Funkcje własne operatorów pędu i energii

Wykład 5

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

15 kwietnia 2020

Rozważmy równanie własne operatora pędu w reprezentacji położeniowej

$$-i\hbar\vec{\nabla} u_{\vec{p}}(\vec{r}) = \vec{p}\, u_{\vec{p}}(\vec{r})\,.$$

Zwróćmy uwagę, że $\vec{p} = [p_x, p_y, p_z]$ po prawej stronie równania jest wektorem, którego składowe są liczbami rzeczywistymi, $p_x, p_y, p_z \in \mathbb{R}$.

Równanie własne operatora pędu

Rozważmy równanie własne operatora pędu w reprezentacji położeniowej

$$-i\hbar\vec{\nabla}\, u_{\vec{p}}\,(\vec{r}) = \vec{p}\; u_{\vec{p}}\,(\vec{r})\,.$$

Zwróćmy uwagę, że $\vec{p} = [p_x, p_y, p_z]$ po prawej stronie równania jest wektorem, którego składowe są liczbami rzeczywistymi, $p_x, p_y, p_z \in \mathbb{R}$.

Po rozpisaniu na składowe otrzymamy 3 równania skalarne:

$$
\begin{aligned}
-i\hbar\frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial x} &= p_x\, u_{\vec{p}}(\vec{r})\,, \\
-i\hbar\frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial y} &= p_y\, u_{\vec{p}}(\vec{r})\,, \\
-i\hbar\frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial z} &= p_z\, u_{\vec{p}}(\vec{r})\,.
\end{aligned}
$$

Ten układ równań możemy scałkować rozseparowując zmienne.

Po rozpisaniu na składowe otrzymamy 3 równania skalarne:

$$
\begin{aligned}
-i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial x} &= p_x \, u_{\vec{p}}(\vec{r}) \,, \\
-i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial y} &= p_y \, u_{\vec{p}}(\vec{r}) \,, \\
-i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial z} &= p_z \, u_{\vec{p}}(\vec{r}) \,.
\end{aligned}
$$

Ten układ równań możemy scałkować rozseparowując zmienne.
Podstawmy

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) = u_1(x) u_2(y) u_3(z)$$

do pierwszego rówania, wówczas otrzymamy

Po rozpisaniu na składowe otrzymamy 3 równania skalarne:

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial x} &= p_x \, u_{\vec{p}}(\vec{r}) \,, \\ -i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial y} &= p_y \, u_{\vec{p}}(\vec{r}) \,, \\ -i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial z} &= p_z \, u_{\vec{p}}(\vec{r}) \,. \end{aligned}$$

Ten układ równań możemy scałkować rozseparowując zmienne. Podstawmy

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) = u_1(x) u_2(y) u_3(z)$$

do pierwszego rówania, wówczas otrzymamy

Równanie własne operatora pędu

$$-i\hbar\frac{\mathrm{d}u_1(x)}{\mathrm{d}x}\ u_2(y)u_3(z) = p_x\ u_1(x)u_2(y)u_3(z).$$

Ponieważ funkcje $u_2(y)u_3(z)$ są dowolne, to współczynniki przy nich muszą być równe:

$$-i\hbar\frac{\mathrm{d}u_1(x)}{\mathrm{d}x} = p_x\ u_1(x).$$

Równanie własne operatora pędu

$$-i\hbar\frac{\mathrm{d}u_1(x)}{\mathrm{d}x}\ u_2(y)u_3(z) = p_x\ u_1(x)u_2(y)u_3(z).$$

Ponieważ funkcje $u_2(y)u_3(z)$ są dowolne, to współczynniki przy nich muszą być równe:

$$-i\hbar\frac{\mathrm{d}u_1(x)}{\mathrm{d}x} = p_x\ u_1(x).$$

Podzielmy obie strony tego równania przez $u_1(x)$ i pomnóżmy przez $\mathrm{d}x$, wówczas otrzymamy równanie o zmiennych rozdzielonych:

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{u_1} = \frac{i}{\hbar}p_x\mathrm{d}x.$$

Równanie własne operatora pędu

$$-i\hbar \frac{\mathrm{d}u_1(x)}{\mathrm{d}x}\; u_2(y)u_3(z) = p_x\; u_1(x)u_2(y)u_3(z).$$

Ponieważ funkcje $u_2(y)u_3(z)$ są dowolne, to współczynniki przy nich muszą być równe:

$$-i\hbar \frac{\mathrm{d}u_1(x)}{\mathrm{d}x} = p_x\; u_1(x).$$

Podzielmy obie strony tego równania przez $u_1(x)$ i pomnóżmy przez $\mathrm{d}x$, wówczas otrzymamy równanie o zmiennych rozdzielonych:

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{u_1} = \frac{i}{\hbar} p_x \mathrm{d}x.$$

Równanie własne operatora pędu

Całkując obustronnie

$$\int \frac{\mathrm{d}u_1}{u_1} = \int \frac{i}{\hbar} p_x \mathrm{d}x$$

otrzymamy

$$\ln u_1 = \frac{i}{\hbar} p_x \int \mathrm{d}x =$$

Równanie własne operatora pędu

Całkując obustronnie

$$\int \frac{\mathrm{d}u_1}{u_1} = \int \frac{i}{\hbar} p_x \mathrm{d}x$$

otrzymamy

$$\ln u_1 = \frac{i}{\hbar} p_x \int \mathrm{d}x = \frac{i}{\hbar} p_x x + \ln C_1,$$

Całkując obustronnie

$$\int \frac{\mathrm{d}u_1}{u_1} = \int \frac{i}{\hbar} p_x \mathrm{d}x$$

otrzymamy

$$\ln u_1 = \frac{i}{\hbar} p_x \int \mathrm{d}x = \frac{i}{\hbar} p_x x + \ln C_1,$$

gdzie stałą dowolną oznaczyliśmy $\ln C_1$.

Całkując obustronnie

$$\int \frac{\mathrm{d}u_1}{u_1} = \int \frac{i}{\hbar} p_x \mathrm{d}x$$

otrzymamy

$$\ln u_1 = \frac{i}{\hbar} p_x \int \mathrm{d}x = \frac{i}{\hbar} p_x x + \ln C_1,$$

gdzie stałą dowolną oznaczyliśmy $\ln C_1$. Wykorzystując tą równość możemy napisać

$$e^{\ln u_1} =$$

Całkując obustronnie

$$\int \frac{\mathrm{d}u_1}{u_1} = \int \frac{i}{\hbar} p_x \mathrm{d}x$$

otrzymamy

$$\ln u_1 = \frac{i}{\hbar} p_x \int \mathrm{d}x = \frac{i}{\hbar} p_x x + \ln C_1,$$

gdzie stałą dowolną oznaczyliśmy $\ln C_1$. Wykorzystując tą równość możemy napisać

$$e^{\ln u_1} = e^{\ln C_1 + \frac{i}{\hbar} p_x x} =$$

Całkując obustronnie

$$\int \frac{\mathrm{d}u_1}{u_1} = \int \frac{i}{\hbar} p_x \mathrm{d}x$$

otrzymamy

$$\ln u_1 = \frac{i}{\hbar} p_x \int \mathrm{d}x = \frac{i}{\hbar} p_x x + \ln C_1,$$

gdzie stałą dowolną oznaczyliśmy $\ln C_1$. Wykorzystując tą równość możemy napisać

$$e^{\ln u_1} = e^{\ln C_1 + \frac{i}{\hbar} p_x x} = e^{\ln C_1}\ e^{\frac{i}{\hbar} p_x x},$$

Całkując obustronnie

$$\int \frac{\mathrm{d}u_1}{u_1} = \int \frac{i}{\hbar} p_x \mathrm{d}x$$

otrzymamy

$$\ln u_1 = \frac{i}{\hbar} p_x \int \mathrm{d}x = \frac{i}{\hbar} p_x x + \ln C_1,$$

gdzie stałą dowolną oznaczyliśmy $\ln C_1$. Wykorzystując tą równość możemy napisać

$$e^{\ln u_1} = e^{\ln C_1 + \frac{i}{\hbar} p_x x} = e^{\ln C_1} \; e^{\frac{i}{\hbar} p_x x},$$

co daje

$$u_1(x) = C_1 \; e^{\frac{i}{\hbar} p_x x}.$$

Podobnie, podstawiając

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) = u_1(x) u_2(y) u_3(z)$$

co daje

$$u_1(x) = C_1 \, e^{\frac{i}{\hbar} p_x x}.$$

Podobnie, podstawiając

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) = u_1(x) u_2(y) u_3(z)$$

do równań

$$-i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial y} = p_y \, u_{\vec{p}}(\vec{r}),$$
$$-i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial z} = p_z \, u_{\vec{p}}(\vec{r})$$

co daje

$$u_1(x) = C_1 \; e^{\frac{i}{\hbar} p_x x}.$$

Podobnie, podstawiając

$$u_{\vec{p}}\,(\vec{r}) = u_1(x) u_2(y) u_3(z)$$

do równań

$$-i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}\,(\vec{r})}{\partial y} = p_y \; u_{\vec{p}}\,(\vec{r}) \, ,$$
$$-i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}\,(\vec{r})}{\partial z} = p_z \; u_{\vec{p}}\,(\vec{r})$$

i postępując analogicznie

co daje

$$u_1(x) = C_1 \, e^{\frac{i}{\hbar} p_x x}.$$

Podobnie, podstawiając

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) = u_1(x) u_2(y) u_3(z)$$

do równań

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial y} &= p_y \, u_{\vec{p}}(\vec{r}), \\ -i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial z} &= p_z \, u_{\vec{p}}(\vec{r}) \end{aligned}$$

i postępując analogicznie

otrzymamy

$$u_2(y) = C_2 \, e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} \quad \mathrm{i} \quad u_3(z) = C_3 \, e^{\frac{i}{\hbar} p_z z},$$

otrzymamy

$$u_2(y) = C_2 \, e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} \quad \text{i} \quad u_3(z) = C_3 \, e^{\frac{i}{\hbar} p_z z},$$

co ostatecznie daje funkcję własną pędu w formie:

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) \quad =$$

otrzymamy

$$u_2(y) = C_2\, e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} \quad \text{i} \quad u_3(z) = C_3\, e^{\frac{i}{\hbar} p_z z},$$

co ostatecznie daje funkcję własną pędu w formie:

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) \quad = \quad u_1(x) u_2(y) u_3(z) =$$

otrzymamy

$$u_2(y) = C_2\ e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} \quad \text{i} \quad u_3(z) = C_3\ e^{\frac{i}{\hbar} p_z z},$$

co ostatecznie daje funkcję własną pędu w formie:

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) \quad = \quad u_1(x) u_2(y) u_3(z) = C_1\ e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} C_2\ e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} C_3\ e^{\frac{i}{\hbar} p_z z}$$

Funkcje własne operatora pędu

otrzymamy

$$u_2(y) = C_2 \, e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} \quad \text{i} \quad u_3(z) = C_3 \, e^{\frac{i}{\hbar} p_z z},$$

co ostatecznie daje funkcję własną pędu w formie:

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) = u_1(x) u_2(y) u_3(z) = C_1 \, e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} C_2 \, e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} C_3 \, e^{\frac{i}{\hbar} p_z z}$$

$$=$$

otrzymamy

$$u_2(y) = C_2\ e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} \quad \text{i} \quad u_3(z) = C_3\ e^{\frac{i}{\hbar} p_z z},$$

co ostatecznie daje funkcję własną pędu w formie:

$$\begin{aligned} u_{\vec{p}}(\vec{r}) &= u_1(x) u_2(y) u_3(z) = C_1\ e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} C_2\ e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} C_3\ e^{\frac{i}{\hbar} p_z z} \\ &= C_1 C_2 C_3 e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y y + p_z z)} = \end{aligned}$$

otrzymamy

$$u_2(y) = C_2\ e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} \quad \text{i} \quad u_3(z) = C_3\ e^{\frac{i}{\hbar} p_z z},$$

co ostatecznie daje funkcję własną pędu w formie:

$$\begin{aligned} u_{\vec{p}}(\vec{r}) &= u_1(x) u_2(y) u_3(z) = C_1\ e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} C_2\ e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} C_3\ e^{\frac{i}{\hbar} p_z z} \\ &= C_1 C_2 C_3 e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y y + p_z z)} = C e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}}, \end{aligned}$$

otrzymamy

$$u_2(y) = C_2\ e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} \quad \text{i} \quad u_3(z) = C_3\ e^{\frac{i}{\hbar} p_z z},$$

co ostatecznie daje funkcję własną pędu w formie:

$$\begin{aligned} u_{\vec{p}}(\vec{r}) &= u_1(x) u_2(y) u_3(z) = C_1\ e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} C_2\ e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} C_3\ e^{\frac{i}{\hbar} p_z z} \\ &= C_1 C_2 C_3 e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y y + p_z z)} = C e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}\cdot\vec{r}}, \end{aligned}$$

gdzie stałe dowolne C_1, C_2 i C_3 połączyliśmy w jedną stałą C.

Funkcje własne operatora pędu

otrzymamy

$$u_2(y) = C_2\ e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} \quad \text{i} \quad u_3(z) = C_3\ e^{\frac{i}{\hbar} p_z z},$$

co ostatecznie daje funkcję własną pędu w formie:

$$\begin{aligned} u_{\vec{p}}(\vec{r}) &= u_1(x) u_2(y) u_3(z) = C_1\ e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} C_2\ e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} C_3\ e^{\frac{i}{\hbar} p_z z} \\ &= C_1 C_2 C_3 e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y y + p_z z)} = C e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}}, \end{aligned}$$

gdzie stałe dowolne C_1, C_2 i C_3 połączyliśmy w jedną stałą C.
Otrzymaliśmy funkcje własne pędu postaci

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) = C e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}}.$$

otrzymamy

$$u_2(y) = C_2\ e^{\frac{i}{\hbar}p_y y} \quad \text{i} \quad u_3(z) = C_3\ e^{\frac{i}{\hbar}p_z z},$$

co ostatecznie daje funkcję własną pędu w formie:

$$\begin{aligned} u_{\vec{p}}(\vec{r}) &= u_1(x)u_2(y)u_3(z) = C_1\ e^{\frac{i}{\hbar}p_x x} C_2\ e^{\frac{i}{\hbar}p_y y} C_3\ e^{\frac{i}{\hbar}p_z z} \\ &= C_1 C_2 C_3 e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y y + p_z z)} = C e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}, \end{aligned}$$

gdzie stałe dowolne C_1, C_2 i C_3 połączyliśmy w jedną stałą C. Otrzymaliśmy funkcje własne pędu postaci

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) = C e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}.$$

Funkcje własne operatora pędu

Po skorzystaniu ze związku de Broglie'go

$$\vec{p} = \hbar\vec{k},$$

funkcje własne pędu przyjmują postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = Ce^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Funkcje własne operatora pędu

Po skorzystaniu ze związku de Broglie'go

$$\vec{p} = \hbar\vec{k},$$

funkcje własne pędu przyjmują postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = Ce^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Stałą dowolną C możemy wyznaczyć z warunku normalizacji

$$\int \left|u_{\vec{k}}(\vec{r})\right|^2 \mathrm{d}^3 r = 1,$$

Po skorzystaniu ze związku de Broglie'go

$$\vec{p} = \hbar \vec{k},$$

funkcje własne pędu przyjmują postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = C e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Stałą dowolną C możemy wyznaczyć z warunku normalizacji

$$\int \left| u_{\vec{k}}(\vec{r}) \right|^2 \mathrm{d}^3 r = 1,$$

ale całka normalizacyjna po całej przestrzeni nie istnieje, gdyż

$$\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) \mathrm{d}^3 r =$$

Funkcje własne operatora pędu

Po skorzystaniu ze związku de Broglie'go

$$\vec{p} = \hbar \vec{k},$$

funkcje własne pędu przyjmują postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = C e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Stałą dowolną C możemy wyznaczyć z warunku normalizacji

$$\int \left| u_{\vec{k}}(\vec{r}) \right|^2 \mathrm{d}^3 r = 1,$$

ale całka normalizacyjna po całej przestrzeni nie istnieje, gdyż

$$\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) \mathrm{d}^3 r = \int C^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} C e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathrm{d}^3 r =$$

Po skorzystaniu ze związku de Broglie'go

$$\vec{p} = \hbar\vec{k},$$

funkcje własne pędu przyjmują postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = Ce^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Stałą dowolną C możemy wyznaczyć z warunku normalizacji

$$\int \left| u_{\vec{k}}(\vec{r}) \right|^2 \mathrm{d}^3 r = 1,$$

ale całka normalizacyjna po całej przestrzeni nie istnieje, gdyż

$$\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) \mathrm{d}^3 r = \int C^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} C e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathrm{d}^3 r = |C|^2 \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r}_{\infty} =$$

Po skorzystaniu ze związku de Broglie'go

$$\vec{p} = \hbar \vec{k},$$

funkcje własne pędu przyjmują postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = C e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Stałą dowolną C możemy wyznaczyć z warunku normalizacji

$$\int \left| u_{\vec{k}}(\vec{r}) \right|^2 \mathrm{d}^3 r = 1,$$

ale całka normalizacyjna po całej przestrzeni nie istnieje, gdyż

$$\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) \mathrm{d}^3 r = \int C^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} C e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathrm{d}^3 r = |C|^2 \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r}_{\infty} = \infty.$$

Po skorzystaniu ze związku de Broglie'go

$$\vec{p} = \hbar \vec{k},$$

funkcje własne pędu przyjmują postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = Ce^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Stałą dowolną C możemy wyznaczyć z warunku normalizacji

$$\int \left| u_{\vec{k}}(\vec{r}) \right|^2 \mathrm{d}^3 r = 1,$$

ale całka normalizacyjna po całej przestrzeni nie istnieje, gdyż

$$\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) \mathrm{d}^3 r = \int C^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} Ce^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathrm{d}^3 r = |C|^2 \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r}_{\infty} = \infty.$$

Skąd wnioskujemy, że funkcje własne pędu nie należą do przestrzeni Hilberta stanów fizycznych.

