

Narodziny mechaniki kwantowej

Wykład 1

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

- L.I. Schiff, *Mechanika Kwantowa*
- K. Zalewski, *Mały Wykład z Mechaniki Kwantowej*
- R.L. Liboff, *Wstęp do Mechaniki Kwantowej*
- S. Brandt, H.D. Dahmen, *Mechanika Kwantowa w Obrazach*
- Julian Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*
- A. Messiah, *Quantum Mechanics*
- A. Bohm, *Quantum Mechanics*
- J.B. Brojan, J. Mostowski, K. Wódkiewicz, *Zbiór zadań z mechaniki kwantowej*
- i wiele innych podręczników

Na początku XX wieku przeważającą większość znanych faktów doświadczalnych można było wyjaśnić w oparciu o ówczesną wiedzę fizyczną, obecnie zwaną **klasyczną fizyką teoretyczną**.

Trudności z poprawnym opisem teoretycznym dotyczyły głównie:

- braku zadowalającego modelu atomu,
- braku zadowalającego opisu świeżo odkrytych promieni Roentgena i promieniotwórczości naturalnej,
- problemu w opisie widma promieniowania ciała doskonale czarnego,
- ciepła właściwego ciał stałych w niskich temperaturach,
- występowania tylko 5 stopni swobody w ruchu cząsteczki dwuatomowej w temperaturze pokojowej.

Na początku XX wieku przeważającą większość znanych faktów doświadczalnych można było wyjaśnić w oparciu o ówczesną wiedzę fizyczną, obecnie zwaną **klasyczną fizyką teoretyczną**. Trudności z poprawnym opisem teoretycznym dotyczyły głównie:

- braku zadowalającego modelu atomu,
- braku zadowalającego opisu świeżo odkrytych promieni Roentgena i promieniotwórczości naturalnej,
- problemu w opisie widma promieniowania ciała doskonale czarnego,
- ciepła właściwego ciał stałych w niskich temperaturach,
- występowania tylko 5 stopni swobody w ruchu cząsteczki dwuatomowej w temperaturze pokojowej.

W roku 1900 Planckowi udało się wyjaśnić problemy w opisie widma promieniowania ciała doskonale czarnego przy założeniu, że promieniowanie elektromagnetyczne może być emitowane jedynie w postaci tzw. **kwantów** o energii

$$E = h\nu = \hbar\omega,$$

gdzie $\omega = 2\pi\nu$ jest częstością kołową, ν - częstością promieniowania,

W roku 1900 Planckowi udało się wyjaśnić problemy w opisie widma promieniowania ciała doskonale czarnego przy założeniu, że promieniowanie elektromagnetyczne może być emitowane jedynie w postaci tzw. **kwantów** o energii

$$E = h\nu = \hbar\omega,$$

gdzie $\omega = 2\pi\nu$ jest częstością kołową, ν - częstością promieniowania, a

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

gdzie h jest stałą.

W roku 1900 Planckowi udało się wyjaśnić problemy w opisie widma promieniowania ciała doskonale czarnego przy założeniu, że promieniowanie elektromagnetyczne może być emitowane jedynie w postaci tzw. **kwantów** o energii

$$E = h\nu = \hbar\omega,$$

gdzie $\omega = 2\pi\nu$ jest częstością kołową, ν - częstością promieniowania, a

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

gdzie h jest stałą.

Później okazało się, że stała Plancka h jest uniwersalną stałą fizyczną:

$$h = 6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Częściej używa się zredukowanej stałej Plancka $\hbar = \frac{h}{2\pi}$:

$$\begin{aligned}\hbar &= 1.054\,571\,800(13) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ &= 6.582\,119\,514(40) \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}\end{aligned}$$

Particle Data Group *Booklet* 2018.

Później okazało się, że stała Plancka h jest uniwersalną stałą fizyczną:

$$h = 6.626\ 070\ 040(81) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Częściej używa się zredukowanej stałej Plancka $\hbar = \frac{h}{2\pi}$:

$$\begin{aligned}\hbar &= 1.054\ 571\ 800(13) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ &= 6.582\ 119\ 514(40) \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}\end{aligned}$$

Particle Data Group *Booklet* 2018.

