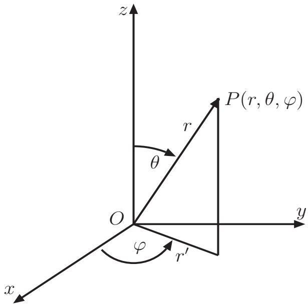
$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = r' \sin\varphi = r \sin\theta \sin\varphi, \\ z = r \cos\theta, \end{cases}$$

gdzie $r' = r \sin\theta$.

Zakresy zmienności współrzędnych sferycznych:

$$0 \leqslant r < \infty, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x &= r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= r' \sin\varphi = r \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= r \cos\theta, \end{cases}$$

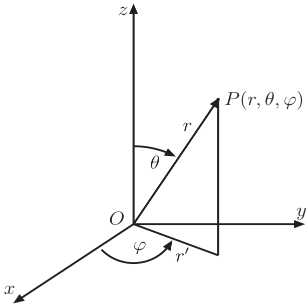
gdzie $r' = r \sin\theta$.

Zakresy zmienności współrzędnych sferycznych:

$$0 \leqslant r < \infty, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

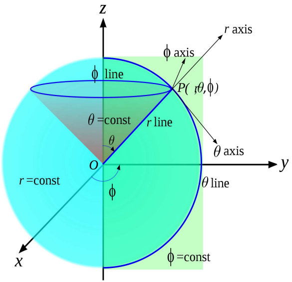
$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r' \sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

gdzie $r' = r\sin\theta$.

Zakresy zmienności współrzędnych sferycznych:

$$0 \leqslant r < \infty, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Ustalając jedną ze współrzędnych w układzie sferycznym otrzymamy powierzchnię.

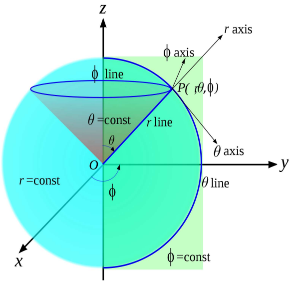


$r = r_0 \quad \Rightarrow$ sfera o promieniu r_0

$\theta = \theta_0 \quad \Rightarrow$ pobocznica stożka o kącie półrozwartości θ_0

$\varphi = \varphi_0 \quad \Rightarrow$ półpłaszczyzna tworząca kąt φ_0 z płaszczyzną xOz.

Ustalając jedną ze współrzędnych w układzie sferycznym otrzymamy powierzchnię.

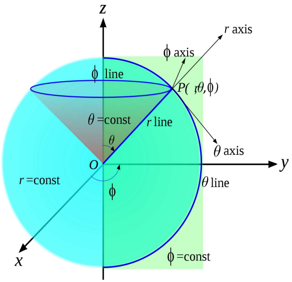


$r = r_0 \quad \Rightarrow$ sfera o promieniu r_0
$\theta = \theta_0 \quad \Rightarrow$ pobocznica stożka o kącie półrozwartości θ_0
$\varphi = \varphi_0 \quad \Rightarrow$ półpłaszczyzna tworząca kąt φ_0 z płaszczyzną xOz.

Ustalając jednocześnie dwie współrzędne otrzymamy linię. Np.
$r = r_0$ i $\theta = \theta_0 \quad \Rightarrow$ okrąg (równoleżnik),
$r = r_0$ i $\varphi = \varphi_0 \quad \Rightarrow$ półokrąg (południk),
$\theta = \theta_0$ i i $\varphi = \varphi_0 \quad \Rightarrow$ półprosta o początku w środku sfery,
gdzie wykorzystaliśmy oczywistą analogię z globusem.

Układ sferyczny - linie stałych współrzędnych

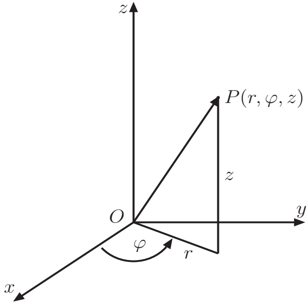
Ustalając jedną ze współrzędnych w układzie sferycznym otrzymamy powierzchnię.



$r = r_0 \quad \Rightarrow$ sfera o promieniu r_0
$\theta = \theta_0 \quad \Rightarrow$ pobocznica stożka o kącie półrozwartości θ_0
$\varphi = \varphi_0 \quad \Rightarrow$ półpłaszczyzna tworząca kąt φ_0 z płaszczyzną xOz.

Ustalając jednocześnie dwie współrzędne otrzymamy linię. Np.
$r = r_0$ i $\theta = \theta_0 \quad \Rightarrow$ okrąg (równoleżnik),
$r = r_0$ i $\varphi = \varphi_0 \quad \Rightarrow$ półokrąg (południk),
$\theta = \theta_0$ i i $\varphi = \varphi_0 \quad \Rightarrow$ półprosta o początku w środku sfery,
gdzie wykorzystaliśmy oczywistą analogię z globusem.

W układzie cylindrycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od wybranej osi r, kąt azymutalny φ oraz wysokość z nad płaszczyznę prostopadłą do wybranej osi, do której należy początek układu O.

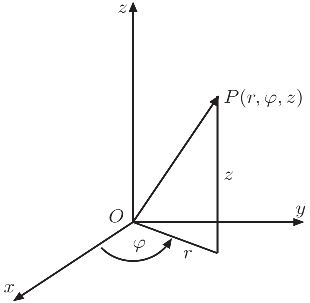


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Układ cylindryczny

W układzie cylindrycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od wybranej osi r, kąt azymutalny φ oraz wysokość z nad płaszczyznę prostopadłą do wybranej osi, do której należy początek układu O.