Funkcję $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ możemy jednak unormować w sześciennym pudełku o dowolnie dużej, ale skończonej objętości L^3.

$$\int_{L^3} \left| u_{\vec{k}}(\vec{r}) \right|^2 \mathrm{d}^3 r = 1$$

Skąd wnioskujemy, że funkcje własne pędu nie należą do przestrzeni Hilberta stanów fizycznych.
Funkcję $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ możemy jednak unormować w sześciennym pudełku o dowolnie dużej, ale skończonej objętości L^3.

$$\int_{L^3} \left|u_{\vec{k}}(\vec{r})\right|^2 \mathrm{d}^3 r = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C|^2 \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r}_{L^3} =$$

Skąd wnioskujemy, że funkcje własne pędu nie należą do przestrzeni Hilberta stanów fizycznych.
Funkcję $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ możemy jednak unormować w sześciennym pudełku o dowolnie dużej, ale skończonej objętości L^3.

$$\int_{L^3} \left|u_{\vec{k}}(\vec{r})\right|^2 \mathrm{d}^3 r = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C|^2 \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r}_{L^3} = |C|^2 L^3 = 1,$$

Skąd wnioskujemy, że funkcje własne pędu nie należą do przestrzeni Hilberta stanów fizycznych.
Funkcję $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ możemy jednak unormować w sześciennym pudełku o dowolnie dużej, ale skończonej objętości L^3.

$$\int_{L^3} \left|u_{\vec{k}}(\vec{r})\right|^2 \mathrm{d}^3 r = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C|^2 \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r}_{L^3} = |C|^2 L^3 = 1,$$

a więc z dokładnością do fazy zespolonej możemy wybrać

$$C = L^{-\frac{3}{2}}$$

Skąd wnioskujemy, że funkcje własne pędu nie należą do przestrzeni Hilberta stanów fizycznych.
Funkcję $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ możemy jednak unormować w sześciennym pudełku o dowolnie dużej, ale skończonej objętości L^3.

$$\int_{L^3} \left|u_{\vec{k}}(\vec{r})\right|^2 \mathrm{d}^3 r = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C|^2 \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r}_{L^3} = |C|^2 L^3 = 1,$$

a więc z dokładnością do fazy zespolonej możemy wybrać

$$C = L^{-\frac{3}{2}}$$

i unormowane funkcje własne pędu przyjmą postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Funkcje własne operatora pędu

Skąd wnioskujemy, że funkcje własne pędu nie należą do przestrzeni Hilberta stanów fizycznych.
Funkcję $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ możemy jednak unormować w sześciennym pudełku o dowolnie dużej, ale skończonej objętości L^3.

$$\int_{L^3} \left| u_{\vec{k}}(\vec{r}) \right|^2 \mathrm{d}^3 r = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C|^2 \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r}_{L^3} = |C|^2 L^3 = 1,$$

a więc z dokładnością do fazy zespolonej możemy wybrać

$$C = L^{-\frac{3}{2}}$$

i unormowane funkcje własne pędu przyjmą postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Jeżeli pudełko jest duże w porównaniu z rozmiarami obszaru fizycznego dla badanego problemu, to wartości własne w obecności pudełka praktycznie nie ulegną zmianie.

Jeżeli ściany pudełka są sztywne,

Jeżeli pudełko jest duże w porównaniu z rozmiarami obszaru fizycznego dla badanego problemu, to wartości własne w obecności pudełka praktycznie nie ulegną zmianie.

Jeżeli ściany pudełka są sztywne, co odpowiada nieskończonemu skokowi energii potencjalnej,

Jeżeli pudełko jest duże w porównaniu z rozmiarami obszaru fizycznego dla badanego problemu, to wartości własne w obecności pudełka praktycznie nie ulegną zmianie.

Jeżeli ściany pudełka są sztywne, co odpowiada nieskończonemu skokowi energii potencjalnej, to funkcja falowa musi znikać na ściankach wskutek czego otrzymamy dyskretne warotści własne operatora pędu.

Jeżeli pudełko jest duże w porównaniu z rozmiarami obszaru fizycznego dla badanego problemu, to wartości własne w obecności pudełka praktycznie nie ulegną zmianie.

Jeżeli ściany pudełka są sztywne, co odpowiada nieskończonemu skokowi energii potencjalnej, to funkcja falowa musi znikać na ściankach wskutek czego otrzymamy dyskretne warotści własne operatora pędu.

Zamiast zakładać znikanie funkcji falowej na ściankach pudełka, narzućmy periodyczne warunki brzegowe:

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}\left(\vec{r}+\vec{L}\right),$$

Jeżeli pudełko jest duże w porównaniu z rozmiarami obszaru fizycznego dla badanego problemu, to wartości własne w obecności pudełka praktycznie nie ulegną zmianie.

Jeżeli ściany pudełka są sztywne, co odpowiada nieskończonemu skokowi energii potencjalnej, to funkcja falowa musi znikać na ściankach wskutek czego otrzymamy dyskretne warotści własne operatora pędu.

Zamiast zakładać znikanie funkcji falowej na ściankach pudełka, narzućmy periodyczne warunki brzegowe:

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}\left(\vec{r} + \vec{L}\right),$$

$$L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Jeżeli pudełko jest duże w porównaniu z rozmiarami obszaru fizycznego dla badanego problemu, to wartości własne w obecności pudełka praktycznie nie ulegną zmianie.
Jeżeli ściany pudełka są sztywne, co odpowiada nieskończonemu skokowi energii potencjalnej, to funkcja falowa musi znikać na ściankach wskutek czego otrzymamy dyskretne warotści własne operatora pędu.
Zamiast zakładać znikanie funkcji falowej na ściankach pudełka, narzućmy periodyczne warunki brzegowe:

$$u_{\vec{k}}\left(\vec{r}\right) = u_{\vec{k}}\left(\vec{r}+\vec{L}\right),$$

$$L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} =$$

Funkcje własne operatora pędu

Jeżeli pudełko jest duże w porównaniu z rozmiarami obszaru fizycznego dla badanego problemu, to wartości własne w obecności pudełka praktycznie nie ulegną zmianie.

Jeżeli ściany pudełka są sztywne, co odpowiada nieskończonemu skokowi energii potencjalnej, to funkcja falowa musi znikać na ściankach wskutek czego otrzymamy dyskretne warotści własne operatora pędu.

Zamiast zakładać znikanie funkcji falowej na ściankach pudełka, narzućmy periodyczne warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} u_{\vec{k}}(\vec{r}) &= u_{\vec{k}}\left(\vec{r}+\vec{L}\right), \\ L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} &= L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\vec{L})}. \end{aligned}$$

Jeżeli pudełko jest duże w porównaniu z rozmiarami obszaru fizycznego dla badanego problemu, to wartości własne w obecności pudełka praktycznie nie ulegną zmianie.

Jeżeli ściany pudełka są sztywne, co odpowiada nieskończonemu skokowi energii potencjalnej, to funkcja falowa musi znikać na ściankach wskutek czego otrzymamy dyskretne warotści własne operatora pędu.

Zamiast zakładać znikanie funkcji falowej na ściankach pudełka, narzućmy periodyczne warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} u_{\vec{k}}\left(\vec{r}\right) &= u_{\vec{k}}\left(\vec{r}+\vec{L}\right), \\ L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} &= L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\vec{L})}. \end{aligned}$$

Równość

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\vec{L})}$$

jest spełniona tylko jeśli

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{L}} = e^{i(k_x L + k_y L + k_z L)} = 1,$$

Równość

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\vec{L})}$$

jest spełniona tylko jeśli

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{L}} = e^{i(k_x L + k_y L + k_z L)} = 1,$$

gdzie krawędzie pudełka w kierunkach osi *Ox*, *Oy* i *Oz* potraktowaliśmy jako niezależne,

Równość

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\vec{L})}$$

jest spełniona tylko jeśli

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{L}} = e^{i(k_x L + k_y L + k_z L)} = 1,$$

gdzie krawędzie pudełka w kierunkach osi Ox, Oy i Oz potraktowaliśmy jako niezależne, zakładając jednocześnie, że $|L_x| = |L_y| = |L_z| = L$.

Równość

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\vec{L})}$$

jest spełniona tylko jeśli

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{L}} = e^{i(k_x L + k_y L + k_z L)} = 1,$$

gdzie krawędzie pudełka w kierunkach osi Ox, Oy i Oz potraktowaliśmy jako niezależne, zakładając jednocześnie, że $|L_x| = |L_y| = |L_z| = L$.
Warunek ten jest spełniony jeśli

Równość

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\vec{L})}$$

jest spełniona tylko jeśli

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{L}} = e^{i(k_x L + k_y L + k_z L)} = 1,$$

gdzie krawędzie pudełka w kierunkach osi Ox, Oy i Oz potraktowaliśmy jako niezależne, zakładając jednocześnie, że $|L_x| = |L_y| = |L_z| = L$.
Warunek ten jest spełniony jeśli

$$k_x L = n_x \cdot 2\pi,$$

Równość

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\vec{L})}$$

jest spełniona tylko jeśli

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{L}} = e^{i(k_x L + k_y L + k_z L)} = 1,$$

gdzie krawędzie pudełka w kierunkach osi Ox, Oy i Oz potraktowaliśmy jako niezależne, zakładając jednocześnie, że $|L_x| = |L_y| = |L_z| = L$.
Warunek ten jest spełniony jeśli

$$k_x L = n_x \cdot 2\pi, \quad k_y L = n_y \cdot 2\pi,$$

Funkcje własne operatora pędu

Równość

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\vec{L})}$$

jest spełniona tylko jeśli

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{L}} = e^{i(k_x L + k_y L + k_z L)} = 1,$$

gdzie krawędzie pudełka w kierunkach osi Ox, Oy i Oz potraktowaliśmy jako niezależne, zakładając jednocześnie, że $|L_x| = |L_y| = |L_z| = L$.
Warunek ten jest spełniony jeśli

$$k_x L = n_x \cdot 2\pi, \quad k_y L = n_y \cdot 2\pi, \quad k_z L = n_z \cdot 2\pi,$$

Równość

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\vec{L})}$$

jest spełniona tylko jeśli

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{L}} = e^{i(k_x L + k_y L + k_z L)} = 1,$$

gdzie krawędzie pudełka w kierunkach osi Ox, Oy i Oz potraktowaliśmy jako niezależne, zakładając jednocześnie, że $|L_x| = |L_y| = |L_z| = L$.
Warunek ten jest spełniony jeśli

$$k_x L = n_x \cdot 2\pi, \quad k_y L = n_y \cdot 2\pi, \quad k_z L = n_z \cdot 2\pi,$$

gdzie n_x, n_y, n_z są dowolnymi liczbami całkowitymi.

Równość

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\vec{L})}$$

jest spełniona tylko jeśli

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{L}} = e^{i(k_x L + k_y L + k_z L)} = 1,$$

gdzie krawędzie pudełka w kierunkach osi Ox, Oy i Oz potraktowaliśmy jako niezależne, zakładając jednocześnie, że $|L_x| = |L_y| = |L_z| = L$.
Warunek ten jest spełniony jeśli

$$k_x L = n_x \cdot 2\pi, \quad k_y L = n_y \cdot 2\pi, \quad k_z L = n_z \cdot 2\pi,$$

gdzie n_x, n_y, n_z są dowolnymi liczbami całkowitymi.

To oznacza, że składowe wektora falowego, a co za tym idzie również pędu,

To oznacza, że składowe wektora falowego, a co za tym idzie również pędu, mogą przyjmować wartości dyskretne

Funkcje własne operatora pędu

To oznacza, że składowe wektora falowego, a co za tym idzie również pędu, mogą przyjmować wartości dyskretne

$$k_x = n_x \cdot \frac{2\pi}{L},$$

Funkcje własne operatora pędu

To oznacza, że składowe wektora falowego, a co za tym idzie również pędu, mogą przyjmować wartości dyskretne

$$k_x = n_x \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_y = n_y \cdot \frac{2\pi}{L},$$

To oznacza, że składowe wektora falowego, a co za tym idzie również pędu, mogą przyjmować wartości dyskretne

$$k_x = n_x \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_y = n_y \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_z = n_z \cdot \frac{2\pi}{L},$$

To oznacza, że składowe wektora falowego, a co za tym idzie również pędu, mogą przyjmować wartości dyskretne

$$k_x = n_x \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_y = n_y \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_z = n_z \cdot \frac{2\pi}{L},$$

gdzie $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$ są dowolnymi liczbami całkowitymi.

To oznacza, że składowe wektora falowego, a co za tym idzie również pędu, mogą przyjmować wartości dyskretne

$$k_x = n_x \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_y = n_y \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_z = n_z \cdot \frac{2\pi}{L},$$

gdzie $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$ są dowolnymi liczbami całkowitymi.
Zauważmy, że

$$L \longrightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{L} \longrightarrow 0$$

To oznacza, że składowe wektora falowego, a co za tym idzie również pędu, mogą przyjmować wartości dyskretne

$$k_x = n_x \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_y = n_y \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_z = n_z \cdot \frac{2\pi}{L},$$

gdzie $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$ są dowolnymi liczbami całkowitymi.
Zauważmy, że

$$L \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{L} \to 0$$

i tym samym dopuszczalne wartości wektora falowego i pędu cząstki stają się ciągłe.

To oznacza, że składowe wektora falowego, a co za tym idzie również pędu, mogą przyjmować wartości dyskretne

$$k_x = n_x \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_y = n_y \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_z = n_z \cdot \frac{2\pi}{L},$$

gdzie $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$ są dowolnymi liczbami całkowitymi.
Zauważmy, że

$$L \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{L} \to 0$$

i tym samym dopuszczalne wartości wektora falowego i pędu cząstki stają się ciągłe.