Rozważmy zamknięty, pusty zbiornik z małym okienkiem w ścianie, umieszczony w piecyku o jednorodnej temperaturze. Po wyrównaniu temperatur wnętrza zachowuje się jak **ciało doskonale czarne**, które doskonale emituje i absorbuje promieniowanie elektromagnetyczne.

Rozważmy zamknięty, pusty zbiornik z małym okienkiem w ścianie, umieszczony w piecyku o jednorodnej temperaturze. Po wyrównaniu temperatur wnętrza zachowuje się jak **ciało doskonale czarne**, które doskonale emituje i absorbuje promieniowanie elektromagnetyczne.

Całkowita energia tego promieniowania w temperaturze T na jednostkę objętości wnętrza w dowolnej chwili czasu dana jest wzorem:

$$U(T) = \int_0^{\infty} u(\omega, T) d\omega,$$

Rozważmy zamknięty, pusty zbiornik z małym okienkiem w ścianie, umieszczony w piecyku o jednorodnej temperaturze. Po wyrównaniu temperatur wnętrza zachowuje się jak **ciało doskonale czarne**, które doskonale emituje i absorbuje promieniowanie elektromagnetyczne.

Całkowita energia tego promieniowania w temperaturze T na jednostkę objętości wnętrza w dowolnej chwili czasu dana jest wzorem:

$$U(T) = \int_0^{\infty} u(\omega, T) d\omega,$$

$u(\omega, T)$ - energia na przedział częstości i na jednostkę objętości,

Rozważmy zamknięty, pusty zbiornik z małym okienkiem w ścianie, umieszczony w piecyku o jednorodnej temperaturze. Po wyrównaniu temperatur wnętrza zachowuje się jak **ciało doskonale czarne**, które doskonale emituje i absorbuje promieniowanie elektromagnetyczne.

Całkowita energia tego promieniowania w temperaturze T na jednostkę objętości wnętrza w dowolnej chwili czasu dana jest wzorem:

$$U(T) = \int_0^{\infty} u(\omega, T) d\omega,$$

$u(\omega, T)$ - energia na przedział częstości i na jednostkę objętości,

$u(\omega, T)d\omega$ jest energią na jednostkę objętości przypadająca na fale elektromagnetyczne o częstotliwości w przedziale $(\omega, \omega + d\omega)$.

Planck podał poprawny wzór na $u(\omega, T)$

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1},$$

$u(\omega, T)d\omega$ jest energią na jednostkę objętości przypadająca na fale elektromagnetyczne o częstotliwości w przedziale $(\omega, \omega + d\omega)$.

Planck podał poprawny wzór na $u(\omega, T)$

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1},$$

gdzie

$u(\omega, T)d\omega$ jest energią na jednostkę objętości przypadająca na fale elektromagnetyczne o częstotliwości w przedziale $(\omega, \omega + d\omega)$.

Planck podał poprawny wzór na $u(\omega, T)$

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1},$$

gdzie

T jest temperaturą w skali bezwzględnej,

$u(\omega, T)d\omega$ jest energią na jednostkę objętości przypadająca na fale elektromagnetyczne o częstotliwości w przedziale $(\omega, \omega + d\omega)$.

Planck podał poprawny wzór na $u(\omega, T)$

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1},$$

gdzie

T jest temperaturą w skali bezwzględnej,

c prędkością światła w próżni, a

$u(\omega, T)d\omega$ jest energią na jednostkę objętości przypadająca na fale elektromagnetyczne o częstotliwości w przedziale $(\omega, \omega + d\omega)$.

Planck podał poprawny wzór na $u(\omega, T)$

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1},$$

gdzie

T jest temperaturą w skali bezwzględnej,

c prędkością światła w próżni, a

k_B stałą Boltzmannna:

$$k_B = 1.380\,648\,52(79) \times 10^{23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \approx 1.38 \times 10^{23} \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

$u(\omega, T)d\omega$ jest energią na jednostkę objętości przypadająca na fale elektromagnetyczne o częstotliwości w przedziale $(\omega, \omega + d\omega)$.

