

Matematyczne podstawy mechaniki kwantowej

Część 1

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

Literatura: Julian Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*

Przypomnijmy pojęcie [przestrzeni wektorowej](#) lub [inaczej liniowej](#):

Literatura: Julian Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*

Przypomnijmy pojęcie **przestrzeni wektorowej** lub **inaczej liniowej**:

\mathbb{K} – zbiór (ciało) liczb rzeczywistych \mathbb{R} lub zespolonych \mathbb{C} ,

X – dowolny zbiór niepusty.

Literatura: Julian Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*

Przypomnijmy pojęcie **przestrzeni wektorowej** lub **inaczej liniowej**:

\mathbb{K} – zbiór (**ciało**) liczb **rzeczywistych** \mathbb{R} lub **zespólonych** \mathbb{C} ,

X – dowolny zbiór niepusty.

Określamy działania **dodawania** i **mnożenia przez liczbę**:

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$$

Literatura: Julian Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*

Przypomnijmy pojęcie **przestrzeni wektorowej** lub **inaczej liniowej**:

\mathbb{K} – zbiór (**ciało**) liczb **rzeczywistych** \mathbb{R} lub **zespólonych** \mathbb{C} ,

X – dowolny zbiór niepusty.

Określamy działania **dodawania** i **mnożenia przez liczbę**:

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$$

spełniające przy dowolnych $x, y, z \in X$ i $a, b \in \mathbb{K}$ następujące warunki:

Literatura: Julian Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*

Przypomnijmy pojęcie **przestrzeni wektorowej** lub **inaczej liniowej**:

\mathbb{K} – zbiór (**ciało**) liczb **rzeczywistych** \mathbb{R} lub **zespólonych** \mathbb{C} ,

X – dowolny zbiór niepusty.

Określamy działania **dodawania** i **mnożenia przez liczbę**:

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$$

spełniające przy dowolnych $x, y, z \in X$ i $a, b \in \mathbb{K}$ następujące warunki:

- **przemienność**: $x + y = y + x$,

Literatura: Julian Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*

Przypomnijmy pojęcie **przestrzeni wektorowej** lub **inaczej liniowej**:

\mathbb{K} – zbiór (**ciało**) liczb **rzeczywistych** \mathbb{R} lub **zespólonych** \mathbb{C} ,

X – dowolny zbiór niepusty.

Określamy działania **dodawania** i **mnożenia przez liczbę**:

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$$

spełniające przy dowolnych $x, y, z \in X$ i $a, b \in \mathbb{K}$ następujące warunki:

- **przemienność**: $x + y = y + x$,

- *łączność*: $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- Istnieje **element zerowy** $\theta \in X$ taki, że dla każdego $x \in X$,
 $x + \theta = x$,
- Dla każdego elementu $x \in X$ istnieje **element przeciwny**
 $-x \in X$ taki, że $x + (-x) = \theta$.
- *rozdzielność*: $a(x + y) = ax + ay$,
- *rozdzielność*: $(a + b)x = ax + bx$,
- $a(bx) = (ab)x$,
- $1 \cdot x = x$.

Zbiór X z działaniami $+$ i \cdot nazywamy **przestrzenią wektorową** rzeczywistą (jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) lub zespoloną (jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

- *łączność*: $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- Istnieje **element zerowy** $\theta \in X$ taki, że dla każdego $x \in X$,
 $x + \theta = x$,
- Dla każdego elementu $x \in X$ istnieje **element przeciwny**
 $-x \in X$ taki, że $x + (-x) = \theta$.
- *rozdzielność*: $a(x + y) = ax + ay$,
- *rozdzielność*: $(a + b)x = ax + bx$,
- $a(bx) = (ab)x$,
- $1 \cdot x = x$.

Zbiór X z działaniami $+$ i \cdot nazywamy **przestrzenią wektorową** rzeczywistą (jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) lub zespoloną (jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Przykład 1

$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,
 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.

Przykład 1

$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,
 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.

Działania określamy następująco:

$$x + y \equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$ax \equiv (ax_1, ax_2, \dots, ax_n).$$

Przykład 1

$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,
 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.

Działania określamy następująco:

$$\begin{aligned}x + y &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ax &\equiv (ax_1, ax_2, \dots, ax_n).\end{aligned}$$

Czy są spełnione wszystkie warunki przestrzeni wektorowej?

Przykład 1

$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,
 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.

Działania określamy następująco:

$$\begin{aligned}x + y &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ax &\equiv (ax_1, ax_2, \dots, ax_n).\end{aligned}$$

Czy są spełnione wszystkie warunki przestrzeni wektorowej?
przemienność:

$$y + x = (y_1, \dots, y_n) + (x_1, \dots, x_n)$$

Przykład 1

$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,
 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.

Działania określamy następująco:

$$\begin{aligned}x + y &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ax &\equiv (ax_1, ax_2, \dots, ax_n).\end{aligned}$$

Czy są spełnione wszystkie warunki **przestrzeni wektorowej?**
przemienność:

$$\begin{aligned}y + x &= (y_1, \dots, y_n) + (x_1, \dots, x_n) \\ &= \end{aligned}$$

Przykład 1

$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,
 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.

Działania określamy następująco:

$$\begin{aligned}x + y &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ax &\equiv (ax_1, ax_2, \dots, ax_n).\end{aligned}$$

Czy są spełnione wszystkie warunki **przestrzeni wektorowej?**
przemienność:

$$\begin{aligned}y + x &= (y_1, \dots, y_n) + (x_1, \dots, x_n) \\&= (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) =\end{aligned}$$

Przykład 1

$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,
 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.

Działania określamy następująco:

$$\begin{aligned}x + y &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ax &\equiv (ax_1, ax_2, \dots, ax_n).\end{aligned}$$

Czy są spełnione wszystkie warunki **przestrzeni wektorowej?**
przemienność:

$$\begin{aligned}y + x &= (y_1, \dots, y_n) + (x_1, \dots, x_n) \\&= (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\end{aligned}$$

Przykład 1

$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,
 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.

Działania określamy następująco:

$$\begin{aligned}x + y &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ax &\equiv (ax_1, ax_2, \dots, ax_n).\end{aligned}$$

Czy są spełnione wszystkie warunki **przestrzeni wektorowej**?
przemienność:

$$\begin{aligned}y + x &= (y_1, \dots, y_n) + (x_1, \dots, x_n) \\&= (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\&= \end{aligned}$$

Przykład 1

$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,
 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.

Działania określamy następująco:

$$\begin{aligned}x + y &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ax &\equiv (ax_1, ax_2, \dots, ax_n).\end{aligned}$$

Czy są spełnione wszystkie warunki **przestrzeni wektorowej**?
przemienność:

$$\begin{aligned}y + x &= (y_1, \dots, y_n) + (x_1, \dots, x_n) \\&= (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\&= (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) =\end{aligned}$$

Przykład 1

$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,
 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.

Działania określamy następująco:

$$\begin{aligned}x + y &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ax &\equiv (ax_1, ax_2, \dots, ax_n).\end{aligned}$$

Czy są spełnione wszystkie warunki **przestrzeni wektorowej**?
przemienność:

$$\begin{aligned}y + x &= (y_1, \dots, y_n) + (x_1, \dots, x_n) \\&= (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\&= (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = x + y,\end{aligned}$$

Przykład 1

$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,
 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.

Działania określamy następująco:

$$\begin{aligned}x + y &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ax &\equiv (ax_1, ax_2, \dots, ax_n).\end{aligned}$$

Czy są spełnione wszystkie warunki **przestrzeni wektorowej**?
przemienność:

$$\begin{aligned}y + x &= (y_1, \dots, y_n) + (x_1, \dots, x_n) \\&= (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\&= (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = x + y,\end{aligned}$$

łączność:

$$\begin{aligned}x + (y + z) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + ((y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n))\end{aligned}$$

łączność:

$$\begin{aligned}x + (y + z) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + ((y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\ &= \end{aligned}$$

łączność:

$$\begin{aligned}x + (y + z) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + ((y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \dots, (x_n + y_n) + z_n)\end{aligned}$$

łączność:

$$\begin{aligned}x + (y + z) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + ((y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)) \\&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\&= \end{aligned}$$

łączność:

$$\begin{aligned}x + (y + z) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + ((y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)) \\&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\&= ((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) \\&+ \end{aligned}$$

łączność:

$$\begin{aligned}x + (y + z) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + ((y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)) \\&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\&= ((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) \\&+ \end{aligned}$$

łączność:

$$\begin{aligned}x + (y + z) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + ((y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)) \\&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\&= ((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) \\&+ (z_1, z_2, \dots, z_n) =\end{aligned}$$

łączność:

$$\begin{aligned}x + (y + z) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + ((y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)) \\&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\&= ((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) \\&+ (z_1, z_2, \dots, z_n) = (x + y) + z.\end{aligned}$$

łączność:

$$\begin{aligned}x + (y + z) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + ((y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)) \\&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\&= ((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) \\&+ (z_1, z_2, \dots, z_n) = (x + y) + z.\end{aligned}$$

element zerowy:

łączność:

$$\begin{aligned}x + (y + z) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + ((y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)) \\&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\&= ((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) \\&+ (z_1, z_2, \dots, z_n) = (x + y) + z.\end{aligned}$$

element zerowy: Istnieje $\theta \in X$, taki że dla każdego $x \in X$

$$\theta \equiv (0, \dots, 0) \Rightarrow x + \theta =$$

łączność:

$$\begin{aligned}x + (y + z) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + ((y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)) \\&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\&= ((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) \\&+ (z_1, z_2, \dots, z_n) = (x + y) + z.\end{aligned}$$

element zerowy: Istnieje $\theta \in X$, taki że dla każdego $x \in X$

$$\theta \equiv (0, \dots, 0) \Rightarrow x + \theta = (x_1 + 0, \dots, x_n + 0) =$$

łączność:

$$\begin{aligned}x + (y + z) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + ((y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)) \\&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\&= ((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) \\&+ (z_1, z_2, \dots, z_n) = (x + y) + z.\end{aligned}$$

element zerowy: Istnieje $\theta \in X$, taki że dla każdego $x \in X$

$$\theta \equiv (0, \dots, 0) \Rightarrow x + \theta = (x_1 + 0, \dots, x_n + 0) = (x_1, \dots, x_n) =$$

łączność:

$$\begin{aligned}x + (y + z) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + ((y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)) \\&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\&= ((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) \\&+ (z_1, z_2, \dots, z_n) = (x + y) + z.\end{aligned}$$

element zerowy: Istnieje $\theta \in X$, taki że dla każdego $x \in X$

$$\theta \equiv (0, \dots, 0) \Rightarrow x + \theta = (x_1 + 0, \dots, x_n + 0) = (x_1, \dots, x_n) = x.$$