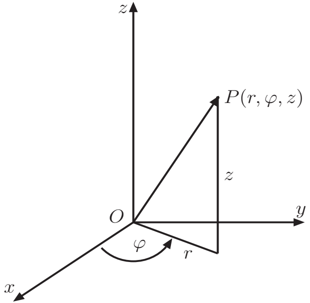
Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Zakresy zmienności współrzędnych cylindrycznych:

Układ cylindryczny

W układzie cylindrycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od wybranej osi r, kąt azymutalny φ oraz wysokość z nad płaszczyznę prostopadłą do wybranej osi, do której należy początek układu O.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi:

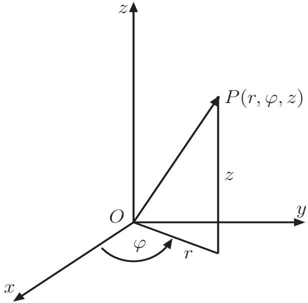
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Zakresy zmienności współrzędnych cylindrycznych:

$$0 \leqslant r < \infty,$$

Układ cylindryczny

W układzie cylindrycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od wybranej osi r, kąt azymutalny φ oraz wysokość z nad płaszczyznę prostopadłą do wybranej osi, do której należy początek układu O.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi:

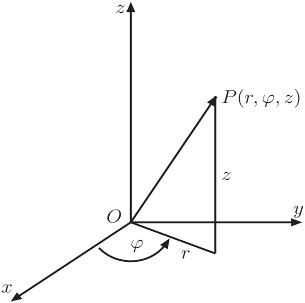
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Zakresy zmienności współrzędnych cylindrycznych:

$$0 \leqslant r < \infty, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

Układ cylindryczny

W układzie cylindrycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od wybranej osi r, kąt azymutalny φ oraz wysokość z nad płaszczyznę prostopadłą do wybranej osi, do której należy początek układu O.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi:

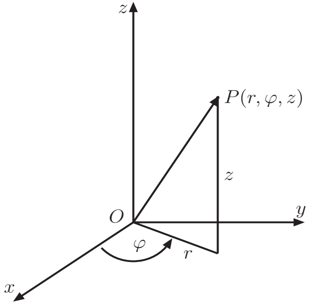
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Zakresy zmienności współrzędnych cylindrycznych:

$$0 \leqslant r < \infty, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \qquad -\infty < z < \infty.$$

Układ cylindryczny

W układzie cylindrycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od wybranej osi r, kąt azymutalny φ oraz wysokość z nad płaszczyznę prostopadłą do wybranej osi, do której należy początek układu O.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Zakresy zmienności współrzędnych cylindrycznych:

$$0 \leqslant r < \infty, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \qquad -\infty < z < \infty.$$

Zadanie. Jak wyglądają linie stałych współrzędnych w układzie cylindrycznym?
Zauważmy, że linie stałych współrzędnych w układzie sferycznym i cylindrycznym, chociaż mogą być liniami krzywymi, to zawsze przecinają się pod kątami prostymi w każdym punkcie 3-wymiarowej przestrzeni, tzn.

- $P_0(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ w układzie sferycznym i
- $P_0(r_0, \varphi_0, z_0)$ w układzie cylindrycznym.

Dlatego układy sferyczny i cylindryczny nazywamy ortogonalnymi układami współrzędnych.

Zadanie. Jak wyglądają linie stałych współrzędnych w układzie cylindrycznym?

Zauważmy, że linie stałych współrzędnych w układzie sferycznym i cylindrycznym, chociaż mogą być liniami krzywymi, to zawsze przecinają się pod kątami prostymi w każdym punkcie 3-wymiarowej przestrzeni, tzn.

- $P_0(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ w układzie sferycznym i
- $P_0(r_0, \varphi_0, z_0)$ w układzie cylindrycznym.

Dlatego układy sferyczny i cylindryczny nazywamy ortogonalnymi układami współrzędnych.

Wektor w przestrzeni trójwymiarowej możemy zapisać

$$\vec{r} = x_1\ \hat{e}_1 + x_2\ \hat{e}_2 + x_3\ \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\ \hat{e}_i$$

Wektor w przestrzeni trójwymiarowej możemy zapisać

$$\vec{r} = x_1\ \hat{e}_1 + x_2\ \hat{e}_2 + x_3\ \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\ \hat{e}_i \equiv x_i\ \hat{e}_i,$$

Konwencja sumacyjna Einsteina

Wektor w przestrzeni trójwymiarowej możemy zapisać

$$\vec{r} = x_1\ \hat{e}_1 + x_2\ \hat{e}_2 + x_3\ \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\ \hat{e}_i \equiv x_i\ \hat{e}_i,$$

gdzie w ostatniej równości pominęliśmy symbol sumy.

Wektor w przestrzeni trójwymiarowej możemy zapisać

$$\vec{r} = x_1\ \hat{e}_1 + x_2\ \hat{e}_2 + x_3\ \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\ \hat{e}_i \equiv x_i\ \hat{e}_i,$$

gdzie w ostatniej równości pominęliśmy symbol sumy.
Za Einsteinem przyjmiemy następującą konwencję.