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle \quad = \quad \int\limits_{L^3} u^*_{\vec{l}}(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3 r =$$

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \int\limits_{L^3} u^*_{\vec{l}}(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r = L^{-3} \int\limits_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l})\cdot\vec{r}}\, \mathrm{d}^3 r$$

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \int_{L^3} u^*_{\vec{l}}(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r = L^{-3} \int_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l})\cdot\vec{r}}\, \mathrm{d}^3 r$$

$$=$$

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \int_{L^3} u^*_{\vec{l}}(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3 r = L^{-3} \int_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l})\cdot\vec{r}} \, \mathrm{d}^3 r$$

$$= L^{-3} \int_{L^3} e^{i[(k_x-l_x)x+(k_y-l_y)y+(k_z-l_z)z]} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

Funkcje własne operatora pędu

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= \int\limits_{L^3} u_{\vec{l}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3 r = L^{-3} \int\limits_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l})\cdot\vec{r}} \, \mathrm{d}^3 r \\
&= L^{-3} \int\limits_{L^3} e^{i[(k_x-l_x)x+(k_y-l_y)y+(k_z-l_z)z]} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\
&=
\end{aligned}
$$

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= \int_{L^3} u^*_{\vec{l}}(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3 r = L^{-3} \int_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l})\cdot\vec{r}} \, \mathrm{d}^3 r \\
&= L^{-3} \int_{L^3} e^{i[(k_x-l_x)x+(k_y-l_y)y+(k_z-l_z)z]} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\
&= L^{-3} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x-l_x)x} \, \mathrm{d}x \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y-l_y)y} \, \mathrm{d}y \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z-l_z)z} \, \mathrm{d}z,
\end{aligned}
$$

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$\begin{aligned}\langle \vec{l}|\vec{k}\,\rangle &= \int\limits_{L^3} u^*_{\vec{l}}(\vec{r})u_{\vec{k}}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r = L^{-3}\int\limits_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l})\cdot\vec{r}}\,\mathrm{d}^3 r \\ &= L^{-3}\int\limits_{L^3} e^{i[(k_x-l_x)x+(k_y-l_y)y+(k_z-l_z)z]}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= L^{-3}\int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x-l_x)x}\,\mathrm{d}x \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y-l_y)y}\,\mathrm{d}y \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z-l_z)z}\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

gdzie dopuszczalne wartości wektora falowego $\vec{l}$ są następujące

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$\begin{aligned}
\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= \int\limits_{L^3} u^*_{\vec{l}}(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3 r = L^{-3} \int\limits_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l})\cdot\vec{r}} \, \mathrm{d}^3 r \\
&= L^{-3} \int\limits_{L^3} e^{i[(k_x - l_x)x + (k_y - l_y)y + (k_z - l_z)z]} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\
&= L^{-3} \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} \, \mathrm{d}x \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y - l_y)y} \, \mathrm{d}y \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z - l_z)z} \, \mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

gdzie dopuszczalne wartości wektora falowego $\vec{l}$ są następujące

$$l_x = m_x \cdot \frac{2\pi}{L},$$

Funkcje własne operatora pędu

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$
\begin{aligned}
\langle\, \vec{l} | \vec{k}\, \rangle &= \int\limits_{L^3} u^*_{\vec{l}}(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r = L^{-3} \int\limits_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l})\cdot\vec{r}}\, \mathrm{d}^3 r \\
&= L^{-3} \int\limits_{L^3} e^{i[(k_x-l_x)x+(k_y-l_y)y+(k_z-l_z)z]}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \\
&= L^{-3} \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x-l_x)x}\, \mathrm{d}x \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y-l_y)y}\, \mathrm{d}y \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z-l_z)z}\, \mathrm{d}z,
\end{aligned}
$$

gdzie dopuszczalne wartości wektora falowego $\vec{l}$ są następujące

$$
l_x = m_x \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad l_y = m_y \cdot \frac{2\pi}{L},
$$

Funkcje własne operatora pędu

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= \int_{L^3} u^*_{\vec{l}}(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3 r = L^{-3} \int_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l})\cdot\vec{r}} \, \mathrm{d}^3 r \\
&= L^{-3} \int_{L^3} e^{i[(k_x-l_x)x+(k_y-l_y)y+(k_z-l_z)z]} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\
&= L^{-3} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x-l_x)x} \, \mathrm{d}x \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y-l_y)y} \, \mathrm{d}y \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z-l_z)z} \, \mathrm{d}z,
\end{aligned}
$$

gdzie dopuszczalne wartości wektora falowego $\vec{l}$ są następujące

$$
l_x = m_x \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad l_y = m_y \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad l_z = m_z \cdot \frac{2\pi}{L},
$$

Funkcje własne operatora pędu

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= \int_{L^3} u^*_{\vec{l}}(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3 r = L^{-3} \int_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l})\cdot\vec{r}} \, \mathrm{d}^3 r \\
&= L^{-3} \int_{L^3} e^{i[(k_x-l_x)x+(k_y-l_y)y+(k_z-l_z)z]} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\
&= L^{-3} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x-l_x)x} \, \mathrm{d}x \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y-l_y)y} \, \mathrm{d}y \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z-l_z)z} \, \mathrm{d}z,
\end{aligned}
$$

gdzie dopuszczalne wartości wektora falowego $\vec{l}$ są następujące

$$
l_x = m_x \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad l_y = m_y \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad l_z = m_z \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad m_x, m_y, m_z \in \mathbb{Z}.
$$

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$
\begin{aligned}
\langle\, \vec{l} | \vec{k}\,\rangle &= \int\limits_{L^3} u^*_{\vec{l}}(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r = L^{-3} \int\limits_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l})\cdot\vec{r}}\, \mathrm{d}^3 r \\
&= L^{-3} \int\limits_{L^3} e^{i[(k_x-l_x)x+(k_y-l_y)y+(k_z-l_z)z]}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \\
&= L^{-3} \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x-l_x)x}\, \mathrm{d}x \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y-l_y)y}\, \mathrm{d}y \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z-l_z)z}\, \mathrm{d}z,
\end{aligned}
$$

gdzie dopuszczalne wartości wektora falowego $\vec{l}$ są następujące

$$
l_x = m_x \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad l_y = m_y \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad l_z = m_z \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad m_x, m_y, m_z \in \mathbb{Z}.
$$

Obliczmy jeden z czynników

$$\int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x \quad =$$

Obliczmy jeden z czynników

$$\int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \begin{cases} \int\limits_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x = x\Big|_{-L/2}^{L/2} = L, & \text{dla} \quad k_x = l_x \\ \frac{e^{i(k_x - l_x)x}}{i(k_x - l_x)}\Big|_{-L/2}^{L/2}, & \text{dla} \quad k_x \neq l_x \end{cases}$$

Obliczmy jeden z czynników

$$\int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int\limits_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x = x\Big|_{-L/2}^{L/2} = L, & \text{dla} \quad k_x = l_x \\ \frac{e^{i(k_x - l_x)x}}{i(k_x - l_x)}\Big|_{-L/2}^{L/2}, & \text{dla} \quad k_x \neq l_x \end{cases}$$

$$=$$

Funkcje własne operatora pędu

Obliczmy jeden z czynników

$$\int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x-l_x)x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int\limits_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x = x\Big|_{-L/2}^{L/2} = L, & \text{dla} \quad k_x = l_x \\ \frac{e^{i(k_x-l_x)x}}{i(k_x-l_x)}\Big|_{-L/2}^{L/2}, & \text{dla} \quad k_x \neq l_x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} L, & \text{dla} \quad k_x = l_x \\ \frac{e^{i\frac{2\pi}{L}(n_x-m_x)\frac{L}{2}} - e^{-i\frac{2\pi}{L}(n_x-m_x)\frac{L}{2}}}{i\frac{2\pi}{L}(n_x-m_x)}, & \text{dla} \quad k_x \neq l_x \end{cases}$$

Obliczmy jeden z czynników

$$\int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x-l_x)x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x = x\Big|_{-L/2}^{L/2} = L, & \text{dla} \quad k_x = l_x \\ \frac{e^{i(k_x-l_x)x}}{i(k_x-l_x)}\Big|_{-L/2}^{L/2}, & \text{dla} \quad k_x \neq l_x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} L, & \text{dla} \quad k_x = l_x \\ \frac{e^{i\frac{2\pi}{L}(n_x-m_x)\frac{L}{2}} - e^{-i\frac{2\pi}{L}(n_x-m_x)\frac{L}{2}}}{i\frac{2\pi}{L}(n_x-m_x)}, & \text{dla} \quad k_x \neq l_x \end{cases}$$

$$=$$

Obliczmy jeden z czynników

$$\int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x-l_x)x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int\limits_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x = x\Big|_{-L/2}^{L/2} = L, & \text{dla} \quad k_x = l_x \\ \frac{e^{i(k_x-l_x)x}}{i(k_x-l_x)}\Big|_{-L/2}^{L/2}, & \text{dla} \quad k_x \neq l_x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} L, & \text{dla} \quad k_x = l_x \\ \frac{e^{i\frac{2\pi}{L}(n_x-m_x)\frac{L}{2}} - e^{-i\frac{2\pi}{L}(n_x-m_x)\frac{L}{2}}}{i\frac{2\pi}{L}(n_x-m_x)}, & \text{dla} \quad k_x \neq l_x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} L, & \text{dla} \quad k_x = l_x \\ \frac{e^{i\pi(n_x-m_x)} - e^{-i\pi(n_x-m_x)}}{i\frac{2\pi}{L}(n_x-m_x)}, & \text{dla} \quad k_x \neq l_x \end{cases}.$$

Obliczmy jeden z czynników

$$\int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x-l_x)x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int\limits_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x = x\Big|_{-L/2}^{L/2} = L, & \text{dla} \quad k_x = l_x \\ \frac{e^{i(k_x-l_x)x}}{i(k_x-l_x)}\Big|_{-L/2}^{L/2}, & \text{dla} \quad k_x \neq l_x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} L, & \text{dla} \quad k_x = l_x \\ \frac{e^{i\frac{2\pi}{L}(n_x-m_x)\frac{L}{2}} - e^{-i\frac{2\pi}{L}(n_x-m_x)\frac{L}{2}}}{i\frac{2\pi}{L}(n_x-m_x)}, & \text{dla} \quad k_x \neq l_x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} L, & \text{dla} \quad k_x = l_x \\ \frac{e^{i\pi(n_x-m_x)} - e^{-i\pi(n_x-m_x)}}{i\frac{2\pi}{L}(n_x-m_x)}, & \text{dla} \quad k_x \neq l_x \end{cases} .$$

Zauważmy, że $n_x - m_x \equiv \bar{n}_x \in \mathbb{Z}$, dlatego

Obliczmy jeden z czynników

$$\int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x-l_x)x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int\limits_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x = x\Big|_{-L/2}^{L/2} = L, & \text{dla} \quad k_x = l_x \\ \frac{e^{i(k_x-l_x)x}}{i(k_x-l_x)}\Big|_{-L/2}^{L/2}, & \text{dla} \quad k_x \neq l_x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} L, & \text{dla} \quad k_x = l_x \\ \frac{e^{i\frac{2\pi}{L}(n_x-m_x)\frac{L}{2}} - e^{-i\frac{2\pi}{L}(n_x-m_x)\frac{L}{2}}}{i\frac{2\pi}{L}(n_x-m_x)}, & \text{dla} \quad k_x \neq l_x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} L, & \text{dla} \quad k_x = l_x \\ \frac{e^{i\pi(n_x-m_x)} - e^{-i\pi(n_x-m_x)}}{i\frac{2\pi}{L}(n_x-m_x)}, & \text{dla} \quad k_x \neq l_x \end{cases} .$$

Zauważmy, że $n_x - m_x \equiv \bar{n}_x \in \mathbb{Z}$, dlatego

$$e^{i\bar{n}_x\pi} - e^{-i\bar{n}_x\pi} = \cos(\bar{n}_x\pi) + i\sin(\bar{n}_x\pi) - (\cos(\bar{n}_x\pi) - i\sin(\bar{n}_x\pi))$$

$$
\begin{aligned}
e^{i\bar{n}_x\pi} - e^{-i\bar{n}_x\pi} &= \cos(\bar{n}_x\pi) + i\sin(\bar{n}_x\pi) - (\cos(\bar{n}_x\pi) - i\sin(\bar{n}_x\pi)) \\
&=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{i\bar{n}_x\pi} - e^{-i\bar{n}_x\pi} &= \cos\left(\bar{n}_x\pi\right) + i\sin\left(\bar{n}_x\pi\right) - \left(\cos\left(\bar{n}_x\pi\right) - i\sin\left(\bar{n}_x\pi\right)\right) \\
&= 2i\sin\left(\bar{n}_x\pi\right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{i\bar{n}_x\pi} - e^{-i\bar{n}_x\pi} &= \cos(\bar{n}_x\pi) + i\sin(\bar{n}_x\pi) - (\cos(\bar{n}_x\pi) - i\sin(\bar{n}_x\pi)) \\
&= 2i\sin(\bar{n}_x\pi) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{i\bar{n}_x\pi} - e^{-i\bar{n}_x\pi} &= \cos\left(\bar{n}_x\pi\right) + i\sin\left(\bar{n}_x\pi\right) - \left(\cos\left(\bar{n}_x\pi\right) - i\sin\left(\bar{n}_x\pi\right)\right) \\
&= 2i\sin\left(\bar{n}_x\pi\right) = 0,
\end{aligned}
$$

dlatego dla rozpatrywanej całki otrzymujemy wzór

$$
\int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} L, & \text{dla} \quad k_x = l_x \\ 0, & \text{dla} \quad k_x \neq l_x \end{cases} .
$$

$$
\begin{aligned}
e^{i\bar{n}_x\pi} - e^{-i\bar{n}_x\pi} &= \cos\left(\bar{n}_x\pi\right) + i\sin\left(\bar{n}_x\pi\right) - \left(\cos\left(\bar{n}_x\pi\right) - i\sin\left(\bar{n}_x\pi\right)\right) \\
&= 2i\sin\left(\bar{n}_x\pi\right) = 0,
\end{aligned}
$$

dlatego dla rozpatrywanej całki otrzymujemy wzór

$$
\int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x-l_x)x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} L, & \mathrm{dla} \quad k_x = l_x \\ 0, & \mathrm{dla} \quad k_x \neq l_x \end{cases} .
$$

Taki sam wzór otrzymamy dla całek

$$
\int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y-l_y)y}\,\mathrm{d}y \quad \mathrm{i} \quad \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z-l_z)z}\,\mathrm{d}z.
$$

$$\begin{aligned} e^{i\bar{n}_x\pi} - e^{-i\bar{n}_x\pi} &= \cos\left(\bar{n}_x\pi\right) + i\sin\left(\bar{n}_x\pi\right) - \left(\cos\left(\bar{n}_x\pi\right) - i\sin\left(\bar{n}_x\pi\right)\right) \\ &= 2i\sin\left(\bar{n}_x\pi\right) = 0, \end{aligned}$$

dlatego dla rozpatrywanej całki otrzymujemy wzór

$$\int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} L, & \text{dla} \quad k_x = l_x \\ 0, & \text{dla} \quad k_x \neq l_x \end{cases}.$$

Taki sam wzór otrzymamy dla całek

$$\int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y - l_y)y}\,\mathrm{d}y \quad \text{i} \quad \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z - l_z)z}\,\mathrm{d}z.$$

Dlatego otrzymujemy relację ortogonalności postaci

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = L^{-3} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} \, \mathrm{d}x \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y - l_y)y} \, \mathrm{d}y \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z - l_z)z} \, \mathrm{d}z$$

Dlatego otrzymujemy relację ortogonalności postaci

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = L^{-3} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} \,\mathrm{d}x \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y - l_y)y} \,\mathrm{d}y \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z - l_z)z} \,\mathrm{d}z$$

$$=$$

Dlatego otrzymujemy relację ortogonalności postaci

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= L^{-3} \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} \, \mathrm{d}x \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y - l_y)y} \, \mathrm{d}y \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z - l_z)z} \, \mathrm{d}z \\
&= \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \text{dla} \quad \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases},
\end{aligned}
$$

Dlatego otrzymujemy relację ortogonalności postaci

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= L^{-3} \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y - l_y)y}\,\mathrm{d}y \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z - l_z)z}\,\mathrm{d}z \\
&= \begin{cases} 1, & \mathrm{dla} \quad \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \mathrm{dla} \quad \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases},
\end{aligned}
$$

gdyż $k_x \neq l_x$ pociąga $\vec{k} \neq \vec{l}$, a to oznacza, że pozostałe dwie składowe tych wektorów mogą być

Dlatego otrzymujemy relację ortogonalności postaci

$$\langle\, \vec{l} | \vec{k}\, \rangle \;=\; L^{-3} \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y - l_y)y}\,\mathrm{d}y \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z - l_z)z}\,\mathrm{d}z$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \text{dla} \quad \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases},$$

gdyż $k_x \neq l_x$ pociąga $\vec{k} \neq \vec{l}$, a to oznacza, że pozostałe dwie składowe tych wektorów mogą być

albo równe $\Rightarrow$ odpowiednia całka jest równa L,

Dlatego otrzymujemy relację ortogonalności postaci

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = L^{-3} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y - l_y)y}\,\mathrm{d}y \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z - l_z)z}\,\mathrm{d}z$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \text{dla} \quad \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases},$$

gdyż $k_x \neq l_x$ pociąga $\vec{k} \neq \vec{l}$, a to oznacza, że pozostałe dwie składowe tych wektorów mogą być

albo równe $\Rightarrow$ odpowiednia całka jest równa L,

albo różne $\Rightarrow$ odpowiednia całka jest równa 0.

Dlatego otrzymujemy relację ortogonalności postaci

$$\begin{aligned} \langle\, \vec{l} | \vec{k}\, \rangle &= L^{-3} \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x}\, \mathrm{d}x \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y - l_y)y}\, \mathrm{d}y \int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z - l_z)z}\, \mathrm{d}z \\ &= \begin{cases} 1, & \mathrm{dla} \quad \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \mathrm{dla} \quad \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases}, \end{aligned}$$

gdyż $k_x \neq l_x$ pociąga $\vec{k} \neq \vec{l}$, a to oznacza, że pozostałe dwie składowe tych wektorów mogą być
albo równe $\Rightarrow$ odpowiednia całka jest równa L,
albo różne $\Rightarrow$ odpowiednia całka jest równa 0.