łączność:

$$\begin{aligned}x + (y + z) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + ((y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)) \\&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\&= ((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) \\&+ (z_1, z_2, \dots, z_n) = (x + y) + z.\end{aligned}$$

element zerowy: Istnieje $\theta \in X$, taki że dla każdego $x \in X$

$$\theta \equiv (0, \dots, 0) \Rightarrow x + \theta = (x_1 + 0, \dots, x_n + 0) = (x_1, \dots, x_n) = x.$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$-x \equiv (-x_1, \dots, -x_n) \Rightarrow x + (-x)$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$-x \equiv (-x_1, \dots, -x_n) \Rightarrow x + (-x) =$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$-x \equiv (-x_1, \dots, -x_n) \Rightarrow x + (-x) = (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n)$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$-x \equiv (-x_1, \dots, -x_n) \Rightarrow x + (-x) = (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) \\ =$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$\begin{aligned} -x \equiv (-x_1, \dots, -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) &= (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, \dots, 0) = \end{aligned}$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$\begin{aligned} -x \equiv (-x_1, \dots, -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) &= (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, \dots, 0) = \theta. \end{aligned}$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$\begin{aligned} -x \equiv (-x_1, \dots, -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) &= (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, \dots, 0) = \theta. \end{aligned}$$

rozdzielność:

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$\begin{aligned} -x \equiv (-x_1, \dots, -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) &= (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, \dots, 0) = \theta. \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$a(x + y) =$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$\begin{aligned} -x \equiv (-x_1, \dots, -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) &= (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, \dots, 0) = \theta. \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$a(x + y) = a((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n))$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$\begin{aligned} -x \equiv (-x_1, \dots, -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) &= (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, \dots, 0) = \theta. \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} a(x + y) &= a((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) \\ &= \end{aligned}$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$\begin{aligned} -x \equiv (-x_1, \dots, -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) &= (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, \dots, 0) = \theta. \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} a(x + y) &= a((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) \\ &= a(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = \end{aligned}$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$\begin{aligned} -x \equiv (-x_1, \dots, -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) &= (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, \dots, 0) = \theta. \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} a(x + y) &= a((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) \\ &= a(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (a(x_1 + y_1), \dots, a(x_n + y_n)) \end{aligned}$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$\begin{aligned} -x \equiv (-x_1, \dots, -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) &= (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, \dots, 0) = \theta. \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} a(x + y) &= a((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) \\ &= a(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (a(x_1 + y_1), \dots, a(x_n + y_n)) \\ &= \end{aligned}$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$\begin{aligned} -x \equiv (-x_1, \dots, -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) &= (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, \dots, 0) = \theta. \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} a(x + y) &= a((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) \\ &= a(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (a(x_1 + y_1), \dots, a(x_n + y_n)) \\ &= (ax_1 + ay_1, \dots, ax_n + ay_n) = \end{aligned}$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$\begin{aligned} -x \equiv (-x_1, \dots, -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) &= (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, \dots, 0) = \theta. \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} a(x + y) &= a((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) \\ &= a(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (a(x_1 + y_1), \dots, a(x_n + y_n)) \\ &= (ax_1 + ay_1, \dots, ax_n + ay_n) = (ax_1, \dots, ax_n) + (ay_1, \dots, ay_n) \end{aligned}$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$\begin{aligned} -x \equiv (-x_1, \dots, -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) &= (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, \dots, 0) = \theta. \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} a(x + y) &= a((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) \\ &= a(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (a(x_1 + y_1), \dots, a(x_n + y_n)) \\ &= (ax_1 + ay_1, \dots, ax_n + ay_n) = (ax_1, \dots, ax_n) + (ay_1, \dots, ay_n) \\ &= \end{aligned}$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$\begin{aligned} -x \equiv (-x_1, \dots, -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) &= (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, \dots, 0) = \theta. \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} a(x + y) &= a((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) \\ &= a(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (a(x_1 + y_1), \dots, a(x_n + y_n)) \\ &= (ax_1 + ay_1, \dots, ax_n + ay_n) = (ax_1, \dots, ax_n) + (ay_1, \dots, ay_n) \\ &= a(x_1, \dots, x_n) + a(y_1, \dots, y_n) = \end{aligned}$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$\begin{aligned} -x \equiv (-x_1, \dots, -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) &= (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, \dots, 0) = \theta. \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} a(x + y) &= a((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) \\ &= a(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (a(x_1 + y_1), \dots, a(x_n + y_n)) \\ &= (ax_1 + ay_1, \dots, ax_n + ay_n) = (ax_1, \dots, ax_n) + (ay_1, \dots, ay_n) \\ &= a(x_1, \dots, x_n) + a(y_1, \dots, y_n) = ax + ay. \end{aligned}$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$\begin{aligned} -x \equiv (-x_1, \dots, -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) &= (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, \dots, 0) = \theta. \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} a(x + y) &= a((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) \\ &= a(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (a(x_1 + y_1), \dots, a(x_n + y_n)) \\ &= (ax_1 + ay_1, \dots, ax_n + ay_n) = (ax_1, \dots, ax_n) + (ay_1, \dots, ay_n) \\ &= a(x_1, \dots, x_n) + a(y_1, \dots, y_n) = ax + ay. \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$(a + b)x =$$

rozdzielność:

$$(a + b)x = (a + b)(x_1, \dots, x_n) =$$

rozdzielność:

$$(a + b)x = (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n)$$

rozdzielność:

$$(a + b)x = (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n)$$
$$=$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a + b)x &= (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n) \\ &= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n)\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a + b)x &= (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n) \\ &= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\ &= \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a + b)x &= (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n) \\ &= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\ &= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n) = ax + bx.\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a + b)x &= (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n) \\ &= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\ &= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n) = ax + bx.\end{aligned}$$

$$a(bx) =$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a + b)x &= (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n) \\ &= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\ &= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n) = ax + bx.\end{aligned}$$

$$a(bx) = a(b(x_1, \dots, x_n)) =$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a + b)x &= (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n) \\ &= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\ &= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n) = ax + bx.\end{aligned}$$

$$a(bx) = a(b(x_1, \dots, x_n)) = a(bx_1, \dots, bx_n)$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a + b)x &= (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n) \\ &= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\ &= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n) = ax + bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a(b(x_1, \dots, x_n)) = a(bx_1, \dots, bx_n) \\ &= \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a + b)x &= (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n) \\ &= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\ &= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n) = ax + bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a(b(x_1, \dots, x_n)) = a(bx_1, \dots, bx_n) \\ &= (a(bx_1), \dots, a(bx_n)) =\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a + b)x &= (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n) \\ &= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\ &= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n) = ax + bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a(b(x_1, \dots, x_n)) = a(bx_1, \dots, bx_n) \\ &= (a(bx_1), \dots, a(bx_n)) = ((ab)x_1, \dots, (ab)x_n)\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a + b)x &= (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n) \\ &= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\ &= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n) = ax + bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a(b(x_1, \dots, x_n)) = a(bx_1, \dots, bx_n) \\ &= (a(bx_1), \dots, a(bx_n)) = ((ab)x_1, \dots, (ab)x_n) \\ &= \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a + b)x &= (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n) \\ &= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\ &= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n) = ax + bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a(b(x_1, \dots, x_n)) = a(bx_1, \dots, bx_n) \\ &= (a(bx_1), \dots, a(bx_n)) = ((ab)x_1, \dots, (ab)x_n) \\ &= (ab)(x_1, \dots, x_n) =\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a + b)x &= (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n) \\ &= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\ &= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n) = ax + bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a(b(x_1, \dots, x_n)) = a(bx_1, \dots, bx_n) \\ &= (a(bx_1), \dots, a(bx_n)) = ((ab)x_1, \dots, (ab)x_n) \\ &= (ab)(x_1, \dots, x_n) = (ab)x.\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a + b)x &= (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n) \\ &= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\ &= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n) = ax + bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a(b(x_1, \dots, x_n)) = a(bx_1, \dots, bx_n) \\ &= (a(bx_1), \dots, a(bx_n)) = ((ab)x_1, \dots, (ab)x_n) \\ &= (ab)(x_1, \dots, x_n) = (ab)x.\end{aligned}$$

$$1 \cdot x =$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a + b)x &= (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n) \\ &= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\ &= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n) = ax + bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a(b(x_1, \dots, x_n)) = a(bx_1, \dots, bx_n) \\ &= (a(bx_1), \dots, a(bx_n)) = ((ab)x_1, \dots, (ab)x_n) \\ &= (ab)(x_1, \dots, x_n) = (ab)x.\end{aligned}$$

$$1 \cdot x = 1(x_1, \dots, x_n)$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a + b)x &= (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n) \\ &= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\ &= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n) = ax + bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a(b(x_1, \dots, x_n)) = a(bx_1, \dots, bx_n) \\ &= (a(bx_1), \dots, a(bx_n)) = ((ab)x_1, \dots, (ab)x_n) \\ &= (ab)(x_1, \dots, x_n) = (ab)x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 \cdot x &= 1(x_1, \dots, x_n) \\ &= \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a + b)x &= (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n) \\ &= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\ &= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n) = ax + bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a(b(x_1, \dots, x_n)) = a(bx_1, \dots, bx_n) \\ &= (a(bx_1), \dots, a(bx_n)) = ((ab)x_1, \dots, (ab)x_n) \\ &= (ab)(x_1, \dots, x_n) = (ab)x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 \cdot x &= 1(x_1, \dots, x_n) \\ &= (1 \cdot x_1, \dots, 1 \cdot x_n) =\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a + b)x &= (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n) \\ &= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\ &= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n) = ax + bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a(b(x_1, \dots, x_n)) = a(bx_1, \dots, bx_n) \\ &= (a(bx_1), \dots, a(bx_n)) = ((ab)x_1, \dots, (ab)x_n) \\ &= (ab)(x_1, \dots, x_n) = (ab)x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 \cdot x &= 1(x_1, \dots, x_n) \\ &= (1 \cdot x_1, \dots, 1 \cdot x_n) = (x_1, \dots, x_n) =\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a + b)x &= (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n) \\ &= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\ &= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n) = ax + bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a(b(x_1, \dots, x_n)) = a(bx_1, \dots, bx_n) \\ &= (a(bx_1), \dots, a(bx_n)) = ((ab)x_1, \dots, (ab)x_n) \\ &= (ab)(x_1, \dots, x_n) = (ab)x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 \cdot x &= 1(x_1, \dots, x_n) \\ &= (1 \cdot x_1, \dots, 1 \cdot x_n) = (x_1, \dots, x_n) = x\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a + b)x &= (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n) \\ &= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\ &= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n) = ax + bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a(b(x_1, \dots, x_n)) = a(bx_1, \dots, bx_n) \\ &= (a(bx_1), \dots, a(bx_n)) = ((ab)x_1, \dots, (ab)x_n) \\ &= (ab)(x_1, \dots, x_n) = (ab)x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 \cdot x &= 1(x_1, \dots, x_n) \\ &= (1 \cdot x_1, \dots, 1 \cdot x_n) = (x_1, \dots, x_n) = x \quad \text{cnd.}\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a + b)x &= (a + b)(x_1, \dots, x_n) = ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n) \\ &= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\ &= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n) = ax + bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a(b(x_1, \dots, x_n)) = a(bx_1, \dots, bx_n) \\ &= (a(bx_1), \dots, a(bx_n)) = ((ab)x_1, \dots, (ab)x_n) \\ &= (ab)(x_1, \dots, x_n) = (ab)x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 \cdot x &= 1(x_1, \dots, x_n) \\ &= (1 \cdot x_1, \dots, 1 \cdot x_n) = (x_1, \dots, x_n) = x \quad \text{cnd.}\end{aligned}$$

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$.