Konwencja sumacyjna Einsteina

Wektor w przestrzeni trójwymiarowej możemy zapisać

$$\vec{r} = x_1 \ \hat{e}_1 + x_2 \ \hat{e}_2 + x_3 \ \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i \ \hat{e}_i \equiv x_i \ \hat{e}_i,$$

gdzie w ostatniej równości pominęliśmy symbol sumy.
Za Einsteinem przyjmiemy następującą konwencję.
Wskaźnik sumacyjny w wyrażeniu iloczynowym zawsze się powtarza (występuje dwukrotnie) dlatego, jeśli tylko zakres sumowania jest oczywisty, możemy pominąć znak sumy.

Wektor w przestrzeni trójwymiarowej możemy zapisać

$$\vec{r} = x_1\ \hat{e}_1 + x_2\ \hat{e}_2 + x_3\ \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\ \hat{e}_i \equiv x_i\ \hat{e}_i,$$

gdzie w ostatniej równości pominęliśmy symbol sumy.
Za Einsteinem przyjmiemy następującą konwencję.
Wskaźnik sumacyjny w wyrażeniu iloczynowym zawsze się powtarza (występuje dwukrotnie) dlatego, jeśli tylko zakres sumowania jest oczywisty, możemy pominąć znak sumy.

Działania na wektorach

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\vec{a} = [a_1, a_2, a_3] = a_1\,\hat{e}_1 + a_2\,\hat{e}_2 + a_3\,\hat{e}_3$$

Działania na wektorach

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\vec{a} \quad = \quad [a_1, a_2, a_3] = a_1\ \hat{e}_1 + a_2\ \hat{e}_2 + a_3\ \hat{e}_3 \equiv a_i\ \hat{e}_i,$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\vec{a} = [a_1, a_2, a_3] = a_1\,\hat{e}_1 + a_2\,\hat{e}_2 + a_3\,\hat{e}_3 \equiv a_i\,\hat{e}_i,$$

$$\vec{b}$$

Działania na wektorach

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned} \vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\,\hat{e}_1 + a_2\,\hat{e}_2 + a_3\,\hat{e}_3 \equiv a_i\,\hat{e}_i, \\ \vec{b} &= \end{aligned}$$

Działania na wektorach

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned}\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\ \hat{e}_1 + a_2\ \hat{e}_2 + a_3\ \hat{e}_3 \equiv a_i\ \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\ \hat{e}_1 + b_2\ \hat{e}_2 + b_3\ \hat{e}_3\end{aligned}$$

Działania na wektorach

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned}\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\ \hat{e}_1 + a_2\ \hat{e}_2 + a_3\ \hat{e}_3 \equiv a_i\ \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\ \hat{e}_1 + b_2\ \hat{e}_2 + b_3\ \hat{e}_3 \equiv b_i\ \hat{e}_i.\end{aligned}$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned} \vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\ \hat{e}_1 + a_2\ \hat{e}_2 + a_3\ \hat{e}_3 \equiv a_i\ \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\ \hat{e}_1 + b_2\ \hat{e}_2 + b_3\ \hat{e}_3 \equiv b_i\ \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\vec{a} + \vec{b} =$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned}\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\ \hat{e}_1 + a_2\ \hat{e}_2 + a_3\ \hat{e}_3 \equiv a_i\ \hat{e}_i,\\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\ \hat{e}_1 + b_2\ \hat{e}_2 + b_3\ \hat{e}_3 \equiv b_i\ \hat{e}_i.\end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\vec{a} + \vec{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3]$$

Działania na wektorach

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned} \vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\ \hat{e}_1 + a_2\ \hat{e}_2 + a_3\ \hat{e}_3 \equiv a_i\ \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\ \hat{e}_1 + b_2\ \hat{e}_2 + b_3\ \hat{e}_3 \equiv b_i\ \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\vec{a} + \vec{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3]$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\vec{a} = [a_1, a_2, a_3] = a_1\,\hat{e}_1 + a_2\,\hat{e}_2 + a_3\,\hat{e}_3 \equiv a_i\,\hat{e}_i,$$
$$\vec{b} = [b_1, b_2, b_3] = b_1\,\hat{e}_1 + b_2\,\hat{e}_2 + b_3\,\hat{e}_3 \equiv b_i\,\hat{e}_i.$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\vec{a} + \vec{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3]$$
$$=$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned} \vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\ \hat{e}_1 + a_2\ \hat{e}_2 + a_3\ \hat{e}_3 \equiv a_i\ \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\ \hat{e}_1 + b_2\ \hat{e}_2 + b_3\ \hat{e}_3 \equiv b_i\ \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \\ &= (a_1 + b_1)\ \hat{e}_1 + (a_2 + b_2)\ \hat{e}_2 + (a_3 + b_3)\ \hat{e}_3 \end{aligned}$$

Działania na wektorach

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned} \vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\ \hat{e}_1 + a_2\ \hat{e}_2 + a_3\ \hat{e}_3 \equiv a_i\ \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\ \hat{e}_1 + b_2\ \hat{e}_2 + b_3\ \hat{e}_3 \equiv b_i\ \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \\ &= (a_1 + b_1)\ \hat{e}_1 + (a_2 + b_2)\ \hat{e}_2 + (a_3 + b_3)\ \hat{e}_3 \equiv (a_i + b_i)\ \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Działania na wektorach

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\ \hat{e}_1 + a_2\ \hat{e}_2 + a_3\ \hat{e}_3 \equiv a_i\ \hat{e}_i, \\
\vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\ \hat{e}_1 + b_2\ \hat{e}_2 + b_3\ \hat{e}_3 \equiv b_i\ \hat{e}_i.
\end{aligned}
$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$
\begin{aligned}
\vec{a} + \vec{b} &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \\
&= (a_1 + b_1)\ \hat{e}_1 + (a_2 + b_2)\ \hat{e}_2 + (a_3 + b_3)\ \hat{e}_3 \equiv (a_i + b_i)\ \hat{e}_i.
\end{aligned}
$$

