Matematyczne podstawy mechaniki kwantowej

Część 2

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

Niech X i Y będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych.

Odwzorowanie $A : X \to Y$ nazywamy operatorem liniowym, jeśli

Operatory i funkcjonały liniowe

Niech X i Y będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych.
Odwzorowanie $A : X \to Y$ nazywamy operatorem liniowym, jeśli

$$A(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1A(x_1) + a_2A(x_2),$$

dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ i $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$.

Operatory i funkcjonały liniowe

Niech X i Y będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych.
Odwzorowanie $A : X \to Y$ nazywamy operatorem liniowym, jeśli

$$A\left(a_1 x_1 + a_2 x_2\right) = a_1 A\left(x_1\right) + a_2 A\left(x_2\right),$$

dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ i $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$.
Jeżeli $Y = \mathbb{K}$, to operator liniowy $A : X \to \mathbb{K}$ nazywamy funkcjonałem liniowym.

Operatory i funkcjonały liniowe

Niech X i Y będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych.
Odwzorowanie $A : X \to Y$ nazywamy operatorem liniowym, jeśli

$$A\left(a_1 x_1 + a_2 x_2\right) = a_1 A\left(x_1\right) + a_2 A\left(x_2\right),$$

dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ i $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$.
Jeżeli $Y = \mathbb{K}$, to operator liniowy $A : X \to \mathbb{K}$ nazywamy funkcjonałem liniowym.

Przykłady. Operator różniczkowy jest operatorem liniowym odwzorowującym przestrzeń wektorową funkcji rzeczywistych różniczkowalnych określonych na przedziale $[a, b] \subset \mathbb{R}$ w przestrzeń funkcji rzeczywistych na tym przedziale. Dla $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mamy

Przykłady. Operator różniczkowy jest operatorem liniowym odwzorowującym przestrzeń wektorową funkcji rzeczywistych różniczkowalnych określonych na przedziale $[a, b] \subset \mathbb{R}$ w przestrzeń funkcji rzeczywistych na tym przedziale. Dla $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mamy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) =$$

Przykłady. Operator różniczkowy jest operatorem liniowym odwzorowującym przestrzeń wektorową funkcji rzeczywistych różniczkowalnych określonych na przedziale $[a, b] \subset \mathbb{R}$ w przestrzeń funkcji rzeczywistych na tym przedziale. Dla $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mamy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) = \alpha \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \beta \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Przykłady. Operator różniczkowy jest operatorem liniowym odwzorowującym przestrzeń wektorową funkcji rzeczywistych różniczkowalnych określonych na przedziale $[a, b] \subset \mathbb{R}$ w przestrzeń funkcji rzeczywistych na tym przedziale. Dla $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mamy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) = \alpha \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \beta \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Operator całkowy $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ jest funkcjonałem liniowym

Przykłady. Operator różniczkowy jest operatorem liniowym odwzorowującym przestrzeń wektorową funkcji rzeczywistych różniczkowalnych określonych na przedziale $[a, b] \subset \mathbb{R}$ w przestrzeń funkcji rzeczywistych na tym przedziale. Dla $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mamy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) = \alpha \, \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \beta \, \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Operator całkowy $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ jest funkcjonałem liniowym

$$\int\limits_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) \mathrm{d}x =$$

Przykłady. Operator różniczkowy jest operatorem liniowym odwzorowującym przestrzeń wektorową funkcji rzeczywistych różniczkowalnych określonych na przedziale $[a, b] \subset \mathbb{R}$ w przestrzeń funkcji rzeczywistych na tym przedziale. Dla $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mamy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) = \alpha \, \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \beta \, \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Operator całkowy $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ jest funkcjonałem liniowym

$$\int_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Przykłady. Operator różniczkowy jest operatorem liniowym odwzorowującym przestrzeń wektorową funkcji rzeczywistych różniczkowalnych określonych na przedziale $[a, b] \subset \mathbb{R}$ w przestrzeń funkcji rzeczywistych na tym przedziale. Dla $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mamy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) = \alpha\,\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \beta\,\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Operator całkowy $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ jest funkcjonałem liniowym

$$\int\limits_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right)\mathrm{d}x = \alpha\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Każdy operator liniowy $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, gdzie $\mathbb{K}$ jest ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych, jest postaci $y = Ax$, gdzie

$$\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \dotfill \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{array}$$

przy czym $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

Powyższy układ równań możemy zapisać w formie

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Każdy operator liniowy $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, gdzie $\mathbb{K}$ jest ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych, jest postaci $y = Ax$, gdzie

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n,\\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n,
\end{aligned}$$

przy czym $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Powyższy układ równań możemy zapisać w formie

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \qquad i = 1, 2, \dots, m.$$

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$$

i bazę w $\mathbb{K}^m$

$$e_1' = (1, 0, ..., 0), \quad e_2' = (0, 1, ..., 0), ..., e_m' = (0, 0, ..., 1).$$

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$$

i bazę w $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e'_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e'_m = (0, 0, ..., 1).$$

$$y \quad =$$

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$$

i bazę w $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e'_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e'_m = (0, 0, ..., 1).$$

$$y = \sum_{i=1}^{m} y_i e'_i =$$

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$$

i bazę w $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e'_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e'_m = (0, 0, ..., 1).$$

$$y = \sum_{i=1}^{m} y_i e'_i = Ax =$$

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$$

i bazę w $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e'_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e'_m = (0, 0, ..., 1).$$

$$y \quad = \quad \sum_{i=1}^{m} y_i e'_i = Ax = A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) =$$

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$$

i bazę w $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e'_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e'_m = (0, 0, ..., 1).$$

$$y \quad = \quad \sum_{i=1}^{m} y_i e'_i = Ax = A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j A\left(e_j\right)$$

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$$

i bazę w $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e'_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e'_m = (0, 0, ..., 1).$$

$$y \quad = \quad \sum_{i=1}^{m} y_i e'_i = Ax = A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j A\left(e_j\right)$$

$$=$$

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$$

i bazę w $\mathbb{K}^m$

$$e_1' = (1, 0, ..., 0), \quad e_2' = (0, 1, ..., 0), ..., e_m' = (0, 0, ..., 1).$$

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^{m} y_i e_i' = Ax = A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j A\left(e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i' = \end{aligned}$$

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$$

i bazę w $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e'_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e'_m = (0, 0, ..., 1).$$

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^{m} y_i e'_i = Ax = A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j A(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j e'_i \end{aligned}$$

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1,0,...,0), \quad e_2 = (0,1,...,0), ..., e_n = (0,0,...,1)$$

i bazę w $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1,0,...,0), \quad e'_2 = (0,1,...,0), ..., e'_m = (0,0,...,1).$$

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^{m} y_i e'_i = Ax = A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j A\left(e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j e'_i \quad \Rightarrow \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \end{aligned}$$

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$$

i bazę w $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e'_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e'_m = (0, 0, ..., 1).$$

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^{m} y_i e'_i = Ax = A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j A\left(e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j e'_i \quad \Rightarrow \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \end{aligned}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, m.$

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$$

i bazę w $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e'_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e'_m = (0, 0, ..., 1).$$

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^{m} y_i e'_i = Ax = A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j A\left(e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j e'_i \quad \Rightarrow \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \end{aligned}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, m$.

Widzimy, że operatory liniowe możemy reprezentować poprzez macierze – skończenie lub nieskończenie wymiarowe.

W rozpatrywanym przykładzie macierz operatora $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ma postać

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

Widzimy, że operatory liniowe możemy reprezentować poprzez macierze – skończenie lub nieskończenie wymiarowe.
W rozpatrywanym przykładzie macierz operatora $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ma postać

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

Niech A, B będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta $X(\mathbb{K})$. Dla każdego $x \in X(\mathbb{K})$ definiujemy:

Niech A, B będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta $X(\mathbb{K})$. Dla każdego $x \in X(\mathbb{K})$ definiujemy:
iloczyn cA operatora A przez liczbę $c \in \mathbb{K}$

$$(cA)x \equiv c(Ax),$$

Działania na operatorach

Niech A, B będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta $X(\mathbb{K})$. Dla każdego $x \in X(\mathbb{K})$ definiujemy:
iloczyn cA operatora A przez liczbę $c \in \mathbb{K}$

$$(cA)x \equiv c(Ax),$$

sumę $A + B$ operatorów A i B

$$(A + B)x \equiv Ax + Bx,$$

Działania na operatorach

Niech A, B będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta $X(\mathbb{K})$. Dla każdego $x \in X(\mathbb{K})$ definiujemy:
iloczyn cA operatora A przez liczbę $c \in \mathbb{K}$

$$(cA)x \equiv c(Ax),$$

sumę $A + B$ operatorów A i B

$$(A + B)x \equiv Ax + Bx,$$

iloczyn AB operatorów A i B

$$(AB)x \equiv A(Bx),$$

który rozumiemy jako złożenie operatorów.

Działania na operatorach

Niech A, B będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta $X(\mathbb{K})$. Dla każdego $x \in X(\mathbb{K})$ definiujemy:
iloczyn cA operatora A przez liczbę $c \in \mathbb{K}$

$$(cA)x \equiv c(Ax),$$

sumę $A + B$ operatorów A i B

$$(A + B)x \equiv Ax + Bx,$$

iloczyn AB operatorów A i B

$$(AB)x \equiv A(Bx),$$

który rozumiemy jako złożenie operatorów.

Komutator

Ponieważ złożenie operatorów jest na ogół nieprzemienne, to definiujemy komutator $[A, B]$ operatorów A i B

$$[A, B] \equiv AB - BA.$$

Ponieważ złożenie operatorów jest na ogół nieprzemienne, to definiujemy komutator $[A, B]$ operatorów A i B

$$[A, B] \equiv AB - BA.$$

Zadanie. Niech A, B, C będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta $X(\mathbb{K})$, a $a, b, c \in \mathbb{K}$ stałymi współczynnikami.

Komutator

Ponieważ złożenie operatorów jest na ogół nieprzemienne, to definiujemy komutator $[A, B]$ operatorów A i B

$$[A, B] \equiv AB - BA.$$

Zadanie. Niech A, B, C będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta $X(\mathbb{K})$, a $a, b, c \in \mathbb{K}$ stałymi współczynnikami. Pokazać że komutator spełnia następujące własności:

Ponieważ złożenie operatorów jest na ogół nieprzemienne, to definiujemy komutator $[A, B]$ operatorów A i B

$$[A, B] \equiv AB - BA.$$

Zadanie. Niech A, B, C będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta $X(\mathbb{K})$, a $a, b, c \in \mathbb{K}$ stałymi współczynnikami. Pokazać że komutator spełnia następujące własności:

i) Liniowość ze względu na pierwszy argument:
$[aA + bB, C] = a[A, C] + b[B, C]$

Komutator

Ponieważ złożenie operatorów jest na ogół nieprzemienne, to definiujemy komutator $[A, B]$ operatorów A i B

$$[A, B] \equiv AB - BA.$$

Zadanie. Niech A, B, C będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta $X(\mathbb{K})$, a $a, b, c \in \mathbb{K}$ stałymi współczynnikami. Pokazać że komutator spełnia następujące własności:

i) Liniowość ze względu na pierwszy argument:
$[aA + bB, C] = a[A, C] + b[B, C]$

ii) Antysymetria:
$[A, B] = -[B, A]$

Ponieważ złożenie operatorów jest na ogół nieprzemienne, to definiujemy komutator $[A, B]$ operatorów A i B

$$[A, B] \equiv AB - BA.$$

Zadanie. Niech A, B, C będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta $X(\mathbb{K})$, a $a, b, c \in \mathbb{K}$ stałymi współczynnikami. Pokazać że komutator spełnia następujące własności:

i) Liniowość ze względu na pierwszy argument:
$[aA + bB, C] = a[A, C] + b[B, C]$

ii) Antysymetria:
$[A, B] = -[B, A]$

iii) $[c, A] = [A, c] = 0.$

Komutator

Ponieważ złożenie operatorów jest na ogół nieprzemienne, to definiujemy komutator $[A, B]$ operatorów A i B

$$[A, B] \equiv AB - BA.$$

Zadanie. Niech A, B, C będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta $X(\mathbb{K})$, a $a, b, c \in \mathbb{K}$ stałymi współczynnikami. Pokazać że komutator spełnia następujące własności:

i) Liniowość ze względu na pierwszy argument:
$[aA + bB, C] = a[A, C] + b[B, C]$

ii) Antysymetria:
$[A, B] = -[B, A]$

iii) $[c, A] = [A, c] = 0.$

Komutator

iv) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

v) Tożsamość Jacobiego:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

Komutator

iv) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

v) Tożsamość Jacobiego:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

i') Liniowość ze względu na drugi argument:

$$[A, bB + cC] = b[A, B] + c[A, C].$$

iv) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

v) Tożsamość Jacobiego:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

i') Liniowość ze względu na drugi argument:

$$[A, bB + cC] = b[A, B] + c[A, C].$$

iv') $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C.$

Komutator

iv) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

v) Tożsamość Jacobiego:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

i') Liniowość ze względu na drugi argument:

$$[A, bB + cC] = b[A, B] + c[A, C].$$

iv') $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C.$

Jako przykład rozważmy komutatory operatorów położenia x_i, $i = 1, 2, 3$ i pędu cząstki

$$p_j = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad j = 1, 2, 3$$

Komutator

iv) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

v) Tożsamość Jacobiego:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

i') Liniowość ze względu na drugi argument:

$$[A, bB + cC] = b[A, B] + c[A, C].$$

iv') $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C.$

Jako przykład rozważmy komutatory operatorów położenia x_i, $i = 1, 2, 3$ i pędu cząstki

$$p_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad j = 1, 2, 3$$

Komutator

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

Komutator

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

$$[x_i, p_j]\psi$$

Komutator

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

$$[x_i, p_j]\psi \quad =$$

Komutator

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

$$[x_i, p_j]\psi \quad = \quad \left[x_i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi =$$