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$.

Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$.

Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$(f + g)(x) =$$

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$.

Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$.

Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(af)(x)$$

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$.

Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(af)(x) =$$

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$.

Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(af)(x) = af(x),$$

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$.

Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (af)(x) &= af(x), \quad \text{dla dowolnego } x \in \Omega\end{aligned}$$

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$.

Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (af)(x) &= af(x), \quad \text{dla dowolnego } x \in \Omega\end{aligned}$$

Sprawdźmy wszystkie warunki przestrzeni wektorowej.

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$.

Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (af)(x) &= af(x), \quad \text{dla dowolnego } x \in \Omega\end{aligned}$$

Sprawdźmy wszystkie warunki **przestrzeni wektorowej**.

przemienność:

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$.

Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(af)(x) = af(x), \quad \text{dla dowolnego } x \in \Omega$$

Sprawdźmy wszystkie warunki **przestrzeni wektorowej**.
przemienność:

$$(g + f)(x) =$$

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$.

Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (af)(x) &= af(x), \quad \text{dla dowolnego } x \in \Omega\end{aligned}$$

Sprawdźmy wszystkie warunki **przestrzeni wektorowej**.
przemienność:

$$(g + f)(x) = g(x) + f(x) =$$

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$.

Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (af)(x) &= af(x), \quad \text{dla dowolnego } x \in \Omega\end{aligned}$$

Sprawdźmy wszystkie warunki **przestrzeni wektorowej**.
przemienność:

$$(g + f)(x) = g(x) + f(x) = f(x) + g(x) =$$

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$.

Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (af)(x) &= af(x), \quad \text{dla dowolnego } x \in \Omega\end{aligned}$$

Sprawdźmy wszystkie warunki **przestrzeni wektorowej**.
przemienność:

$$(g + f)(x) = g(x) + f(x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x).$$

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$.

Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (af)(x) &= af(x), \quad \text{dla dowolnego } x \in \Omega\end{aligned}$$

Sprawdźmy wszystkie warunki **przestrzeni wektorowej**.
przemienność:

$$(g + f)(x) = g(x) + f(x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x).$$

łączność:

$$(f + (g + h))(x) =$$

łączność:

$$(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) =$$

łączność:

$$(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$$

łączność:

$$(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$$
$$=$$

łączność:

$$\begin{aligned}(f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x)\end{aligned}$$

łączność:

$$\begin{aligned}(f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) \\ &= \end{aligned}$$

łączność:

$$\begin{aligned}(f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) \\ &= ((f + g) + h)(x).\end{aligned}$$

łączność:

$$\begin{aligned}(f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) \\ &= ((f + g) + h)(x).\end{aligned}$$

element zerowy:

łączność:

$$\begin{aligned}(f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) \\ &= ((f + g) + h)(x).\end{aligned}$$

element zerowy:

$$\theta(x) \equiv 0 \Rightarrow$$

łączność:

$$\begin{aligned}(f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) \\ &= ((f + g) + h)(x).\end{aligned}$$

element zerowy:

$$\theta(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad (f + \theta)(x) =$$

łączność:

$$\begin{aligned}(f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) \\ &= ((f + g) + h)(x).\end{aligned}$$

element zerowy:

$$\theta(x) \equiv 0 \Rightarrow (f + \theta)(x) = f(x) + \theta(x) =$$

łączność:

$$\begin{aligned}(f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) \\ &= ((f + g) + h)(x).\end{aligned}$$

element zerowy:

$$\theta(x) \equiv 0 \Rightarrow (f + \theta)(x) = f(x) + \theta(x) = f(x) + 0 =$$

łączność:

$$\begin{aligned}(f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) \\ &= ((f + g) + h)(x).\end{aligned}$$

element zerowy:

$$\theta(x) \equiv 0 \Rightarrow (f + \theta)(x) = f(x) + \theta(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

łączność:

$$\begin{aligned}(f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) \\ &= ((f + g) + h)(x).\end{aligned}$$

element zerowy:

$$\theta(x) \equiv 0 \Rightarrow (f + \theta)(x) = f(x) + \theta(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \quad \Rightarrow$$

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \quad \Rightarrow \quad (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x)$$

element przeciwny:

$$\begin{aligned} (-f)(x) \equiv -f(x) & \Rightarrow (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) \\ & = \end{aligned}$$

element przeciwny:

$$\begin{aligned}(-f)(x) \equiv -f(x) &\Rightarrow (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 =\end{aligned}$$

element przeciwny:

$$\begin{aligned}(-f)(x) \equiv -f(x) &\Rightarrow (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).\end{aligned}$$

element przeciwny:

$$\begin{aligned}(-f)(x) \equiv -f(x) &\Rightarrow (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

element przeciwny:

$$\begin{aligned}(-f)(x) \equiv -f(x) &\Rightarrow (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$(a(f + g))(x) =$$

element przeciwny:

$$\begin{aligned}(-f)(x) \equiv -f(x) &\Rightarrow (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$(a(f + g))(x) = a(f + g)(x) =$$

element przeciwny:

$$\begin{aligned}(-f)(x) \equiv -f(x) &\Rightarrow (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$(a(f + g))(x) = a(f + g)(x) = a(f(x) + g(x))$$

element przeciwny:

$$\begin{aligned}(-f)(x) \equiv -f(x) &\Rightarrow (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a(f + g))(x) &= a(f + g)(x) = a(f(x) + g(x)) \\ &= \end{aligned}$$

element przeciwny:

$$\begin{aligned}(-f)(x) \equiv -f(x) &\Rightarrow (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a(f + g))(x) &= a(f + g)(x) = a(f(x) + g(x)) \\ &= af(x) + ag(x) =\end{aligned}$$

element przeciwny:

$$\begin{aligned}(-f)(x) \equiv -f(x) &\Rightarrow (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a(f + g))(x) &= a(f + g)(x) = a(f(x) + g(x)) \\ &= af(x) + ag(x) = (af + ag)(x).\end{aligned}$$

element przeciwny:

$$\begin{aligned}(-f)(x) \equiv -f(x) &\Rightarrow (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a(f + g))(x) &= a(f + g)(x) = a(f(x) + g(x)) \\ &= af(x) + ag(x) = (af + ag)(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

element przeciwny:

$$\begin{aligned}(-f)(x) \equiv -f(x) &\Rightarrow (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a(f + g))(x) &= a(f + g)(x) = a(f(x) + g(x)) \\ &= af(x) + ag(x) = (af + ag)(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$((a + b)f)(x) =$$

element przeciwny:

$$\begin{aligned}(-f)(x) \equiv -f(x) &\Rightarrow (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a(f + g))(x) &= a(f + g)(x) = a(f(x) + g(x)) \\ &= af(x) + ag(x) = (af + ag)(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$((a + b)f)(x) = (a + b)f(x) =$$

element przeciwny:

$$\begin{aligned}(-f)(x) \equiv -f(x) &\Rightarrow (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a(f + g))(x) &= a(f + g)(x) = a(f(x) + g(x)) \\ &= af(x) + ag(x) = (af + ag)(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$((a + b)f)(x) = (a + b)f(x) = af(x) + bf(x) =$$

element przeciwny:

$$\begin{aligned}(-f)(x) \equiv -f(x) &\Rightarrow (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a(f + g))(x) &= a(f + g)(x) = a(f(x) + g(x)) \\ &= af(x) + ag(x) = (af + ag)(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$((a + b)f)(x) = (a + b)f(x) = af(x) + bf(x) = (af)(x) + (bf)(x)$$

element przeciwny:

$$\begin{aligned}(-f)(x) \equiv -f(x) &\Rightarrow (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a(f + g))(x) &= a(f + g)(x) = a(f(x) + g(x)) \\ &= af(x) + ag(x) = (af + ag)(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}((a + b)f)(x) &= (a + b)f(x) = af(x) + bf(x) = (af)(x) + (bf)(x) \\ &= \end{aligned}$$

element przeciwny:

$$\begin{aligned}(-f)(x) \equiv -f(x) &\Rightarrow (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a(f + g))(x) &= a(f + g)(x) = a(f(x) + g(x)) \\ &= af(x) + ag(x) = (af + ag)(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}((a + b)f)(x) &= (a + b)f(x) = af(x) + bf(x) = (af)(x) + (bf)(x) \\ &= (af + bf)(x).\end{aligned}$$

element przeciwny:

$$\begin{aligned}(-f)(x) \equiv -f(x) &\Rightarrow (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a(f + g))(x) &= a(f + g)(x) = a(f(x) + g(x)) \\ &= af(x) + ag(x) = (af + ag)(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}((a + b)f)(x) &= (a + b)f(x) = af(x) + bf(x) = (af)(x) + (bf)(x) \\ &= (af + bf)(x).\end{aligned}$$

$$(a(bf))(x) = a(bf)(x) =$$

$$(a(bf))(x) = a(bf)(x) = a(bf(x))$$

$$(a(bf))(x) = a(bf)(x) = a(bf(x))$$
$$=$$

$$\begin{aligned}(a(bf))(x) &= a(bf)(x) = a(bf(x)) \\ &= (ab)f(x) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a(bf))(x) &= a(bf)(x) = a(bf(x)) \\ &= (ab)f(x) = ((ab)f)(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a(bf))(x) &= a(bf)(x) = a(bf(x)) \\ &= (ab)f(x) = ((ab)f)(x).\end{aligned}$$

$$(1 \cdot f)(x) =$$

$$\begin{aligned}(a(bf))(x) &= a(bf)(x) = a(bf(x)) \\ &= (ab)f(x) = ((ab)f)(x).\end{aligned}$$

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) =$$

$$\begin{aligned}(a(bf))(x) &= a(bf)(x) = a(bf(x)) \\ &= (ab)f(x) = ((ab)f)(x).\end{aligned}$$

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \quad \text{cnd.}$$

$$\begin{aligned}(a(bf))(x) &= a(bf)(x) = a(bf(x)) \\ &= (ab)f(x) = ((ab)f)(x).\end{aligned}$$

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \quad \text{cnd.}$$

Niech $(X, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową.

$$\begin{aligned}(a(bf))(x) &= a(bf)(x) = a(bf(x)) \\ &= (ab)f(x) = ((ab)f)(x).\end{aligned}$$

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \quad \text{cnd.}$$

Niech $(X, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Niepusty podzbiór $X_0 \subset X$ nazywamy **podprzestrzenią wektorową**,

$$\begin{aligned}(a(bf))(x) &= a(bf)(x) = a(bf(x)) \\ &= (ab)f(x) = ((ab)f)(x).\end{aligned}$$

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \quad \text{cnd.}$$

Niech $(X, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Niepusty podzbiór $X_0 \subset X$ nazywamy **podprzestrzenią wektorową**, jeśli $(X_0, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową.

$$\begin{aligned}(a(bf))(x) &= a(bf)(x) = a(bf(x)) \\ &= (ab)f(x) = ((ab)f)(x).\end{aligned}$$

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \quad \text{cnd.}$$

Niech $(X, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Niepusty podzbiór $X_0 \subset X$ nazywamy **podprzestrzenią wektorową**, jeśli $(X_0, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową.