Iloczyn wektora $\vec{a}$ przez liczbę c wyraża się wzorem

$$c\ \vec{a} = [ca_1, ca_2, ca_3]$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned} \vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\ \hat{e}_1 + a_2\ \hat{e}_2 + a_3\ \hat{e}_3 \equiv a_i\ \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\ \hat{e}_1 + b_2\ \hat{e}_2 + b_3\ \hat{e}_3 \equiv b_i\ \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \\ &= (a_1 + b_1)\ \hat{e}_1 + (a_2 + b_2)\ \hat{e}_2 + (a_3 + b_3)\ \hat{e}_3 \equiv (a_i + b_i)\ \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Iloczyn wektora $\vec{a}$ przez liczbę c wyraża się wzorem

$$c\ \vec{a} = [ca_1, ca_2, ca_3] = ca_1\ \hat{e}_1 + ca_2\ \hat{e}_2 + ca_3\ \hat{e}_3$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned} \vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\ \hat{e}_1 + a_2\ \hat{e}_2 + a_3\ \hat{e}_3 \equiv a_i\ \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\ \hat{e}_1 + b_2\ \hat{e}_2 + b_3\ \hat{e}_3 \equiv b_i\ \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \\ &= (a_1 + b_1)\ \hat{e}_1 + (a_2 + b_2)\ \hat{e}_2 + (a_3 + b_3)\ \hat{e}_3 \equiv (a_i + b_i)\ \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Iloczyn wektora $\vec{a}$ przez liczbę c wyraża się wzorem

$$c\ \vec{a} = [ca_1, ca_2, ca_3] = ca_1\ \hat{e}_1 + ca_2\ \hat{e}_2 + ca_3\ \hat{e}_3 \equiv ca_i\ \hat{e}_i.$$

Działania na wektorach

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned} \vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\ \hat{e}_1 + a_2\ \hat{e}_2 + a_3\ \hat{e}_3 \equiv a_i\ \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\ \hat{e}_1 + b_2\ \hat{e}_2 + b_3\ \hat{e}_3 \equiv b_i\ \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \\ &= (a_1 + b_1)\ \hat{e}_1 + (a_2 + b_2)\ \hat{e}_2 + (a_3 + b_3)\ \hat{e}_3 \equiv (a_i + b_i)\ \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Iloczyn wektora $\vec{a}$ przez liczbę c wyraża się wzorem

$$c\ \vec{a} = [ca_1, ca_2, ca_3] = ca_1\ \hat{e}_1 + ca_2\ \hat{e}_2 + ca_3\ \hat{e}_3 \equiv ca_i\ \hat{e}_i.$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta,$$

gdzie θ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

W układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i.$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta,$$

gdzie θ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
W układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i .$$

Rzeczywiście, zapiszmy $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$, $\vec{b} = b_j \hat{e}_j$ i obliczmy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

Działania na wektorach

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta,$$

gdzie θ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
W układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i .$$

Rzeczywiście, zapiszmy $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$, $\vec{b} = b_j \hat{e}_j$ i obliczmy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \hat{e}_i \cdot b_j \hat{e}_j =$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\, |\vec{b}| \cos\theta,$$

gdzie θ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
W układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i.$$

Rzeczywiście, zapiszmy $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$, $\vec{b} = b_j \hat{e}_j$ i obliczmy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \hat{e}_i \cdot b_j \hat{e}_j = a_i b_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j =$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta,$$

gdzie θ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
W układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i.$$

Rzeczywiście, zapiszmy $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$, $\vec{b} = b_j \hat{e}_j$ i obliczmy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \hat{e}_i \cdot b_j \hat{e}_j = a_i b_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} =$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta,$$

gdzie θ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
W układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i.$$

Rzeczywiście, zapiszmy $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$, $\vec{b} = b_j \hat{e}_j$ i obliczmy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \hat{e}_i \cdot b_j \hat{e}_j = a_i b_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i,$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \, |\vec{b}| \cos\theta,$$

gdzie θ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
W układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i.$$

Rzeczywiście, zapiszmy $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$, $\vec{b} = b_j \hat{e}_j$ i obliczmy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \hat{e}_i \cdot b_j \hat{e}_j = a_i b_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i,$$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij}, zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad i = j, \\ 0, & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases}$$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij}, zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad i = j, \\ 0, & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases}$$

$\Rightarrow$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij}, zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad i = j, \\ 0, & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1,$$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij}, zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad i = j, \\ 0, & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = \ldots = 0.$$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij}, zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \mathrm{dla} \quad i = j, \\ 0, & \mathrm{dla} \quad i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = ... = 0.$$

i wykorzystaliśmy relację ortogonalności wersorów kartezjańskiego układu współrzędnych

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij}, zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad i = j, \\ 0, & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = ... = 0.$$

i wykorzystaliśmy relację ortogonalności wersorów kartezjańskiego układu współrzędnych

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij},$$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij}, zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad i = j, \\ 0, & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = ... = 0.$$

i wykorzystaliśmy relację ortogonalności wersorów kartezjańskiego układu współrzędnych

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij},$$

która łączy w sobie własności ich unormowania, $|\hat{e}_i| = 1$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij}, zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \mathrm{dla} \quad i = j, \\ 0, & \mathrm{dla} \quad i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = \ldots = 0.$$

i wykorzystaliśmy relację ortogonalności wersorów kartezjańskiego układu współrzędnych