Planck podał poprawny wzór na $u(\omega, T)$

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1},$$

gdzie

T jest temperaturą w skali bezwzględnej,

c prędkością światła w próżni, a

k_B stałą Boltzmana:

$$k_B = 1.380\,648\,52(79) \times 10^{23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \approx 1.38 \times 10^{23} \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Wzór podany przez Plancka doskonale zgadza się z doświadczeniem.

Zawiera on w sobie założenie, że promieniowanie elektromagnetyczne emitowane jest w postaci kwantów o energii $\hbar\omega$,

Wzór podany przez Plancka doskonale zgadza się z doświadczeniem.

Zawiera on w sobie założenie, że promieniowanie elektromagnetyczne emitowane jest w postaci kwantów o energii $\hbar\omega$, którego sam Planck długo nie potrafił zaakceptować.

Wzór podany przez Plancka doskonale zgadza się z doświadczeniem.

Zawiera on w sobie założenie, że promieniowanie elektromagnetyczne emitowane jest w postaci kwantów o energii $\hbar\omega$, którego sam Planck długo nie potrafił zaakceptować.

Pojęcie **kwantów promieniowania** zostało użyte przez Einsteina do opisu **zjawiska fotoelektrycznego**.

Maksymalna energia kinetyczna T_{\max} elektronów wybitych z powierzchni metalu przez kwant światła (foton) o energii $h\nu$:

$$T_{\max} = eV_0 = h\nu - W,$$

W – praca wyjścia – minimalna energia elektronu, przy której może on opuścić metal,

V_0 – napięcie, przy którym ustaje prąd fotoelektryczny.

Pojęcie **kwantów promieniowania** zostało użyte przez Einsteina do opisu **zjawiska fotoelektrycznego**.

Maksymalna energia kinetyczna T_{\max} elektronów wybitych z powierzchni metalu przez kwant światła (foton) o energii $h\nu$:

$$T_{\max} = eV_0 = h\nu - W,$$

W – praca wyjścia – minimalna energia elektronu, przy której może on opuścić metal,

V_0 – napięcie, przy którym ustaje prąd fotoelektryczny.

Wykorzystano je również w modelach Einsteina (1907 r.) i Debye'a (1912) ciepła właściwego ciał stałych

Pojęcie **kwantów promieniowania** zostało użyte przez Einsteina do opisu **zjawiska fotoelektrycznego**.

Maksymalna energia kinetyczna T_{\max} elektronów wybitych z powierzchni metalu przez kwant światła (foton) o energii $h\nu$:

$$T_{\max} = eV_0 = h\nu - W,$$

W – praca wyjścia – minimalna energia elektronu, przy której może on opuścić metal,

V_0 – napięcie, przy którym ustaje prąd fotoelektryczny.

Wykorzystano je również w modelach **Einsteina (1907 r.)** i **Debye'a (1912)** ciepła właściwego ciał stałych oraz w opisie efektu **Comptona (1923)**.

Pojęcie **kwantów promieniowania** zostało użyte przez Einsteina do opisu **zjawiska fotoelektrycznego**.

Maksymalna energia kinetyczna T_{\max} elektronów wybitych z powierzchni metalu przez kwant światła (foton) o energii $h\nu$:

$$T_{\max} = eV_0 = h\nu - W,$$

W – praca wyjścia – minimalna energia elektronu, przy której może on opuścić metal,

V_0 – napięcie, przy którym ustaje prąd fotoelektryczny.

Wykorzystano je również w modelach **Einsteina (1907 r.)** i **Debye'a (1912)** ciepła właściwego ciał stałych oraz w opisie efektu **Comptona (1923)**.

W 1803 r. Young dokonał dyfrakcji światła – została stwierdzona **dualna** natura promieniowania elektromagnetycznego: niekiedy zachowuje się ono jak fala, a kiedy indziej jak strumień korpuskularnych kwantów.