Niepusty podzbiór $X_0 \subset X$ jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$x, y \in X_0 \text{ i } a \in \mathbb{K} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}(a(bf))(x) &= a(bf)(x) = a(bf(x)) \\ &= (ab)f(x) = ((ab)f)(x).\end{aligned}$$

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \quad \text{cnd.}$$

Niech $(X, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Niepusty podzbiór $X_0 \subset X$ nazywamy **podprzestrzenią wektorową**, jeśli $(X_0, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową.

Niepusty podzbiór $X_0 \subset X$ jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$x, y \in X_0 \text{ i } a \in \mathbb{K} \Rightarrow x + y \in X_0 \text{ i } ax \in X_0.$$

$$\begin{aligned}(a(bf))(x) &= a(bf)(x) = a(bf(x)) \\ &= (ab)f(x) = ((ab)f)(x).\end{aligned}$$

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \quad \text{cnd.}$$

Niech $(X, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Niepusty podzbiór $X_0 \subset X$ nazywamy **podprzestrzenią wektorową**, jeśli $(X_0, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową.

Niepusty podzbiór $X_0 \subset X$ jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$x, y \in X_0 \text{ i } a \in \mathbb{K} \Rightarrow x + y \in X_0 \text{ i } ax \in X_0.$$

Elementy x_1, x_2, \dots, x_n przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ nazywamy **liniowo niezależnymi**, jeśli dla $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \theta \Rightarrow$$

Elementy x_1, x_2, \dots, x_n przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ nazywamy **liniowo niezależnymi**, jeśli dla $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \theta \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Elementy x_1, x_2, \dots, x_n przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ nazywamy **liniowo niezależnymi**, jeśli dla $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \theta \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Największą liczbę n o tej własności, że w przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ istnieje n elementów liniowo niezależnych nazywamy **wymiarem przestrzeni wektorowej** i oznaczamy $\dim X$.

Elementy x_1, x_2, \dots, x_n przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ nazywamy **liniowo niezależnymi**, jeśli dla $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \theta \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Największą liczbę n o tej własności, że w przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ istnieje n elementów liniowo niezależnych nazywamy **wymiarem przestrzeni wektorowej** i oznaczamy **$\dim X$** .

Jeżeli taka liczba n istnieje, to przestrzeń jest **skończenie wymiarowa**, $\dim X = n$,

Elementy x_1, x_2, \dots, x_n przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ nazywamy **liniowo niezależnymi**, jeśli dla $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \theta \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Największą liczbę n o tej własności, że w przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ istnieje n elementów liniowo niezależnych nazywamy **wymiarem przestrzeni wektorowej** i oznaczamy **$\dim X$** .

Jeżeli taka liczba n istnieje, to przestrzeń jest **skończenie wymiarowa**, **$\dim X = n$** , a jeśli takie n nie istnieje, to przestrzeń jest **nieskończenie wymiarowa**, **$\dim X = \infty$** .

Elementy x_1, x_2, \dots, x_n przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ nazywamy **liniowo niezależnymi**, jeśli dla $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \theta \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Największą liczbę n o tej własności, że w przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ istnieje n elementów liniowo niezależnych nazywamy **wymiarem przestrzeni wektorowej** i oznaczamy **$\dim X$** .

Jeżeli taka liczba n istnieje, to przestrzeń jest **skończenie wymiarowa**, **$\dim X = n$** , a jeśli takie n nie istnieje, to przestrzeń jest **nieskończenie wymiarowa**, **$\dim X = \infty$** .

Jeżeli $\dim X = n$, to każdy liniowo niezależny zbiór n wektorów $e_1, e_2, \dots, e_n \in X$ nazywamy bazą przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$.
Przestrzeń $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ z przykładowo 1 jest skończenie wymiarowa.

Jeżeli $\dim X = n$, to każdy liniowo niezależny zbiór n wektorów $e_1, e_2, \dots, e_n \in X$ nazywamy bazą przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$. Przestrzeń $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ z przykładowo 1 jest skończenie wymiarowa. Jej bazę stanowią, np. wektory $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 1)$.

Jeżeli $\dim X = n$, to każdy liniowo niezależny zbiór n wektorów $e_1, e_2, \dots, e_n \in X$ nazywamy bazą przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$. Przestrzeń $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ z przykładowo 1 jest skończenie wymiarowa. Jej bazę stanowią, np. wektory $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)$. Rzeczywiście, dla dowolnego $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ zachodzi

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Jeżeli $\dim X = n$, to każdy liniowo niezależny zbiór n wektorów $e_1, e_2, \dots, e_n \in X$ nazywamy bazą przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$. Przestrzeń $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ z przykładu 1 jest skończenie wymiarowa. Jej bazę stanowią, np. wektory $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)$. Rzeczywiście, dla dowolnego $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ zachodzi

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Przestrzeń funkcyjna z przykładu 2

Jeżeli $\dim X = n$, to każdy liniowo niezależny zbiór n wektorów $e_1, e_2, \dots, e_n \in X$ nazywamy bazą przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$. Przestrzeń $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ z przykładu 1 jest skończenie wymiarowa. Jej bazę stanowią, np. wektory $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)$. Rzeczywiście, dla dowolnego $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ zachodzi

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Przestrzeń funkcyjna z przykładu 2 jest nieskończenie wymiarowa.

Jeżeli $\dim X = n$, to każdy liniowo niezależny zbiór n wektorów $e_1, e_2, \dots, e_n \in X$ nazywamy bazą przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$. Przestrzeń $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ z przykładowo 1 jest skończenie wymiarowa. Jej bazę stanowią, np. wektory $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)$. Rzeczywiście, dla dowolnego $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ zachodzi

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Przestrzeń funkcyjna z przykładowo 2 jest nieskończenie wymiarowa.

Niech X będzie zbiorem niepustym. Funkcję d określoną w zbiorze $X \times X$ o wartościach nieujemnych spełniającą warunki

$$\textcircled{1} \quad d(x, y) = 0 \iff x = y,$$

Niech X będzie zbiorem niepustym. Funkcję d określoną w zbiorze $X \times X$ o wartościach nieujemnych spełniającą warunki

1 $d(x, y) = 0 \iff x = y,$

2 $d(y, x) = d(x, y),$ (*symetria*)

Niech X będzie zbiorem niepustym. Funkcję d określoną w zbiorze $X \times X$ o wartościach nieujemnych spełniającą warunki

1 $d(x, y) = 0 \iff x = y,$

2 $d(y, x) = d(x, y),$ (symetria)

3 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (warunek trójkąta)

Niech X będzie zbiorem niepustym. Funkcję d określoną w zbiorze $X \times X$ o wartościach nieujemnych spełniającą warunki

❶ $d(x, y) = 0 \iff x = y,$

❷ $d(y, x) = d(x, y),$ (*symetria*)

❸ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*warunek trójkąta*)

nazywamy *metryką* albo *odległością* w X ,

Niech X będzie zbiorem niepustym. Funkcję d określoną w zbiorze $X \times X$ o wartościach nieujemnych spełniającą warunki

❶ $d(x, y) = 0 \iff x = y,$

❷ $d(y, x) = d(x, y),$ (*symetria*)

❸ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*warunek trójkąta*)

nazywamy **metryką** albo **odległością** w X , a parę (X, d) nazywamy **przestrzenią metryczną**.

Niech X będzie zbiorem niepustym. Funkcję d określoną w zbiorze $X \times X$ o wartościach nieujemnych spełniającą warunki

❶ $d(x, y) = 0 \iff x = y,$

❷ $d(y, x) = d(x, y),$ (symetria)

❸ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (warunek trójkąta)

nazywamy **metryką** albo **odległością** w X , a parę (X, d) nazywamy **przestrzenią metryczną**.

Przykład. $X = \mathbb{R}^n$, a odległość $d(x, y)$ pomiędzy elementami $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ definiujemy wzorem

Niech X będzie zbiorem niepustym. Funkcję d określoną w zbiorze $X \times X$ o wartościach nieujemnych spełniającą warunki

❶ $d(x, y) = 0 \iff x = y,$

❷ $d(y, x) = d(x, y),$ (symetria)

❸ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (warunek trójkąta)

nazywamy **metryką** albo **odległością** w X , a parę (X, d) nazywamy **przestrzenią metryczną**.

Przykład. $X = \mathbb{R}^n$, a odległość $d(x, y)$ pomiędzy elementami $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ definiujemy wzorem

$$d(x, y) \equiv \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

Niech X będzie zbiorem niepustym. Funkcję d określoną w zbiorze $X \times X$ o wartościach nieujemnych spełniającą warunki

$$\textcircled{1} \quad d(x, y) = 0 \iff x = y,$$

$$\textcircled{2} \quad d(y, x) = d(x, y), \quad (\textit{symetria})$$

$$\textcircled{3} \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\textit{warunek trójkąta})$$

nazywamy **metryką** albo **odległością** w X , a parę (X, d) nazywamy **przestrzenią metryczną**.

Przykład. $X = \mathbb{R}^n$, a odległość $d(x, y)$ pomiędzy elementami $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ definiujemy wzorem

$$d(x, y) \equiv \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

Zadanie. Pokazać, że tak określona funkcja $d(x, y)$ jest metryką.
Ciąg elementów przestrzeni metrycznej $\{x_n\}$ jest **ciągami**
Cauchy'ego

Zadanie. Pokazać, że tak określona funkcja $d(x, y)$ jest metryką. Ciąg elementów przestrzeni metrycznej $\{x_n\}$ jest **ciągami Cauchy'ego** jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba N , że dla każdych $m, n > N$ zachodzi $d(x, y) < \varepsilon$.

Zadanie. Pokazać, że tak określona funkcja $d(x, y)$ jest metryką. Ciąg elementów przestrzeni metrycznej $\{x_n\}$ jest **ciągami Cauchy'ego** jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba N , że dla każdych $m, n > N$ zachodzi $d(x, y) < \varepsilon$.
Każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego.