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij},$$

która łączy w sobie własności ich unormowania, $|\hat{e}_i| = 1$ i wzajemnej ortogonalności $\hat{e}_i \perp \hat{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3.$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij}, zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad i = j, \\ 0, & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = ... = 0.$$

i wykorzystaliśmy relację ortogonalności wersorów kartezjańskiego układu współrzędnych

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij},$$

która łączy w sobie własności ich unormowania, $|\hat{e}_i| = 1$ i wzajemnej ortogonalności $\hat{e}_i \perp \hat{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3.$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j \delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$a_j \delta_{1j} =$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j\delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$a_j\delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j\delta_{1j}$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j \delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$a_j \delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j \delta_{1j} \quad =$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j\delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$a_j\delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j\delta_{1j} \quad = \quad a_1\delta_{11} + a_2\delta_{12} + a_3\delta_{13}$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j\delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla* $i = 2, 3$*)* mamy

$$a_j\delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j\delta_{1j} \quad = \quad a_1\delta_{11} + a_2\delta_{12} + a_3\delta_{13}$$

$$=$$

Działania na wektorach

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j\delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$\begin{aligned} a_j\delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j\delta_{1j} &= a_1\delta_{11} + a_2\delta_{12} + a_3\delta_{13} \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1 . \end{aligned}$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j\delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$\begin{aligned} a_j\delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j\delta_{1j} &= a_1\delta_{11} + a_2\delta_{12} + a_3\delta_{13} \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1. \end{aligned}$$

Długość wektora $\vec{a}$ obliczamy następująco

$$a = |\vec{a}|$$

Działania na wektorach

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j\delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$\begin{aligned} a_j\delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j\delta_{1j} &= a_1\delta_{11} + a_2\delta_{12} + a_3\delta_{13} \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1. \end{aligned}$$

Długość wektora $\vec{a}$ obliczamy następująco

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j\delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$\begin{aligned} a_j\delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j\delta_{1j} &= a_1\delta_{11} + a_2\delta_{12} + a_3\delta_{13} \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1. \end{aligned}$$

Długość wektora $\vec{a}$ obliczamy następująco

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{a_i a_i}$$

Działania na wektorach

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j\delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$\begin{aligned} a_j\delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j\delta_{1j} &= a_1\delta_{11} + a_2\delta_{12} + a_3\delta_{13} \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1. \end{aligned}$$

Długość wektora $\vec{a}$ obliczamy następująco

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{a_i a_i} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j\delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$\begin{aligned} a_j\delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j\delta_{1j} &= a_1\delta_{11} + a_2\delta_{12} + a_3\delta_{13} \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1. \end{aligned}$$

Długość wektora $\vec{a}$ obliczamy następująco

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{a_i a_i} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2}.$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j \delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$\begin{aligned} a_j \delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j \delta_{1j} &= a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{12} + a_3 \delta_{13} \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1. \end{aligned}$$

Długość wektora $\vec{a}$ obliczamy następująco

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{a_i a_i} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2}.$$

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin\theta\ \hat{e},$$

gdzie $\hat{e}$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, którego zwrot wyznaczamy zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \, |\vec{b}| \sin\theta \; \hat{e},$$

gdzie $\hat{e}$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, którego zwrot wyznaczamy zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.

W układzie kartezjańskim zachodzi wzór:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin\theta\ \hat{e},$$

gdzie $\hat{e}$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, którego zwrot wyznaczamy zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.
W układzie kartezjańskim zachodzi wzór:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\hat{e}_3.$$

Działania na wektorach

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin\theta\ \hat{e},$$

gdzie $\hat{e}$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, którego zwrot wyznaczamy zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.
W układzie kartezjańskim zachodzi wzór:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\hat{e}_3.$$

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{123} = 1,$$

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} =$$

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1,$$

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1, \quad \varepsilon_{213} =$$

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1, \quad \varepsilon_{213} = -1,$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1, \quad \varepsilon_{213} = -1,$$

$$\varepsilon_{231} =$$

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1, \quad \varepsilon_{213} = -1,$$
$$\varepsilon_{231} = 1,$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1, \quad \varepsilon_{213} = -1,$$
$$\varepsilon_{231} = 1, \quad \varepsilon_{312} =$$

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1, \quad \varepsilon_{213} = -1,$$
$$\varepsilon_{231} = 1, \quad \varepsilon_{312} = 1,$$

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1, \quad \varepsilon_{213} = -1,$$
$$\varepsilon_{231} = 1, \quad \varepsilon_{312} = 1, \quad \varepsilon_{321} =$$

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \varepsilon_{123} = 1, & \varepsilon_{132} = -1, & \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{312} = 1, & \varepsilon_{321} = -1, \end{array}$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \varepsilon_{123} = 1, & \varepsilon_{132} = -1, & \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{312} = 1, & \varepsilon_{321} = -1, \\ \varepsilon_{121} = & & \end{array}$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \varepsilon_{123} = 1, & \varepsilon_{132} = -1, & \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{312} = 1, & \varepsilon_{321} = -1, \\ \varepsilon_{121} = 0, & & \end{array}$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \varepsilon_{123} = 1, & \varepsilon_{132} = -1, & \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{312} = 1, & \varepsilon_{321} = -1, \\ \varepsilon_{121} = 0, & \varepsilon_{223} = & \end{array}$$