W 1924 r. de Broglie założył, że cząstki materii mają także charakter dualny, a **pęd cząstki wiąże się z długością fali λ związkiem**

$$p = \frac{h}{\lambda},$$

W 1803 r. Young dokonał dyfrakcji światła – została stwierdzona **dualna** natura promieniowania elektromagnetycznego: niekiedy zachowuje się ono jak fala, a kiedy indziej jak strumień korpuskularnych kwantów.

W 1924 r. de Broglie założył, że cząstki materii mają także charakter dualny, a **pęd cząstki wiąże się z długością fali λ związkiem**

$$p = \frac{h}{\lambda},$$

albo wektorowo

$$\vec{p} = \hbar \vec{k},$$

gdzie \vec{k} jest wektorem falowym, $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$.

W 1803 r. Young dokonał dyfrakcji światła – została stwierdzona **dualna** natura promieniowania elektromagnetycznego: niekiedy zachowuje się ono jak fala, a kiedy indziej jak strumień korpuskularnych kwantów.

W 1924 r. de Broglie założył, że cząstki materii mają także charakter dualny, a **pęd cząstki wiąże się z długością fali λ związkiem**

$$p = \frac{h}{\lambda},$$

albo wektorowo

$$\vec{p} = \hbar \vec{k},$$

gdzie \vec{k} jest wektorem falowym, $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$.

Hipoteza ta została potwierdzona w zjawisku [dyfrakcji elektronów](#) na kryształach – Davisson i Germer (1927) i niezależnie G.P. Thomson (1928).

Okazało się również, że mierzalne parametry układów atomowych przyjmują **wartości dyskretne**.

Wartości dyskretne występowały m.in.:

- w klasyfikacji Ritza linii widmowych,
- w doświadczeniu Francka–Hertza (1913): dyskretne wartości strat energii w zderzeniach elektronów z atomami,
- w doświadczeniu Sterna–Gerlacha (1922): dyskretne wartości składowej momentu magnetycznego atomu w kierunku zewnętrznego pola magnetycznego.

Okazało się również, że mierzalne parametry układów atomowych przyjmują **wartości dyskretne**.

Wartości dyskretne występowały m.in.:

- w klasyfikacji Ritza linii widmowych,
- w doświadczeniu Francka–Hertza (1913): dyskretne wartości strat energii w zderzeniach elektronów z atomami,
- w doświadczeniu Sterna–Gerlacha (1922): dyskretne wartości składowej momentu magnetycznego atomu w kierunku zewnętrznego pola magnetycznego.

Pierwszą próbę wyjaśnienia opisanych problemów podjął Bohr w 1913 r.

Przyjął on słynne dwa postulaty.

Pierwszą próbę wyjaśnienia opisanych problemów podjął Bohr w 1913 r.

Przyjął on słynne dwa postulaty.

- 1 Układ atomowy może istnieć jedynie w pewnych stanach stacjonarnych, z których każdy odpowiada ściśle określonej energii układu. Przejściom z jednego stanu stacjonarnego do drugiego towarzyszy zawsze zysk lub strata pewnej energii, która jest emitowana lub pochłaniana w postaci kwantu promieniowania elektromagnetycznego lub jako wewnętrzna energia kinetyczna innego układu.

Pierwszą próbę wyjaśnienia opisanych problemów podjął **Bohr w 1913 r.**

Przyjął on słynne **dwa postulaty.**

- 1 Układ atomowy może istnieć jedynie w pewnych stanach stacjonarnych, z których każdy odpowiada ściśle określonej energii układu. Przejściom z jednego stanu stacjonarnego do drugiego towarzyszy zawsze zysk lub strata pewnej energii, która jest emitowana lub pochłaniana w postaci kwantu promieniowania elektromagnetycznego lub jako wewnętrzna energia kinetyczna innego układu.
- 2 Kwant promieniowania ma częstotliwość równą jego energii podzielonej przez h .