Komutator

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

$$[x_i, p_j]\psi \quad = \quad \left[x_i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -\,i\hbar\left[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi$$

Komutator

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

$$[x_i, p_j]\psi = \left[x_i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -i\hbar\left[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi$$

$$=$$

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

$$\begin{aligned}
[x_i, p_j]\psi &= \left[x_i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -\, i\hbar\left[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi \\
&= -\, i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial(x_i\psi)}{\partial x_j}\right)
\end{aligned}$$

Komutator

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
[x_i, p_j]\psi &= \left[x_i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -i\hbar\left[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi \\
&= -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial(x_i\psi)}{\partial x_j}\right) = -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\psi - x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)
\end{aligned}
$$

Komutator

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
[x_i, p_j]\psi &= \left[x_i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -i\hbar\left[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi \\
&= -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial(x_i\psi)}{\partial x_j}\right) = -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\psi - x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right) \\
&=
\end{aligned}
$$

Komutator

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

$$\begin{aligned}
[x_i, p_j]\psi &= \left[x_i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -i\hbar\left[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi \\
&= -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial(x_i\psi)}{\partial x_j}\right) = -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\psi - x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right) \\
&= i\hbar\delta_{ij}\psi;
\end{aligned}$$

Komutator

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
[x_i, p_j]\psi &= \left[x_i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -\, i\hbar\left[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi \\
&= -\, i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial(x_i\psi)}{\partial x_j}\right) = -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\psi - x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right) \\
&= i\hbar\delta_{ij}\psi;
\end{aligned}
$$

$[x_i, x_j]\psi$

Komutator

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
[x_i, p_j]\psi &= \left[x_i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -i\hbar\left[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi \\
&= -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial(x_i\psi)}{\partial x_j}\right) = -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\psi - x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right) \\
&= i\hbar\delta_{ij}\psi; \\
[x_i, x_j]\psi &=
\end{aligned}
$$

Komutator

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

$$\begin{aligned}
[x_i, p_j]\psi &= \left[x_i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -i\hbar\left[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi \\
&= -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial(x_i\psi)}{\partial x_j}\right) = -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\psi - x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right) \\
&= i\hbar\delta_{ij}\psi; \\
[x_i, x_j]\psi &= (x_i x_j - x_j x_i)\,\psi =
\end{aligned}$$

Komutator

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
[x_i, p_j]\psi &= \left[x_i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -i\hbar\left[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi \\
&= -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial(x_i\psi)}{\partial x_j}\right) = -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\psi - x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right) \\
&= i\hbar\delta_{ij}\psi; \\
[x_i, x_j]\psi &= (x_i x_j - x_j x_i)\psi = 0;
\end{aligned}
$$

Komutator

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

$$\begin{aligned}
[x_i, p_j]\psi &= \left[x_i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -i\hbar\left[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi \\
&= -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial(x_i\psi)}{\partial x_j}\right) = -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\psi - x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right) \\
&= i\hbar\delta_{ij}\psi; \\
[x_i, x_j]\psi &= (x_i x_j - x_j x_i)\,\psi = 0;
\end{aligned}$$

$$[p_i, p_j]\psi$$

Komutator

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

$$\begin{aligned}
[x_i, p_j]\psi &= \left[x_i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -i\hbar\left[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi \\
&= -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial(x_i\psi)}{\partial x_j}\right) = -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\psi - x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right) \\
&= i\hbar\delta_{ij}\psi; \\
[x_i, x_j]\psi &= (x_i x_j - x_j x_i)\psi = 0; \\
[p_i, p_j]\psi &=
\end{aligned}$$

Komutator

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
[x_i, p_j]\psi &= \left[x_i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -i\hbar\left[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi \\
&= -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial(x_i\psi)}{\partial x_j}\right) = -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\psi - x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right) \\
&= i\hbar\delta_{ij}\psi; \\
[x_i, x_j]\psi &= (x_i x_j - x_j x_i)\psi = 0; \\
[p_i, p_j]\psi &= \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi =
\end{aligned}
$$

Komutator

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

$$\begin{aligned}
[x_i, p_j]\psi &= \left[x_i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -i\hbar\left[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi \\
&= -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial(x_i\psi)}{\partial x_j}\right) = -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\psi - x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right) \\
&= i\hbar\delta_{ij}\psi; \\
[x_i, x_j]\psi &= (x_i x_j - x_j x_i)\,\psi = 0; \\
[p_i, p_j]\psi &= \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -\hbar^2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)
\end{aligned}$$

Komutator

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
[x_i, p_j]\psi &= \left[x_i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -i\hbar\left[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi \\
&= -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial(x_i\psi)}{\partial x_j}\right) = -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\psi - x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right) \\
&= i\hbar\delta_{ij}\psi; \\
[x_i, x_j]\psi &= (x_i x_j - x_j x_i)\,\psi = 0; \\
[p_i, p_j]\psi &= \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -\hbar^2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right) \\
&=
\end{aligned}
$$

Komutator

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
[x_i, p_j]\psi &= \left[x_i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -i\hbar\left[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi \\
&= -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial(x_i\psi)}{\partial x_j}\right) = -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\psi - x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right) \\
&= i\hbar\delta_{ij}\psi; \\
[x_i, x_j]\psi &= (x_i x_j - x_j x_i)\,\psi = 0; \\
[p_i, p_j]\psi &= \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -\hbar^2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right) \\
&= -\hbar^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_i}\right) =
\end{aligned}
$$

Komutator

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
[x_i, p_j]\psi &= \left[x_i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -i\hbar\left[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi \\
&= -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial(x_i\psi)}{\partial x_j}\right) = -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\psi - x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right) \\
&= i\hbar\delta_{ij}\psi; \\
[x_i, x_j]\psi &= (x_i x_j - x_j x_i)\,\psi = 0; \\
[p_i, p_j]\psi &= \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -\hbar^2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right) \\
&= -\hbar^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_i}\right) = 0,
\end{aligned}
$$

Komutator

w przestrzeni Hilberta X funkcji całkowalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji $\psi \in X$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
[x_i, p_j]\psi &= \left[x_i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -i\hbar\left[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi \\
&= -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial(x_i\psi)}{\partial x_j}\right) = -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\psi - x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right) \\
&= i\hbar\delta_{ij}\psi; \\
[x_i, x_j]\psi &= (x_i x_j - x_j x_i)\,\psi = 0; \\
[p_i, p_j]\psi &= \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\psi = -\hbar^2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right) \\
&= -\hbar^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_i}\right) = 0,
\end{aligned}
$$

gdzie założyliśmy równość drugich pochodnych mieszanych.
Skąd wnioskujemy, że operatory położenia i pędu spełniają następujące relacje komutacji:

gdzie założyliśmy równość drugich pochodnych mieszanych. Skąd wnioskujemy, że operatory położenia i pędu spełniają następujące relacje komutacji:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \qquad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

gdzie założyliśmy równość drugich pochodnych mieszanych. Skąd wnioskujemy, że operatory położenia i pędu spełniają następujące relacje komutacji:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \qquad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Relacje te nazywa się zwykle regułami kwantyzacji.

gdzie założyliśmy równość drugich pochodnych mieszanych. Skąd wnioskujemy, że operatory położenia i pędu spełniają następujące relacje komutacji:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \qquad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Relacje te nazywa się zwykle regułami kwantyzacji.
Zauważmy, że są one analogiem fundamentalnych nawiasów Poissona w mechanice klasycznej.

gdzie założyliśmy równość drugich pochodnych mieszanych.
Skąd wnioskujemy, że operatory położenia i pędu spełniają następujące relacje komutacji:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \qquad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Relacje te nazywa się zwykle regułami kwantyzacji.
Zauważmy, że są one analogiem fundamentalnych nawiasów Poissona w mechanice klasycznej.
Wykorzystując operatory x_i i p_j możemy znaleźć kwantowomechaniczne odpowiedniki zmiennych dynamicznych znanych z mechaniki klasycznej, a w oparciu o reguły kwantyzacji możemy znaleźć dla nich relacje komutacji.

gdzie założyliśmy równość drugich pochodnych mieszanych. Skąd wnioskujemy, że operatory położenia i pędu spełniają następujące relacje komutacji:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \qquad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Relacje te nazywa się zwykle regułami kwantyzacji.
Zauważmy, że są one analogiem fundamentalnych nawiasów Poissona w mechanice klasycznej.
Wykorzystując operatory x_i i p_j możemy znaleźć kwantowomechaniczne odpowiedniki zmiennych dynamicznych znanych z mechaniki klasycznej, a w oparciu o reguły kwantyzacji możemy znaleźć dla nich relacje komutacji.

Np. składowe operatora orbitalnego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ wyrażają się przez operatory x_i i p_j wzorem

$$L_i = (\vec{r} \times \vec{p})_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k,$$

gdzie wprowadziliśmy pseudo-tensor antysymetryczny Levi-Civity ε_{ijk} i wykorzystaliśmy konwencję sumacyjną Einsteina. (Patrz *Wstęp matematyczny, część 3*)

W oparciu o reguły kwantyzacji można pokazać, że zachodzą następujące relacje komutacji:

$$[L_i, x_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} x_k, \qquad [L_i, p_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} p_k,$$

Orbitalny moment pędu

Np. składowe operatora orbitalnego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ wyrażają się przez operatory x_i i p_j wzorem

$$L_i = (\vec{r} \times \vec{p})_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k,$$

gdzie wprowadziliśmy pseudo-tensor antysymetryczny Levi-Civity ε_{ijk} i wykorzystaliśmy konwencję sumacyjną Einsteina. (Patrz *Wstęp matematyczny, część 3*)

W oparciu o reguły kwantyzacji można pokazać, że zachodzą następujące relacje komutacji:

$$[L_i, x_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} x_k, \qquad [L_i, p_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} p_k,$$

$$[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k,$$

Orbitalny moment pędu

Np. składowe operatora orbitalnego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ wyrażają się przez operatory x_i i p_j wzorem

$$L_i = (\vec{r} \times \vec{p})_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k,$$

gdzie wprowadziliśmy pseudo-tensor antysymetryczny Levi-Civity ε_{ijk} i wykorzystaliśmy konwencję sumacyjną Einsteina. (Patrz *Wstęp matematyczny, część 3*)

W oparciu o reguły kwantyzacji można pokazać, że zachodzą następujące relacje komutacji:

$$[L_i, x_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} x_k, \qquad [L_i, p_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} p_k,$$

$$[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k, \qquad \left[\vec{L}^2, L_i\right] = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Orbitalny moment pędu

Np. składowe operatora orbitalnego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ wyrażają się przez operatory x_i i p_j wzorem

$$L_i = (\vec{r} \times \vec{p})_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k,$$

gdzie wprowadziliśmy pseudo-tensor antysymetryczny Levi-Civity ε_{ijk} i wykorzystaliśmy konwencję sumacyjną Einsteina. (Patrz *Wstęp matematyczny, część 3*)
W oparciu o reguły kwantyzacji można pokazać, że zachodzą następujące relacje komutacji:

$$[L_i, x_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} x_k, \qquad [L_i, p_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} p_k,$$
$$[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k, \qquad \left[\vec{L}^2, L_i\right] = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Zadanie. Wyprowadzić powyższe relacje komutacji.

Orbitalny moment pędu

Np. składowe operatora orbitalnego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ wyrażają się przez operatory x_i i p_j wzorem

$$L_i = (\vec{r} \times \vec{p})_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k,$$

gdzie wprowadziliśmy pseudo-tensor antysymetryczny Levi-Civity ε_{ijk} i wykorzystaliśmy konwencję sumacyjną Einsteina. (Patrz *Wstęp matematyczny, część 3*)
W oparciu o reguły kwantyzacji można pokazać, że zachodzą następujące relacje komutacji:

$$[L_i, x_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} x_k, \qquad [L_i, p_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} p_k,$$
$$[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k, \qquad \left[\vec{L}^2, L_i\right] = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Zadanie. Wyprowadzić powyższe relacje komutacji.