Ponieważ wektory falowe $\vec{k}$ i $\vec{l}$ są określone przez podanie trójek liczb całkowitych

$$\begin{aligned} \vec{k} &\leftrightarrow (n_x, n_y, n_z)\,, \\ \vec{l} &\leftrightarrow (m_x, m_y, m_z)\,, \end{aligned}$$

to relację

$$\langle\, \vec{l} | \vec{k}\,\rangle = \begin{cases} 1, & \mathrm{dla} \quad \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \mathrm{dla} \quad \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases}$$

Ponieważ wektory falowe $\vec{k}$ i $\vec{l}$ są określone przez podanie trójek liczb całkowitych

$$\begin{aligned} \vec{k} &\leftrightarrow (n_x, n_y, n_z)\,, \\ \vec{l} &\leftrightarrow (m_x, m_y, m_z)\,, \end{aligned}$$

to relację

$$\langle\, \vec{l}|\vec{k}\,\rangle = \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \text{dla} \quad \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases}$$

możemy wyrazić następująco

$$\langle\, \vec{l}|\vec{k}\,\rangle = \delta_{m_x n_x}\delta_{m_y n_y}\delta_{m_z n_z} \equiv \delta_{\vec{l}\,\vec{k}},$$

Ponieważ wektory falowe $\vec{k}$ i $\vec{l}$ są określone przez podanie trójek liczb całkowitych

$$\begin{aligned} \vec{k} &\leftrightarrow (n_x, n_y, n_z)\,, \\ \vec{l} &\leftrightarrow (m_x, m_y, m_z)\,, \end{aligned}$$

to relację

$$\langle\, \vec{l} | \vec{k}\,\rangle = \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \text{dla} \quad \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases}$$

możemy wyrazić następująco

$$\langle\, \vec{l} | \vec{k}\,\rangle = \delta_{m_x n_x} \delta_{m_y n_y} \delta_{m_z n_z} \equiv \delta_{\vec{l}\,\vec{k}},$$

gdzie symbol $\delta_{\vec{l}\vec{k}}$ jest uogólnieniem delty Kroneckera

$$\delta_{\vec{l}\,\vec{k}} = \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \text{dla} \quad \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases} .$$

Definicja ta ma sens, gdyż składowe wektorów $\vec{k}$ i $\vec{l}$ mogą przyjmować tylko wartości dyskretne

$$\vec{k} = (n_x, n_y, n_z)\,\frac{2\pi}{L}, \quad \vec{l} = (m_x, m_y, m_z)\,\frac{2\pi}{L}.$$

gdzie symbol $\delta_{\vec{l}\vec{k}}$ jest uogólnieniem delty Kroneckera

$$\delta_{\vec{l}\,\vec{k}} = \begin{cases} 1, & \mathrm{dla} \quad \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \mathrm{dla} \quad \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases}.$$

Definicja ta ma sens, gdyż składowe wektorów $\vec{k}$ i $\vec{l}$ mogą przyjmować tylko wartości dyskretne

$$\vec{k} = (n_x, n_y, n_z)\,\frac{2\pi}{L}, \quad \vec{l} = (m_x, m_y, m_z)\,\frac{2\pi}{L}.$$

Zwiększając rozmiar pudełka L możemy uczynić odległość $2\pi/L$ pomiędzy sąsiednimi dozwolonymi wartościami $\vec{k}$ i $\vec{l}$ dowolnie małą.

Funkcje własne operatora pędu

gdzie symbol $\delta_{\vec{l}\vec{k}}$ jest uogólnieniem delty Kroneckera

$$\delta_{\vec{l}\,\vec{k}} = \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \text{dla} \quad \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases} .$$

Definicja ta ma sens, gdyż składowe wektorów $\vec{k}$ i $\vec{l}$ mogą przyjmować tylko wartości dyskretne

$$\vec{k} = (n_x, n_y, n_z)\,\frac{2\pi}{L}, \quad \vec{l} = (m_x, m_y, m_z)\,\frac{2\pi}{L}.$$

Zwiększając rozmiar pudełka L możemy uczynić odległość $2\pi/L$ pomiędzy sąsiednimi dozwolonymi wartościami $\vec{k}$ i $\vec{l}$ dowolnie małą.

W granicy $L \to \infty$ wektory $\vec{k}$ i $\vec{l}$ będą przyjmować wartości ciągłe i warunek

$$\langle\, \vec{l} | \vec{k} \,\rangle = \delta_{\vec{l}\,\vec{k}} \equiv \delta_{l_x k_x} \delta_{l_y k_y} \delta_{l_z k_z}$$

trzeba zastąpić przez

$$\langle\, \vec{l} | \vec{k} \,\rangle = \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}) \equiv \delta(l_x - k_x)\delta(l_y - k_y)\delta(l_z - k_z),$$

W granicy $L \to \infty$ wektory $\vec{k}$ i $\vec{l}$ będą przyjmować wartości ciągłe i warunek

$$\langle\, \vec{l} | \vec{k}\, \rangle = \delta_{\vec{l}\,\vec{k}} \equiv \delta_{l_x k_x} \delta_{l_y k_y} \delta_{l_z k_z}$$

trzeba zastąpić przez

$$\langle\, \vec{l} | \vec{k}\, \rangle = \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}) \equiv \delta(l_x - k_x)\delta(l_y - k_y)\delta(l_z - k_z),$$

gdzie wprowadziliśmy nowy obiekt matematyczny, tzw. deltę Diraca.

W granicy $L \to \infty$ wektory $\vec{k}$ i $\vec{l}$ będą przyjmować wartości ciągłe i warunek

$$\langle \vec{l}|\vec{k} \rangle = \delta_{\vec{l}\,\vec{k}} \equiv \delta_{l_x k_x}\delta_{l_y k_y}\delta_{l_z k_z}$$

trzeba zastąpić przez

$$\langle \vec{l}|\vec{k} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}) \equiv \delta(l_x - k_x)\delta(l_y - k_y)\delta(l_z - k_z),$$

gdzie wprowadziliśmy nowy obiekt matematyczny, tzw. deltę Diraca.

Delta Diraca $\delta(x)$ jest zdefiniowana następująco:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \neq 0 \qquad \text{i} \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Korzystając z tej definicji możemy obliczyć całkę z dowolnej funkcji $f(x)$ ciągłej w punkcie $x = 0$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0).$$

Delta Diraca

Delta Diraca $\delta(x)$ jest zdefiniowana następująco:

$$\delta(x) = 0 \quad \mathrm{dla} \quad x \neq 0 \qquad \mathrm{i} \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Korzystając z tej definicji możemy obliczyć całkę z dowolnej funkcji $f(x)$ ciągłej w punkcie $x = 0$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0).$$

Równość

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0)$$

Delta Diraca

Delta Diraca $\delta(x)$ jest zdefiniowana następująco:

$$\delta(x) = 0 \quad \mathrm{dla} \quad x \neq 0 \qquad \mathrm{i} \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Korzystając z tej definicji możemy obliczyć całkę z dowolnej funkcji $f(x)$ ciągłej w punkcie $x = 0$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0).$$

Równość

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0)$$

można przyjąć jako alternatywną definicję delty Diraca.
W praktyce wystarczy całkować po dowolnym skończonym przedziale zawierającym punkt $x = 0$.

można przyjąć jako alternatywną definicję delty Diraca.
W praktyce wystarczy całkować po dowolnym skończonym przedziale zawierającym punkt $x = 0$.
Delta Diraca nie jest funkcją lecz dystrybucją, czyli funkcjonałem liniowym działającym w przestrzeni dostatecznie gładkich funkcji próbnych.

można przyjąć jako alternatywną definicję delty Diraca.
W praktyce wystarczy całkować po dowolnym skończonym przedziale zawierającym punkt $x = 0$.
Delta Diraca nie jest funkcją lecz dystrybucją, czyli funkcjonałem liniowym działającym w przestrzeni dostatecznie gładkich funkcji próbnych. *Patrz np.* Laurent Schwartz *Metody matematyczne w fizyce.*

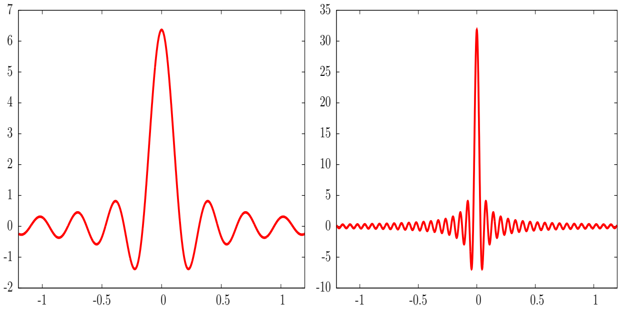
można przyjąć jako alternatywną definicję delty Diraca.
W praktyce wystarczy całkować po dowolnym skończonym przedziale zawierającym punkt $x = 0$.
Delta Diraca nie jest funkcją lecz dystrybucją, czyli funkcjonałem liniowym działającym w przestrzeni dostatecznie gładkich funkcji próbnych. *Patrz np.* Laurent Schwartz *Metody matematyczne w fizyce.*
Deltę Diraca można też określić jako granicę ciągu funkcyjnego, np.

$$\delta(x) = \lim_{g\to\infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}.$$

można przyjąć jako alternatywną definicję delty Diraca.
W praktyce wystarczy całkować po dowolnym skończonym przedziale zawierającym punkt $x = 0$.
Delta Diraca nie jest funkcją lecz dystrybucją, czyli funkcjonałem liniowym działającym w przestrzeni dostatecznie gładkich funkcji próbnych. *Patrz np.* Laurent Schwartz *Metody matematyczne w fizyce.*
Deltę Diraca można też określić jako granicę ciągu funkcyjnego, np.

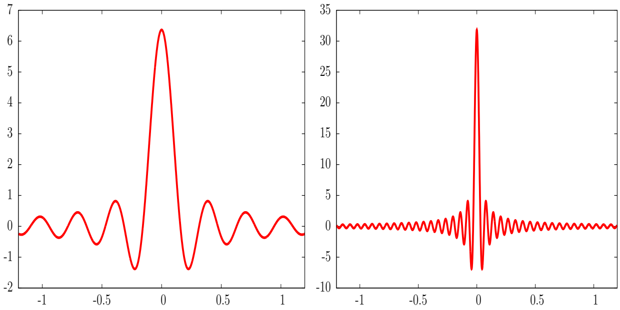
$$\delta(x) = \lim_{g\to\infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}.$$

Wykresy funkcji $\frac{\sin(gx)}{\pi x}$ dla $g = 20$ i $g = 100$



Wkłady do całki $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x$ pochodzące od oscylacji znikają dla $g \to \infty$.

Wykresy funkcji $\frac{\sin(gx)}{\pi x}$ dla $g = 20$ i $g = 100$



Wkłady do całki $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x$ pochodzące od oscylacji znikają dla $g \to \infty$.

Delta Diraca

Można pokazać, że delta Diraca spełnia następujące związki

$$
\begin{aligned}
\delta(x) &= \delta(-x), \\
\delta'(x) &= -\delta'(-x), \\
x\delta'(x) &= -\delta(-x), \\
\delta\left(f(x)\right) &= \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad \text{gdzie} \quad f(x_i) = 0.
\end{aligned}
$$

Zadanie. Udowodnić powyższe własności delty Diraca.

Można pokazać, że delta Diraca spełnia następujące związki

$$\begin{aligned}
\delta(x) &= \delta(-x), \\
\delta'(x) &= -\delta'(-x), \\
x\delta'(x) &= -\delta(-x), \\
\delta\left(f(x)\right) &= \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad \text{gdzie} \quad f(x_i) = 0.
\end{aligned}$$

Zadanie. Udowodnić powyższe własności delty Diraca.

Kwadrat delty Diraca jest nieokreślony.

Sens matematyczny ma natomiast splot dwóch delt Diraca:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a - x)\delta(x - b)\mathrm{d}x = \delta(a - b).$$

Kwadrat delty Diraca jest nieokreślony.
Sens matematyczny ma natomiast splot dwóch delt Diraca:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-x)\delta(x-b)\mathrm{d}x = \delta(a-b).$$

Korzystając z definicji

$$\delta(x) = \lim_{g\to\infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}$$

możemy *unormować* funkcje własne pędu w nieskończonej przestrzeni. W tym celu załóżmy, że $k_x \neq l_x$ i obliczmy całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x =$$

Delta Diraca

Korzystając z definicji

$$\delta(x) = \lim_{g\to\infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}$$

możemy *unormować* funkcje własne pędu w nieskończonej przestrzeni. W tym celu załóżmy, że $k_x \neq l_x$ i obliczmy całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x = \lim_{g\to\infty} \int_{-g}^{g} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x =$$

Delta Diraca

Korzystając z definicji

$$\delta(x) = \lim_{g\to\infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}$$

możemy *unormować* funkcje własne pędu w nieskończonej przestrzeni. W tym celu załóżmy, że $k_x \neq l_x$ i obliczmy całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x-l_x)x}\,\mathrm{d}x = \lim_{g\to\infty}\int_{-g}^{g} e^{i(k_x-l_x)x}\,\mathrm{d}x = \lim_{g\to\infty} \frac{e^{i(k_x-l_x)g} - e^{-i(k_x-l_x)g}}{i(k_x-l_x)}$$

Delta Diraca

Korzystając z definicji

$$\delta(x) = \lim_{g\to\infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}$$

możemy *unormować* funkcje własne pędu w nieskończonej przestrzeni. W tym celu załóżmy, że $k_x \neq l_x$ i obliczmy całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x-l_x)x}\,\mathrm{d}x = \lim_{g\to\infty}\int_{-g}^{g} e^{i(k_x-l_x)x}\,\mathrm{d}x = \lim_{g\to\infty}\frac{e^{i(k_x-l_x)g} - e^{-i(k_x-l_x)g}}{i(k_x-l_x)}$$

$$=$$

Korzystając z definicji

$$\delta(x) = \lim_{g\to\infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}$$

możemy *unormować* funkcje własne pędu w nieskończonej przestrzeni. W tym celu załóżmy, że $k_x \neq l_x$ i obliczmy całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x-l_x)x}\,\mathrm{d}x = \lim_{g\to\infty}\int_{-g}^{g} e^{i(k_x-l_x)x}\,\mathrm{d}x = \lim_{g\to\infty}\frac{e^{i(k_x-l_x)g}-e^{-i(k_x-l_x)g}}{i(k_x-l_x)}$$

$$= 2\lim_{g\to\infty}\frac{\sin\left[(k_x-l_x)g\right]}{k_x-l_x} =$$

Delta Diraca

Korzystając z definicji

$$\delta(x) = \lim_{g\to\infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}$$

możemy *unormować* funkcje własne pędu w nieskończonej przestrzeni. W tym celu załóżmy, że $k_x \neq l_x$ i obliczmy całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x = \lim_{g\to\infty} \int_{-g}^{g} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x = \lim_{g\to\infty} \frac{e^{i(k_x-l_x)g} - e^{-i(k_x-l_x)g}}{i(k_x - l_x)}$$

$$= 2\lim_{g\to\infty} \frac{\sin\left[(k_x - l_x)g\right]}{k_x - l_x} = 2\pi \lim_{g\to\infty} \frac{\sin\left[(k_x - l_x)g\right]}{\pi(k_x - l_x)}$$

Korzystając z definicji

$$\delta(x) = \lim_{g\to\infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}$$

możemy *unormować* funkcje własne pędu w nieskończonej przestrzeni. W tym celu załóżmy, że $k_x \neq l_x$ i obliczmy całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x = \lim_{g\to\infty} \int_{-g}^{g} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x = \lim_{g\to\infty} \frac{e^{i(k_x-l_x)g} - e^{-i(k_x-l_x)g}}{i(k_x - l_x)}$$

$$= 2 \lim_{g\to\infty} \frac{\sin\left[(k_x - l_x)g\right]}{k_x - l_x} = 2\pi \lim_{g\to\infty} \frac{\sin\left[(k_x - l_x)g\right]}{\pi(k_x - l_x)}$$

$$=$$

Delta Diraca

Korzystając z definicji

$$\delta(x) = \lim_{g\to\infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}$$

możemy *unormować* funkcje własne pędu w nieskończonej przestrzeni. W tym celu załóżmy, że $k_x \neq l_x$ i obliczmy całkę

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x-l_x)x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{g\to\infty}\int_{-g}^{g} e^{i(k_x-l_x)x}\,\mathrm{d}x = \lim_{g\to\infty}\frac{e^{i(k_x-l_x)g}-e^{-i(k_x-l_x)g}}{i(k_x-l_x)} \\ &= 2\lim_{g\to\infty}\frac{\sin\left[(k_x-l_x)g\right]}{k_x-l_x} = 2\pi\lim_{g\to\infty}\frac{\sin\left[(k_x-l_x)g\right]}{\pi(k_x-l_x)} \\ &= 2\pi\,\delta(k_x-l_x).\end{aligned}$$

Korzystając z definicji

$$\delta(x) = \lim_{g\to\infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}$$

możemy *unormować* funkcje własne pędu w nieskończonej przestrzeni. W tym celu załóżmy, że $k_x \neq l_x$ i obliczmy całkę