Zadanie. Pokazać, że tak określona funkcja $d(x, y)$ jest metryką. Ciąg elementów przestrzeni metrycznej $\{x_n\}$ jest **ciągami Cauchy'ego** jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba N , że dla każdych $m, n > N$ zachodzi $d(x, y) < \varepsilon$. Każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego. Przestrzeń metryczna (X, d) jest **zupełna**,

Zadanie. Pokazać, że tak określona funkcja $d(x, y)$ jest metryką. Ciąg elementów przestrzeni metrycznej $\{x_n\}$ jest **ciągami Cauchy'ego** jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba N , że dla każdych $m, n > N$ zachodzi $d(x, y) < \varepsilon$. Każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego. Przestrzeń metryczna (X, d) jest **zupełna**, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego elementów tej przestrzeni jest zbieżny do elementu $x_0 \in X$.

Zadanie. Pokazać, że tak określona funkcja $d(x, y)$ jest metryką. Ciąg elementów przestrzeni metrycznej $\{x_n\}$ jest **ciągami Cauchy'ego** jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba N , że dla każdych $m, n > N$ zachodzi $d(x, y) < \varepsilon$. Każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego. Przestrzeń metryczna (X, d) jest **zupełna**, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego elementów tej przestrzeni jest zbieżny do elementu $x_0 \in X$.

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję $x \rightarrow \|x\|$ odwzorowującą zbiór X w zbiór liczb nieujemnych nazywamy **normą**,

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję $x \rightarrow \|x\|$ odwzorowującą zbiór X w zbiór liczb nieujemnych nazywamy **normą**, gdy dla każdego $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ spełnia następujące warunki

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję $x \rightarrow \|x\|$ odwzorowującą zbiór X w zbiór liczb nieujemnych nazywamy **normą**, gdy dla każdego $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ spełnia następujące warunki

1 $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0,$

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję $x \rightarrow \|x\|$ odwzorowującą zbiór X w zbiór liczb nieujemnych nazywamy **normą**, gdy dla każdego $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ spełnia następujące warunki

- 1 $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,
- 2 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (*warunek trójkąta*)

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję $x \rightarrow \|x\|$ odwzorowującą zbiór X w zbiór liczb nieujemnych nazywamy **normą**, gdy dla każdych $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ spełnia następujące warunki

- 1 $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,
- 2 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (*warunek trójkąta*)
- 3 $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$, (*jednorodność*).

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję $x \rightarrow \|x\|$ odwzorowującą zbiór X w zbiór liczb nieujemnych nazywamy **normą**, gdy dla każdego $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ spełnia następujące warunki

- 1 $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,
- 2 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (*warunek trójkąta*)
- 3 $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$, (*jednorodność*).

Przestrzeń wektorową X wraz z określoną normą nazywamy

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję $x \rightarrow \|x\|$ odwzorowującą zbiór X w zbiór liczb nieujemnych nazywamy **normą**, gdy dla każdego $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ spełnia następujące warunki

- 1 $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,
- 2 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (*warunek trójkąta*)
- 3 $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$, (*jednorodność*).

Przestrzeń wektorową X wraz z określoną normą nazywamy **przestrzenią unormowaną**.

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję $x \rightarrow \|x\|$ odwzorowującą zbiór X w zbiór liczb nieujemnych nazywamy **normą**, gdy dla każdego $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ spełnia następujące warunki

- 1 $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,
- 2 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (*warunek trójkąta*)
- 3 $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$, (*jednorodność*).

Przestrzeń wektorową X wraz z określoną normą nazywamy **przestrzenią unormowaną**.

Przestrzeń unormowaną zupełną nazywamy

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję $x \rightarrow \|x\|$ odwzorowującą zbiór X w zbiór liczb nieujemnych nazywamy **normą**, gdy dla każdego $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ spełnia następujące warunki

- 1 $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,
- 2 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (*warunek trójkąta*)
- 3 $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$, (*jednorodność*).

Przestrzeń wektorową X wraz z określoną normą nazywamy **przestrzenią unormowaną**.

Przestrzeń unormowaną zupełną nazywamy **przestrzenią Banacha**.

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję $x \rightarrow \|x\|$ odwzorowującą zbiór X w zbiór liczb nieujemnych nazywamy **normą**, gdy dla każdego $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ spełnia następujące warunki

- 1 $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,
- 2 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (*warunek trójkąta*)
- 3 $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$, (*jednorodność*).

Przestrzeń wektorową X wraz z określoną normą nazywamy **przestrzenią unormowaną**.

Przestrzeń unormowaną zupełną nazywamy **przestrzenią Banacha**.

Przestrzeń unormowana jest przestrzenią metryczną.

Rzeczywiście, mając normę, odległość możemy określić następująco

Przestrzeń unormowana jest przestrzenią metryczną.

Rzeczywiście, mając normę, odległość możemy określić następująco

$$d(x, y) \equiv \|x - y\|.$$

Przestrzeń unormowana jest przestrzenią metryczną.

Rzeczywiście, mając normę, odległość możemy określić następująco

$$d(x, y) \equiv \|x - y\|.$$

Zadanie. Pokazać, że powyższy wzór poprawnie określa odległość.

Przestrzeń unormowana jest przestrzenią metryczną.

Rzeczywiście, mając normę, odległość możemy określić następująco

$$d(x, y) \equiv \|x - y\|.$$

Zadanie. Pokazać, że powyższy wzór poprawnie określa odległość.

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję

$$(\cdot | \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$$

spełniającą dla wszystkich $x, y, z \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ następujące warunki

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję

$$(\cdot | \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$$

spełniającą dla wszystkich $x, y, z \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ następujące warunki

① $(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$, (*addytywność*),

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję

$$(\cdot | \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$$

spełniającą dla wszystkich $x, y, z \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ następujące warunki

- 1 $(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$, (*addytywność*),
- 2 $(x|ay) = a(x|y)$, (*jednorodność*),

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję

$$(\cdot | \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$$

spełniającą dla wszystkich $x, y, z \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ następujące warunki

- 1 $(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$, (*addytywność*),
- 2 $(x|ay) = a(x|y)$, (*jednorodność*),
- 3 $(y|x) = (x|y)^*$,

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję

$$(\cdot | \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$$

spełniającą dla wszystkich $x, y, z \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ następujące warunki

- 1 $(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$, (*addytywność*),
- 2 $(x|ay) = a(x|y)$, (*jednorodność*),
- 3 $(y|x) = (x|y)^*$,
- 4 $(x|x) > 0$, dla $x \neq 0$

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję

$$(\cdot | \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$$

spełniającą dla wszystkich $x, y, z \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ następujące warunki

- 1 $(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$, (*addytywność*),
- 2 $(x|ay) = a(x|y)$, (*jednorodność*),
- 3 $(y|x) = (x|y)^*$,
- 4 $(x|x) > 0$, dla $x \neq 0$

nazywamy *iloczynem skalarnym* lub *iloczynem wewnętrznym*.

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję

$$(\cdot | \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$$

spełniającą dla wszystkich $x, y, z \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ następujące warunki

- 1 $(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$, (*addytywność*),
- 2 $(x|ay) = a(x|y)$, (*jednorodność*),
- 3 $(y|x) = (x|y)^*$,
- 4 $(x|x) > 0$, dla $x \neq 0$

nazywamy **iloczynem skalarnym** lub **iloczynem wewnętrznym**.

Przestrzeń wektorową X wraz z określonym iloczynem wewnętrznym nazywamy

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję

$$(\cdot | \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$$

spełniającą dla wszystkich $x, y, z \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ następujące warunki

- 1 $(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$, (*addytywność*),
- 2 $(x|ay) = a(x|y)$, (*jednorodność*),
- 3 $(y|x) = (x|y)^*$,
- 4 $(x|x) > 0$, dla $x \neq 0$

nazywamy **iloczynem skalarnym** lub **iloczynem wewnętrznym**.

Przestrzeń wektorową X wraz z określonym iloczynem wewnętrznym nazywamy **przestrzenią unitarną**.

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję

$$(\cdot | \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$$

spełniającą dla wszystkich $x, y, z \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ następujące warunki

- 1 $(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$, (*addytywność*),
- 2 $(x|ay) = a(x|y)$, (*jednorodność*),
- 3 $(y|x) = (x|y)^*$,
- 4 $(x|x) > 0$, dla $x \neq 0$

nazywamy **iloczynem skalarnym** lub **iloczynem wewnętrznym**.

Przestrzeń wektorową X wraz z określonym iloczynem wewnętrznym nazywamy **przestrzenią unitarną**.

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|)$. Elementy zbioru \mathbb{C}^n mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$,
 $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad (\text{konwencja sumacyjna}).$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|)$. Elementy zbioru \mathbb{C}^n mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$,
 $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad (\text{konwencja sumacyjna}).$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(x|y + z) =$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|)$. Elementy zbioru \mathbb{C}^n mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$,
 $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad (\text{konwencja sumacyjna}).$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(x|y + z) = x_i^* (y_i + z_i) =$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|)$. Elementy zbioru \mathbb{C}^n mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$,
 $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad (\text{konwencja sumacyjna}).$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(x|y + z) = x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i =$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|)$. Elementy zbioru \mathbb{C}^n mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$,
 $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad (\text{konwencja sumacyjna}).$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(x|y + z) = x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z),$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|)$. Elementy zbioru \mathbb{C}^n mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad (\text{konwencja sumacyjna}).$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(x|y+z) = x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z),$$

$(x|ay)$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|)$. Elementy zbioru \mathbb{C}^n mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$,
 $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad (\text{konwencja sumacyjna}).$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}(x|y+z) &= x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z), \\ (x|ay) &= \end{aligned}$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|)$. Elementy zbioru \mathbb{C}^n mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad (\text{konwencja sumacyjna}).$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}(x|y+z) &= x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z), \\ (x|ay) &= x_i^* (ay_i) = ax_i^* y_i = a(x|y),\end{aligned}$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|)$. Elementy zbioru \mathbb{C}^n mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$,
 $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad (\text{konwencja sumacyjna}).$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(x|y+z) = x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z),$$

$$(x|ay) = x_i^* (ay_i) = ax_i^* y_i = a(x|y),$$

$$(y|x)$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|)$. Elementy zbioru \mathbb{C}^n mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad (\text{konwencja sumacyjna}).$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}(x|y+z) &= x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z), \\(x|ay) &= x_i^* (ay_i) = ax_i^* y_i = a(x|y), \\(y|x) &= \end{aligned}$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|)$. Elementy zbioru \mathbb{C}^n mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad (\text{konwencja sumacyjna}).$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(x|y+z) = x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z),$$

$$(x|ay) = x_i^* (ay_i) = ax_i^* y_i = a(x|y),$$

$$(y|x) = y_i^* x_i =$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|)$. Elementy zbioru \mathbb{C}^n mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad (\text{konwencja sumacyjna}).$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(x|y+z) = x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z),$$

$$(x|ay) = x_i^* (ay_i) = ax_i^* y_i = a(x|y),$$

$$(y|x) = y_i^* x_i = (y_i x_i^*)^* =$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$. Elementy zbioru \mathbb{C}^n mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad (\text{konwencja sumacyjna}).$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(x|y+z) = x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z),$$