Sprzężenie hermitowskie operatora

Niech X będzie przestrzenią Hilberta, a $A : X \to X$ operatorem liniowym. Operator $A^\dagger : X \to X$ nazywamy hermitowsko sprzężonym do operatora A jeśli

$$(A^\dagger \varphi | \psi) = (\varphi | A\psi) \quad \text{dla wszystkich} \;\; \varphi, \psi \in X.$$

Jeśli $X = \mathbb{C}^n$, to macierze operatorów A i $A^\dagger$ mają postać

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad A^\dagger = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & \cdots & a_{n1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{n2}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{pmatrix}.$$

Sprzężenie hermitowskie operatora

Niech X będzie przestrzenią Hilberta, a $A : X \to X$ operatorem liniowym. Operator $A^\dagger : X \to X$ nazywamy hermitowsko sprzężonym do operatora A jeśli

$$(A^\dagger \varphi | \psi) = (\varphi | A\psi) \quad \text{dla wszystkich} \;\; \varphi, \psi \in X.$$

Jeśli $X = \mathbb{C}^n$, to macierze operatorów A i $A^\dagger$ mają postać

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad A^\dagger = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & \cdots & a_{n1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{n2}^* \\ \hdotsfor{4} \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{pmatrix}.$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\Big((A + B)^\dagger \varphi | \psi\Big) \quad =$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\left((A+B)^\dagger\varphi|\psi\right) \quad = \quad (\varphi|(A+B)\psi) =$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\left((A + B)^\dagger\varphi|\psi\right) \quad = \quad (\varphi|(A + B)\psi) = (\varphi|A\psi + B\psi)$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\left((A + B)^\dagger \varphi|\psi\right) \quad = \quad (\varphi|(A + B)\psi) = (\varphi|A\psi + B\psi)$$

$$=$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned}\left((A+B)^\dagger\varphi|\psi\right) &= (\varphi|(A+B)\psi) = (\varphi|A\psi + B\psi) \\ &= (\varphi|A\psi) + (\varphi|B\psi)\end{aligned}$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned}\left((A + B)^\dagger \varphi | \psi\right) &= (\varphi|(A + B)\psi) = (\varphi|A\psi + B\psi) \\ &= (\varphi|A\psi) + (\varphi|B\psi) =\end{aligned}$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned}
\left((A+B)^\dagger\varphi|\psi\right) &= (\varphi|(A+B)\psi) = (\varphi|A\psi + B\psi) \\
&= (\varphi|A\psi) + (\varphi|B\psi) = \left(A^\dagger\varphi|\psi\right) + \left(B^\dagger\varphi|\psi\right)
\end{aligned}$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned}
\left((A+B)^\dagger\varphi|\psi\right) &= (\varphi|(A+B)\psi) = (\varphi|A\psi + B\psi) \\
&= (\varphi|A\psi) + (\varphi|B\psi) = \left(A^\dagger\varphi|\psi\right) + \left(B^\dagger\varphi|\psi\right) \\
&=
\end{aligned}$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned}
\left((A + B)^\dagger \varphi|\psi\right) &= (\varphi|(A + B)\psi) = (\varphi|A\psi + B\psi) \\
&= (\varphi|A\psi) + (\varphi|B\psi) = \left(A^\dagger \varphi|\psi\right) + \left(B^\dagger \varphi|\psi\right) \\
&= \left(A^\dagger \varphi + B^\dagger \varphi|\psi\right) =
\end{aligned}$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned}
\left((A + B)^\dagger \varphi|\psi\right) &= (\varphi|(A + B)\psi) = (\varphi|A\psi + B\psi) \\
&= (\varphi|A\psi) + (\varphi|B\psi) = \left(A^\dagger \varphi|\psi\right) + \left(B^\dagger \varphi|\psi\right) \\
&= \left(A^\dagger \varphi + B^\dagger \varphi|\psi\right) = \left(\left(A^\dagger + B^\dagger\right) \varphi|\psi\right) \quad \text{cnd.}
\end{aligned}$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned}
\left((A+B)^\dagger\varphi|\psi\right) &= (\varphi|(A+B)\psi) = (\varphi|A\psi + B\psi) \\
&= (\varphi|A\psi) + (\varphi|B\psi) = \left(A^\dagger\varphi|\psi\right) + \left(B^\dagger\varphi|\psi\right) \\
&= \left(A^\dagger\varphi + B^\dagger\varphi|\psi\right) = \left(\left(A^\dagger + B^\dagger\right)\varphi|\psi\right) \quad \text{cnd.}
\end{aligned}$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned}
\left((A+B)^\dagger\varphi|\psi\right) &= (\varphi|(A+B)\psi) = (\varphi|A\psi + B\psi) \\
&= (\varphi|A\psi) + (\varphi|B\psi) = \left(A^\dagger\varphi|\psi\right) + \left(B^\dagger\varphi|\psi\right) \\
&= \left(A^\dagger\varphi + B^\dagger\varphi|\psi\right) = \left(\left(A^\dagger + B^\dagger\right)\varphi|\psi\right) \quad \text{cnd.}
\end{aligned}$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$\left((AB)^\dagger\varphi|\psi\right) =$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned}
\left((A+B)^\dagger\varphi|\psi\right) &= (\varphi|(A+B)\psi) = (\varphi|A\psi + B\psi) \\
&= (\varphi|A\psi) + (\varphi|B\psi) = \left(A^\dagger\varphi|\psi\right) + \left(B^\dagger\varphi|\psi\right) \\
&= \left(A^\dagger\varphi + B^\dagger\varphi|\psi\right) = \left(\left(A^\dagger + B^\dagger\right)\varphi|\psi\right) \quad \text{cnd.}
\end{aligned}$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$\left((AB)^\dagger\varphi|\psi\right) = (\varphi|\,(AB)\,\psi)$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(A+B)^{\dagger} = A^{\dagger} + B^{\dagger}$$

$$\begin{aligned}
\left((A+B)^{\dagger}\varphi|\psi\right) &= (\varphi|(A+B)\psi) = (\varphi|A\psi + B\psi) \\
&= (\varphi|A\psi) + (\varphi|B\psi) = \left(A^{\dagger}\varphi|\psi\right) + \left(B^{\dagger}\varphi|\psi\right) \\
&= \left(A^{\dagger}\varphi + B^{\dagger}\varphi|\psi\right) = \left(\left(A^{\dagger} + B^{\dagger}\right)\varphi|\psi\right) \quad \text{cnd.}
\end{aligned}$$

$$(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}$$

$$\left((AB)^{\dagger}\varphi|\psi\right) = (\varphi|\,(AB)\,\psi) \quad =$$

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned}\left((A+B)^\dagger\varphi|\psi\right) &= (\varphi|(A+B)\psi) = (\varphi|A\psi + B\psi) \\ &= (\varphi|A\psi) + (\varphi|B\psi) = \left(A^\dagger\varphi|\psi\right) + \left(B^\dagger\varphi|\psi\right) \\ &= \left(A^\dagger\varphi + B^\dagger\varphi|\psi\right) = \left(\left(A^\dagger + B^\dagger\right)\varphi|\psi\right) \quad \text{cnd.}\end{aligned}$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$\left((AB)^\dagger\varphi|\psi\right) = (\varphi|\,(AB)\,\psi) \quad = \quad (\varphi|A\,(B\psi)) =$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned}
\left((A+B)^\dagger\varphi|\psi\right) &= (\varphi|(A+B)\psi) = (\varphi|A\psi + B\psi) \\
&= (\varphi|A\psi) + (\varphi|B\psi) = \left(A^\dagger\varphi|\psi\right) + \left(B^\dagger\varphi|\psi\right) \\
&= \left(A^\dagger\varphi + B^\dagger\varphi|\psi\right) = \left(\left(A^\dagger + B^\dagger\right)\varphi|\psi\right) \quad \text{cnd.}
\end{aligned}$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$\left((AB)^\dagger\varphi|\psi\right) = (\varphi|\,(AB)\,\psi) \quad = \quad (\varphi|A\,(B\psi)) = \left(A^\dagger\varphi|B\psi\right)$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned}
\left((A+B)^\dagger\varphi|\psi\right) &= (\varphi|(A+B)\psi) = (\varphi|A\psi + B\psi) \\
&= (\varphi|A\psi) + (\varphi|B\psi) = \left(A^\dagger\varphi|\psi\right) + \left(B^\dagger\varphi|\psi\right) \\
&= \left(A^\dagger\varphi + B^\dagger\varphi|\psi\right) = \left(\left(A^\dagger + B^\dagger\right)\varphi|\psi\right) \quad \text{cnd.}
\end{aligned}$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$\left((AB)^\dagger\varphi|\psi\right) = (\varphi|\,(AB)\,\psi) = (\varphi|A\,(B\psi)) = \left(A^\dagger\varphi|B\psi\right)$$

$$=$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned}
\left((A+B)^\dagger\varphi|\psi\right) &= (\varphi|(A+B)\psi) = (\varphi|A\psi + B\psi) \\
&= (\varphi|A\psi) + (\varphi|B\psi) = \left(A^\dagger\varphi|\psi\right) + \left(B^\dagger\varphi|\psi\right) \\
&= \left(A^\dagger\varphi + B^\dagger\varphi|\psi\right) = \left(\left(A^\dagger + B^\dagger\right)\varphi|\psi\right) \quad \text{cnd.}
\end{aligned}$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$\begin{aligned}
\left((AB)^\dagger\varphi|\psi\right) = (\varphi|\,(AB)\,\psi) &= (\varphi|A\,(B\psi)) = \left(A^\dagger\varphi|B\psi\right) \\
&= \left(B^\dagger A^\dagger\varphi|\psi\right) \quad \text{cnd.}
\end{aligned}$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned}
\left((A+B)^\dagger\varphi|\psi\right) &= (\varphi|(A+B)\psi) = (\varphi|A\psi + B\psi) \\
&= (\varphi|A\psi) + (\varphi|B\psi) = \left(A^\dagger\varphi|\psi\right) + \left(B^\dagger\varphi|\psi\right) \\
&= \left(A^\dagger\varphi + B^\dagger\varphi|\psi\right) = \left(\left(A^\dagger + B^\dagger\right)\varphi|\psi\right) \quad \text{cnd.}
\end{aligned}$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$\begin{aligned}
\left((AB)^\dagger\varphi|\psi\right) = (\varphi|\,(AB)\,\psi) &= (\varphi|A\,(B\psi)) = \left(A^\dagger\varphi|B\psi\right) \\
&= \left(B^\dagger A^\dagger\varphi|\psi\right) \quad \text{cnd.}
\end{aligned}$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\Big((\alpha A)^\dagger \varphi|\psi\Big) \quad =$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\left((\alpha A)^\dagger \varphi|\psi\right) \quad = \quad (\varphi|\,(\alpha A)\,\psi) =$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\left((\alpha A)^\dagger \varphi|\psi\right) \quad = \quad (\varphi| (\alpha A)\, \psi) = (\varphi|\alpha\, (A\psi)) =$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\left((\alpha A)^\dagger \varphi | \psi\right) \quad = \quad (\varphi| (\alpha A)\, \psi) = (\varphi|\alpha\, (A\psi)) = \alpha\, (\varphi|A\psi)$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\left((\alpha A)^\dagger \varphi|\psi\right) = (\varphi|\,(\alpha A)\,\psi) = (\varphi|\alpha\,(A\psi)) = \alpha\,(\varphi|A\psi)$$

$$=$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \left((\alpha A)^\dagger \varphi | \psi\right) &= (\varphi | (\alpha A)\, \psi) = (\varphi | \alpha\, (A\psi)) = \alpha\, (\varphi | A\psi) \\ &= \alpha \left(A^\dagger \varphi | \psi\right) = \end{aligned}$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned}\left((\alpha A)^\dagger \varphi|\psi\right) &= (\varphi|(\alpha A)\psi) = (\varphi|\alpha(A\psi)) = \alpha(\varphi|A\psi) \\ &= \alpha\left(A^\dagger \varphi|\psi\right) = \left(\alpha^* A^\dagger \varphi|\psi\right) \quad \text{cnd.}\end{aligned}$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned}\left((\alpha A)^\dagger \varphi|\psi\right) &= (\varphi|\,(\alpha A)\,\psi) = (\varphi|\alpha\,(A\psi)) = \alpha\,(\varphi|A\psi) \\ &= \alpha\left(A^\dagger\varphi|\psi\right) = \left(\alpha^* A^\dagger\varphi|\psi\right) \quad \text{cnd.}\end{aligned}$$

$$\left(A^\dagger\right)^\dagger = A$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \left((\alpha A)^\dagger \varphi|\psi\right) &= (\varphi|\,(\alpha A)\,\psi) = (\varphi|\alpha\,(A\psi)) = \alpha\,(\varphi|A\psi) \\ &= \alpha\left(A^\dagger\varphi|\psi\right) = \left(\alpha^* A^\dagger \varphi|\psi\right) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$\left(A^\dagger\right)^\dagger = A$$

$$\left(\left(A^\dagger\right)^\dagger \varphi|\psi\right) =$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \left((\alpha A)^\dagger \varphi | \psi\right) &= (\varphi| (\alpha A)\, \psi) = (\varphi | \alpha\, (A\psi)) = \alpha\, (\varphi | A\psi) \\ &= \alpha \left(A^\dagger \varphi | \psi\right) = \left(\alpha^* A^\dagger \varphi | \psi\right) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$\left(A^\dagger\right)^\dagger = A$$

$$\left(\left(A^\dagger\right)^\dagger \varphi | \psi\right) = \left(\varphi | A^\dagger \psi\right) =$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \left((\alpha A)^\dagger \varphi | \psi\right) &= (\varphi | (\alpha A)\, \psi) = (\varphi | \alpha\, (A\psi)) = \alpha\, (\varphi | A\psi) \\ &= \alpha \left(A^\dagger \varphi | \psi\right) = \left(\alpha^* A^\dagger \varphi | \psi\right) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$\left(A^\dagger\right)^\dagger = A$$

$$\left(\left(A^\dagger\right)^\dagger \varphi | \psi\right) = \left(\varphi | A^\dagger \psi\right) = \left(A^\dagger \psi | \varphi\right)^*$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned}
\left((\alpha A)^\dagger \varphi | \psi\right) &= (\varphi | (\alpha A)\, \psi) = (\varphi | \alpha\, (A\psi)) = \alpha\, (\varphi | A\psi) \\
&= \alpha \left(A^\dagger \varphi | \psi\right) = \left(\alpha^* A^\dagger \varphi | \psi\right) \quad \text{cnd.}
\end{aligned}$$

$$\left(A^\dagger\right)^\dagger = A$$

$$\begin{aligned}
\left(\left(A^\dagger\right)^\dagger \varphi | \psi\right) &= \left(\varphi | A^\dagger \psi\right) = \left(A^\dagger \psi | \varphi\right)^* \\
&=
\end{aligned}$$