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{g\to\infty} \int_{-g}^{g} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x = \lim_{g\to\infty} \frac{e^{i(k_x - l_x)g} - e^{-i(k_x - l_x)g}}{i(k_x - l_x)} \\
&= 2\lim_{g\to\infty} \frac{\sin\left[(k_x - l_x)g\right]}{k_x - l_x} = 2\pi \lim_{g\to\infty} \frac{\sin\left[(k_x - l_x)g\right]}{\pi(k_x - l_x)} \\
&= 2\pi\,\delta(k_x - l_x).
\end{aligned}$$

Zauważmy, że wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x}\, \mathrm{d}x = 2\pi\, \delta(k_x - l_x)$$

ma sens również dla $k_x = l_x$. Warunek ortogonalności dla funkcji własnych pędu możemy teraz wyrazić następująco:

$$\langle\, \vec{l} | \vec{k}\, \rangle \quad =$$

Delta Diraca

Zauważmy, że wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} \, \mathrm{d}x = 2\pi \, \delta(k_x - l_x)$$

ma sens również dla $k_x = l_x$. Warunek ortogonalności dla funkcji własnych pędu możemy teraz wyrazić następująco:

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \int u^*_{\vec{l}}(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) \mathrm{d}^3 r =$$

Zauważmy, że wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x = 2\pi\,\delta(k_x - l_x)$$

ma sens również dla $k_x = l_x$. Warunek ortogonalności dla funkcji własnych pędu możemy teraz wyrazić następująco:

$$\langle\, \vec{l} | \vec{k}\, \rangle \quad = \quad \int u^*_{\vec{l}}(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) \mathrm{d}^3 r = \int C^* e^{-i\vec{l}\cdot\vec{r}} C e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathrm{d}^3 r$$

Zauważmy, że wzór

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x = 2\pi\,\delta(k_x - l_x)$$

ma sens również dla $k_x = l_x$. Warunek ortogonalności dla funkcji własnych pędu możemy teraz wyrazić następująco:

$$\langle\,\vec{l}|\vec{k}\,\rangle \;=\; \int u^*_{\vec{l}}(\vec{r})u_{\vec{k}}(\vec{r})\mathrm{d}^3r = \int C^* e^{-i\vec{l}\cdot\vec{r}}Ce^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}^3r$$

$$=$$

Zauważmy, że wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x = 2\pi\,\delta(k_x - l_x)$$

ma sens również dla $k_x = l_x$. Warunek ortogonalności dla funkcji własnych pędu możemy teraz wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} \langle\, \vec{l} | \vec{k}\,\rangle &= \int u^*_{\vec{l}}(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) \mathrm{d}^3 r = \int C^* e^{-i\vec{l}\cdot\vec{r}} C e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathrm{d}^3 r \\ &= |C|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_y - l_y)y}\,\mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_z - l_z)z}\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Zauważmy, że wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x}\, \mathrm{d}x = 2\pi\, \delta(k_x - l_x)$$

ma sens również dla $k_x = l_x$. Warunek ortogonalności dla funkcji własnych pędu możemy teraz wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} \langle\, \vec{l} | \vec{k}\, \rangle &= \int u^*_{\vec{l}}(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) \mathrm{d}^3 r = \int C^* e^{-i\vec{l}\cdot\vec{r}} C e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathrm{d}^3 r \\ &= |C|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_x - l_x)x}\, \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_y - l_y)y}\, \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_z - l_z)z}\, \mathrm{d}z \\ &= \end{aligned}$$

Zauważmy, że wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x = 2\pi\,\delta(k_x - l_x)$$

ma sens również dla $k_x = l_x$. Warunek ortogonalności dla funkcji własnych pędu możemy teraz wyrazić następująco:

$$\begin{aligned}
\langle\, \vec{l}|\vec{k}\,\rangle &= \int u^*_{\vec{l}}(\vec{r})u_{\vec{k}}(\vec{r})\mathrm{d}^3r = \int C^* e^{-i\vec{l}\cdot\vec{r}} C e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}^3r \\
&= |C|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_y - l_y)y}\,\mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_z - l_z)z}\,\mathrm{d}z \\
&= |C|^2 2\pi\,\delta(l_x - k_x) 2\pi\,\delta(l_y - k_y) 2\pi\,\delta(l_z - k_z).
\end{aligned}$$

Delta Diraca

Zauważmy, że wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x = 2\pi\,\delta(k_x - l_x)$$

ma sens również dla $k_x = l_x$. Warunek ortogonalności dla funkcji własnych pędu możemy teraz wyrazić następująco:

$$\begin{aligned}
\langle\, \vec{l} | \vec{k}\,\rangle &= \int u^*_{\vec{l}}(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) \mathrm{d}^3 r = \int C^* e^{-i\vec{l}\cdot\vec{r}} C e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathrm{d}^3 r \\
&= |C|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_x - l_x)x}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_y - l_y)y}\,\mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_z - l_z)z}\,\mathrm{d}z \\
&= |C|^2 2\pi\,\delta(l_x - k_x) 2\pi\,\delta(l_y - k_y) 2\pi\,\delta(l_z - k_z).
\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy wzór

$$\langle\, \vec{l} | \vec{k}\, \rangle = |C|^2 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}).$$

W przypadku normalizacji w pudełku przyjęliśmy

$$\langle\, \vec{l} | \vec{k}\, \rangle = \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}),$$

Otrzymaliśmy wzór

$$\langle\, \vec{l} | \vec{k}\, \rangle = |C|^2 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}).$$

W przypadku normalizacji w pudełku przyjęliśmy

$$\langle\, \vec{l} | \vec{k}\, \rangle = \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}),$$

a więc dla konsystencji wybierzemy

$$|C|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3}.$$

Otrzymaliśmy wzór

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = |C|^2 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}).$$

W przypadku normalizacji w pudełku przyjęliśmy

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}),$$

a więc dla konsystencji wybierzemy

$$|C|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3}.$$

Pomijając dowolny czynnik zespolony o module 1 (fazę), możemy wybrać

$$C = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}.$$

Delta Diraca

Otrzymaliśmy wzór

$$\langle\, \vec{l} | \vec{k}\, \rangle = |C|^2 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}).$$

W przypadku normalizacji w pudełku przyjęliśmy

$$\langle\, \vec{l} | \vec{k}\, \rangle = \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}),$$

a więc dla konsystencji wybierzemy

$$|C|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3}.$$

Pomijając dowolny czynnik zespolony o module 1 (fazę), możemy wybrać

$$C = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}.$$

Unormowane funkcje własne pędu będą wtedy miały postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Zauważmy, że delta Diraca jest parzysta, tzn.

$$\delta(-x) = \delta(x).$$

Unormowane funkcje własne pędu będą wtedy miały postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Zauważmy, że delta Diraca jest parzysta, tzn.

$$\delta(-x) = \delta(x).$$

Dla dowodu skorzystajmy z przedstawienia delty Diraca jako granicy ciągu funkcyjnego i obliczmy

$$\delta(-x) = \lim_{g\to\infty} \frac{\sin[g(-x)]}{\pi(-x)} =$$

Unormowane funkcje własne pędu będą wtedy miały postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Zauważmy, że delta Diraca jest parzysta, tzn.

$$\delta(-x) = \delta(x).$$

Dla dowodu skorzystajmy z przedstawienia delty Diraca jako granicy ciągu funkcyjnego i obliczmy

$$\delta(-x) = \lim_{g\to\infty} \frac{\sin[g(-x)]}{\pi(-x)} = \lim_{g\to\infty} \frac{-\sin(gx)}{-\pi x} =$$

Delta Diraca

Unormowane funkcje własne pędu będą wtedy miały postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Zauważmy, że delta Diraca jest parzysta, tzn.

$$\delta(-x) = \delta(x).$$

Dla dowodu skorzystajmy z przedstawienia delty Diraca jako granicy ciągu funkcyjnego i obliczmy

$$\delta(-x) = \lim_{g\to\infty} \frac{\sin[g(-x)]}{\pi(-x)} = \lim_{g\to\infty} \frac{-\sin(gx)}{-\pi x} = \delta(x).$$

Unormowane funkcje własne pędu będą wtedy miały postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Zauważmy, że delta Diraca jest parzysta, tzn.

$$\delta(-x) = \delta(x).$$

Dla dowodu skorzystajmy z przedstawienia delty Diraca jako granicy ciągu funkcyjnego i obliczmy

$$\delta(-x) = \lim_{g\to\infty} \frac{\sin[g(-x)]}{\pi(-x)} = \lim_{g\to\infty} \frac{-\sin(gx)}{-\pi x} = \delta(x).$$

W takim razie warunek ortogonalności funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}) = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{l}).$$

Z równości

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} \, \mathrm{d}x = 2\pi \, \delta(k_x - l_x) = 2\pi \, \delta(l_x - k_x)$$

W takim razie warunek ortogonalności funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}) = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{l}).$$

Z równości

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} \, \mathrm{d}x = 2\pi \, \delta(k_x - l_x) = 2\pi \, \delta(l_x - k_x)$$

wynika przedstawienie całkowe delty Diraca

$$\delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i(\vec{l} - \vec{k}) \cdot \vec{r}} \, \mathrm{d}^3 r = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\vec{l} - \vec{k}) \cdot \vec{r}} \, \mathrm{d}^3 r,$$

gdzie całkowanie przebiega po całej przestrzeni.

Delta Diraca

W takim razie warunek ortogonalności funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$\langle\, \vec{l} | \vec{k}\, \rangle = \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}) = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{l}).$$

Z równości

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x}\, \mathrm{d}x = 2\pi\, \delta(k_x - l_x) = 2\pi\, \delta(l_x - k_x)$$

wynika przedstawienie całkowe delty Diraca

$$\delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i(\vec{l}-\vec{k})\cdot\vec{r}}\, \mathrm{d}^3 r = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\vec{l}-\vec{k})\cdot\vec{r}}\, \mathrm{d}^3 r,$$

gdzie całkowanie przebiega po całej przestrzeni.

Zupełność funkcji własnych pędu

Z tego przedstawienia delty Diraca będziemy często korzystać.

Wróćmy do cząstki zamkniętej w sześciennym pudełku i obliczmy

$$\sum_{\vec{k}} u^*_{\vec{k}}(\vec{r}')u_{\vec{k}}(\vec{r}) =$$

Z tego przedstawienia delty Diraca będziemy często korzystać. Wróćmy do cząstki zamkniętej w sześciennym pudełku i obliczmy

$$\sum_{\vec{k}} u^*_{\vec{k}}(\vec{r}')u_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} L^{-\frac{3}{2}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} =$$

Zupełność funkcji własnych pędu

Z tego przedstawienia delty Diraca będziemy często korzystać.
Wróćmy do cząstki zamkniętej w sześciennym pudełku i obliczmy

$$\sum_{\vec{k}} u^*_{\vec{k}}(\vec{r}\,')u_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} L^{-\frac{3}{2}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}\,'} L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = L^{-3} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}.$$

Z tego przedstawienia delty Diraca będziemy często korzystać.
Wróćmy do cząstki zamkniętej w sześciennym pudełku i obliczmy

$$\sum_{\vec{k}} u^*_{\vec{k}}(\vec{r}\,')u_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} L^{-\frac{3}{2}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}\,'} L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = L^{-3} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}.$$

Przypomnijmy, że w pudełku wektor falowy cząstki $\vec{k}$ może przyjmować wartości dyskretne

$$\vec{k} = (n_x, n_y, n_z)\,\frac{2\pi}{L}, \qquad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}.$$

Zupełność funkcji własnych pędu

Z tego przedstawienia delty Diraca będziemy często korzystać. Wróćmy do cząstki zamkniętej w sześciennym pudełku i obliczmy

$$\sum_{\vec{k}} u^*_{\vec{k}}(\vec{r}\,')u_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} L^{-\frac{3}{2}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}\,'} L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = L^{-3}\sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}.$$

Przypomnijmy, że w pudełku wektor falowy cząstki $\vec{k}$ może przyjmować wartości dyskretne

$$\vec{k} = (n_x, n_y, n_z)\,\frac{2\pi}{L}, \qquad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}.$$

Dlatego

$$L^{-3}\sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')} = L^{-3} \sum_{n_x,n_y,n_z=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi}{L}[n_x(x-x')+n_y(y-y')+n_z(z-z')]}.$$

Z tego przedstawienia delty Diraca będziemy często korzystać.
Wróćmy do cząstki zamkniętej w sześciennym pudełku i obliczmy

$$\sum_{\vec{k}} u^*_{\vec{k}}(\vec{r}')u_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} L^{-\frac{3}{2}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = L^{-3}\sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}.$$

Przypomnijmy, że w pudełku wektor falowy cząstki $\vec{k}$ może przyjmować wartości dyskretne

$$\vec{k} = (n_x, n_y, n_z)\,\frac{2\pi}{L}, \qquad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}.$$

Dlatego

$$L^{-3}\sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} = L^{-3} \sum_{n_x,n_y,n_z=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi}{L}[n_x(x-x')+n_y(y-y')+n_z(z-z')]}.$$

Prawą stronę tego równania możemy zapisać w postaci iloczynu trzech sum

$$
\begin{aligned}
& L^{-3} \sum_{n_x, n_y, n_z=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi}{L}[n_x(x-x')+n_y(y-y')+n_z(z-z')]} \\
= \quad & \left(\frac{1}{L}\sum_{n_x=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi}{L}n_x(x-x')}\right)\left(\frac{1}{L}\sum_{n_y=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi}{L}n_y(y-y')}\right) \\
\times \quad & \left(\frac{1}{L}\sum_{n_z=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi}{L}n_z(z-z')}\right)
\end{aligned}
$$

Jeżeli będziemy zwiększać rozmiary pudełka, tzn. $L \to \infty$, to sąsiednie dozwolone wartości k_x, k_y, k_z staną się nieskończenie bliskie.

Prawą stronę tego równania możemy zapisać w postaci iloczynu trzech sum

$$
\begin{aligned}
& L^{-3} \sum_{n_x,n_y,n_z=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi}{L}[n_x(x-x')+n_y(y-y')+n_z(z-z')]} \\
= \; & \left(\frac{1}{L}\sum_{n_x=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi}{L}n_x(x-x')}\right)\left(\frac{1}{L}\sum_{n_y=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi}{L}n_y(y-y')}\right) \\
\times \; & \left(\frac{1}{L}\sum_{n_z=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi}{L}n_z(z-z')}\right)
\end{aligned}
$$

Jeżeli będziemy zwiększać rozmiary pudełka, tzn. $L \rightarrow \infty$, to sąsiednie dozwolone wartości k_x, k_y, k_z staną się nieskończenie bliskie.