$$(x|ay) = x_i^* (ay_i) = ax_i^* y_i = a(x|y),$$

$$(y|x) = y_i^* x_i = (y_i x_i^*)^* = (x_i^* y_i)^* =$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$. Elementy zbioru \mathbb{C}^n mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad (\text{konwencja sumacyjna}).$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}(x|y+z) &= x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z), \\(x|ay) &= x_i^* (ay_i) = ax_i^* y_i = a(x|y), \\(y|x) &= y_i^* x_i = (y_i x_i^*)^* = (x_i^* y_i)^* = (x|y)^*,\end{aligned}$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|)$. Elementy zbioru \mathbb{C}^n mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad (\text{konwencja sumacyjna}).$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(x|y+z) = x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z),$$

$$(x|ay) = x_i^* (ay_i) = ax_i^* y_i = a(x|y),$$

$$(y|x) = y_i^* x_i = (y_i x_i^*)^* = (x_i^* y_i)^* = (x|y)^*,$$

$$(x|x)$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|)$. Elementy zbioru \mathbb{C}^n mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad (\text{konwencja sumacyjna}).$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(x|y+z) = x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z),$$

$$(x|ay) = x_i^* (ay_i) = ax_i^* y_i = a(x|y),$$

$$(y|x) = y_i^* x_i = (y_i x_i^*)^* = (x_i^* y_i)^* = (x|y)^*,$$

$$(x|x) =$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$. Elementy zbioru \mathbb{C}^n mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad (\text{konwencja sumacyjna}).$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(x|y+z) = x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z),$$

$$(x|ay) = x_i^* (ay_i) = ax_i^* y_i = a(x|y),$$

$$(y|x) = y_i^* x_i = (y_i x_i^*)^* = (x_i^* y_i)^* = (x|y)^*,$$

$$(x|x) = x_i^* x_i =$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$. Elementy zbioru \mathbb{C}^n mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad (\text{konwencja sumacyjna}).$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(x|y+z) = x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z),$$

$$(x|ay) = x_i^* (ay_i) = ax_i^* y_i = a(x|y),$$

$$(y|x) = y_i^* x_i = (y_i x_i^*)^* = (x_i^* y_i)^* = (x|y)^*,$$

$$(x|x) = x_i^* x_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 > 0,$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$. Elementy zbioru \mathbb{C}^n mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad (\text{konwencja sumacyjna}).$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(x|y+z) = x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z),$$

$$(x|ay) = x_i^* (ay_i) = ax_i^* y_i = a(x|y),$$

$$(y|x) = y_i^* x_i = (y_i x_i^*)^* = (x_i^* y_i)^* = (x|y)^*,$$

$$(x|x) = x_i^* x_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 > 0, \quad \text{dla } x \neq \theta.$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$. Elementy zbioru \mathbb{C}^n mają postać $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad (\text{konwencja sumacyjna}).$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(x|y+z) = x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z),$$

$$(x|ay) = x_i^* (ay_i) = ax_i^* y_i = a(x|y),$$

$$(y|x) = y_i^* x_i = (y_i x_i^*)^* = (x_i^* y_i)^* = (x|y)^*,$$

$$(x|x) = x_i^* x_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 > 0, \quad \text{dla } x \neq \theta.$$

Przykład 2. Rozważmy przestrzeń funkcji zespolonych całkowalnych z kwadratem modułu w obszarze Ω .

Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ definiujemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})d^3r.$$

Przykład 2. Rozważmy przestrzeń funkcji zespolonych całkowalnych z kwadratem modułu w obszarze Ω . Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ definiujemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})d^3r.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

Przykład 2. Rozważmy przestrzeń funkcji zespolonych całkowalnych z kwadratem modułu w obszarze Ω .

Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ definiujemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})d^3r.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(\phi|\psi + \chi)$$

Przykład 2. Rozważmy przestrzeń funkcji zespolonych całkowalnych z kwadratem modułu w obszarze Ω .

Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ definiujemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})d^3r.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(\phi|\psi + \chi) =$$

Przykład 2. Rozważmy przestrzeń funkcji zespolonych całkowalnych z kwadratem modułu w obszarze Ω .

Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ definiujemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})d^3r.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(\phi|\psi + \chi) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) [\psi(\vec{r}) + \chi(\vec{r})] d^3r$$

Przykład 2. Rozważmy przestrzeń funkcji zespolonych całkowalnych z kwadratem modułu w obszarze Ω .

Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ definiujemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})d^3r.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}(\phi|\psi + \chi) &= \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) [\psi(\vec{r}) + \chi(\vec{r})] d^3r \\ &= \end{aligned}$$

Przykład 2. Rozważmy przestrzeń funkcji zespolonych całkownych z kwadratem modułu w obszarze Ω .

Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ definiujemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})d^3r.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}(\phi|\psi + \chi) &= \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) [\psi(\vec{r}) + \chi(\vec{r})] d^3r \\ &= \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})d^3r + \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\chi(\vec{r})d^3r =\end{aligned}$$

Przykład 2. Rozważmy przestrzeń funkcji zespolonych całkowalnych z kwadratem modułu w obszarze Ω . Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ definiujemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})d^3r.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}(\phi|\psi + \chi) &= \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) [\psi(\vec{r}) + \chi(\vec{r})] d^3r \\ &= \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})d^3r + \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\chi(\vec{r})d^3r = (\phi|\psi) + (\phi|\chi),\end{aligned}$$

Przykład 2. Rozważmy przestrzeń funkcji zespolonych całkowalnych z kwadratem modułu w obszarze Ω .

Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ definiujemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})d^3r.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}(\phi|\psi + \chi) &= \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) [\psi(\vec{r}) + \chi(\vec{r})] d^3r \\ &= \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})d^3r + \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\chi(\vec{r})d^3r = (\phi|\psi) + (\phi|\chi),\end{aligned}$$

$$(\phi|a\psi) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) [a\psi(\vec{r})] d^3r =$$

$$(\phi|a\psi) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) [a\psi(\vec{r})] d^3r = a \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r =$$

$$(\phi|a\psi) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) [a\psi(\vec{r})] d^3r = a \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r = a(\phi|\psi),$$

$$(\phi|a\psi) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) [a\psi(\vec{r})] d^3r = a \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r = a(\phi|\psi),$$

$$(\psi|\phi)$$

$$(\phi|a\psi) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) [a\psi(\vec{r})] d^3r = a \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r = a(\phi|\psi),$$

$$(\psi|\phi) =$$

$$(\phi|a\psi) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) [a\psi(\vec{r})] d^3r = a \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r = a(\phi|\psi),$$

$$(\psi|\phi) = \int_{\Omega} \psi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d^3r =$$

$$(\phi|a\psi) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) [a\psi(\vec{r})] d^3r = a \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r = a(\phi|\psi),$$

$$(\psi|\phi) = \int_{\Omega} \psi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d^3r = \left[\int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right]^* =$$

$$(\phi|a\psi) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) [a\psi(\vec{r})] d^3r = a \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r = a(\phi|\psi),$$

$$(\psi|\phi) = \int_{\Omega} \psi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d^3r = \left[\int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right]^* = (\phi|\psi)^*,$$

$$(\phi|a\psi) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) [a\psi(\vec{r})] d^3r = a \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r = a(\phi|\psi),$$

$$(\psi|\phi) = \int_{\Omega} \psi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d^3r = \left[\int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right]^* = (\phi|\psi)^*,$$

$$(\phi|\phi)$$

$$(\phi|a\psi) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) [a\psi(\vec{r})] d^3r = a \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r = a(\phi|\psi),$$

$$(\psi|\phi) = \int_{\Omega} \psi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d^3r = \left[\int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right]^* = (\phi|\psi)^*,$$

$$(\phi|\phi) =$$

$$(\phi|a\psi) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) [a\psi(\vec{r})] d^3r = a \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r = a(\phi|\psi),$$

$$(\psi|\phi) = \int_{\Omega} \psi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d^3r = \left[\int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right]^* = (\phi|\psi)^*,$$

$$(\phi|\phi) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d^3r =$$

$$(\phi|a\psi) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) [a\psi(\vec{r})] d^3r = a \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r = a(\phi|\psi),$$

$$(\psi|\phi) = \int_{\Omega} \psi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d^3r = \left[\int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right]^* = (\phi|\psi)^*,$$

$$(\phi|\phi) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d^3r = \int_{\Omega} |\phi(\vec{r})|^2 d^3r > 0,$$

$$(\phi|a\psi) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) [a\psi(\vec{r})] d^3r = a \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r = a(\phi|\psi),$$

$$(\psi|\phi) = \int_{\Omega} \psi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d^3r = \left[\int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right]^* = (\phi|\psi)^*,$$

$$(\phi|\phi) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d^3r = \int_{\Omega} |\phi(\vec{r})|^2 d^3r > 0,$$

dla $\phi(\vec{r}) \neq 0$

$$(\phi|a\psi) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) [a\psi(\vec{r})] d^3r = a \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r = a(\phi|\psi),$$

$$(\psi|\phi) = \int_{\Omega} \psi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d^3r = \left[\int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right]^* = (\phi|\psi)^*,$$

$$(\phi|\phi) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d^3r = \int_{\Omega} |\phi(\vec{r})|^2 d^3r > 0,$$

dla $\phi(\vec{r}) \neq 0$ na podzbiore niezerowej miary, **end.**

$$(\phi|a\psi) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) [a\psi(\vec{r})] d^3r = a \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r = a(\phi|\psi),$$

$$(\psi|\phi) = \int_{\Omega} \psi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d^3r = \left[\int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right]^* = (\phi|\psi)^*,$$

$$(\phi|\phi) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d^3r = \int_{\Omega} |\phi(\vec{r})|^2 d^3r > 0,$$

dla $\phi(\vec{r}) \neq 0$ na podzbiornie niezerowej miary, **end.**

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$(x + y|z) =$$

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$(x + y|z) = (z|x + y)^* =$$

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$(x + y|z) = (z|x + y)^* = [(z|x) + (z|y)]^*$$

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$(x + y|z) = (z|x + y)^* = [(z|x) + (z|y)]^* \\ =$$

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$\begin{aligned}(x + y|z) &= (z|x + y)^* = [(z|x) + (z|y)]^* \\ &= (z|x)^* + (z|y)^* =\end{aligned}$$

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$\begin{aligned}(x + y|z) &= (z|x + y)^* = [(z|x) + (z|y)]^* \\ &= (z|x)^* + (z|y)^* = (x|z) + (y|z).\end{aligned}$$

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$\begin{aligned}(x + y|z) &= (z|x + y)^* = [(z|x) + (z|y)]^* \\ &= (z|x)^* + (z|y)^* = (x|z) + (y|z).\end{aligned}$$

Addytywność zachodzi również ze względu na pierwszy argument.