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned}\left((\alpha A)^\dagger \varphi | \psi\right) &= (\varphi | (\alpha A)\, \psi) = (\varphi | \alpha\, (A\psi)) = \alpha\, (\varphi | A\psi) \\ &= \alpha \left(A^\dagger \varphi | \psi\right) = \left(\alpha^* A^\dagger \varphi | \psi\right) \quad \text{cnd.}\end{aligned}$$

$$\left(A^\dagger\right)^\dagger = A$$

$$\begin{aligned}\left(\left(A^\dagger\right)^\dagger \varphi | \psi\right) &= \left(\varphi | A^\dagger \psi\right) = \left(A^\dagger \psi | \varphi\right)^* \\ &= (\psi | A\varphi)^* =\end{aligned}$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \left((\alpha A)^\dagger \varphi|\psi\right) &= (\varphi|\,(\alpha A)\,\psi) = (\varphi|\alpha\,(A\psi)) = \alpha\,(\varphi|A\psi) \\ &= \alpha\left(A^\dagger\varphi|\psi\right) = \left(\alpha^* A^\dagger\varphi|\psi\right) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$\left(A^\dagger\right)^\dagger = A$$

$$\begin{aligned} \left(\left(A^\dagger\right)^\dagger \varphi|\psi\right) &= \left(\varphi|A^\dagger\psi\right) = \left(A^\dagger\psi|\varphi\right)^* \\ &= (\psi|A\varphi)^* = (A\varphi|\psi) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \left((\alpha A)^\dagger \varphi|\psi\right) &= (\varphi|\,(\alpha A)\,\psi) = (\varphi|\alpha\,(A\psi)) = \alpha\,(\varphi|A\psi) \\ &= \alpha\left(A^\dagger\varphi|\psi\right) = \left(\alpha^* A^\dagger \varphi|\psi\right) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$\left(A^\dagger\right)^\dagger = A$$

$$\begin{aligned} \left(\left(A^\dagger\right)^\dagger \varphi|\psi\right) &= \left(\varphi|A^\dagger\psi\right) = \left(A^\dagger\psi|\varphi\right)^* \\ &= (\psi|A\varphi)^* = (A\varphi|\psi) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

Niech X będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy $A : X \to X$ nazywamy hermitowskim jeśli

$$(A\varphi|\psi) = (\varphi|A\psi) \quad \text{dla wszystkich} \quad \varphi, \psi \in X,$$

Operatory i funkcjonały liniowe

Niech X będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy $A : X \to X$ nazywamy hermitowskim jeśli

$$(A\varphi|\psi) = (\varphi|A\psi) \quad \text{dla wszystkich} \;\; \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$A^\dagger = A.$$

Niech X będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy $A : X \to X$ nazywamy hermitowskim jeśli

$$(A\varphi|\psi) = (\varphi|A\psi) \quad \text{dla wszystkich} \quad \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$A^\dagger = A.$$

Jeśli operator A jest hermitowski, to liczba $(\psi|A\psi)$ jest rzeczywista dla każdego $\psi \in X$.

Niech X będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy $A : X \to X$ nazywamy hermitowskim jeśli

$$(A\varphi|\psi) = (\varphi|A\psi) \quad \text{dla wszystkich} \;\; \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$A^\dagger = A.$$

Jeśli operator A jest hermitowski, to liczba $(\psi|A\psi)$ jest rzeczywista dla każdego $\psi \in X$. W istocie

$$(\psi|A\psi) =$$

Niech X będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy $A : X \to X$ nazywamy hermitowskim jeśli

$$(A\varphi|\psi) = (\varphi|A\psi) \quad \text{dla wszystkich} \quad \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$A^\dagger = A.$$

Jeśli operator A jest hermitowski, to liczba $(\psi|A\psi)$ jest rzeczywista dla każdego $\psi \in X$. W istocie

$$(\psi|A\psi) = (A\psi|\psi) =$$

Niech X będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy $A : X \to X$ nazywamy hermitowskim jeśli

$$(A\varphi|\psi) = (\varphi|A\psi) \quad \text{dla wszystkich} \;\; \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$A^\dagger = A.$$

Jeśli operator A jest hermitowski, to liczba $(\psi|A\psi)$ jest rzeczywista dla każdego $\psi \in X$. W istocie

$$(\psi|A\psi) = (A\psi|\psi) = (\psi|A\psi)^*$$

Niech X będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy $A : X \to X$ nazywamy hermitowskim jeśli

$$(A\varphi|\psi) = (\varphi|A\psi) \quad \text{dla wszystkich} \;\; \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$A^\dagger = A.$$

Jeśli operator A jest hermitowski, to liczba $(\psi|A\psi)$ jest rzeczywista dla każdego $\psi \in X$. W istocie

$$(\psi|A\psi) = (A\psi|\psi) = (\psi|A\psi)^* \quad \Rightarrow \quad (\psi|A\psi) \in \mathbb{R}.$$

Niech X będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy $A : X \to X$ nazywamy hermitowskim jeśli

$$(A\varphi|\psi) = (\varphi|A\psi) \quad \text{dla wszystkich} \;\; \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$A^\dagger = A.$$

Jeśli operator A jest hermitowski, to liczba $(\psi|A\psi)$ jest rzeczywista dla każdego $\psi \in X$. W istocie

$$(\psi|A\psi) = (A\psi|\psi) = (\psi|A\psi)^* \quad \Rightarrow \quad (\psi|A\psi) \in \mathbb{R}.$$

Niech X będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy $U : X \to X$ nazywamy unitarnym jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich} \quad \varphi, \psi \in X,$$

Niech X będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy $U : X \to X$ nazywamy unitarnym jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich} \;\; \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^\dagger = U^{-1},$$

Niech X będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy $U : X \to X$ nazywamy unitarnym jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich} \;\; \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^\dagger = U^{-1},$$

gdyż z definicji operatora sprzężonego hermitowsko wynikają następujące równości dla wszystkich $\varphi, \psi \in X$

$$(U\varphi|U\psi) \;\; =$$

Niech X będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy $U : X \to X$ nazywamy unitarnym jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich} \;\; \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^\dagger = U^{-1},$$

gdyż z definicji operatora sprzężonego hermitowsko wynikają następujące równości dla wszystkich $\varphi, \psi \in X$

$$(U\varphi|U\psi) \;\; = \;\; (U^\dagger U\varphi|\psi) =$$

Niech X będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy $U : X \to X$ nazywamy unitarnym jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich} \;\; \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^\dagger = U^{-1},$$

gdyż z definicji operatora sprzężonego hermitowsko wynikają następujące równości dla wszystkich $\varphi, \psi \in X$

$$(U\varphi|U\psi) \;\; = \;\; (U^\dagger U\varphi|\psi) = (\varphi|\psi)$$

Operatory i funkcjonały liniowe

Niech X będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy $U : X \to X$ nazywamy unitarnym jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich} \;\; \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^{\dagger} = U^{-1},$$

gdyż z definicji operatora sprzężonego hermitowsko wynikają następujące równości dla wszystkich $\varphi, \psi \in X$

$$(U\varphi|U\psi) \;\; = \;\; (U^{\dagger}U\varphi|\psi) = (\varphi|\psi) \quad \Leftrightarrow \quad U^{\dagger}U = \mathbb{I}.$$

Niech X będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy $U : X \to X$ nazywamy unitarnym jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich} \;\; \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^\dagger = U^{-1},$$

gdyż z definicji operatora sprzężonego hermitowsko wynikają następujące równości dla wszystkich $\varphi, \psi \in X$

$$(U\varphi|U\psi) \;\; = \;\; (U^\dagger U\varphi|\psi) = (\varphi|\psi) \quad \Leftrightarrow \quad U^\dagger U = \mathbb{I}.$$
$$(U^\dagger\varphi|\psi)$$

Niech X będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy $U : X \to X$ nazywamy unitarnym jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich} \;\; \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^\dagger = U^{-1},$$

gdyż z definicji operatora sprzężonego hermitowsko wynikają następujące równości dla wszystkich $\varphi, \psi \in X$

$$\begin{aligned} (U\varphi|U\psi) &= (U^\dagger U\varphi|\psi) = (\varphi|\psi) \quad \Leftrightarrow \quad U^\dagger U = \mathbb{I}. \\ (U^\dagger\varphi|\psi) &= \end{aligned}$$

Niech X będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy $U : X \to X$ nazywamy unitarnym jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich} \;\; \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^\dagger = U^{-1},$$

gdyż z definicji operatora sprzężonego hermitowsko wynikają następujące równości dla wszystkich $\varphi, \psi \in X$

$$\begin{aligned} (U\varphi|U\psi) &= (U^\dagger U\varphi|\psi) = (\varphi|\psi) \quad \Leftrightarrow \quad U^\dagger U = \mathbb{I}. \\ (U^\dagger\varphi|\psi) &= (UU^\dagger\varphi|U\psi) = \end{aligned}$$

Niech X będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy $U : X \to X$ nazywamy unitarnym jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich} \ \ \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^\dagger = U^{-1},$$

gdyż z definicji operatora sprzężonego hermitowsko wynikają następujące równości dla wszystkich $\varphi, \psi \in X$

$$\begin{aligned} (U\varphi|U\psi) &= (U^\dagger U\varphi|\psi) = (\varphi|\psi) \quad \Leftrightarrow \quad U^\dagger U = \mathbb{I}. \\ (U^\dagger\varphi|\psi) &= (UU^\dagger\varphi|U\psi) = (\varphi|U\psi) \end{aligned}$$

Niech X będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy $U : X \to X$ nazywamy unitarnym jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich} \;\; \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^\dagger = U^{-1},$$

gdyż z definicji operatora sprzężonego hermitowsko wynikają następujące równości dla wszystkich $\varphi, \psi \in X$

$$\begin{aligned} (U\varphi|U\psi) &= (U^\dagger U\varphi|\psi) = (\varphi|\psi) \quad \Leftrightarrow \quad U^\dagger U = \mathbb{I}. \\ (U^\dagger\varphi|\psi) &= (UU^\dagger\varphi|U\psi) = (\varphi|U\psi) \quad \Leftrightarrow \quad UU^\dagger = \mathbb{I}. \end{aligned}$$

Niech X będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy $U : X \to X$ nazywamy unitarnym jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich} \ \ \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^\dagger = U^{-1},$$

gdyż z definicji operatora sprzężonego hermitowsko wynikają następujące równości dla wszystkich $\varphi, \psi \in X$

$$\begin{aligned} (U\varphi|U\psi) &= (U^\dagger U\varphi|\psi) = (\varphi|\psi) \quad \Leftrightarrow \quad U^\dagger U = \mathbb{I}. \\ (U^\dagger\varphi|\psi) &= (UU^\dagger\varphi|U\psi) = (\varphi|U\psi) \quad \Leftrightarrow \quad UU^\dagger = \mathbb{I}. \end{aligned}$$

Operator unitarny nie zmienia normy wektora w przestrzeni Hilberta, tzn. $\|U\psi\| = \|\psi\|$, dla dowolnego $\psi \in X$.

Rzeczywiście

$$\|U\psi\|^2 =$$

Operator unitarny nie zmienia normy wektora w przestrzeni Hilberta, tzn. $\|U\psi\| = \|\psi\|$, dla dowolnego $\psi \in X$.
Rzeczywiście

$$\|U\psi\|^2 = (U\psi|U\psi) =$$

Operator unitarny nie zmienia normy wektora w przestrzeni Hilberta, tzn. $\|U\psi\| = \|\psi\|$, dla dowolnego $\psi \in X$.
Rzeczywiście

$$\|U\psi\|^2 = (U\psi|U\psi) = (\psi|\psi) =$$

Operator unitarny nie zmienia normy wektora w przestrzeni Hilberta, tzn. $\|U\psi\| = \|\psi\|$, dla dowolnego $\psi \in X$.
Rzeczywiście

$$\|U\psi\|^2 = (U\psi|U\psi) = (\psi|\psi) = \|\psi\|^2.$$

Operator unitarny nie zmienia normy wektora w przestrzeni Hilberta, tzn. $\|U\psi\| = \|\psi\|$, dla dowolnego $\psi \in X$.
Rzeczywiście

$$\|U\psi\|^2 = (U\psi|U\psi) = (\psi|\psi) = \|\psi\|^2.$$

Operatory i funkcjonały liniowe

Niech A będzie operatorem liniowym w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych.

Rozważmy równanie własne operatora A

$$A\psi = \lambda\psi.$$

Niech A będzie operatorem liniowym w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych.
Rozważmy równanie własne operatora A

$$A\psi = \lambda\psi.$$

Jeżeli równanie to ma rozwiązanie dla niezerowego wektora $\psi \in X$,

Niech A będzie operatorem liniowym w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych.
Rozważmy równanie własne operatora A

$$A\psi = \lambda\psi.$$

Jeżeli równanie to ma rozwiązanie dla niezerowego wektora $\psi \in X$, to liczbę $\lambda \in \mathbb{C}$ nazywamy wartością własną,

Niech A będzie operatorem liniowym w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych.
Rozważmy równanie własne operatora A

$$A\psi = \lambda\psi.$$

Jeżeli równanie to ma rozwiązanie dla niezerowego wektora $\psi \in X$, to liczbę $\lambda \in \mathbb{C}$ nazywamy wartością własną, a ψ wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ.