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \varepsilon_{123} = 1, & \varepsilon_{132} = -1, & \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{312} = 1, & \varepsilon_{321} = -1, \\ \varepsilon_{121} = 0, & \varepsilon_{223} = 0, & \end{array}$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \varepsilon_{123} = 1, & \varepsilon_{132} = -1, & \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{312} = 1, & \varepsilon_{321} = -1, \\ \varepsilon_{121} = 0, & \varepsilon_{223} = 0, & \varepsilon_{333} = \end{array}$$

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \varepsilon_{123} = 1, & \varepsilon_{132} = -1, & \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{312} = 1, & \varepsilon_{321} = -1, \\ \varepsilon_{121} = 0, & \varepsilon_{223} = 0, & \varepsilon_{333} = 0, \ldots \end{array}$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \varepsilon_{123} = 1, & \varepsilon_{132} = -1, & \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{312} = 1, & \varepsilon_{321} = -1, \\ \varepsilon_{121} = 0, & \varepsilon_{223} = 0, & \varepsilon_{333} = 0, \ldots \end{array}$$

Uwaga. Pseudotensor różni się od tensora jedynie sposobem transformacji przy odbiciach przestrzennych, $\vec{r} \longrightarrow -\vec{r}$.

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \varepsilon_{123} = 1, & \varepsilon_{132} = -1, & \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{312} = 1, & \varepsilon_{321} = -1, \\ \varepsilon_{121} = 0, & \varepsilon_{223} = 0, & \varepsilon_{333} = 0, \ldots \end{array}$$

Uwaga. Pseudotensor różni się od tensora jedynie sposobem transformacji przy odbiciach przestrzennych, $\vec{r} \to -\vec{r}$.
Dlatego często pomija się przedrostek *pseudo* i używa nazwy *tensor*.

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \varepsilon_{123} = 1, & \varepsilon_{132} = -1, & \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{312} = 1, & \varepsilon_{321} = -1, \\ \varepsilon_{121} = 0, & \varepsilon_{223} = 0, & \varepsilon_{333} = 0, \ldots \end{array}$$

Uwaga. Pseudotensor różni się od tensora jedynie sposobem transformacji przy odbiciach przestrzennych, $\vec{r} \to -\vec{r}$.
Dlatego często pomija się przedrostek *pseudo* i używa nazwy *tensor*.

Przydatne tożsamości tensorowe

Pokażemy, że i-tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

Przydatne tożsamości tensorowe

Pokażemy, że i-tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\hat{e}_3.$$

Pokażemy, że i-tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\hat{e}_3.$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_1$$

Pokażemy, że i-tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\hat{e}_3.$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_1 =$$

Pokażemy, że i-tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{e}_3.$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_1 = \varepsilon_{1jk} a_j b_k =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Pokażemy, że i-tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\hat{e}_3.$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_1 = \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \underbrace{\varepsilon_{11k}}_{0} a_1 b_k + \varepsilon_{12k} a_2 b_k + \varepsilon_{13k} a_3 b_k$$

Pokażemy, że i-tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\hat{e}_3.$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_1 = \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \underbrace{\varepsilon_{11k}}_{0} a_1 b_k + \varepsilon_{12k} a_2 b_k + \varepsilon_{13k} a_3 b_k$$

$$=$$

Pokażemy, że i-tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\hat{e}_3.$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_1 = \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \underbrace{\varepsilon_{11k}}_{0} a_1 b_k + \varepsilon_{12k} a_2 b_k + \varepsilon_{13k} a_3 b_k$$

$$= \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 =$$

Pokażemy, że i-tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\hat{e}_3.$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_1 = \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \underbrace{\varepsilon_{11k}}_{0} a_1 b_k + \varepsilon_{12k} a_2 b_k + \varepsilon_{13k} a_3 b_k$$

$$= \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2,$$

Pokażemy, że i-tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\hat{e}_2 \\
&\qquad + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\hat{e}_3. \\
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_1 &= \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \underbrace{\varepsilon_{11k}}_{0} a_1 b_k + \varepsilon_{12k} a_2 b_k + \varepsilon_{13k} a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2,
\end{aligned}$$

Przydatne tożsamości tensorowe

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.

Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 =$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 = \varepsilon_{2jk} a_j b_k =$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.

Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 = \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 = \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k$$

$$=$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk}a_j b_k = \varepsilon_{21k}a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k}a_3 b_k \\ &= \varepsilon_{213}a_1 b_3 + \varepsilon_{231}a_3 b_1 =\end{aligned}$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk}a_j b_k = \varepsilon_{21k}a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0}a_2 b_k + \varepsilon_{23k}a_3 b_k \\ &= \varepsilon_{213}a_1 b_3 + \varepsilon_{231}a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1,\end{aligned}$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk}a_j b_k = \varepsilon_{21k}a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k}a_3 b_k \\ &= \varepsilon_{213}a_1 b_3 + \varepsilon_{231}a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\ \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_3 & \end{aligned}$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_3 &=
\end{aligned}
$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_3 &= \varepsilon_{3jk} a_j b_k =
\end{aligned}
$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_3 &= \varepsilon_{3jk} a_j b_k = \varepsilon_{31k} a_1 b_k + \varepsilon_{32k} a_2 b_k + \underbrace{\varepsilon_{33k}}_{0} a_3 b_k
\end{aligned}$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_3 &= \varepsilon_{3jk} a_j b_k = \varepsilon_{31k} a_1 b_k + \varepsilon_{32k} a_2 b_k + \underbrace{\varepsilon_{33k}}_{0} a_3 b_k \\
&=
\end{aligned}$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk}a_j b_k = \varepsilon_{21k}a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0}a_2 b_k + \varepsilon_{23k}a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{213}a_1 b_3 + \varepsilon_{231}a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\
\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_3 &= \varepsilon_{3jk}a_j b_k = \varepsilon_{31k}a_1 b_k + \varepsilon_{32k}a_2 b_k + \underbrace{\varepsilon_{33k}}_{0}a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{312}a_1 b_2 + \varepsilon_{321}a_2 b_1
\end{aligned}$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk}a_j b_k = \varepsilon_{21k}a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k}a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{213}a_1 b_3 + \varepsilon_{231}a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\
\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_3 &= \varepsilon_{3jk}a_j b_k = \varepsilon_{31k}a_1 b_k + \varepsilon_{32k}a_2 b_k + \underbrace{\varepsilon_{33k}}_{0} a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{312}a_1 b_2 + \varepsilon_{321}a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1,
\end{aligned}$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk}a_j b_k = \varepsilon_{21k}a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k}a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{213}a_1 b_3 + \varepsilon_{231}a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\
\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_3 &= \varepsilon_{3jk}a_j b_k = \varepsilon_{31k}a_1 b_k + \varepsilon_{32k}a_2 b_k + \underbrace{\varepsilon_{33k}}_{0} a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{312}a_1 b_2 + \varepsilon_{321}a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1,
\end{aligned}
$$