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$\begin{aligned}(x + y|z) &= (z|x + y)^* = [(z|x) + (z|y)]^* \\ &= (z|x)^* + (z|y)^* = (x|z) + (y|z).\end{aligned}$$

Addytywność zachodzi również ze względu na pierwszy argument.

$$(ax|y) =$$

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$\begin{aligned}(x + y|z) &= (z|x + y)^* = [(z|x) + (z|y)]^* \\ &= (z|x)^* + (z|y)^* = (x|z) + (y|z).\end{aligned}$$

Addytywność zachodzi również ze względu na pierwszy argument.

$$(ax|y) = (y|ax)^* =$$

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$\begin{aligned}(x + y|z) &= (z|x + y)^* = [(z|x) + (z|y)]^* \\ &= (z|x)^* + (z|y)^* = (x|z) + (y|z).\end{aligned}$$

Addytywność zachodzi również ze względu na pierwszy argument.

$$(ax|y) = (y|ax)^* = [a(y|x)]^* =$$

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$\begin{aligned}(x + y|z) &= (z|x + y)^* = [(z|x) + (z|y)]^* \\ &= (z|x)^* + (z|y)^* = (x|z) + (y|z).\end{aligned}$$

Addytywność zachodzi również ze względu na pierwszy argument.

$$(ax|y) = (y|ax)^* = [a(y|x)]^* = a^*(y|x)^* =$$

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$\begin{aligned}(x + y|z) &= (z|x + y)^* = [(z|x) + (z|y)]^* \\ &= (z|x)^* + (z|y)^* = (x|z) + (y|z).\end{aligned}$$

Addytywność zachodzi również ze względu na pierwszy argument.

$$(ax|y) = (y|ax)^* = [a(y|x)]^* = a^*(y|x)^* = a^*(x|y).$$

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$\begin{aligned}(x + y|z) &= (z|x + y)^* = [(z|x) + (z|y)]^* \\ &= (z|x)^* + (z|y)^* = (x|z) + (y|z).\end{aligned}$$

Addytywność zachodzi również ze względu na pierwszy argument.

$$(ax|y) = (y|ax)^* = [a(y|x)]^* = a^*(y|x)^* = a^*(x|y).$$

Wyciągając czynnik liczbowy z pierwszego argumentu trzeba dokonać jego sprzężenia zespolonego.

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$\begin{aligned}(x + y|z) &= (z|x + y)^* = [(z|x) + (z|y)]^* \\ &= (z|x)^* + (z|y)^* = (x|z) + (y|z).\end{aligned}$$

Addytywność zachodzi również ze względu na pierwszy argument.

$$(ax|y) = (y|ax)^* = [a(y|x)]^* = a^*(y|x)^* = a^*(x|y).$$

Wyciągając czynnik liczbowy z pierwszego argumentu trzeba dokonać jego sprzężenia zespolonego.

$$(x|\theta) = (x|y - y) =$$

$$(x|\theta) = (x|y - y) = (x|y) - (x|y) =$$

$$(x|\theta) = (x|y - y) = (x|y) - (x|y) = 0,$$

$$\begin{aligned} (x|\theta) &= (x|y - y) = (x|y) - (x|y) = 0, \\ (\theta|x) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x|\theta) &= (x|y - y) = (x|y) - (x|y) = 0, \\ (\theta|x) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x|\theta) &= (x|y - y) = (x|y) - (x|y) = 0, \\ (\theta|x) &= (x|\theta)^* =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x|\theta) &= (x|y - y) = (x|y) - (x|y) = 0, \\ (\theta|x) &= (x|\theta)^* = 0^* = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x|\theta) &= (x|y - y) = (x|y) - (x|y) = 0, \\ (\theta|x) &= (x|\theta)^* = 0^* = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x|\theta) &= (x|y - y) = (x|y) - (x|y) = 0, \\ (\theta|x) &= (x|\theta)^* = 0^* = 0.\end{aligned}$$

Jeżeli jeden z argumentów jest wektorem zerowym, to iloczyn skalarny jest równy 0.

$$\begin{aligned}(x|\theta) &= (x|y - y) = (x|y) - (x|y) = 0, \\ (\theta|x) &= (x|\theta)^* = 0^* = 0.\end{aligned}$$

Jeżeli jeden z argumentów jest wektorem zerowym, to iloczyn skalarny jest równy 0.

Zdefiniujemy funkcję

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} \quad \text{dla } x \in X.$$

$$\begin{aligned}(x|\theta) &= (x|y - y) = (x|y) - (x|y) = 0, \\ (\theta|x) &= (x|\theta)^* = 0^* = 0.\end{aligned}$$

Jeżeli jeden z argumentów jest wektorem zerowym, to iloczyn skalarny jest równy 0.

Zdefiniujemy funkcję

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} \quad \text{dla } x \in X.$$

Nierówność Schwarz. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Nierówność Schwarz. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$

Nierówność Schwarz. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0.

Nierówność Schwarz. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0.

Niech $x \neq \theta$ i $y \neq \theta$, wówczas dla dowolnego $a \in \mathbb{K}$

Nierówność Schwarz. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0.
Niech $x \neq \theta$ i $y \neq \theta$, wówczas dla dowolnego $a \in \mathbb{K}$

$$0 \leq (x - ay|x - ay)$$

Nierówność Schwarz. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0.
Niech $x \neq \theta$ i $y \neq \theta$, wówczas dla dowolnego $a \in \mathbb{K}$

$$0 \leq (x - ay|x - ay) = (x|x) - a(x|y) - a^*(y|x) + a^*a(y|y).$$

Nierówność Schwarz. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0.
Niech $x \neq \theta$ i $y \neq \theta$, wówczas dla dowolnego $a \in \mathbb{K}$

$$0 \leq (x - ay|x - ay) = (x|x) - a(x|y) - a^*(y|x) + a^*a(y|y).$$

Przyjmijmy $a = (x|y)^*/(y|y)$

Nierówność Schwarz. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0.
Niech $x \neq \theta$ i $y \neq \theta$, wówczas dla dowolnego $a \in \mathbb{K}$

$$0 \leq (x - ay|x - ay) = (x|x) - a(x|y) - a^*(y|x) + a^*a(y|y).$$

Przyjmijmy $a = (x|y)^*/(y|y) \Rightarrow a^* = (x|y)/(y|y)$

Nierówność Schwarz. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0.
Niech $x \neq \theta$ i $y \neq \theta$, wówczas dla dowolnego $a \in \mathbb{K}$

$$0 \leq (x - ay|x - ay) = (x|x) - a(x|y) - a^*(y|x) + a^*a(y|y).$$

Przyjmijmy $a = (x|y)^*/(y|y) \Rightarrow a^* = (x|y)/(y|y)$

$$0 \leq (x|x) - \frac{(x|y)^*(x|y)}{(y|y)} - \frac{(x|y)(y|x)}{(y|y)} + \frac{(x|y)(x|y)^*(y|y)}{(y|y)^2}$$

Nierówność Schwarz. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0.
Niech $x \neq \theta$ i $y \neq \theta$, wówczas dla dowolnego $a \in \mathbb{K}$

$$0 \leq (x - ay|x - ay) = (x|x) - a(x|y) - a^*(y|x) + a^*a(y|y).$$

Przyjmijmy $a = (x|y)^*/(y|y) \Rightarrow a^* = (x|y)/(y|y)$

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x|x) - \frac{(x|y)^*(x|y)}{(y|y)} - \frac{(x|y)(y|x)}{(y|y)} + \frac{(x|y)(x|y)^*(y|y)}{(y|y)^2} \\ &= \end{aligned}$$

Nierówność Schwarz. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0.
Niech $x \neq \theta$ i $y \neq \theta$, wówczas dla dowolnego $a \in \mathbb{K}$

$$0 \leq (x - ay|x - ay) = (x|x) - a(x|y) - a^*(y|x) + a^*a(y|y).$$

Przyjmijmy $a = (x|y)^*/(y|y) \Rightarrow a^* = (x|y)/(y|y)$

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x|x) - \frac{(x|y)^*(x|y)}{(y|y)} - \frac{(x|y)(y|x)}{(y|y)} + \frac{(x|y)(x|y)^*(y|y)}{(y|y)^2} \\ &= \|x\|^2 - \frac{|(x|y)|^2}{\|y\|^2} \end{aligned}$$

Nierówność Schwarz. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0.
Niech $x \neq \theta$ i $y \neq \theta$, wówczas dla dowolnego $a \in \mathbb{K}$

$$0 \leq (x - ay|x - ay) = (x|x) - a(x|y) - a^*(y|x) + a^*a(y|y).$$

Przyjmijmy $a = (x|y)^*/(y|y) \Rightarrow a^* = (x|y)/(y|y)$

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x|x) - \frac{(x|y)^*(x|y)}{(y|y)} - \frac{(x|y)(y|x)}{(y|y)} + \frac{(x|y)(x|y)^*(y|y)}{(y|y)^2} \\ &= \|x\|^2 - \frac{|(x|y)|^2}{\|y\|^2} \Rightarrow |(x|y)| \leq \|x\| \|y\|. \end{aligned}$$

Nierówność Schwarz. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0.
Niech $x \neq \theta$ i $y \neq \theta$, wówczas dla dowolnego $a \in \mathbb{K}$

$$0 \leq (x - ay|x - ay) = (x|x) - a(x|y) - a^*(y|x) + a^*a(y|y).$$

Przyjmijmy $a = (x|y)^*/(y|y) \Rightarrow a^* = (x|y)/(y|y)$

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x|x) - \frac{(x|y)^*(x|y)}{(y|y)} - \frac{(x|y)(y|x)}{(y|y)} + \frac{(x|y)(x|y)^*(y|y)}{(y|y)^2} \\ &= \|x\|^2 - \frac{|(x|y)|^2}{\|y\|^2} \Rightarrow |(x|y)| \leq \|x\| \|y\|. \end{aligned}$$

Z powyższego dowodu wynika, że w nierówności Schwarz'a zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy wektory x i y są liniowo zależne.

Zadanie. Pokazać, że funkcja określona wzorem

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} \quad \text{dla } x \in X$$

spełnia warunki normy.

Z powyższego dowodu wynika, że w nierówności Schwarz'a zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy wektory x i y są liniowo zależne.

Zadanie. Pokazać, że funkcja określona wzorem

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} \quad \text{dla } x \in X$$

spełnia warunki normy.

Iloczyn skalarny w przestrzeni unitarnej X jest odwzorowaniem ciągłym.

Z powyższego dowodu wynika, że w nierówności Schwarz'a zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy wektory x i y są liniowo zależne.

Zadanie. Pokazać, że funkcja określona wzorem

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} \quad \text{dla } x \in X$$

spełnia warunki normy.

Iloczyn skalarny w przestrzeni unitarnej X jest odwzorowaniem ciągłym.

Dowód. $(\cdot | \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ jest odwzorowaniem ciągłym jeśli z $x_n \rightarrow x \in X$ i $y_n \rightarrow y \in X$ wynika $(x_n | y_n) \rightarrow (x | y)$.