Niech A będzie operatorem liniowym w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych.
Rozważmy równanie własne operatora A

$$A\psi = \lambda\psi.$$

Jeżeli równanie to ma rozwiązanie dla niezerowego wektora $\psi \in X$, to liczbę $\lambda \in \mathbb{C}$ nazywamy wartością własną, a ψ wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ.
Zadanie. Pokazać, że zbiór X_λ wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ jest podprzestrzenią przestrzeni Hilberta X.

Operatory i funkcjonały liniowe

Niech A będzie operatorem liniowym w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych.
Rozważmy równanie własne operatora A

$$A\psi = \lambda\psi.$$

Jeżeli równanie to ma rozwiązanie dla niezerowego wektora $\psi \in X$, to liczbę $\lambda \in \mathbb{C}$ nazywamy wartością własną, a ψ wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ.
Zadanie. Pokazać, że zbiór X_λ wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ jest podprzestrzenią przestrzeni Hilberta X. Wymiar podprzestrzeni X_λ nazywamy krotnością wartości własnej λ.

Niech A będzie operatorem liniowym w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych.
Rozważmy równanie własne operatora A

$$A\psi = \lambda\psi.$$

Jeżeli równanie to ma rozwiązanie dla niezerowego wektora $\psi \in X$, to liczbę $\lambda \in \mathbb{C}$ nazywamy wartością własną, a ψ wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ.
Zadanie. Pokazać, że zbiór X_λ wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ jest podprzestrzenią przestrzeni Hilberta X. Wymiar podprzestrzeni X_λ nazywamy krotnością wartości własnej λ.

Wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi.

W istocie, niech $A\psi = \lambda\psi$,

Wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi.

W istocie, niech $A\psi = \lambda\psi$, wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) =$$

Wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi.
W istocie, niech $A\psi = \lambda\psi$, wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) =$$

Wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi.
W istocie, niech $A\psi = \lambda\psi$, wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) =$$

Wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi. W istocie, niech $A\psi = \lambda\psi$, wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2$$

Wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi.
W istocie, niech $A\psi = \lambda\psi$, wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi.
W istocie, niech $A\psi = \lambda\psi$, wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X są ortogonalne.

Operatory i funkcjonały liniowe

Wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi.
W istocie, niech $A\psi = \lambda\psi$, wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X są ortogonalne.
Dowód. Załóżmy, że λ_1 i λ_2 są wartościami własnymi operatora A, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a ψ_1 i ψ_2 odpowiadającymi im wektorami własnymi.

Wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi. W istocie, niech $A\psi = \lambda\psi$, wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X są ortogonalne. *Dowód.* Załóżmy, że λ_1 i λ_2 są wartościami własnymi operatora A, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a ψ_1 i ψ_2 odpowiadającymi im wektorami własnymi. Dla operatora hermitowskiego mamy

$$(A\psi_1|\psi_2) =$$

Wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi. W istocie, niech $A\psi = \lambda\psi$, wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X są ortogonalne.
Dowód. Załóżmy, że λ_1 i λ_2 są wartościami własnymi operatora A, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a ψ_1 i ψ_2 odpowiadającymi im wektorami własnymi. Dla operatora hermitowskiego mamy

$$(A\psi_1|\psi_2) = (\psi_1|A\psi_2)$$

Wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi.
W istocie, niech $A\psi = \lambda\psi$, wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X są ortogonalne.
Dowód. Załóżmy, że λ_1 i λ_2 są wartościami własnymi operatora A, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a ψ_1 i ψ_2 odpowiadającymi im wektorami własnymi. Dla operatora hermitowskiego mamy

$$(A\psi_1|\psi_2) = (\psi_1|A\psi_2) \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1\psi_1|\psi_2)$$

Wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi.
W istocie, niech $A\psi = \lambda\psi$, wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X są ortogonalne.
Dowód. Załóżmy, że λ_1 i λ_2 są wartościami własnymi operatora A, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a ψ_1 i ψ_2 odpowiadającymi im wektorami własnymi. Dla operatora hermitowskiego mamy

$$(A\psi_1|\psi_2) = (\psi_1|A\psi_2) \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1\psi_1|\psi_2) \quad =$$

Wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi.
W istocie, niech $A\psi = \lambda\psi$, wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X są ortogonalne.
Dowód. Załóżmy, że λ_1 i λ_2 są wartościami własnymi operatora A, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a ψ_1 i ψ_2 odpowiadającymi im wektorami własnymi. Dla operatora hermitowskiego mamy

$$(A\psi_1|\psi_2) = (\psi_1|A\psi_2) \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1\psi_1|\psi_2) \quad = \quad (\psi_1|\lambda_2\psi_2)$$

Wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi.
W istocie, niech $A\psi = \lambda\psi$, wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X są ortogonalne.
Dowód. Załóżmy, że λ_1 i λ_2 są wartościami własnymi operatora A, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a ψ_1 i ψ_2 odpowiadającymi im wektorami własnymi. Dla operatora hermitowskiego mamy

$$(A\psi_1|\psi_2) = (\psi_1|A\psi_2) \quad \Rightarrow \quad \underset{\lambda_1^*(\psi_1|\psi_2)}{(\lambda_1\psi_1|\psi_2)} \quad = \quad (\psi_1|\lambda_2\psi_2)$$

Wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi.
W istocie, niech $A\psi = \lambda\psi$, wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X są ortogonalne.
Dowód. Załóżmy, że λ_1 i λ_2 są wartościami własnymi operatora A, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a ψ_1 i ψ_2 odpowiadającymi im wektorami własnymi. Dla operatora hermitowskiego mamy

$$(A\psi_1|\psi_2) = (\psi_1|A\psi_2) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (\lambda_1\psi_1|\psi_2) &= (\psi_1|\lambda_2\psi_2) \\ \lambda_1^*(\psi_1|\psi_2) &= \end{aligned}$$

Wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi.
W istocie, niech $A\psi = \lambda\psi$, wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X są ortogonalne.
Dowód. Załóżmy, że λ_1 i λ_2 są wartościami własnymi operatora A, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a ψ_1 i ψ_2 odpowiadającymi im wektorami własnymi. Dla operatora hermitowskiego mamy

$$(A\psi_1|\psi_2) = (\psi_1|A\psi_2) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (\lambda_1\psi_1|\psi_2) &= (\psi_1|\lambda_2\psi_2) \\ \lambda_1^*(\psi_1|\psi_2) &= \lambda_2(\psi_1|\psi_2), \end{aligned}$$

Wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi.
W istocie, niech $A\psi = \lambda\psi$, wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X są ortogonalne.
Dowód. Załóżmy, że λ_1 i λ_2 są wartościami własnymi operatora A, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a ψ_1 i ψ_2 odpowiadającymi im wektorami własnymi. Dla operatora hermitowskiego mamy

$$\begin{aligned} (A\psi_1|\psi_2) = (\psi_1|A\psi_2) \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1\psi_1|\psi_2) &= (\psi_1|\lambda_2\psi_2) \\ \lambda_1^*(\psi_1|\psi_2) &= \lambda_2(\psi_1|\psi_2), \end{aligned}$$

ale wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2)$$

ale wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2) \quad =$$

ale wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2) \quad = \quad \lambda_2(\psi_1|\psi_2)$$

ale wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2) \quad = \quad \lambda_2(\psi_1|\psi_2) \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2)(\psi_1|\psi_2) = 0$$

ale wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2) \quad = \quad \lambda_2(\psi_1|\psi_2) \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2)\,(\psi_1|\psi_2) = 0$$

więc albo $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

ale wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2) \quad = \quad \lambda_2(\psi_1|\psi_2) \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2)\,(\psi_1|\psi_2) = 0$$

więc albo $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $\lambda_1 \neq \lambda_2$, albo $(\psi_1|\psi_2) = 0$, cnd.

ale wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2) \quad = \quad \lambda_2(\psi_1|\psi_2) \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2)\,(\psi_1|\psi_2) = 0$$

więc albo $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $\lambda_1 \neq \lambda_2$, albo $(\psi_1|\psi_2) = 0$, cnd.

Jeżeli wektory własne operatora hermitowskiego A tworzą układ zupełny w przestrzeni Hilberta X,

ale wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2) \quad = \quad \lambda_2(\psi_1|\psi_2) \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2)\,(\psi_1|\psi_2) = 0$$

więc albo $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $\lambda_1 \neq \lambda_2$, albo $(\psi_1|\psi_2) = 0$, cnd.

Jeżeli wektory własne operatora hermitowskiego A tworzą układ zupełny w przestrzeni Hilberta X, tzn. każdy wektor z X można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów własnych operatora A,

ale wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2) \quad = \quad \lambda_2(\psi_1|\psi_2) \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2)\,(\psi_1|\psi_2) = 0$$

więc albo $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $\lambda_1 \neq \lambda_2$, albo $(\psi_1|\psi_2) = 0$, cnd.

Jeżeli wektory własne operatora hermitowskiego A tworzą układ zupełny w przestrzeni Hilberta X, tzn. każdy wektor z X można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów własnych operatora A, to taki operator będziemy nazywać obserwablą.

ale wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2) = \lambda_2(\psi_1|\psi_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(\psi_1|\psi_2) = 0$$

więc albo $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $\lambda_1 \neq \lambda_2$, albo $(\psi_1|\psi_2) = 0$, cnd.

Jeżeli wektory własne operatora hermitowskiego A tworzą układ zupełny w przestrzeni Hilberta X, tzn. każdy wektor z X można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów własnych operatora A, to taki operator będziemy nazywać obserwablą.

Wektory własne operatora hermitowskiego będącego obserwablą można zatem wykorzystać jako bazę rozwinięć ortogonalnych.

ale wartości własne operatora hermitowskiego A w przestrzeni Hilberta X nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2) = \lambda_2(\psi_1|\psi_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(\psi_1|\psi_2) = 0$$

więc albo $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $\lambda_1 \neq \lambda_2$, albo $(\psi_1|\psi_2) = 0$, cnd.

Jeżeli wektory własne operatora hermitowskiego A tworzą układ zupełny w przestrzeni Hilberta X, tzn. każdy wektor z X można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów własnych operatora A, to taki operator będziemy nazywać obserwablą. Wektory własne operatora hermitowskiego będącego obserwablą można zatem wykorzystać jako bazę rozwinięć ortogonalnych.

Notacja Diraca

Funkcje falowe, które rozpatrywaliśmy do tej pory tworzą nieskończenie wymiarową przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ stanów kwantowomechanicznych, dlatego możemy traktować je jako wektory.

Przypomnijmy równanie własne operatora A

$$A\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha,$$

gdzie funkcję własną odpowiadającą wartości własnej α oznaczyliśmy ψ_α.

Notacja Diraca

Funkcje falowe, które rozpatrywaliśmy do tej pory tworzą nieskończenie wymiarową przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ stanów kwantowomechanicznych, dlatego możemy traktować je jako wektory.

Przypomnijmy równanie własne operatora A

$$A\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha,$$

gdzie funkcję własną odpowiadającą wartości własnej α oznaczyliśmy ψ_α. Oznaczmy

$$\psi_\alpha \equiv |\, \psi_\alpha\rangle \qquad \text{lub} \qquad \psi_\alpha \equiv |\, \alpha\rangle\,,$$

Notacja Diraca

Funkcje falowe, które rozpatrywaliśmy do tej pory tworzą nieskończenie wymiarową przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ stanów kwantowomechanicznych, dlatego możemy traktować je jako wektory.

Przypomnijmy równanie własne operatora A

$$A\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha,$$

gdzie funkcję własną odpowiadającą wartości własnej α oznaczyliśmy ψ_α. Oznaczmy

$$\psi_\alpha \equiv |\,\psi_\alpha\rangle \qquad \text{lub} \qquad \psi_\alpha \equiv |\,\alpha\rangle\,,$$

wówczas równanie własne możemy zapisać w formie

$$A|\,\alpha\rangle = \alpha|\,\alpha\rangle\,.$$

Notacja Diraca

Funkcje falowe, które rozpatrywaliśmy do tej pory tworzą nieskończenie wymiarową przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ stanów kwantowomechanicznych, dlatego możemy traktować je jako wektory.

Przypomnijmy równanie własne operatora A

$$A\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha,$$

gdzie funkcję własną odpowiadającą wartości własnej α oznaczyliśmy ψ_α. Oznaczmy

$$\psi_\alpha \equiv |\, \psi_\alpha\rangle \qquad \text{lub} \qquad \psi_\alpha \equiv |\, \alpha\rangle\,,$$

wówczas równanie własne możemy zapisać w formie

$$A|\, \alpha\rangle = \alpha|\, \alpha\rangle\,.$$

Iloczyn skalarny wektorów $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ zapiszemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \langle\phi|\psi\rangle \,,$$

$\langle\phi|$ i $|\psi\rangle$ nazywamy odpowiednio symbolami *bra* i *ket* Diraca; od angielskiego terminu *bracket* czyli nawias.

Notacja Diraca

Iloczyn skalarny wektorów $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ zapiszemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \langle\phi|\psi\rangle\,,$$

$\langle\phi|$ i $|\psi\rangle$ nazywamy odpowiednio symbolami *bra* i *ket* Diraca; od angielskiego terminu *bracket* czyli nawias.