podczas gdy wzór wyznacznikowy daje

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{e}_3.$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk}a_j b_k = \varepsilon_{21k}a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k}a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{213}a_1 b_3 + \varepsilon_{231}a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\
\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_3 &= \varepsilon_{3jk}a_j b_k = \varepsilon_{31k}a_1 b_k + \varepsilon_{32k}a_2 b_k + \underbrace{\varepsilon_{33k}}_{0} a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{312}a_1 b_2 + \varepsilon_{321}a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1,
\end{aligned}$$

podczas gdy wzór wyznacznikowy daje

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{e}_3.$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Korzystając z własności pseudotensora antysymetrycznego i wyznacznika można udowodnić tożsamość:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

Dla dowodu sprawdźmy najpierw czy zachodzi równość dla $i = l = 1$, $j = m = 2$, $k = n = 3$.

Przydatne tożsamości tensorowe

Korzystając z własności pseudotensora antysymetrycznego i wyznacznika można udowodnić tożsamość:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

Dla dowodu sprawdźmy najpierw czy zachodzi równość dla $i = l = 1,\ j = m = 2,\ k = n = 3$.

$$\varepsilon_{123}\,\varepsilon_{123} = 1 \cdot 1 = 1 =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Korzystając z własności pseudotensora antysymetrycznego i wyznacznika można udowodnić tożsamość:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

Dla dowodu sprawdźmy najpierw czy zachodzi równość dla $i = l = 1$, $j = m = 2$, $k = n = 3$.

$$\varepsilon_{123}\,\varepsilon_{123} = 1 \cdot 1 = 1 = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Korzystając z własności pseudotensora antysymetrycznego i wyznacznika można udowodnić tożsamość:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

Dla dowodu sprawdźmy najpierw czy zachodzi równość dla $i = l = 1,\ j = m = 2,\ k = n = 3$.

$$\varepsilon_{123}\,\varepsilon_{123} = 1 \cdot 1 = 1 = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Korzystając z własności pseudotensora antysymetrycznego i wyznacznika można udowodnić tożsamość:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

Dla dowodu sprawdźmy najpierw czy zachodzi równość dla $i = l = 1,\ j = m = 2,\ k = n = 3$.

$$\varepsilon_{123}\,\varepsilon_{123} = 1 \cdot 1 = 1 = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Korzystając z własności pseudotensora antysymetrycznego i wyznacznika można udowodnić tożsamość:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

Dla dowodu sprawdźmy najpierw czy zachodzi równość dla $i = l = 1$, $j = m = 2$, $k = n = 3$.

$$\varepsilon_{123}\,\varepsilon_{123} = 1 \cdot 1 = 1 = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik}\varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 =$$

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik}\varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} =$$

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik}\varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0,$$

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik}\varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0,$$

a dwa jednakowe indeksy w drugim tensorze odpowiadają dwóm jednakowym kolumnom w wyznaczniku,

Przydatne tożsamości tensorowe

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik}\varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0,$$

a dwa jednakowe indeksy w drugim tensorze odpowiadają dwóm jednakowym kolumnom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{nmn} = \varepsilon_{ijk} \cdot 0 = 0 =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik}\varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0,$$

a dwa jednakowe indeksy w drugim tensorze odpowiadają dwóm jednakowym kolumnom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{nmn} = \varepsilon_{ijk} \cdot 0 = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{in} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jn} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kn} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik}\varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0,$$

a dwa jednakowe indeksy w drugim tensorze odpowiadają dwóm jednakowym kolumnom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{nmn} = \varepsilon_{ijk} \cdot 0 = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{in} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jn} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kn} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0.$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik}\varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0,$$

a dwa jednakowe indeksy w drugim tensorze odpowiadają dwóm jednakowym kolumnom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{nmn} = \varepsilon_{ijk} \cdot 0 = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{in} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jn} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kn} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0.$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku,

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn},

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.
Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn}, które zmienia jego znak,

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.
Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch kolumn w wyznaczniku,

Przydatne tożsamości tensorowe

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch kolumn w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.
Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch kolumn w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.
A zatem, jeśli wystartujemy z równości wykazanej na początku dowodu i dokonamy dowolnej permutacji indeksów w jednym i/lub drugim tensorze,

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.
Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch kolumn w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.
A zatem, jeśli wystartujemy z równości wykazanej na początku dowodu i dokonamy dowolnej permutacji indeksów w jednym i/lub drugim tensorze, to otrzymamy równość prawdziwą.