Pierwszą próbę wyjaśnienia opisanych problemów podjął **Bohr w 1913 r.**

Przyjął on słynne **dwa postulaty.**

- 1 Układ atomowy może istnieć jedynie w pewnych stanach stacjonarnych, z których każdy odpowiada ściśle określonej energii układu. Przejściom z jednego stanu stacjonarnego do drugiego towarzyszy zawsze zysk lub strata pewnej energii, która jest emitowana lub pochłaniana w postaci kwantu promieniowania elektromagnetycznego lub jako wewnętrzna energia kinetyczna innego układu.
- 2 Kwant promieniowania ma częstotliwość równą jego energii podzielonej przez h .

Atom wodoru to układ dwóch ciał złożony z dodatnio naładowanego jądra i z jednego ujemnie naładowanego elektronu. W najprostszej wersji jądro atomu wodoru składa się z pojedynczego protonu, ale może również zawierać 1 lub 2 neutrony. Wtedy mówimy o **izotopach wodoru**, odpowiednio *deuterze* lub *trycie*.

Jeżeli jądro zawiera więcej protonów, to mówimy o **atomie wodoropodobnym**.

Taki atom wciąż możemy traktować jako **układ dwóch ciał**.

Rozważmy problem ruchu dwóch ciał odosobnionych o masach m_1 i m_2 .

Równania ruchu wynikają bezpośrednio z II zasady dynamiki Newtona

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t),$$

Rozważmy problem ruchu dwóch ciał odosobnionych o masach m_1 i m_2 .

Równania ruchu wynikają bezpośrednio z II zasady dynamiki Newtona

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 & \end{aligned}$$

Rozważmy problem ruchu dwóch ciał odosobnionych o masach m_1 i m_2 .

Równania ruchu wynikają bezpośrednio z II zasady dynamiki Newtona

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \end{aligned}$$

Rozważmy problem ruchu dwóch ciał odosobnionych o masach m_1 i m_2 .

Równania ruchu wynikają bezpośrednio z II zasady dynamiki Newtona

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t),\end{aligned}$$

Rozważmy problem ruchu dwóch ciał odosobnionych o masach m_1 i m_2 .

Równania ruchu wynikają bezpośrednio z II zasady dynamiki Newtona

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t),\end{aligned}$$

gdzie \vec{r}_i i $\dot{\vec{r}}_i$, $i = 1, 2$, są wektorami położenia i prędkości ciał w dowolnie wybranym układzie odniesienia,

Rozważmy problem ruchu dwóch ciał odosobnionych o masach m_1 i m_2 .

Równania ruchu wynikają bezpośrednio z II zasady dynamiki Newtona

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t),\end{aligned}$$

gdzie \vec{r}_i i $\dot{\vec{r}}_i$, $i = 1, 2$, są wektorami położenia i prędkości ciał w dowolnie wybranym układzie odniesienia, a w drugim równaniu skorzystaliśmy z III zasady dynamiki Newtona.

Rozważmy problem ruchu dwóch ciał odosobnionych o masach m_1 i m_2 .

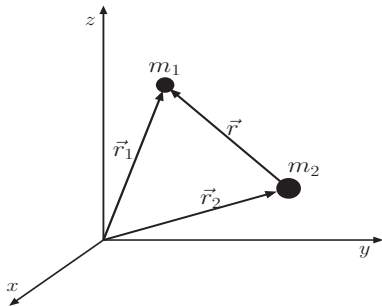
Równania ruchu wynikają bezpośrednio z II zasady dynamiki Newtona

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t),\end{aligned}$$

gdzie \vec{r}_i i $\dot{\vec{r}}_i$, $i = 1, 2$, są wektorami położenia i prędkości ciał w dowolnie wybranym układzie odniesienia, a w drugim równaniu skorzystaliśmy z III zasady dynamiki Newtona.

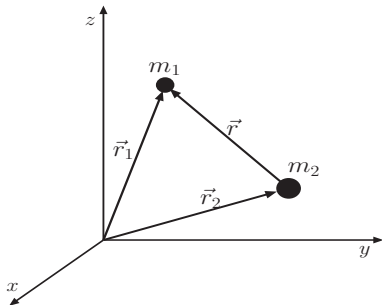
Problem ruchu dwóch ciał

Rozpatrywany układ dwóch ciał możemy obserwować z dowolnie wybranego układu odniesienia.