O ile wektor ket należy do przestrzeni Hilberta stanów $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$,

Notacja Diraca

Iloczyn skalarny wektorów $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ zapiszemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \langle\phi|\psi\rangle \,,$$

$\langle\phi|$ i $|\psi\rangle$ nazywamy odpowiednio symbolami *bra* i *ket* Diraca; od angielskiego terminu *bracket* czyli nawias.
O ile wektor ket należy do przestrzeni Hilberta stanów $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, to wektor bra jest funkcjonałem działającym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, a więc należy do przestrzeni dualnej do $\mathcal{H}$, $\langle\psi| \in \mathcal{H}^*$.

Notacja Diraca

Iloczyn skalarny wektorów $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ zapiszemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \langle \phi|\psi \rangle \,,$$

$\langle \phi|$ i $|\psi\rangle$ nazywamy odpowiednio symbolami *bra* i *ket* Diraca; od angielskiego terminu *bracket* czyli nawias.
O ile wektor ket należy do przestrzeni Hilberta stanów $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, to wektor bra jest funkcjonałem działającym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, a więc należy do przestrzeni dualnej do $\mathcal{H}$, $\langle \psi| \in \mathcal{H}^*$.

Jeżeli operator A jest obserwablą to jego wektory własne $|\,\alpha\rangle$ tworzą zupełny układ ortogonalny w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, czyli bazę.

Załóżmy, że widmo operatora A

Jeżeli operator A jest obserwablą to jego wektory własne $|\,\alpha\rangle$ tworzą zupełny układ ortogonalny w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, czyli bazę.

Załóżmy, że widmo operatora A – czyli zbiór jego wszystkich wartości własnych

Baza w przestrzeni Hilberta

Jeżeli operator A jest obserwablą to jego wektory własne $|\,\alpha\rangle$ tworzą zupełny układ ortogonalny w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, czyli bazę.

Załóżmy, że widmo operatora A – czyli zbiór jego wszystkich wartości własnych – jest dyskretne i niezdegenerowane,

Jeżeli operator A jest obserwablą to jego wektory własne $|\,\alpha\rangle$ tworzą zupełny układ ortogonalny w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, czyli bazę.

Załóżmy, że widmo operatora A – czyli zbiór jego wszystkich wartości własnych – jest dyskretne i niezdegenerowane, tzn. każdej wartości własnej α odpowiada dokładnie jeden wektor własny

$$A|\,\alpha\rangle = \alpha|\,\alpha\rangle\,.$$

Baza w przestrzeni Hilberta

Jeżeli operator A jest obserwablą to jego wektory własne $|\,\alpha\rangle$ tworzą zupełny układ ortogonalny w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, czyli bazę.
Załóżmy, że widmo operatora A – czyli zbiór jego wszystkich wartości własnych – jest dyskretne i niezdegenerowane, tzn. każdej wartości własnej α odpowiada dokładnie jeden wektor własny

$$A|\,\alpha\rangle = \alpha|\,\alpha\rangle\,.$$

Zbiór wektorów własnych operatora A możemy unormować, tak aby dowolne dwa wektory $|\,\alpha\rangle$ i $|\,\beta\rangle$ spełniały równość

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}.$$

Baza w przestrzeni Hilberta

Jeżeli operator A jest obserwablą to jego wektory własne $|\,\alpha\rangle$ tworzą zupełny układ ortogonalny w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, czyli bazę.

Załóżmy, że widmo operatora A – czyli zbiór jego wszystkich wartości własnych – jest dyskretne i niezdegenerowane, tzn. każdej wartości własnej α odpowiada dokładnie jeden wektor własny

$$A|\,\alpha\rangle = \alpha|\,\alpha\rangle\,.$$

Zbiór wektorów własnych operatora A możemy unormować, tak aby dowolne dwa wektory $|\,\alpha\rangle$ i $|\,\beta\rangle$ spełniały równość

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}.$$

Baza w przestrzeni Hilberta

Dowolny wektor $|\,\psi\rangle \in \mathcal{H}$ możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych $\{|\,\alpha\rangle\}$

$$|\,\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_\alpha |\,\alpha\rangle\,.$$

Baza w przestrzeni Hilberta

Dowolny wektor $|\,\psi\rangle \in \mathcal{H}$ możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych $\{|\,\alpha\rangle\}$

$$|\,\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha}|\,\alpha\rangle\,.$$

Współczynniki rozwinięcia znajdziemy mnożąc obie strony tego równania przez $\langle\beta|$

Baza w przestrzeni Hilberta

Dowolny wektor $|\,\psi\rangle \in \mathcal{H}$ możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych $\{|\,\alpha\rangle\}$

$$|\,\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha}|\,\alpha\rangle\,.$$

Współczynniki rozwinięcia znajdziemy mnożąc obie strony tego równania przez $\langle\beta|$

$$\langle\beta|\psi\rangle$$

Dowolny wektor $|\,\psi\rangle \in \mathcal{H}$ możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych $\{|\,\alpha\rangle\}$

$$|\,\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha}|\,\alpha\rangle\,.$$

Współczynniki rozwinięcia znajdziemy mnożąc obie strony tego równania przez $\langle\beta|$

$$\langle\beta|\psi\rangle \quad =$$

Dowolny wektor $|\,\psi\rangle \in \mathcal{H}$ możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych $\{|\,\alpha\rangle\}$

$$|\,\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_\alpha |\,\alpha\rangle\,.$$

Współczynniki rozwinięcia znajdziemy mnożąc obie strony tego równania przez $\langle\beta|$

$$\langle\beta|\psi\rangle \quad = \quad \langle\beta|\left(\sum_{\alpha} c_\alpha |\,\alpha\rangle\right) =$$

Dowolny wektor $|\,\psi\rangle \in \mathcal{H}$ możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych $\{|\,\alpha\rangle\}$

$$|\,\psi\rangle = \sum_\alpha c_\alpha |\,\alpha\rangle\,.$$

Współczynniki rozwinięcia znajdziemy mnożąc obie strony tego równania przez $\langle\beta|$

$$\langle\beta|\psi\rangle \quad = \quad \langle\beta|\left(\sum_\alpha c_\alpha |\,\alpha\rangle\right) = \sum_\alpha \langle\beta|c_\alpha|\alpha\rangle$$

Dowolny wektor $|\,\psi\rangle \in \mathcal{H}$ możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych $\{|\,\alpha\rangle\}$

$$|\,\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_\alpha |\,\alpha\rangle\,.$$

Współczynniki rozwinięcia znajdziemy mnożąc obie strony tego równania przez $\langle\beta|$

$$\begin{aligned}\langle\beta|\psi\rangle &= \langle\beta|\left(\sum_{\alpha} c_\alpha|\,\alpha\rangle\right) = \sum_{\alpha}\langle\beta|c_\alpha|\alpha\rangle \\ &=\end{aligned}$$

Dowolny wektor $|\,\psi\rangle \in \mathcal{H}$ możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych $\{|\,\alpha\rangle\}$

$$|\,\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha}|\,\alpha\rangle\,.$$

Współczynniki rozwinięcia znajdziemy mnożąc obie strony tego równania przez $\langle\beta|$

$$\begin{aligned}\langle\beta|\psi\rangle &= \langle\beta|\left(\sum_{\alpha} c_{\alpha}|\,\alpha\rangle\right) = \sum_{\alpha}\langle\beta|c_{\alpha}|\alpha\rangle \\ &= \sum_{\alpha} c_{\alpha}\,\langle\beta|\alpha\rangle =\end{aligned}$$

Baza w przestrzeni Hilberta

Dowolny wektor $|\,\psi\rangle \in \mathcal{H}$ możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych $\{|\,\alpha\rangle\}$

$$|\,\psi\rangle = \sum_\alpha c_\alpha |\,\alpha\rangle\,.$$

Współczynniki rozwinięcia znajdziemy mnożąc obie strony tego równania przez $\langle\beta|$

$$\begin{aligned}\langle\beta|\psi\rangle &= \langle\beta|\left(\sum_\alpha c_\alpha |\,\alpha\rangle\right) = \sum_\alpha \langle\beta|c_\alpha|\alpha\rangle \\ &= \sum_\alpha c_\alpha \langle\beta|\alpha\rangle = \sum_\alpha c_\alpha \delta_{\alpha\beta} = c_\beta.\end{aligned}$$

Baza w przestrzeni Hilberta

Dowolny wektor $|\,\psi\rangle \in \mathcal{H}$ możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych $\{|\,\alpha\rangle\}$

$$|\,\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha}|\,\alpha\rangle\,.$$

Współczynniki rozwinięcia znajdziemy mnożąc obie strony tego równania przez $\langle\beta|$

$$\begin{aligned}\langle\beta|\psi\rangle &= \langle\beta|\left(\sum_{\alpha} c_{\alpha}|\,\alpha\rangle\right) = \sum_{\alpha}\langle\beta|c_{\alpha}|\alpha\rangle \\ &= \sum_{\alpha} c_{\alpha}\langle\beta|\alpha\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha}\delta_{\alpha\beta} = c_{\beta}.\end{aligned}$$

W takim razie możemy zapisać

$$|\,\psi\rangle = \sum_{\alpha}\langle\alpha|\psi\rangle\,|\,\alpha\rangle\,,$$

Baza w przestrzeni Hilberta

Dowolny wektor $|\,\psi\rangle \in \mathcal{H}$ możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych $\{|\,\alpha\rangle\}$

$$|\,\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha}|\,\alpha\rangle\,.$$

Współczynniki rozwinięcia znajdziemy mnożąc obie strony tego równania przez $\langle\beta|$

$$\begin{aligned}\langle\beta|\psi\rangle &= \langle\beta|\left(\sum_{\alpha} c_{\alpha}|\,\alpha\rangle\right) = \sum_{\alpha}\langle\beta|c_{\alpha}|\alpha\rangle \\ &= \sum_{\alpha} c_{\alpha}\,\langle\beta|\alpha\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha}\delta_{\alpha\beta} = c_{\beta}.\end{aligned}$$

W takim razie możemy zapisać

$$|\,\psi\rangle = \sum_{\alpha}\langle\alpha|\psi\rangle\,|\,\alpha\rangle\,,$$

albo inaczej

$$| \psi\rangle = \sum_{\alpha} | \alpha\rangle \langle\alpha|\psi\rangle \,.$$

W takim razie widzimy, że

$$P_\alpha \equiv | \alpha\rangle \langle\alpha|$$

jest operatorem rzutowym na wektor $| \alpha\rangle$,

Operatory rzutowe

albo inaczej

$$| \psi\rangle = \sum_{\alpha} | \alpha\rangle \langle\alpha|\psi\rangle \, .$$

W takim razie widzimy, że

$$P_\alpha \equiv | \alpha\rangle \langle\alpha|$$

jest operatorem rzutowym na wektor $| \alpha\rangle$, a

$$\sum_{\alpha} | \alpha\rangle \langle\alpha| = \sum_{\alpha} P_\alpha = \mathbb{I}$$

jest operatorem identycznościowym.

albo inaczej

$$| \psi\rangle = \sum_{\alpha} | \alpha\rangle \langle\alpha|\psi\rangle \, .$$

W takim razie widzimy, że

$$P_\alpha \equiv | \alpha\rangle \langle\alpha|$$

jest operatorem rzutowym na wektor $| \alpha\rangle$, a

$$\sum_{\alpha} | \alpha\rangle \langle\alpha| = \sum_{\alpha} P_\alpha = \mathbb{I}$$

jest operatorem identycznościowym.

Operatory rzutowe

Niech $|\,\beta\rangle \neq |\,\alpha\rangle$ będzie innym wektorem własnym operatora A, wówczas

$$P_\alpha P_\beta = |\,\alpha\rangle \underbrace{\langle\alpha|\beta\rangle}_{0} \langle\beta| = 0,$$

co odzwierciedla ortogonalność wektorów własnych do różnych wartości własnych,

Operatory rzutowe

Niech $|\,\beta\rangle \neq |\,\alpha\rangle$ będzie innym wektorem własnym operatora A, wówczas

$$P_\alpha P_\beta = |\,\alpha\rangle \underbrace{\langle\alpha|\beta\rangle}_{0} \langle\beta| = 0,$$

co odzwierciedla ortogonalność wektorów własnych do różnych wartości własnych, natomiast

$$P_\alpha^2 = P_\alpha P_\alpha = |\,\alpha\rangle \underbrace{\langle\alpha|\alpha\rangle}_{1} \langle\alpha| = P_\alpha.$$

Operatory rzutowe

Niech $|\beta\rangle \neq |\alpha\rangle$ będzie innym wektorem własnym operatora A, wówczas

$$P_\alpha P_\beta = |\alpha\rangle \underbrace{\langle\alpha|\beta\rangle}_{0} \langle\beta| = 0,$$

co odzwierciedla ortogonalność wektorów własnych do różnych wartości własnych, natomiast

$$P_\alpha^2 = P_\alpha P_\alpha = |\alpha\rangle \underbrace{\langle\alpha|\alpha\rangle}_{1} \langle\alpha| = P_\alpha.$$

Jest to własność idempotentności, zachodząca dla każdego operatora rzutowego.