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.
Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch kolumn w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.
A zatem, jeśli wystartujemy z równości wykazanej na początku dowodu i dokonamy dowolnej permutacji indeksów w jednym i/lub drugim tensorze, to otrzymamy równość prawdziwą.
To kończy dowód tożsamości.

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.
Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch kolumn w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.
A zatem, jeśli wystartujemy z równości wykazanej na początku dowodu i dokonamy dowolnej permutacji indeksów w jednym i/lub drugim tensorze, to otrzymamy równość prawdziwą.
To kończy dowód tożsamości.

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} =$$

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} =$$

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \delta_{ii}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ki} + \delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km} \\ -\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{ki} - \delta_{ii}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{ji}\delta_{kn} \end{array}$$

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \delta_{ii}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ki} + \delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km} \\ -\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{ki} - \delta_{ii}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{ji}\delta_{kn} \end{array}$$

$$=$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} &= \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \delta_{ii}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ki} + \delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km} \\ -\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{ki} - \delta_{ii}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{ji}\delta_{kn} \end{array} \\
&= 3\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn} - 3\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn}
\end{aligned}$$

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} &= \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \begin{matrix} \delta_{ii}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ki} + \delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km} \\ -\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{ki} - \delta_{ii}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{ji}\delta_{kn} \end{matrix} \\
&= 3\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn} - 3\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn} \\
&=
\end{aligned}$$

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} &= \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \delta_{ii}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ki} + \delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km} \\ -\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{ki} - \delta_{ii}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{ji}\delta_{kn} \end{array} \\
&= 3\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn} - 3\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn} \\
&= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km},
\end{aligned}$$

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} &= \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \delta_{ii}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ki} + \delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km} \\ -\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{ki} - \delta_{ii}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{ji}\delta_{kn} \end{array} \\ &= 3\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn} - 3\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn} \\ &= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\delta_{ii} \quad = \quad \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} =$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 =$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3,$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$\delta_{ki}\delta_{im}$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned} \delta_{ii} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3, \\ \delta_{ki}\delta_{im} &= \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned}
\delta_{ii} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3, \\
\delta_{ki}\delta_{im} &= \delta_{k1}\delta_{1m} + \delta_{k2}\delta_{2m} + \delta_{k3}\delta_{3m} =
\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$
\begin{aligned}
\delta_{ii} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3, \\
\delta_{ki}\delta_{im} &= \delta_{k1}\delta_{1m} + \delta_{k2}\delta_{2m} + \delta_{k3}\delta_{3m} = \delta_{km},
\end{aligned}
$$

Przydatne tożsamości tensorowe

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned} \delta_{ii} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3, \\ \delta_{ki}\delta_{im} &= \delta_{k1}\delta_{1m} + \delta_{k2}\delta_{2m} + \delta_{k3}\delta_{3m} = \delta_{km}, \end{aligned}$$

gdzyż obie delty Kroneckera w iloczynie są niezerowe tylko jeśli $k = m$.

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned}\delta_{ii} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3, \\ \delta_{ki}\delta_{im} &= \delta_{k1}\delta_{1m} + \delta_{k2}\delta_{2m} + \delta_{k3}\delta_{3m} = \delta_{km},\end{aligned}$$

gdzyż obie delty Kroneckera w iloczynie są niezerowe tylko jeśli $k = m$.
Tożsamość

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned}\delta_{ii} &= \delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=1+1+1=3,\\ \delta_{ki}\delta_{im} &= \delta_{k1}\delta_{1m}+\delta_{k2}\delta_{2m}+\delta_{k3}\delta_{3m}=\delta_{km},\end{aligned}$$

gdzyż obie delty Kroneckera w iloczynie są niezerowe tylko jeśli $k=m$.
Tożsamość

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}$$

łatwo jest zapamiętać, biorąc pod uwagę, że w pierwszym iloczynie delt Kroneckera po prawej stronie łączymy ze sobą drugi indeks z drugim i trzeci z trzecim,

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned}\delta_{ii} &= \delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=1+1+1=3,\\ \delta_{ki}\delta_{im} &= \delta_{k1}\delta_{1m}+\delta_{k2}\delta_{2m}+\delta_{k3}\delta_{3m}=\delta_{km},\end{aligned}$$

gdzyż obie delty Kroneckera w iloczynie są niezerowe tylko jeśli $k=m$.
Tożsamość

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}$$

łatwo jest zapamiętać, biorąc pod uwagę, że w pierwszym iloczynie delt Kroneckera po prawej stronie łączymy ze sobą drugi indeks z drugim i trzeci z trzecim, a w drugim iloczynie łączymy indeksy naprzemiennie.

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned} \delta_{ii} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3, \\ \delta_{ki}\delta_{im} &= \delta_{k1}\delta_{1m} + \delta_{k2}\delta_{2m} + \delta_{k3}\delta_{3m} = \delta_{km}, \end{aligned}$$

gdzyż obie delty Kroneckera w iloczynie są niezerowe tylko jeśli $k = m$.
Tożsamość

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

łatwo jest zapamiętać, biorąc pod uwagę, że w pierwszym iloczynie delt Kroneckera po prawej stronie łączymy ze sobą drugi indeks z drugim i trzeci z trzecim, a w drugim iloczynie łączymy indeksy naprzemiennie.