Zupełność funkcji własnych pędu

Dlatego w granicy $L \to \infty$ sumowanie należy zastąpić przez całkowanie

$$\frac{1}{L} \sum_{n_x=-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2\pi}{L} n_x (x-x')} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{L} \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_x (x-x')} \, \mathrm{d}k_x,$$

ale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_x (x-x')} \, \mathrm{d}k_x = \delta(x-x') = \delta(x'-x).$$

Dlatego w granicy $L \to \infty$ sumowanie należy zastąpić przez całkowanie

$$\frac{1}{L}\sum_{n_x=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi}{L}n_x(x-x')} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{L}\,\frac{L}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_x(x-x')}\,\mathrm{d}k_x,$$

ale

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_x(x-x')}\,\mathrm{d}k_x = \delta(x-x') = \delta(x'-x).$$

W rezultacie w nieskończonej przestrzeni otrzymamy

$$\sum_{\vec{k}} u^*_{\vec{k}}(\vec{r}\,')u_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad \longrightarrow \quad \int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}\,')u_{\vec{k}}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3k = \delta^{(3)}(\vec{r}\,'-\vec{r}).$$

Dlatego w granicy $L \to \infty$ sumowanie należy zastąpić przez całkowanie

$$\frac{1}{L} \sum_{n_x=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi}{L} n_x (x-x')} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{L} \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_x(x-x')} \, \mathrm{d}k_x,$$

ale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_x(x-x')} \, \mathrm{d}k_x = \delta(x - x') = \delta(x' - x).$$

W rezultacie w nieskończonej przestrzeni otrzymamy

$$\sum_{\vec{k}} u^*_{\vec{k}}(\vec{r}\,')u_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad \longrightarrow \quad \int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}\,')u_{\vec{k}}(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3k = \delta^{(3)}(\vec{r}\,' - \vec{r}).$$

Zauważmy, że wykorzystując własności delty Diraca i relację zupełności dla funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$\psi(\vec{r}) = \int \psi(\vec{r}\,')\delta^{(3)}(\vec{r}\,' - \vec{r})\, \mathrm{d}^3 r'$$

Zauważmy, że wykorzystując własności delty Diraca i relację zupełności dla funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$\psi(\vec{r}) = \int \psi(\vec{r}')\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r})\,\mathrm{d}^3 r'$$

$$=$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

Zauważmy, że wykorzystując własności delty Diraca i relację zupełności dla funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= \int \psi(\vec{r}')\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r})\,\mathrm{d}^3 r' \\ &= \int \psi(\vec{r}')\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}')u_{\vec{k}}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 k\right)\,\mathrm{d}^3 r' \end{aligned}$$

Zauważmy, że wykorzystując własności delty Diraca i relację zupełności dla funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$
\begin{aligned}
\psi(\vec{r}) &= \int \psi(\vec{r}')\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r})\,\mathrm{d}^3 r' \\
&= \int \psi(\vec{r}')\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}')u_{\vec{k}}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 k\right)\,\mathrm{d}^3 r' \\
&=
\end{aligned}
$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

Zauważmy, że wykorzystując własności delty Diraca i relację zupełności dla funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$
\begin{aligned}
\psi(\vec{r}) &= \int \psi(\vec{r}\,')\delta^{(3)}(\vec{r}\,' - \vec{r})\,\mathrm{d}^3 r' \\
&= \int \psi(\vec{r}\,') \left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}\,') u_{\vec{k}}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 k \right) \mathrm{d}^3 r' \\
&= \int \left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}\,') \psi(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3 r' \right) u_{\vec{k}}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 k =
\end{aligned}
$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

Zauważmy, że wykorzystując własności delty Diraca i relację zupełności dla funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$
\begin{aligned}
\psi(\vec{r}) &= \int \psi(\vec{r}\,')\delta^{(3)}(\vec{r}\,' - \vec{r})\,\mathrm{d}^3 r' \\
&= \int \psi(\vec{r}\,')\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}\,')u_{\vec{k}}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 k\right)\,\mathrm{d}^3 r' \\
&= \int \left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}\,')\psi(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3 r'\right) u_{\vec{k}}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 k = \int A_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 k,
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że wykorzystując własności delty Diraca i relację zupełności dla funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}) &= \int \psi(\vec{r}')\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r})\,\mathrm{d}^3 r' \\ &= \int \psi(\vec{r}')\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}')u_{\vec{k}}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 k\right)\,\mathrm{d}^3 r' \\ &= \int \left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3 r'\right)u_{\vec{k}}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 k = \int A_{\vec{k}}u_{\vec{k}}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 k,\end{aligned}$$

gdzie zmieniliśmy kolejność całkowania i wprowadziliśmy oznaczenie

$$A_{\vec{k}} \equiv \int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3 r' = \langle\, \vec{k}|\psi\,\rangle\,.$$

Zauważmy, że wykorzystując własności delty Diraca i relację zupełności dla funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$\begin{aligned}
\psi(\vec{r}) &= \int \psi(\vec{r}\,')\delta^{(3)}(\vec{r}\,' - \vec{r})\,\mathrm{d}^3 r' \\
&= \int \psi(\vec{r}\,')\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}\,')u_{\vec{k}}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 k\right)\,\mathrm{d}^3 r' \\
&= \int \left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}\,')\psi(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3 r'\right) u_{\vec{k}}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 k = \int A_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 k,
\end{aligned}$$

gdzie zmieniliśmy kolejność całkowania i wprowadziliśmy oznaczenie

$$A_{\vec{k}} \equiv \int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}\,')\psi(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3 r' = \langle\,\vec{k}|\psi\,\rangle\,.$$

W takim razie dowolną funkcję falową $\psi(\vec{r})$ należącą do przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ stanów fizycznych możemy rozwinąć na funkcje własne pędu $u_{\vec{k}}(r)$ - które same nie należą do $\mathcal{H}$ - wg. wzoru

$$\psi(\vec{r}) = \int A_{\vec{k}}\, u_{\vec{k}}(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 k, \quad \text{gdzie} \quad A_{\vec{k}} = \langle\, \vec{k} | \psi \,\rangle\,.$$

W przypadku skończonego pudełka o krawędzi L rozwinięcie to miałoby postać

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\vec{r}).$$

W takim razie dowolną funkcję falową $\psi(\vec{r})$ należącą do przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ stanów fizycznych możemy rozwinąć na funkcje własne pędu $u_{\vec{k}}(r)$ - które same nie należą do $\mathcal{H}$ - wg. wzoru

$$\psi(\vec{r}) = \int A_{\vec{k}}\, u_{\vec{k}}(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 k, \quad \text{gdzie} \quad A_{\vec{k}} = \langle\, \vec{k} | \psi \,\rangle\,.$$

W przypadku skończonego pudełka o krawędzi L rozwinięcie to miałoby postać

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\vec{r}).$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

Zgodnie z postulatem Borna gęstość prawdopodobieństwa $P(\vec{k})$ otrzymania w wyniku pomiaru pędu ($\vec{p} = \hbar\vec{k}$) cząstki znajdującej się w stanie kwantowym opisywanym przez funkcję falową $\psi(\vec{r})$ wartości zawartej w przedziale $[\vec{k}, \vec{k} + \mathrm{d}\vec{k}]$ jest proporcjonalna do kwadratu modułu współczynnika $A_{\vec{k}}$ rozwinięcia $\psi(\vec{r})$ na funkcje własne pędu.

Wobec tego możemy zapisać

$$P(\vec{k}) = c|A_{\vec{k}}|^2, \qquad \text{gdzie} \quad c = \text{const.}$$

Zgodnie z postulatem Borna gęstość prawdopodobieństwa $P(\vec{k})$ otrzymania w wyniku pomiaru pędu ($\vec{p} = \hbar\vec{k}$) cząstki znajdującej się w stanie kwantowym opisywanym przez funkcję falową $\psi(\vec{r})$ wartości zawartej w przedziale $[\vec{k}, \vec{k} + \mathrm{d}\vec{k}]$ jest proporcjonalna do kwadratu modułu współczynnika $A_{\vec{k}}$ rozwinięcia $\psi(\vec{r})$ na funkcje własne pędu.
Wobec tego możemy zapisać

$$P(\vec{k}) = c|A_{\vec{k}}|^2, \qquad \text{gdzie} \quad c = \text{const.}$$

Pokażemy, że stała c jest równa 1.

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

Zgodnie z postulatem Borna gęstość prawdopodobieństwa $P(\vec{k})$ otrzymania w wyniku pomiaru pędu ($\vec{p} = \hbar\vec{k}$) cząstki znajdującej się w stanie kwantowym opisywanym przez funkcję falową $\psi(\vec{r})$ wartości zawartej w przedziale $[\vec{k}, \vec{k} + \mathrm{d}\vec{k}]$ jest proporcjonalna do kwadratu modułu współczynnika $A_{\vec{k}}$ rozwinięcia $\psi(\vec{r})$ na funkcje własne pędu.
Wobec tego możemy zapisać

$$P(\vec{k}) = c|A_{\vec{k}}|^2, \qquad \text{gdzie} \quad c = \text{const.}$$

Pokażemy, że stała c jest równa 1.

W zależności od tego czy $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, czy dyskretne, $P(\vec{k})$ musi spełniać warunek normalizacyjny:

$$\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k = 1 \qquad \text{lub} \qquad \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}) = 1.$$

Przyjmijmy, że $\vec{k}$ ma rozkład ciągły.

W zależności od tego czy $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, czy dyskretne, $P(\vec{k})$ musi spełniać warunek normalizacyjny:

$$\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k = 1 \qquad \text{lub} \qquad \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}) = 1.$$

Przyjmijmy, że $\vec{k}$ ma rozkład ciągły. Wówczas

$$\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k \quad =$$

W zależności od tego czy $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, czy dyskretne, $P(\vec{k})$ musi spełniać warunek normalizacyjny:

$$\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k = 1 \qquad \text{lub} \qquad \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}) = 1.$$

Przyjmijmy, że $\vec{k}$ ma rozkład ciągły. Wówczas

$$\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k \quad = \quad c\int |A_{\vec{k}}|^2\,\mathrm{d}^3k =$$

W zależności od tego czy $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, czy dyskretne, $P(\vec{k})$ musi spełniać warunek normalizacyjny:

$$\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3 k = 1 \qquad \text{lub} \qquad \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}) = 1.$$

Przyjmijmy, że $\vec{k}$ ma rozkład ciągły. Wówczas

$$\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3 k \quad = \quad c \int |A_{\vec{k}}|^2\,\mathrm{d}^3 k = c \int A^*_{\vec{k}} A_{\vec{k}}\,\mathrm{d}^3 k$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

W zależności od tego czy $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, czy dyskretne, $P(\vec{k})$ musi spełniać warunek normalizacyjny:

$$\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k = 1 \qquad \text{lub} \qquad \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}) = 1.$$

Przyjmijmy, że $\vec{k}$ ma rozkład ciągły. Wówczas

$$\begin{aligned} \int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k &= c\int |A_{\vec{k}}|^2\,\mathrm{d}^3k = c\int A^*_{\vec{k}}A_{\vec{k}}\,\mathrm{d}^3k \\ &= \end{aligned}$$

W zależności od tego czy $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, czy dyskretne, $P(\vec{k})$ musi spełniać warunek normalizacyjny:

$$\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k = 1 \qquad \text{lub} \qquad \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}) = 1.$$

Przyjmijmy, że $\vec{k}$ ma rozkład ciągły. Wówczas

$$\begin{aligned}\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k &= c\int |A_{\vec{k}}|^2\,\mathrm{d}^3k = c\int A^*_{\vec{k}}A_{\vec{k}}\,\mathrm{d}^3k \\ &= c\int\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3r'\right)^*\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\right)\,\mathrm{d}^3k\end{aligned}$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

W zależności od tego czy $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, czy dyskretne, $P(\vec{k})$ musi spełniać warunek normalizacyjny:

$$\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k = 1 \qquad \text{lub} \qquad \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}) = 1.$$

Przyjmijmy, że $\vec{k}$ ma rozkład ciągły. Wówczas

$$\begin{aligned}\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k &= c\int |A_{\vec{k}}|^2\,\mathrm{d}^3k = c\int A^*_{\vec{k}}A_{\vec{k}}\,\mathrm{d}^3k \\ &= c\int\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}\,')\psi(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3r'\right)^*\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\right)\mathrm{d}^3k \\ &=\end{aligned}$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

W zależności od tego czy $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, czy dyskretne, $P(\vec{k})$ musi spełniać warunek normalizacyjny:

$$\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k = 1 \qquad \text{lub} \qquad \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}) = 1.$$

Przyjmijmy, że $\vec{k}$ ma rozkład ciągły. Wówczas

$$\begin{aligned}
\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k &= c\int |A_{\vec{k}}|^2\,\mathrm{d}^3k = c\int A^*_{\vec{k}}A_{\vec{k}}\,\mathrm{d}^3k \\
&= c\int\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3r'\right)^*\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\right)\mathrm{d}^3k \\
&= c\int\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3r'\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3k,
\end{aligned}$$

W zależności od tego czy $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, czy dyskretne, $P(\vec{k})$ musi spełniać warunek normalizacyjny:

$$\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k = 1 \qquad \text{lub} \qquad \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}) = 1.$$

Przyjmijmy, że $\vec{k}$ ma rozkład ciągły. Wówczas

$$\begin{aligned}
\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k &= c\int |A_{\vec{k}}|^2\,\mathrm{d}^3k = c\int A^*_{\vec{k}}A_{\vec{k}}\,\mathrm{d}^3k \\
&= c\int\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3r'\right)^*\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\right)\,\mathrm{d}^3k \\
&= c\int\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3r'\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3k,
\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że sprzężenie zespolone całki z pewnej funkcji jest równe całce ze sprzężenia zespolonego tej funkcji.

Zadanie. Dlaczego tak jest?

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że sprzężenie zespolone całki z pewnej funkcji jest równe całce ze sprzężenia zespolonego tej funkcji.

Zadanie. Dlaczego tak jest?

Zamieńmy kolejność całkowania

$$\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3 k \quad =$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że sprzężenie zespolone całki z pewnej funkcji jest równe całce ze sprzężenia zespolonego tej funkcji.
Zadanie. Dlaczego tak jest?
Zamieńmy kolejność całkowania

$$\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k \quad = \quad c\int\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3r' \int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3k$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że sprzężenie zespolone całki z pewnej funkcji jest równe całce ze sprzężenia zespolonego tej funkcji.

Zadanie. Dlaczego tak jest?

Zamieńmy kolejność całkowania

$$\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k = c\int\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3r'\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3k$$

$$=$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że sprzężenie zespolone całki z pewnej funkcji jest równe całce ze sprzężenia zespolonego tej funkcji.
Zadanie. Dlaczego tak jest?
Zamieńmy kolejność całkowania

$$\begin{aligned}\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k &= c\int\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3r'\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3k\\ &= c\int\int\underbrace{\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})u_{\vec{k}}(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3k\right)}_{\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')}\psi^*(\vec{r}')\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r'\,\mathrm{d}^3r\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że sprzężenie zespolone całki z pewnej funkcji jest równe całce ze sprzężenia zespolonego tej funkcji.

Zadanie. Dlaczego tak jest?

Zamieńmy kolejność całkowania

$$\begin{aligned}\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k &= c\int\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3r'\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3k \\ &= c\int\int\underbrace{\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})u_{\vec{k}}(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3k\right)}_{\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')}\psi^*(\vec{r}')\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r'\,\mathrm{d}^3r \\ &=\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że sprzężenie zespolone całki z pewnej funkcji jest równe całce ze sprzężenia zespolonego tej funkcji.
Zadanie. Dlaczego tak jest?
Zamieńmy kolejność całkowania

$$\begin{aligned}
\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k &= c\int\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3r'\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3k \\
&= c\int\int \underbrace{\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})u_{\vec{k}}(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3k\right)}_{\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')}\psi^*(\vec{r}')\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r'\,\mathrm{d}^3r \\
&= c\int\int \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r'\,\mathrm{d}^3r.
\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że sprzężenie zespolone całki z pewnej funkcji jest równe całce ze sprzężenia zespolonego tej funkcji.
Zadanie. Dlaczego tak jest?
Zamieńmy kolejność całkowania

$$
\begin{aligned}
\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k &= c\int\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3r'\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3k \\
&= c\int\int\underbrace{\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})u_{\vec{k}}(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3k\right)}_{\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')}\psi^*(\vec{r}')\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r'\,\mathrm{d}^3r \\
&= c\int\int\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r'\,\mathrm{d}^3r.
\end{aligned}
$$

Skorzystajmy z parzystości delty Diraca i wykonajmy całkowanie po $\mathrm{d}^3 r'$

$$\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3 k \quad = \quad c \int\int \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r'\,\mathrm{d}^3 r$$

Skorzystajmy z parzystości delty Diraca i wykonajmy całkowanie po $\mathrm{d}^3 r'$

$$\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3 k \quad = \quad c\int\int \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r'\,\mathrm{d}^3 r$$

$$=$$

Skorzystajmy z parzystości delty Diraca i wykonajmy całkowanie po $\mathrm{d}^3 r'$

$$\begin{aligned} \int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3 k &= c \int\int \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r'\,\mathrm{d}^3 r \\ &= c\int \psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r = \end{aligned}$$

Skorzystajmy z parzystości delty Diraca i wykonajmy całkowanie po $\mathrm{d}^3 r'$

$$\begin{aligned}\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3 k &= c\int\int \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r'\,\mathrm{d}^3 r \\ &= c\int \psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r = c\underbrace{\int |\psi(\vec{r})|^2\,\mathrm{d}^3 r}_{1} =\end{aligned}$$

Skorzystajmy z parzystości delty Diraca i wykonajmy całkowanie po $\mathrm{d}^3 r'$

$$\begin{aligned}\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3 k &= c\int\int \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r'\,\mathrm{d}^3 r \\ &= c\int \psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r = c\underbrace{\int |\psi(\vec{r})|^2\,\mathrm{d}^3 r}_{1} = c = 1,\end{aligned}$$

Skorzystajmy z parzystości delty Diraca i wykonajmy całkowanie po $\mathrm{d}^3 r'$

$$\begin{aligned} \int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3 k &= c \int\int \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r'\,\mathrm{d}^3 r \\ &= c\int \psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r = c\underbrace{\int |\psi(\vec{r})|^2\,\mathrm{d}^3 r}_{1} = c = 1, \end{aligned}$$

co kończy dowód.

Skorzystajmy z parzystości delty Diraca i wykonajmy całkowanie po $\mathrm{d}^3 r'$

$$\begin{aligned}\int P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3 k &= c\int\int \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r'\,\mathrm{d}^3 r \\ &= c\int \psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r = c\underbrace{\int |\psi(\vec{r})|^2\,\mathrm{d}^3 r}_{1} = c = 1,\end{aligned}$$

co kończy dowód.