Operatory rzutowe

Niech $|\,\beta\rangle \neq |\,\alpha\rangle$ będzie innym wektorem własnym operatora A, wówczas

$$P_\alpha P_\beta = |\,\alpha\rangle \underbrace{\langle\alpha|\beta\rangle}_{0} \langle\beta| = 0,$$

co odzwierciedla ortogonalność wektorów własnych do różnych wartości własnych, natomiast

$$P_\alpha^2 = P_\alpha P_\alpha = |\,\alpha\rangle \underbrace{\langle\alpha|\alpha\rangle}_{1} \langle\alpha| = P_\alpha.$$

Jest to własność idempotentności, zachodząca dla każdego operatora rzutowego.

Dowolny operator Ω możemy przedstawić w postaci macierzy w bazie wektorów własnych obserwabli A

$$\Omega_{\alpha\beta} \equiv \langle\alpha|\Omega|\beta\rangle \,.$$

Zauważmy, że macierz operatora A jest diagonalna w bazie jego wektorów własnych

$$A_{\alpha\beta} = \langle\alpha|A|\beta\rangle =$$

Reprezentacja macierzowa

Dowolny operator Ω możemy przedstawić w postaci macierzy w bazie wektorów własnych obserwabli A

$$\Omega_{\alpha\beta} \equiv \langle\alpha|\Omega|\beta\rangle \,.$$

Zauważmy, że macierz operatora A jest diagonalna w bazie jego wektorów własnych

$$A_{\alpha\beta} = \langle\alpha|A|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta|\beta\rangle =$$

Dowolny operator Ω możemy przedstawić w postaci macierzy w bazie wektorów własnych obserwabli A

$$\Omega_{\alpha\beta} \equiv \langle\alpha|\Omega|\beta\rangle \,.$$

Zauważmy, że macierz operatora A jest diagonalna w bazie jego wektorów własnych

$$A_{\alpha\beta} = \langle\alpha|A|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta|\beta\rangle = \beta\,\langle\alpha|\beta\rangle =$$

Dowolny operator Ω możemy przedstawić w postaci macierzy w bazie wektorów własnych obserwabli A

$$\Omega_{\alpha\beta} \equiv \langle\alpha|\Omega|\beta\rangle \,.$$

Zauważmy, że macierz operatora A jest diagonalna w bazie jego wektorów własnych

$$A_{\alpha\beta} = \langle\alpha|A|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta|\beta\rangle = \beta\,\langle\alpha|\beta\rangle = \beta\delta_{\alpha\beta} =$$

Reprezentacja macierzowa

Dowolny operator Ω możemy przedstawić w postaci macierzy w bazie wektorów własnych obserwabli A

$$\Omega_{\alpha\beta} \equiv \langle\alpha|\Omega|\beta\rangle \, .$$

Zauważmy, że macierz operatora A jest diagonalna w bazie jego wektorów własnych

$$A_{\alpha\beta} = \langle\alpha|A|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta|\beta\rangle = \beta\,\langle\alpha|\beta\rangle = \beta\delta_{\alpha\beta} = \alpha\delta_{\alpha\beta}.$$

Dowolny operator Ω możemy przedstawić w postaci macierzy w bazie wektorów własnych obserwabli A

$$\Omega_{\alpha\beta} \equiv \langle\alpha|\Omega|\beta\rangle\,.$$

Zauważmy, że macierz operatora A jest diagonalna w bazie jego wektorów własnych

$$A_{\alpha\beta} = \langle\alpha|A|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta|\beta\rangle = \beta\,\langle\alpha|\beta\rangle = \beta\delta_{\alpha\beta} = \alpha\delta_{\alpha\beta}.$$

Jeżeli operator liniowy B komutuje z A, tzn.

$$[A, B] = 0$$

Dowolny operator Ω możemy przedstawić w postaci macierzy w bazie wektorów własnych obserwabli A

$$\Omega_{\alpha\beta} \equiv \langle\alpha|\Omega|\beta\rangle\,.$$

Zauważmy, że macierz operatora A jest diagonalna w bazie jego wektorów własnych

$$A_{\alpha\beta} = \langle\alpha|A|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta|\beta\rangle = \beta\,\langle\alpha|\beta\rangle = \beta\delta_{\alpha\beta} = \alpha\delta_{\alpha\beta}.$$

Jeżeli operator liniowy B komutuje z A, tzn.

$$[A, B] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad AB = BA,$$

Dowolny operator Ω możemy przedstawić w postaci macierzy w bazie wektorów własnych obserwabli A

$$\Omega_{\alpha\beta} \equiv \langle \alpha | \Omega | \beta \rangle \, .$$

Zauważmy, że macierz operatora A jest diagonalna w bazie jego wektorów własnych

$$A_{\alpha\beta} = \langle \alpha | A | \beta \rangle = \langle \alpha | \beta | \beta \rangle = \beta \langle \alpha | \beta \rangle = \beta \delta_{\alpha\beta} = \alpha \delta_{\alpha\beta}.$$

Jeżeli operator liniowy B komutuje z A, tzn.

$$[A, B] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad AB = BA,$$

to operatory A i B mają wspólny zbiór wektorów własnych,

Dowolny operator Ω możemy przedstawić w postaci macierzy w bazie wektorów własnych obserwabli A

$$\Omega_{\alpha\beta} \equiv \langle\alpha|\Omega|\beta\rangle \,.$$

Zauważmy, że macierz operatora A jest diagonalna w bazie jego wektorów własnych

$$A_{\alpha\beta} = \langle\alpha|A|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta|\beta\rangle = \beta\,\langle\alpha|\beta\rangle = \beta\delta_{\alpha\beta} = \alpha\delta_{\alpha\beta}.$$

Jeżeli operator liniowy B komutuje z A, tzn.

$$[A, B] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad AB = BA,$$

to operatory A i B mają wspólny zbiór wektorów własnych,

Reprezentacja macierzowa

a więc możemy je jednocześnie zdiagonalizować.
Jak się przekonamy w dalszym ciągu kursu, fakt ten ma istotne znaczenie dla obserwabli kwantowomechanicznych.

a więc możemy je jednocześnie zdiagonalizować.
Jak się przekonamy w dalszym ciągu kursu, fakt ten ma istotne znaczenie dla obserwabli kwantowomechanicznych.
Rzeczywiście, jeśli $A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, to wektor $B|\alpha\rangle$ jest wektorem własnym operatora A do tej samej wartości własnej α, gdyż

a więc możemy je jednocześnie zdiagonalizować.
Jak się przekonamy w dalszym ciągu kursu, fakt ten ma istotne znaczenie dla obserwabli kwantowomechanicznych.
Rzeczywiście, jeśli $A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, to wektor $B|\alpha\rangle$ jest wektorem własnym operatora A do tej samej wartości własnej α, gdyż

$$A(B|\alpha\rangle) =$$

a więc możemy je jednocześnie zdiagonalizować.
Jak się przekonamy w dalszym ciągu kursu, fakt ten ma istotne znaczenie dla obserwabli kwantowomechanicznych.
Rzeczywiście, jeśli $A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, to wektor $B|\alpha\rangle$ jest wektorem własnym operatora A do tej samej wartości własnej α, gdyż

$$A(B|\alpha\rangle) = B(A|\alpha\rangle) =$$

a więc możemy je jednocześnie zdiagonalizować.
Jak się przekonamy w dalszym ciągu kursu, fakt ten ma istotne znaczenie dla obserwabli kwantowomechanicznych.
Rzeczywiście, jeśli $A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, to wektor $B|\alpha\rangle$ jest wektorem własnym operatora A do tej samej wartości własnej α, gdyż

$$A(B|\alpha\rangle) = B(A|\alpha\rangle) = B(\alpha|\alpha\rangle) =$$

a więc możemy je jednocześnie zdiagonalizować.
Jak się przekonamy w dalszym ciągu kursu, fakt ten ma istotne znaczenie dla obserwabli kwantowomechanicznych.
Rzeczywiście, jeśli $A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, to wektor $B|\alpha\rangle$ jest wektorem własnym operatora A do tej samej wartości własnej α, gdyż

$$A(B|\alpha\rangle) = B(A|\alpha\rangle) = B(\alpha|\alpha\rangle) = \alpha(B|\alpha\rangle).$$

Reprezentacja macierzowa

a więc możemy je jednocześnie zdiagonalizować.
Jak się przekonamy w dalszym ciągu kursu, fakt ten ma istotne znaczenie dla obserwabli kwantowomechanicznych.
Rzeczywiście, jeśli $A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, to wektor $B|\alpha\rangle$ jest wektorem własnym operatora A do tej samej wartości własnej α, gdyż

$$A(B|\alpha\rangle) = B(A|\alpha\rangle) = B(\alpha|\alpha\rangle) = \alpha(B|\alpha\rangle).$$

W takim razie, jeżeli wartość własna α jest niezdegenerowana, to musi zachodzić

$$B|\alpha\rangle = c|\alpha\rangle.$$

Reprezentacja macierzowa

a więc możemy je jednocześnie zdiagonalizować.
Jak się przekonamy w dalszym ciągu kursu, fakt ten ma istotne znaczenie dla obserwabli kwantowomechanicznych.
Rzeczywiście, jeśli $A\left|\alpha\right\rangle = \alpha\left|\alpha\right\rangle$, to wektor $B\left|\alpha\right\rangle$ jest wektorem własnym operatora A do tej samej wartości własnej α, gdyż

$$A\left(B\left|\alpha\right\rangle\right) = B\left(A\left|\alpha\right\rangle\right) = B\left(\alpha\left|\alpha\right\rangle\right) = \alpha\left(B\left|\alpha\right\rangle\right).$$

W takim razie, jeżeli wartość własna α jest niezdegenerowana, to musi zachodzić

$$B\left|\alpha\right\rangle = c\left|\alpha\right\rangle.$$

Reprezentacja macierzowa

Jeśli natomiast wartość własna α jest n-krotnie zdegenerowana, tzn. odpowiada jej n wektorów własnych $|\alpha_1\rangle$, $|\alpha_2\rangle$,..., $|\alpha_n\rangle$, to

$$B\,|\alpha\rangle = c_1\,|\alpha_1\rangle + c_2\,|\alpha_2\rangle + \ldots + c_n\,|\alpha_n\rangle\,,$$

więc wektor $B\,|\alpha\rangle$ należy do n-wymiarowej podprzestrzeni przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ rozpiętej przez wektory własne $|\alpha_1\rangle$, $|\alpha_2\rangle$,..., $|\alpha_n\rangle$.

Reprezentacja macierzowa

Jeśli natomiast wartość własna α jest n-krotnie zdegenerowana, tzn. odpowiada jej n wektorów własnych $|\alpha_1\rangle$, $|\alpha_2\rangle$,..., $|\alpha_n\rangle$, to

$$B\,|\alpha\rangle = c_1\,|\alpha_1\rangle + c_2\,|\alpha_2\rangle + \ldots + c_n\,|\alpha_n\rangle\,,$$

więc wektor $B\,|\alpha\rangle$ należy do n-wymiarowej podprzestrzeni przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ rozpiętej przez wektory własne $|\alpha_1\rangle$, $|\alpha_2\rangle$,..., $|\alpha_n\rangle$.

Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$, które są wektorami stanu w reprezentacji położeniowej, zapiszemy

$$\langle\phi|\psi\rangle \equiv (\phi|\psi) \equiv \int \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = \int \langle\phi|\vec{r}\rangle \langle\vec{r}|\psi\rangle \,\mathrm{d}^3 r$$

Reprezentacja położeniowa

Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$, które są wektorami stanu w reprezentacji położeniowej, zapiszemy

$$\langle\phi|\psi\rangle \equiv (\phi|\psi) \equiv \int \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = \int \langle\phi|\vec{r}\rangle \langle\vec{r}|\psi\rangle \,\mathrm{d}^3 r$$

przy czym utożsamiamy

Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$, które są wektorami stanu w reprezentacji położeniowej, zapiszemy

$$\langle\phi|\psi\rangle \equiv (\phi|\psi) \equiv \int \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = \int \langle\phi|\vec{r}\rangle \langle\vec{r}|\psi\rangle \,\mathrm{d}^3 r$$

przy czym utożsamiamy

$$\psi(\vec{r}) \equiv \langle\vec{r}|\psi\rangle \,,$$

Reprezentacja położeniowa

Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$, które są wektorami stanu w reprezentacji położeniowej, zapiszemy

$$\langle\phi|\psi\rangle \equiv (\phi|\psi) \equiv \int \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = \int \langle\phi|\vec{r}\rangle \langle\vec{r}|\psi\rangle \, \mathrm{d}^3 r$$

przy czym utożsamiamy

$$\psi(\vec{r}) \equiv \langle\vec{r}|\psi\rangle\,, \quad \phi^*(\vec{r}) \equiv \langle\phi|\vec{r}\rangle = \langle\vec{r}|\phi\rangle^*\,,$$

Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$, które są wektorami stanu w reprezentacji położeniowej, zapiszemy

$$\langle\phi|\psi\rangle \equiv (\phi|\psi) \equiv \int \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3r = \int \langle\phi|\vec{r}\rangle \langle\vec{r}|\psi\rangle \, \mathrm{d}^3r$$

przy czym utożsamiamy

$$\psi(\vec{r}) \equiv \langle\vec{r}|\psi\rangle\,, \quad \phi^*(\vec{r}) \equiv \langle\phi|\vec{r}\rangle = \langle\vec{r}|\phi\rangle^*\,, \quad \int \mathrm{d}^3r\, |\vec{r}\rangle\langle\vec{r}| \equiv \mathbb{I},$$

Reprezentacja położeniowa

Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$, które są wektorami stanu w reprezentacji położeniowej, zapiszemy

$$\langle\phi|\psi\rangle \equiv (\phi|\psi) \equiv \int \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = \int \langle\phi|\vec{r}\rangle \langle\vec{r}|\psi\rangle \,\mathrm{d}^3 r$$

przy czym utożsamiamy

$$\psi(\vec{r}) \equiv \langle\vec{r}|\psi\rangle\,, \quad \phi^*(\vec{r}) \equiv \langle\phi|\vec{r}\rangle = \langle\vec{r}|\phi\rangle^*\,, \quad \int \mathrm{d}^3 r\,|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}| \equiv \mathbb{I},$$

gdzie całkowanie przebiega po wszystkich możliwych ciągłych wartościach $\vec{r}$.