Z powyższego dowodu wynika, że w nierówności Schwarz zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy wektory x i y są liniowo zależne.

Zadanie. Pokazać, że funkcja określona wzorem

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} \quad \text{dla } x \in X$$

spełnia warunki normy.

Iloczyn skalarny w przestrzeni unitarnej X jest odwzorowaniem ciągłym.

Dowód. $(\cdot | \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ jest odwzorowaniem ciągłym jeśli z $x_n \rightarrow x \in X$ i $y_n \rightarrow y \in X$ wynika $(x_n | y_n) \rightarrow (x | y)$.

$$\begin{aligned} |(x_n|y_n) - (x|y)| &= |(x_n|y_n) - (x|y_n) + (x|y_n) - (x|y)| \\ &= |(x_n - x|y_n) + (x|y_n - y)| \leq |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n - y)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(x_n|y_n) - (x|y)| &= |(x_n|y_n) - (x|y_n) + (x|y_n) - (x|y)| \\ &= |(x_n - x|y_n) + (x|y_n - y)| \leq |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n - y)| \\ &\leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(x_n|y_n) - (x|y)| &= |(x_n|y_n) - (x|y_n) + (x|y_n) - (x|y)| \\ &= |(x_n - x|y_n) + (x|y_n - y)| \leq |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n - y)| \\ &\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(x_n|y_n) - (x|y)| &= |(x_n|y_n) - (x|y_n) + (x|y_n) - (x|y)| \\ &= |(x_n - x|y_n) + (x|y_n - y)| \leq |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n - y)| \\ &\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z nierówności Schwartza

$$\begin{aligned} |(x_n|y_n) - (x|y)| &= |(x_n|y_n) - (x|y_n) + (x|y_n) - (x|y)| \\ &= |(x_n - x|y_n) + (x|y_n - y)| \leq |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n - y)| \\ &\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z nierówności Schwartza i z tego, że ciąg $\{y_n\}$ jest ograniczony, gdyż jest zbieżny.

$$\begin{aligned} |(x_n|y_n) - (x|y)| &= |(x_n|y_n) - (x|y_n) + (x|y_n) - (x|y)| \\ &= |(x_n - x|y_n) + (x|y_n - y)| \leq |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n - y)| \\ &\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z nierówności Schwartza i z tego, że ciąg $\{y_n\}$ jest ograniczony, gdyż jest zbieżny.

Wektory $x, y \in X$ są ortogonalne jeśli $(x|y) = 0$.

$$\begin{aligned} |(x_n|y_n) - (x|y)| &= |(x_n|y_n) - (x|y_n) + (x|y_n) - (x|y)| \\ &= |(x_n - x|y_n) + (x|y_n - y)| \leq |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n - y)| \\ &\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z nierówności Schwartza i z tego, że ciąg $\{y_n\}$ jest ograniczony, gdyż jest zbieżny.

Wektory $x, y \in X$ są ortogonalne jeśli $(x|y) = 0$.

Niepusty podzbiór $A \subset X$ nie zawierający wektora zerowego, którego dowolne dwa elementy są ortogonalne nazywamy

$$\begin{aligned} |(x_n|y_n) - (x|y)| &= |(x_n|y_n) - (x|y_n) + (x|y_n) - (x|y)| \\ &= |(x_n - x|y_n) + (x|y_n - y)| \leq |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n - y)| \\ &\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z nierówności Schwartza i z tego, że ciąg $\{y_n\}$ jest ograniczony, gdyż jest zbieżny.

Wektory $x, y \in X$ są ortogonalne jeśli $(x|y) = 0$.

Niepusty podzbiór $A \subset X$ nie zawierający wektora zerowego, którego dowolne dwa elementy są ortogonalne nazywamy układem ortogonalnym wektorów.

$$\begin{aligned} |(x_n|y_n) - (x|y)| &= |(x_n|y_n) - (x|y_n) + (x|y_n) - (x|y)| \\ &= |(x_n - x|y_n) + (x|y_n - y)| \leq |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n - y)| \\ &\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z nierówności Schwartz'a i z tego, że ciąg $\{y_n\}$ jest ograniczony, gdyż jest zbieżny.

Wektory $x, y \in X$ są ortogonalne jeśli $(x|y) = 0$.

Niepusty podzbiór $A \subset X$ nie zawierający wektora zerowego, którego dowolne dwa elementy są ortogonalne nazywamy **układem ortogonalnym wektorów**. Jeżeli prócz tego $\|x\| = 1$ dla wszystkich $x \in A$,

$$\begin{aligned} |(x_n|y_n) - (x|y)| &= |(x_n|y_n) - (x|y_n) + (x|y_n) - (x|y)| \\ &= |(x_n - x|y_n) + (x|y_n - y)| \leq |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n - y)| \\ &\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z nierówności Schwartza i z tego, że ciąg $\{y_n\}$ jest ograniczony, gdyż jest zbieżny.

Wektory $x, y \in X$ są ortogonalne jeśli $(x|y) = 0$.

Niepusty podzbiór $A \subset X$ nie zawierający wektora zerowego, którego dowolne dwa elementy są ortogonalne nazywamy **układem ortogonalnym wektorów**. Jeżeli prócz tego $\|x\| = 1$ dla wszystkich $x \in A$, to A nazywamy **układem ortonormalnym**.

$$\begin{aligned} |(x_n|y_n) - (x|y)| &= |(x_n|y_n) - (x|y_n) + (x|y_n) - (x|y)| \\ &= |(x_n - x|y_n) + (x|y_n - y)| \leq |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n - y)| \\ &\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z nierówności Schwartza i z tego, że ciąg $\{y_n\}$ jest ograniczony, gdyż jest zbieżny.

Wektory $x, y \in X$ są ortogonalne jeśli $(x|y) = 0$.

Niepusty podzbiór $A \subset X$ nie zawierający wektora zerowego, którego dowolne dwa elementy są ortogonalne nazywamy **układem ortogonalnym wektorów**. Jeżeli prócz tego $\|x\| = 1$ dla wszystkich $x \in A$, to A nazywamy **układem ortonormalnym**.

Przykłady.

- Wektory

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

tworzą układ ortonormalny w \mathbb{R}^n lub \mathbb{C}^n .

- Funkcje

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 3t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 3t}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

tworzą układ ortonormalny w przestrzeni $L^2(-\pi, \pi)$ funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a z kwadratem w przedziale $(-\pi, \pi)$.

Zadanie. Pokazać, że tak w istocie jest.

Przykłady.

- Wektory

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

tworzą układ ortonormalny w \mathbb{R}^n lub \mathbb{C}^n .

- Funkcje

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 3t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 3t}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

tworzą układ ortonormalny w przestrzeni $L^2(-\pi, \pi)$ funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a z kwadratem w przedziale $(-\pi, \pi)$.

Zadanie. Pokazać, że tak w istocie jest.

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X . Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w szereg Fouriera

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X . Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w **szereg Fouriera**

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n,$$

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X . Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w **szereg Fouriera**

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad \text{gdzie} \quad c_n = \frac{(\varphi_n | \varphi)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X . Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w szereg Fouriera

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad \text{gdzie} \quad c_n = \frac{(\varphi_n | \varphi)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$(\varphi_i | \varphi) =$$

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X . Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w **szereg Fouriera**

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad \text{gdzie} \quad c_n = \frac{(\varphi_n | \varphi)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$(\varphi_i | \varphi) = (\varphi_i | \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n) =$$

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X . Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w **szereg Fouriera**

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad \text{gdzie} \quad c_n = \frac{(\varphi_n | \varphi)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$(\varphi_i | \varphi) = (\varphi_i | \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\varphi_i | \varphi_n) =$$

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X . Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w **szereg Fouriera**

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad \text{gdzie} \quad c_n = \frac{(\varphi_n | \varphi)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$(\varphi_i | \varphi) = (\varphi_i | \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\varphi_i | \varphi_n) = c_i (\varphi_i | \varphi_i) =$$

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X . Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w szereg Fouriera

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad \text{gdzie} \quad c_n = \frac{(\varphi_n | \varphi)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$(\varphi_i | \varphi) = (\varphi_i | \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\varphi_i | \varphi_n) = c_i (\varphi_i | \varphi_i) = c_i \|\varphi_i\|^2.$$

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X . Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w szereg Fouriera

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad \text{gdzie} \quad c_n = \frac{(\varphi_n | \varphi)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$(\varphi_i | \varphi) = (\varphi_i | \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\varphi_i | \varphi_n) = c_i (\varphi_i | \varphi_i) = c_i \|\varphi_i\|^2.$$

Dla $\{\varphi_n\}$ będącego układem ortonormalnym

$$\|\varphi_n\| = 1$$

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X . Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w szereg Fouriera

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad \text{gdzie} \quad c_n = \frac{(\varphi_n | \varphi)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$(\varphi_i | \varphi) = (\varphi_i | \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\varphi_i | \varphi_n) = c_i (\varphi_i | \varphi_i) = c_i \|\varphi_i\|^2.$$

Dla $\{\varphi_n\}$ będącego układem ortonormalnym

$$\|\varphi_n\| = 1 \quad \Rightarrow \quad c_n = (\varphi_n | \varphi).$$

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X . Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w szereg Fouriera

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad \text{gdzie} \quad c_n = \frac{(\varphi_n | \varphi)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$(\varphi_i | \varphi) = (\varphi_i | \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\varphi_i | \varphi_n) = c_i (\varphi_i | \varphi_i) = c_i \|\varphi_i\|^2.$$

Dla $\{\varphi_n\}$ będącego układem ortonormalnym

$$\|\varphi_n\| = 1 \quad \Rightarrow \quad c_n = (\varphi_n | \varphi).$$

Rozwinięcie w szereg Fouriera jest analogiem rozwinięcia wektora w bazie ortonormalnej w przestrzeni skończonej wymiarowej.

Weźmy np. $x \in \mathbb{R}^n$, albo $x \in \mathbb{C}^n$.

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n,$$

gdzie

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Rozwinięcie w szereg Fouriera jest analogiem rozwinięcia wektora w bazie ortonormalnej w przestrzeni skończonej wymiarowej.

Weźmy np. $x \in \mathbb{R}^n$, albo $x \in \mathbb{C}^n$.

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n,$$

gdzie

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Przestrzeń unitarną z iloczynem skalarnym (\mid) nazywamy **przestrzenią Hilberta**, gdy jest ona zupełna przy odległości $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y \mid x - y)}$.

Rozwinięcie w szereg Fouriera jest analogiem rozwinięcia wektora w bazie ortonormalnej w przestrzeni skończonej wymiarowej.

Weźmy np. $x \in \mathbb{R}^n$, albo $x \in \mathbb{C}^n$.

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n,$$

gdzie

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Przestrzeń unitarną z iloczynem skalarnym (\mid) nazywamy **przestrzenią Hilberta**, gdy jest ona zupełna przy odległości

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y \mid x - y)}.$$