Zadanie. Korzystając z bezczasowego równania Schrödingera i z równania doń sprzężonego pokazać, że w przypadku bez degeneracji, funkcje własne energii odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne, tzn.

$$\langle E'|E\rangle = \int u^*_{E'}(\vec{r})u_E(\vec{r})\mathrm{d}^3r = 0, \quad \text{dla} \quad E' \neq E.$$

Zadanie. Korzystając z bezczasowego równania Schrödingera i z równania doń sprzężonego pokazać, że w przypadku bez degeneracji, funkcje własne energii odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne, tzn.

$$\langle E'|E\rangle = \int u^*_{E'}(\vec{r})u_E(\vec{r})\mathrm{d}^3r = 0, \quad \mathrm{dla} \quad E' \neq E.$$

W przypadku degeneracji,

Zadanie. Korzystając z bezczasowego równania Schrödingera i z równania doń sprzężonego pokazać, że w przypadku bez degeneracji, funkcje własne energii odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne, tzn.

$$\langle E'|E\rangle = \int u^*_{E'}(\vec{r})u_E(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = 0, \quad \mathrm{dla} \quad E' \neq E.$$

W przypadku degeneracji, kiedy tej samej wartości E odpowiadają dwa lub więcej liniowo niezależnych wektorów własnych $|E1\rangle$, $|E2\rangle$,. . .,

Zadanie. Korzystając z bezczasowego równania Schrödingera i z równania doń sprzężonego pokazać, że w przypadku bez degeneracji, funkcje własne energii odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne, tzn.

$$\langle E'|E\rangle = \int u^*_{E'}(\vec{r})u_E(\vec{r})\mathrm{d}^3r = 0, \quad \text{dla} \quad E' \neq E.$$

W przypadku degeneracji, kiedy tej samej wartości E odpowiadają dwa lub więcej liniowo niezależnych wektorów własnych $|E1\rangle$, $|E2\rangle, \ldots$, możemy dokonać ortogonalizacji tych wektorów.

Zadanie. Korzystając z bezczasowego równania Schrödingera i z równania doń sprzężonego pokazać, że w przypadku bez degeneracji, funkcje własne energii odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne, tzn.

$$\langle E'|E\rangle = \int u^*_{E'}(\vec{r})u_E(\vec{r})\mathrm{d}^3r = 0, \quad \mathrm{dla} \quad E' \neq E.$$

W przypadku degeneracji, kiedy tej samej wartości E odpowiadają dwa lub więcej liniowo niezależnych wektorów własnych $|E1\rangle$, $|E2\rangle, \ldots$, możemy dokonać ortogonalizacji tych wektorów.

Funkcje własne energii

Np. w przypadku dwukrotnej degeneracji możemy utworzyć kombinację liniową liniowo niezależnych wektorów własnych

$$|E\rangle = a_1 \, |E1\rangle + a_2 \, |E2\rangle$$

i zażądać aby wektor $|E\rangle$ był ortogonalny do wektora $|E1\rangle$,

Np. w przypadku dwukrotnej degeneracji możemy utworzyć kombinację liniową liniowo niezależnych wektorów własnych

$$|E\rangle = a_1\,|E1\rangle + a_2\,|E2\rangle$$

i zażądać aby wektor $|E\rangle$ był ortogonalny do wektora $|E1\rangle$, tzn. aby $\langle E1|E\rangle = 0$.

Np. w przypadku dwukrotnej degeneracji możemy utworzyć kombinację liniową liniowo niezależnych wektorów własnych

$$|E\rangle = a_1 \, |E1\rangle + a_2 \, |E2\rangle$$

i zażądać aby wektor $|E\rangle$ był ortogonalny do wektora $|E1\rangle$, tzn. aby $\langle E1|E\rangle = 0$. Wówczas

$$\langle E1|E\rangle \quad =$$

Np. w przypadku dwukrotnej degeneracji możemy utworzyć kombinację liniową liniowo niezależnych wektorów własnych

$$|E\rangle = a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle$$

i zażądać aby wektor $|E\rangle$ był ortogonalny do wektora $|E1\rangle$, tzn. aby $\langle E1|E\rangle = 0$. Wówczas

$$\langle E1|E\rangle = \langle E1| (a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle) =$$

Np. w przypadku dwukrotnej degeneracji możemy utworzyć kombinację liniową liniowo niezależnych wektorów własnych

$$|E\rangle = a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle$$

i zażądać aby wektor $|E\rangle$ był ortogonalny do wektora $|E1\rangle$, tzn. aby $\langle E1|E\rangle = 0$. Wówczas

$$\langle E1|E\rangle = \langle E1| (a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle) = a_1 \langle E1|E1\rangle + a_2 \langle E1|E2\rangle = 0$$

Np. w przypadku dwukrotnej degeneracji możemy utworzyć kombinację liniową liniowo niezależnych wektorów własnych

$$|E\rangle = a_1 \, |E1\rangle + a_2 \, |E2\rangle$$

i zażądać aby wektor $|E\rangle$ był ortogonalny do wektora $|E1\rangle$, tzn. aby $\langle E1|E\rangle = 0$. Wówczas

$$\begin{aligned} \langle E1|E\rangle &= \langle E1| \left(a_1 \, |E1\rangle + a_2 \, |E2\rangle\right) = a_1 \, \langle E1|E1\rangle + a_2 \, \langle E1|E2\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = -\frac{\langle E1|E2\rangle}{\langle E1|E1\rangle}. \end{aligned}$$

Funkcje własne energii

Np. w przypadku dwukrotnej degeneracji możemy utworzyć kombinację liniową liniowo niezależnych wektorów własnych

$$|E\rangle = a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle$$

i zażądać aby wektor $|E\rangle$ był ortogonalny do wektora $|E1\rangle$, tzn. aby $\langle E1|E\rangle = 0$. Wówczas

$$\begin{aligned} \langle E1|E\rangle &= \langle E1| (a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle) = a_1 \langle E1|E1\rangle + a_2 \langle E1|E2\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = -\frac{\langle E1|E2\rangle}{\langle E1|E1\rangle}. \end{aligned}$$

Jeśli wybierzemy współczynniki a_1, a_2 tak, aby spełniały ten związek,

Np. w przypadku dwukrotnej degeneracji możemy utworzyć kombinację liniową liniowo niezależnych wektorów własnych

$$|E\rangle = a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle$$

i zażądać aby wektor $|E\rangle$ był ortogonalny do wektora $|E1\rangle$, tzn. aby $\langle E1|E\rangle = 0$. Wówczas

$$\langle E1|E\rangle = \langle E1| (a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle) = a_1 \langle E1|E1\rangle + a_2 \langle E1|E2\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = -\frac{\langle E1|E2\rangle}{\langle E1|E1\rangle}.$$

Jeśli wybierzemy współczynniki a_1, a_2 tak, aby spełniały ten związek, to wektor $|E\rangle$ będzie ortogonalny do wektora $|E1\rangle$.

Np. w przypadku dwukrotnej degeneracji możemy utworzyć kombinację liniową liniowo niezależnych wektorów własnych

$$|E\rangle = a_1\,|E1\rangle + a_2\,|E2\rangle$$

i zażądać aby wektor $|E\rangle$ był ortogonalny do wektora $|E1\rangle$, tzn. aby $\langle E1|E\rangle = 0$. Wówczas

$$\begin{aligned}\langle E1|E\rangle &= \langle E1|\,(a_1\,|E1\rangle + a_2\,|E2\rangle) = a_1\,\langle E1|E1\rangle + a_2\,\langle E1|E2\rangle = 0\\ &\Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = -\frac{\langle E1|E2\rangle}{\langle E1|E1\rangle}.\end{aligned}$$

Jeśli wybierzemy współczynniki a_1, a_2 tak, aby spełniały ten związek, to wektor $|E\rangle$ będzie ortogonalny do wektora $|E1\rangle$.

Taką procedurę ortogonalizacyjną można łatwo uogólnić na dowolną liczbę wektorów (funkcji) liniowo niezależnych.
W przypadku z degeneracją wektory (funkcje) własne energii będą spełniać następującą relację ortogonalności

$$\langle E's'|Es\rangle = \int u^*_{E's'}(\vec{r})u_{Es}(\vec{r})\mathrm{d}^3r = \delta_{E'E}\delta_{s's},$$

Taką procedurę ortogonalizacyjną można łatwo uogólnić na dowolną liczbę wektorów (funkcji) liniowo niezależnych.
W przypadku z degeneracją wektory (funkcje) własne energii będą spełniać następującą relację ortogonalności

$$\langle E's'|Es\rangle = \int u^*_{E's'}(\vec{r})u_{Es}(\vec{r})\mathrm{d}^3r = \delta_{E'E}\delta_{s's},$$

gdzie $\delta_{E'E}$ jest deltą Kroneckera lub Diraca,

Taką procedurę ortogonalizacyjną można łatwo uogólnić na dowolną liczbę wektorów (funkcji) liniowo niezależnych.
W przypadku z degeneracją wektory (funkcje) własne energii będą spełniać następującą relację ortogonalności

$$\langle E's'|Es\rangle = \int u^*_{E's'}(\vec{r})u_{Es}(\vec{r})\mathrm{d}^3r = \delta_{E'E}\delta_{s's},$$

gdzie $\delta_{E'E}$ jest deltą Kroneckera lub Diraca, zależnie od tego czy mamy do czynienia z widmem energii dyskretnym lub ciągłym,

Taką procedurę ortogonalizacyjną można łatwo uogólnić na dowolną liczbę wektorów (funkcji) liniowo niezależnych.
W przypadku z degeneracją wektory (funkcje) własne energii będą spełniać następującą relację ortogonalności

$$\langle E's'|Es\rangle = \int u^*_{E's'}(\vec{r})u_{Es}(\vec{r})\mathrm{d}^3r = \delta_{E'E}\delta_{s's},$$

gdzie $\delta_{E'E}$ jest deltą Kroneckera lub Diraca, zależnie od tego czy mamy do czynienia z widmem energii dyskretnym lub ciągłym, wskaźniki s' i s numerują unormowane wektory (funkcje) własne odpowiadające zdegenerowanym wartościom własnym E' i E.

Taką procedurę ortogonalizacyjną można łatwo uogólnić na dowolną liczbę wektorów (funkcji) liniowo niezależnych.
W przypadku z degeneracją wektory (funkcje) własne energii będą spełniać następującą relację ortogonalności

$$\langle E's'|Es\rangle = \int u^*_{E's'}(\vec{r})u_{Es}(\vec{r})\mathrm{d}^3r = \delta_{E'E}\delta_{s's},$$

gdzie $\delta_{E'E}$ jest deltą Kroneckera lub Diraca, zależnie od tego czy mamy do czynienia z widmem energii dyskretnym lub ciągłym, wskaźniki s' i s numerują unormowane wektory (funkcje) własne odpowiadające zdegenerowanym wartościom własnym E' i E.

Funkcje własne energii tworzą układ ortogonalny i zupełny w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ stanów kwantowomechanicznych, dlatego również mogą służyć jako baza rozwinięć ortogonalnych.

Funkcje własne energii

Funkcje własne energii tworzą układ ortogonalny i zupełny w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ stanów kwantowomechanicznych, dlatego również mogą służyć jako baza rozwinięć ortogonalnych.

Wartość oczekiwaną operatora pędu obliczamy z definicji wg. wzoru

$$\langle \vec{p} \rangle = \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} P(\vec{k}),$$

jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości dyskretne, lub

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \hbar \vec{k} P(\vec{k})\, \mathrm{d}^3 k,$$

jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe.

Wartość oczekiwana operatora pędu

Wartość oczekiwaną operatora pędu obliczamy z definicji wg. wzoru

$$\langle \vec{p} \rangle = \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} P(\vec{k}),$$

jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości dyskretne, lub

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \hbar \vec{k} P(\vec{k}) \, \mathrm{d}^3 k,$$

jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe.

Wartość oczekiwana operatora pędu

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \hbar \vec{k}\, P(\vec{k})\, \mathrm{d}^3 k =$$

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \hbar \vec{k}\, P(\vec{k})\, \mathrm{d}^3 k = \hbar \int \vec{k}\, A^*_{\vec{k}} A_{\vec{k}}\, \mathrm{d}^3 k$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \hbar\vec{k}\, P(\vec{k})\, \mathrm{d}^3 k = \hbar \int \vec{k}\, A^*_{\vec{k}} A_{\vec{k}}\, \mathrm{d}^3 k$$

$$=$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{p} \rangle &= \int \hbar \vec{k}\, P(\vec{k})\, \mathrm{d}^3 k = \hbar \int \vec{k}\, A^*_{\vec{k}} A_{\vec{k}}\, \mathrm{d}^3 k \\
&= \hbar \int \vec{k}\, \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}(\vec{r}\,') \psi^*(\vec{r}\,')\, \mathrm{d}^3 r' \right)}_{A^*_{\vec{k}}} \underbrace{\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}) \psi(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r \right)}_{A_{\vec{k}}} \mathrm{d}^3 k
\end{aligned}
$$

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$\begin{aligned}
\langle\vec{p}\rangle &= \int \hbar\vec{k}\, P(\vec{k})\, \mathrm{d}^3k = \hbar \int \vec{k}\, A^*_{\vec{k}} A_{\vec{k}}\, \mathrm{d}^3k \\
&= \hbar \int \vec{k}\, \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\, \mathrm{d}^3r'\right)}_{A^*_{\vec{k}}} \underbrace{\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\, \mathrm{d}^3r\right)}_{A_{\vec{k}}} \mathrm{d}^3k \\
&=
\end{aligned}$$

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$\begin{aligned}
\langle\vec{p}\rangle &= \int \hbar\vec{k}\,P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k = \hbar\int \vec{k}\,A^*_{\vec{k}}A_{\vec{k}}\,\mathrm{d}^3k \\
&= \hbar\int \vec{k}\,\underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3r'\right)}_{A^*_{\vec{k}}}\underbrace{\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\right)}_{A_{\vec{k}}}\,\mathrm{d}^3k \\
&= \int\int\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\hbar\vec{k}\,u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3r'\,\mathrm{d}^3k.
\end{aligned}$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{p} \rangle &= \int \hbar \vec{k}\, P(\vec{k})\, \mathrm{d}^3 k = \hbar \int \vec{k}\, A^*_{\vec{k}} A_{\vec{k}}\, \mathrm{d}^3 k \\
&= \hbar \int \vec{k}\, \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}(\vec{r}\,') \psi^*(\vec{r}\,')\, \mathrm{d}^3 r' \right)}_{A^*_{\vec{k}}} \underbrace{\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r}) \psi(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r \right)}_{A_{\vec{k}}} \mathrm{d}^3 k \\
&= \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}\,') \psi^*(\vec{r}\,') \hbar \vec{k}\, u^*_{\vec{k}}(\vec{r}) \psi(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r\, \mathrm{d}^3 r'\, \mathrm{d}^3 k.
\end{aligned}
$$

Dokonajmy zespolonego sprzężenia równania własnego operatora pędu

$$
-i\hbar \vec{\nabla} u_{\vec{k}}(\vec{r}) =
$$

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{p} \rangle &= \int \hbar \vec{k}\, P(\vec{k})\, \mathrm{d}^3 k = \hbar \int \vec{k}\, A^*_{\vec{k}} A_{\vec{k}}\, \mathrm{d}^3 k \\
&= \hbar \int \vec{k} \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\, \mathrm{d}^3 r' \right)}_{A^*_{\vec{k}}} \underbrace{\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r \right)}_{A_{\vec{k}}} \mathrm{d}^3 k \\
&= \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\hbar\vec{k}\, u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r\, \mathrm{d}^3 r'\, \mathrm{d}^3 k.
\end{aligned}
$$

Dokonajmy zespolonego sprzężenia równania własnego operatora pędu

$$
-i\hbar\vec{\nabla} u_{\vec{k}}(\vec{r}) = \hbar\vec{k}\, u_{\vec{k}}(\vec{r})
$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$\begin{aligned}
\langle\vec{p}\rangle &= \int \hbar\vec{k}\, P(\vec{k})\, \mathrm{d}^3k = \hbar\int \vec{k}\, A^*_{\vec{k}} A_{\vec{k}}\, \mathrm{d}^3k \\
&= \hbar\int \vec{k}\, \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}(\vec{r}\,')\psi^*(\vec{r}\,')\, \mathrm{d}^3r'\right)}_{A^*_{\vec{k}}} \underbrace{\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\, \mathrm{d}^3r\right)}_{A_{\vec{k}}}\, \mathrm{d}^3k \\
&= \int\int\int u_{\vec{k}}(\vec{r}\,')\psi^*(\vec{r}\,')\hbar\vec{k}\, u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\, \mathrm{d}^3r\, \mathrm{d}^3r'\, \mathrm{d}^3k.
\end{aligned}$$