Reprezentacja położeniowa

Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$, które są wektorami stanu w reprezentacji położeniowej, zapiszemy

$$\langle\phi|\psi\rangle \equiv (\phi|\psi) \equiv \int \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3r = \int \langle\phi|\vec{r}\rangle\,\langle\vec{r}|\psi\rangle\,\mathrm{d}^3r$$

przy czym utożsamiamy

$$\psi(\vec{r}) \equiv \langle\vec{r}|\psi\rangle\,, \quad \phi^*(\vec{r}) \equiv \langle\phi|\vec{r}\rangle = \langle\vec{r}|\phi\rangle^*\,, \quad \int \mathrm{d}^3r\,|\vec{r}\rangle\,\langle\vec{r}| \equiv \mathbb{I},$$

gdzie całkowanie przebiega po wszystkich możliwych ciągłych wartościach $\vec{r}$.

Operator $|\vec{r}\rangle\,\langle\vec{r}|$ jest operatorem rzutowania na stan $|\vec{r}\rangle$, który jest stanem własnym operatora położenia cząstki.

Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$, które są wektorami stanu w reprezentacji położeniowej, zapiszemy

$$\langle\phi|\psi\rangle \equiv (\phi|\psi) \equiv \int \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3r = \int \langle\phi|\vec{r}\rangle \langle\vec{r}|\psi\rangle \,\mathrm{d}^3r$$

przy czym utożsamiamy

$$\psi(\vec{r}) \equiv \langle\vec{r}|\psi\rangle\,, \quad \phi^*(\vec{r}) \equiv \langle\phi|\vec{r}\rangle = \langle\vec{r}|\phi\rangle^*\,, \quad \int \mathrm{d}^3r\, |\vec{r}\rangle \langle\vec{r}| \equiv \mathbb{I},$$

gdzie całkowanie przebiega po wszystkich możliwych ciągłych wartościach $\vec{r}$.
Operator $|\vec{r}\rangle \langle\vec{r}|$ jest operatorem rzutowania na stan $|\vec{r}\rangle$, który jest stanem własnym operatora położenia cząstki.

Notacja Diraca

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora A zapiszemy

$$(\varphi|A\psi) = (A^\dagger\varphi|\psi)$$

Notacja Diraca

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora A zapiszemy

$$(\varphi|A\psi) \quad = \quad (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^*$$

Notacja Diraca

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora A zapiszemy

$$(\varphi|A\psi) \quad = \quad (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^*$$

$$\langle\varphi|A|\psi\rangle$$

Notacja Diraca

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora A zapiszemy

$$
\begin{aligned}
(\varphi|A\psi) &= (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^* \\
\langle\varphi|A|\psi\rangle &=
\end{aligned}
$$

Notacja Diraca

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora A zapiszemy

$$
\begin{aligned}
(\varphi|A\psi) &= (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^* \\
\langle\varphi|A|\psi\rangle &= \left(\langle\varphi\,|A^\dagger\right)|\,\psi\rangle
\end{aligned}
$$

Notacja Diraca

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora A zapiszemy

$$
\begin{aligned}
(\varphi|A\psi) &= (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^* \\
\langle\varphi|A|\psi\rangle &= \left(\langle\varphi\,|A^\dagger\right)|\,\psi\rangle = \langle\psi\,|A^\dagger|\,\varphi\rangle^*\,,
\end{aligned}
$$

Notacja Diraca

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora A zapiszemy

$$
\begin{aligned}
(\varphi|A\psi) &= (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^* \\
\langle\varphi|A|\psi\rangle &= \left(\langle\varphi\,|A^\dagger\right)|\,\psi\rangle = \langle\psi\,|A^\dagger|\,\varphi\rangle^*\,,
\end{aligned}
$$

przy czym zakładamy, że operator działa zawsze na stan ket, chyba że dodatkowe nawiasy zmienią tą regułę.

Notacja Diraca

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora A zapiszemy

$$\begin{aligned} (\varphi|A\psi) &= (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^* \\ \langle\varphi|A|\psi\rangle &= \left(\langle\varphi\,|A^\dagger\right)|\,\psi\rangle = \langle\psi\,|A^\dagger|\,\varphi\rangle^*\,, \end{aligned}$$

przy czym zakładamy, że operator działa zawsze na stan ket, chyba że dodatkowe nawiasy zmienią tą regułę.
Zauważmy, że dla operatora hermitowskiego zachodzi

$$(\varphi|A\psi) = (A\varphi|\psi)$$

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora A zapiszemy

$$
\begin{aligned}
(\varphi|A\psi) &= (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^* \\
\langle\varphi|A|\psi\rangle &= \left(\langle\varphi\,|A^\dagger\right)|\,\psi\rangle = \langle\psi\,|A^\dagger|\,\varphi\rangle^*,
\end{aligned}
$$

przy czym zakładamy, że operator działa zawsze na stan ket, chyba że dodatkowe nawiasy zmienią tą regułę.
Zauważmy, że dla operatora hermitowskiego zachodzi

$$
(\varphi|A\psi) = (A\varphi|\psi) = (\psi|A\varphi)^*
$$

Notacja Diraca

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora A zapiszemy

$$
\begin{aligned}
(\varphi|A\psi) &= (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^* \\
\langle\varphi|A|\psi\rangle &= \left(\langle\varphi\,|A^\dagger\right)|\,\psi\rangle = \langle\psi\,|A^\dagger|\,\varphi\rangle^*,
\end{aligned}
$$

przy czym zakładamy, że operator działa zawsze na stan ket, chyba że dodatkowe nawiasy zmienią tą regułę.
Zauważmy, że dla operatora hermitowskiego zachodzi

$$
\begin{aligned}
(\varphi|A\psi) &= (A\varphi|\psi) = (\psi|A\varphi)^* \\
\langle\varphi|A|\psi\rangle &
\end{aligned}
$$

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora A zapiszemy

$$
\begin{aligned}
(\varphi|A\psi) &= (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^* \\
\langle\varphi|A|\psi\rangle &= \Big(\langle\varphi\,|A^\dagger\Big)\,|\,\psi\rangle = \langle\psi\,|A^\dagger|\,\varphi\rangle^*\,,
\end{aligned}
$$

przy czym zakładamy, że operator działa zawsze na stan ket, chyba że dodatkowe nawiasy zmienią tą regułę.
Zauważmy, że dla operatora hermitowskiego zachodzi

$$
\begin{aligned}
(\varphi|A\psi) &= (A\varphi|\psi) = (\psi|A\varphi)^* \\
\langle\varphi|A|\psi\rangle &=
\end{aligned}
$$

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora A zapiszemy

$$\begin{aligned} (\varphi|A\psi) &= (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^* \\ \langle\varphi|A|\psi\rangle &= \left(\langle\varphi\,|A^\dagger\right)|\,\psi\rangle = \langle\psi\,|A^\dagger|\,\varphi\rangle^*\,, \end{aligned}$$

przy czym zakładamy, że operator działa zawsze na stan ket, chyba że dodatkowe nawiasy zmienią tą regułę.
Zauważmy, że dla operatora hermitowskiego zachodzi

$$\begin{aligned} (\varphi|A\psi) &= (A\varphi|\psi) = (\psi|A\varphi)^* \\ \langle\varphi|A|\psi\rangle &= \langle\psi|A|\varphi\rangle^*\,. \end{aligned}$$

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora A zapiszemy

$$\begin{aligned} (\varphi|A\psi) &= (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^* \\ \langle\varphi|A|\psi\rangle &= \left(\langle\varphi\,|A^\dagger\right)|\,\psi\rangle = \langle\psi\,|A^\dagger|\,\varphi\rangle^*\,, \end{aligned}$$

przy czym zakładamy, że operator działa zawsze na stan ket, chyba że dodatkowe nawiasy zmienią tą regułę.
Zauważmy, że dla operatora hermitowskiego zachodzi

$$\begin{aligned} (\varphi|A\psi) &= (A\varphi|\psi) = (\psi|A\varphi)^* \\ \langle\varphi|A|\psi\rangle &= \langle\psi|A|\varphi\rangle^*\,. \end{aligned}$$

Sprzężenie hermitowskie równania własnego operatora liniowego

$$A|\, \alpha\rangle = \alpha|\, \alpha\rangle$$

ma postać

$$\langle\alpha|\, A^{\dagger} = \alpha^{*}\,\langle\alpha|\ ,$$

Notacja Diraca

Sprzężenie hermitowskie równania własnego operatora liniowego

$$A|\,\alpha\rangle = \alpha|\,\alpha\rangle$$

ma postać

$$\langle\alpha|\,A^\dagger = \alpha^*\,\langle\alpha|\;,$$

a sprzężenie hermitowskie wektora $|\,\alpha\rangle$ ma postać

$$|\,\alpha\rangle^\dagger = \langle\alpha|\;.$$

Notacja Diraca

Sprzężenie hermitowskie równania własnego operatora liniowego

$$A|\,\alpha\rangle = \alpha|\,\alpha\rangle$$

ma postać

$$\langle\alpha|\,A^{\dagger} = \alpha^{*}\,\langle\alpha|\;,$$

a sprzężenie hermitowskie wektora $|\,\alpha\rangle$ ma postać

$$|\,\alpha\rangle^{\dagger} = \langle\alpha|\;.$$

W takim razie widzimy, że operator rzutowy P_{α} jest hermitowski

Notacja Diraca

Sprzężenie hermitowskie równania własnego operatora liniowego

$$A|\,\alpha\rangle = \alpha|\,\alpha\rangle$$

ma postać

$$\langle\alpha|\, A^{\dagger} = \alpha^{*}\,\langle\alpha|\;,$$

a sprzężenie hermitowskie wektora $|\,\alpha\rangle$ ma postać

$$|\,\alpha\rangle^{\dagger} = \langle\alpha|\;.$$

W takim razie widzimy, że operator rzutowy P_{α} jest hermitowski

$$P_{\alpha}^{\dagger} =$$

Notacja Diraca

Sprzężenie hermitowskie równania własnego operatora liniowego

$$A|\,\alpha\rangle = \alpha|\,\alpha\rangle$$

ma postać

$$\langle\alpha|\,A^{\dagger} = \alpha^{*}\,\langle\alpha|\;,$$

a sprzężenie hermitowskie wektora $|\,\alpha\rangle$ ma postać

$$|\,\alpha\rangle^{\dagger} = \langle\alpha|\;.$$

W takim razie widzimy, że operator rzutowy P_{α} jest hermitowski

$$P_{\alpha}^{\dagger} = \left(|\,\alpha\rangle\,\langle\alpha|\,\right)^{\dagger} =$$

Notacja Diraca

Sprzężenie hermitowskie równania własnego operatora liniowego

$$A|\,\alpha\rangle = \alpha|\,\alpha\rangle$$

ma postać

$$\langle\alpha|\,A^\dagger = \alpha^*\,\langle\alpha|\;,$$

a sprzężenie hermitowskie wektora $|\,\alpha\rangle$ ma postać

$$|\,\alpha\rangle^\dagger = \langle\alpha|\;.$$

W takim razie widzimy, że operator rzutowy P_α jest hermitowski

$$P_\alpha^\dagger = (|\,\alpha\rangle\,\langle\alpha|\,)^\dagger = |\,\alpha\rangle\,\langle\alpha| =$$

Sprzężenie hermitowskie równania własnego operatora liniowego

$$A|\,\alpha\rangle = \alpha|\,\alpha\rangle$$

ma postać

$$\langle\alpha|\,A^\dagger = \alpha^*\,\langle\alpha|\;,$$

a sprzężenie hermitowskie wektora $|\,\alpha\rangle$ ma postać

$$|\,\alpha\rangle^\dagger = \langle\alpha|\;.$$

W takim razie widzimy, że operator rzutowy P_α jest hermitowski

$$P_\alpha^\dagger = (|\,\alpha\rangle\,\langle\alpha|\,)^\dagger = |\,\alpha\rangle\,\langle\alpha|\, = P_\alpha.$$

Notacja Diraca

Sprzężenie hermitowskie równania własnego operatora liniowego

$$A|\,\alpha\rangle = \alpha|\,\alpha\rangle$$

ma postać

$$\langle\alpha|\,A^\dagger = \alpha^*\,\langle\alpha|\;,$$

a sprzężenie hermitowskie wektora $|\,\alpha\rangle$ ma postać

$$|\,\alpha\rangle^\dagger = \langle\alpha|\;.$$

W takim razie widzimy, że operator rzutowy P_α jest hermitowski

$$P_\alpha^\dagger = \left(|\,\alpha\rangle\,\langle\alpha|\,\right)^\dagger = |\,\alpha\rangle\,\langle\alpha|\, = P_\alpha.$$