Dokonajmy zespolonego sprzężenia równania własnego operatora pędu

$$-i\hbar\vec{\nabla} u_{\vec{k}}(\vec{r}) = \hbar\vec{k}\, u_{\vec{k}}(\vec{r})$$

$$i\hbar\vec{\nabla} u^*_{\vec{k}}(\vec{r})$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$\begin{aligned}
\langle \vec{p} \rangle &= \int \hbar \vec{k}\, P(\vec{k})\, \mathrm{d}^3 k = \hbar \int \vec{k}\, A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}}\, \mathrm{d}^3 k \\
&= \hbar \int \vec{k}\, \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\, \mathrm{d}^3 r' \right)}_{A_{\vec{k}}^*} \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r \right)}_{A_{\vec{k}}} \mathrm{d}^3 k \\
&= \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}') \hbar \vec{k}\, u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r\, \mathrm{d}^3 r'\, \mathrm{d}^3 k.
\end{aligned}$$

Dokonajmy zespolonego sprzężenia równania własnego operatora pędu

$$\begin{aligned}
-i\hbar \vec{\nabla} u_{\vec{k}}(\vec{r}) &= \hbar \vec{k}\, u_{\vec{k}}(\vec{r}) \\
i\hbar \vec{\nabla} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) &=
\end{aligned}$$

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$\begin{aligned}
\langle\vec{p}\rangle &= \int \hbar\vec{k}\, P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k = \hbar\int \vec{k}\, A^*_{\vec{k}}A_{\vec{k}}\,\mathrm{d}^3k \\
&= \hbar\int \vec{k}\,\underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}(\vec{r}\,')\psi^*(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3r'\right)}_{A^*_{\vec{k}}}\underbrace{\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\right)}_{A_{\vec{k}}}\,\mathrm{d}^3k \\
&= \int\int\int u_{\vec{k}}(\vec{r}\,')\psi^*(\vec{r}\,')\hbar\vec{k}\, u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3r'\,\mathrm{d}^3k.
\end{aligned}$$

Dokonajmy zespolonego sprzężenia równania własnego operatora pędu

$$\begin{aligned}
-i\hbar\vec{\nabla}u_{\vec{k}}(\vec{r}) &= \hbar\vec{k}\,u_{\vec{k}}(\vec{r}) \\
i\hbar\vec{\nabla}u^*_{\vec{k}}(\vec{r}) &= \hbar\vec{k}\,u^*_{\vec{k}}(\vec{r})
\end{aligned}$$

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$\begin{aligned}\langle\vec{p}\rangle &= \int \hbar\vec{k}\,P(\vec{k})\,\mathrm{d}^3k = \hbar\int \vec{k}\,A^*_{\vec{k}}A_{\vec{k}}\,\mathrm{d}^3k \\ &= \hbar\int \vec{k}\,\underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3r'\right)}_{A^*_{\vec{k}}}\underbrace{\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\right)}_{A_{\vec{k}}}\,\mathrm{d}^3k \\ &= \int\int\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\hbar\vec{k}\,u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3r'\,\mathrm{d}^3k.\end{aligned}$$

Dokonajmy zespolonego sprzężenia równania własnego operatora pędu

$$\begin{aligned}-i\hbar\vec{\nabla}u_{\vec{k}}(\vec{r}) &= \hbar\vec{k}\,u_{\vec{k}}(\vec{r}) \\ i\hbar\vec{\nabla}u^*_{\vec{k}}(\vec{r}) &= \hbar\vec{k}\,u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\end{aligned}$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

i skorzystajmy z niego we wzorze na $\langle \vec{p} \rangle$

$$\langle \vec{p} \rangle = \int\int\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')i\hbar\vec{\nabla} u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r\,\mathrm{d}^3 r'\,\mathrm{d}^3 k.$$

Wykonajmy całkowanie przez części w całce

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r =$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

i skorzystajmy z niego we wzorze na $\langle \vec{p} \rangle$

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}') i\hbar\vec{\nabla} u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3 r \, \mathrm{d}^3 r' \, \mathrm{d}^3 k.$$

Wykonajmy całkowanie przez części w całce

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3 r = \int_\Omega \vec{\nabla} \left(u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r}) \right) \, \mathrm{d}^3 r - \int_\Omega u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3 r$$

i skorzystajmy z niego we wzorze na $\langle\vec{p}\rangle$

$$\langle\vec{p}\rangle = \int\int\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')i\hbar\vec{\nabla}u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3r'\,\mathrm{d}^3k.$$

Wykonajmy całkowanie przez części w całce

$$\int_\Omega \vec{\nabla}u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r = \int_\Omega \vec{\nabla}\left(u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\right)\,\mathrm{d}^3r - \int_\Omega u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r$$

$$=$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

i skorzystajmy z niego we wzorze na $\langle \vec{p} \rangle$

$$\langle \vec{p} \rangle = \int\int\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')i\hbar\vec{\nabla} u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3r'\,\mathrm{d}^3k.$$

Wykonajmy całkowanie przez części w całce

$$\begin{aligned}\int_\Omega \vec{\nabla} u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r &= \int_\Omega \vec{\nabla}\left(u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\right)\,\mathrm{d}^3r - \int_\Omega u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r \\ &= \underbrace{\int_{\Gamma(\Omega)} u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}\Gamma}_{0} - \int_\Omega u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r,\end{aligned}$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

i skorzystajmy z niego we wzorze na $\langle \vec{p} \rangle$

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')i\hbar\vec{\nabla} u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r\, \mathrm{d}^3 r'\, \mathrm{d}^3 k.$$

Wykonajmy całkowanie przez części w całce

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \vec{\nabla} u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r &= \int_\Omega \vec{\nabla}\left(u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\right)\, \mathrm{d}^3 r - \int_\Omega u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r \\
&= \underbrace{\int_{\Gamma(\Omega)} u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\, \mathrm{d}\Gamma}_{0} - \int_\Omega u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r,
\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z twierdzenia Stokesa oraz z faktu, że funkcja falowa musi znikać na brzegu $\Gamma(\Omega)$

Wartość oczekiwana operatora pędu

i skorzystajmy z niego we wzorze na $\langle \vec{p} \rangle$

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')i\hbar\vec{\nabla} u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r\, \mathrm{d}^3 r'\, \mathrm{d}^3 k.$$

Wykonajmy całkowanie przez części w całce

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \vec{\nabla} u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r &= \int\limits_\Omega \vec{\nabla} \left(u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r}) \right)\, \mathrm{d}^3 r - \int\limits_\Omega u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r \\ &= \underbrace{\int\limits_{\Gamma(\Omega)} u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi(\vec{r})\, \mathrm{d}\Gamma}_{0} - \int\limits_\Omega u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r,\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z twierdzenia Stokesa oraz z faktu, że funkcja falowa musi znikać na brzegu $\Gamma(\Omega)$

dowolnie dużego (nieskończonego) obszaru całkowania Ω.
Wobec tego

$$\langle \vec{p} \rangle =$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

dowolnie dużego (nieskończonego) obszaru całkowania Ω.
Wobec tego

$$\langle \vec{p} \rangle = \int\int\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\left(-i\hbar u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r})\right) \mathrm{d}^3 r \, \mathrm{d}^3 r' \, \mathrm{d}^3 k$$

dowolnie dużego (nieskończonego) obszaru całkowania Ω.
Wobec tego

$$\langle \vec{p} \rangle = \int\int\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\left(-i\hbar u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r})\right) \mathrm{d}^3 r \, \mathrm{d}^3 r' \, \mathrm{d}^3 k$$

$$=$$

dowolnie dużego (nieskończonego) obszaru całkowania Ω.
Wobec tego

$$\begin{aligned}\langle\vec{p}\rangle &= \int\int\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\left(-i\hbar u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r})\right)\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3r'\,\mathrm{d}^3k \\ &= \int\int\underbrace{\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})u_{\vec{k}}(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3k\right)}_{\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')}\psi^*(\vec{r}')\left(-i\hbar\vec{\nabla}\right)\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3r'.\end{aligned}$$

dowolnie dużego (nieskończonego) obszaru całkowania Ω.
Wobec tego

$$\begin{aligned}\langle\vec{p}\rangle &= \int\int\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\left(-i\hbar u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r})\right)\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3r'\,\mathrm{d}^3k \\ &= \int\int\underbrace{\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})u_{\vec{k}}(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3k\right)}_{\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')}\psi^*(\vec{r}')\left(-i\hbar\vec{\nabla}\right)\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3r'.\end{aligned}$$

Skorzystajmy z parzystości delty Diraca i wykonajmy całkowanie po d^3r'

$$\langle\vec{p}\rangle =$$

dowolnie dużego (nieskończonego) obszaru całkowania Ω.
Wobec tego

$$\begin{aligned}\langle\vec{p}\rangle &= \int\int\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\Big(-i\hbar u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r})\Big)\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3r'\,\mathrm{d}^3k \\ &= \int\int\underbrace{\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})u_{\vec{k}}(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3k\right)}_{\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')}\psi^*(\vec{r}')\Big(-i\hbar\vec{\nabla}\Big)\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3r'.\end{aligned}$$

Skorzystajmy z parzystości delty Diraca i wykonajmy całkowanie po d^3r'

$$\langle\vec{p}\rangle = \int\left(\int\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{r})\psi^*(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3r'\right)\Big(-i\hbar\vec{\nabla}\Big)\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r,$$

dowolnie dużego (nieskończonego) obszaru całkowania Ω.
Wobec tego

$$\begin{aligned}
\langle\vec{p}\rangle &= \int\int\int u_{\vec{k}}(\vec{r}')\psi^*(\vec{r}')\left(-i\hbar u^*_{\vec{k}}(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r})\right)\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3r'\,\mathrm{d}^3k \\
&= \int\int\underbrace{\left(\int u^*_{\vec{k}}(\vec{r})u_{\vec{k}}(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3k\right)}_{\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')}\psi^*(\vec{r}')\left(-i\hbar\vec{\nabla}\right)\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3r'.
\end{aligned}$$

Skorzystajmy z parzystości delty Diraca i wykonajmy całkowanie po d^3r'

$$\langle\vec{p}\rangle = \int\left(\int\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{r})\psi^*(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3r'\right)\left(-i\hbar\vec{\nabla}\right)\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r,$$

wówczas otrzymamy ostateczny wzór na wartość oczekiwaną operatora pędu w stanie kwantowym opisywanym funkcją falową $\psi(\vec{r})$

$$\langle\vec{p}\rangle \equiv \langle\psi|\vec{p}|\psi\rangle = \int \psi^*(\vec{r}) \left(-i\hbar\vec{\nabla}\right) \psi(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r.$$

Widzimy, że operator pędu działa tylko na funkcję $\psi(\vec{r})$ a nie na jej sprzężenie zespolone $\psi^*(\vec{r})$.

wówczas otrzymamy ostateczny wzór na wartość oczekiwaną operatora pędu w stanie kwantowym opisywanym funkcją falową $\psi(\vec{r})$

$$\langle \vec{p} \rangle \equiv \langle \psi | \vec{p} | \psi \rangle = \int \psi^*(\vec{r}) \left(-i\hbar\vec{\nabla} \right) \psi(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3 r.$$

Widzimy, że operator pędu działa tylko na funkcję $\psi(\vec{r})$ a nie na jej sprzężenie zespolone $\psi^*(\vec{r})$.
Jest to uniwersalna reguła.

wówczas otrzymamy ostateczny wzór na wartość oczekiwaną operatora pędu w stanie kwantowym opisywanym funkcją falową $\psi(\vec{r})$

$$\langle\vec{p}\rangle \equiv \langle\psi|\vec{p}|\psi\rangle = \int \psi^*(\vec{r}) \left(-i\hbar\vec{\nabla}\right) \psi(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r.$$

Widzimy, że operator pędu działa tylko na funkcję $\psi(\vec{r})$ a nie na jej sprzężenie zespolone $\psi^*(\vec{r})$.
Jest to uniwersalna reguła. Wartość oczekiwaną operatora A w stanie kwantowym opisywanym przez $|\psi\rangle$ obliczamy według wzoru

$$\langle A\rangle \equiv \langle\psi|A|\psi\rangle\,,$$

tzn. działając operatorem A na prawo na stan $|\psi\rangle$.

wówczas otrzymamy ostateczny wzór na wartość oczekiwaną operatora pędu w stanie kwantowym opisywanym funkcją falową $\psi(\vec{r})$

$$\langle \vec{p} \rangle \equiv \langle \psi | \vec{p} | \psi \rangle = \int \psi^*(\vec{r}) \left(-i\hbar\vec{\nabla} \right) \psi(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3 r .$$

Widzimy, że operator pędu działa tylko na funkcję $\psi(\vec{r})$ a nie na jej sprzężenie zespolone $\psi^*(\vec{r})$.
Jest to uniwersalna reguła. Wartość oczekiwaną operatora A w stanie kwantowym opisywanym przez $| \psi \rangle$ obliczamy według wzoru

$$\langle A \rangle \equiv \langle \psi | A | \psi \rangle \, ,$$

tzn. działając operatorem A na prawo na stan $| \psi \rangle$.

Podobną konwencję przyjmujemy dla elementu macierzowego operatora A

$$\langle\phi|A|\psi\rangle\,,$$

który określa amplitudę prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy stanami kwantowymi $|\,\psi\rangle$ i $|\,\phi\rangle$, co oznacza, że gęstość prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy stanami kwantowymi $|\,\psi\rangle$ i $|\,\phi\rangle$ wyraża się wzorem

$$|\langle\phi|A|\psi\rangle|^2\,.$$

Podobną konwencję przyjmujemy dla elementu macierzowego operatora A

$$\langle\phi|A|\psi\rangle\,,$$

który określa amplitudę prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy stanami kwantowymi $|\,\psi\rangle$ i $|\,\phi\rangle$, co oznacza, że gęstość prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy stanami kwantowymi $|\,\psi\rangle$ i $|\,\phi\rangle$ wyraża się wzorem

$$|\langle\phi|A|\psi\rangle|^2\,.$$

Gdybyśmy jednak chcieli podziałać operatorem A na lewo, to musimy dokonać jego sprzężenia hermitowskiego,

Podobną konwencję przyjmujemy dla elementu macierzowego operatora A

$$\langle \phi | A | \psi \rangle \, ,$$

który określa amplitudę prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy stanami kwantowymi $| \, \psi \rangle$ i $| \, \phi \rangle$, co oznacza, że gęstość prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy stanami kwantowymi $| \, \psi \rangle$ i $| \, \phi \rangle$ wyraża się wzorem

$$| \langle \phi | A | \psi \rangle |^2 \, .$$

Gdybyśmy jednak chcieli podziałać operatorem A na lewo, to musimy dokonać jego sprzężenia hermitowskiego, zgodnie ze wprowadzonym uprzednio wzorem definicyjnym:

$$(\varphi|A\psi) = (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^*$$

który w notacji Diraca przyjmuje postać

$$\langle\varphi|A|\psi\rangle = \left(\langle\varphi\,|A^\dagger\right)|\,\psi\rangle = \langle\psi\,|A^\dagger|\,\varphi\rangle^*\,.$$

Wartość oczekiwana operatora

zgodnie ze wprowadzonym uprzednio wzorem definicyjnym:

$$(\varphi|A\psi) = (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^*$$

który w notacji Diraca przyjmuje postać

$$\langle\varphi|A|\psi\rangle = \left(\langle\varphi\,|A^\dagger\right)|\,\psi\rangle = \langle\psi\,|A^\dagger|\,\varphi\rangle^*\,.$$

W reprezentacji położeniowej

$$\langle\vec{r}|\psi\rangle \equiv \psi(\vec{r})$$

Wartość oczekiwana operatora

zgodnie ze wprowadzonym uprzednio wzorem definicyjnym:

$$(\varphi|A\psi) = (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^*$$

który w notacji Diraca przyjmuje postać

$$\langle\varphi|A|\psi\rangle = \left(\langle\varphi\,|A^\dagger\right)|\,\psi\rangle = \langle\psi\,|A^\dagger|\,\varphi\rangle^*\,.$$

W reprezentacji położeniowej

$$\langle\vec{r}|\psi\rangle \equiv \psi(\vec{r})$$

wartość oczekiwaną operatora A znajdujemy obliczając całkę

$$\langle A\rangle \equiv \langle\psi|A|\psi\rangle = \int \psi^*(\vec{r})A\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r.$$

Wartość oczekiwana operatora

zgodnie ze wprowadzonym uprzednio wzorem definicyjnym:

$$(\varphi|A\psi) = (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^*$$

który w notacji Diraca przyjmuje postać

$$\langle\varphi|A|\psi\rangle = \left(\langle\varphi\,|A^\dagger\right)|\,\psi\rangle = \langle\psi\,|A^\dagger|\,\varphi\rangle^*\,.$$

W reprezentacji położeniowej

$$\langle\vec{r}|\psi\rangle \equiv \psi(\vec{r})$$

wartość oczekiwaną operatora A znajdujemy obliczając całkę

$$\langle A\rangle \equiv \langle\psi|A|\psi\rangle = \int \psi^*(\vec{r})A\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r.$$