Problem ruchu dwóch ciał

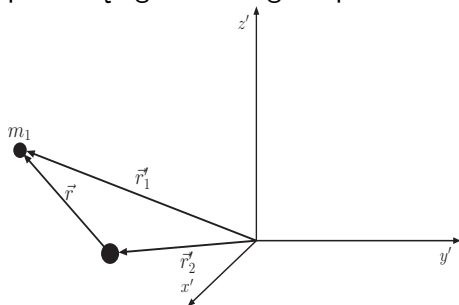
Rozpatrywany układ dwóch ciał możemy obserwować z dowolnie wybranego układu odniesienia.



Układ współrzędnych możemy wybrać inaczej, np. możemy przesunąć go równoległe o pewien wektor

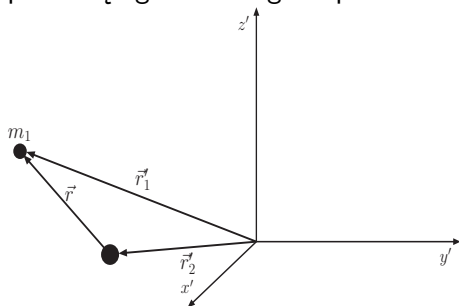
Problem ruchu dwóch ciał

Układ współrzędnych możemy wybrać inaczej, np. możemy przesunąć go równoległe o pewien wektor



Problem ruchu dwóch ciał

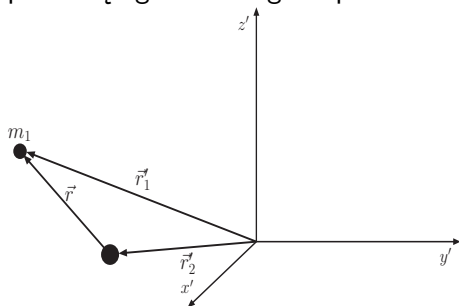
Układ współrzędnych możemy wybrać inaczej, np. możemy przesunąć go równoległe o pewien wektor



Widzimy, że wektory położenia \vec{r}_1 i \vec{r}_2 są teraz zupełnie inne.

Problem ruchu dwóch ciał

Układ współrzędnych możemy wybrać inaczej, np. możemy przesunąć go równoległe o pewien wektor

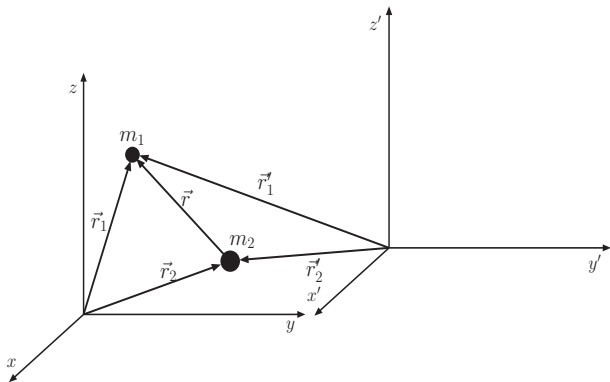


Widzimy, że wektory położenia \vec{r}_1 i \vec{r}_2 są teraz zupełnie inne.

Problem ruchu dwóch ciał

Tylko wektor różnicy położeń

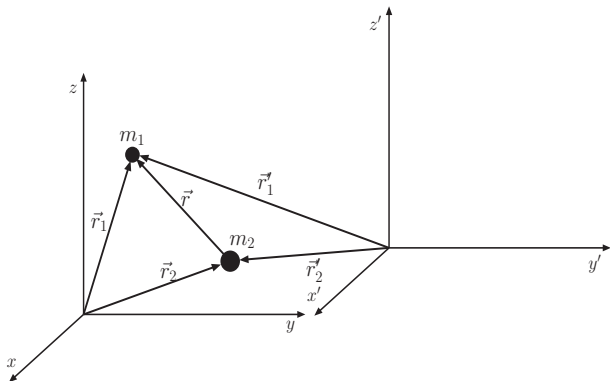
$$\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$



Problem ruchu dwóch ciał

Tylko wektor różnicy położeń

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

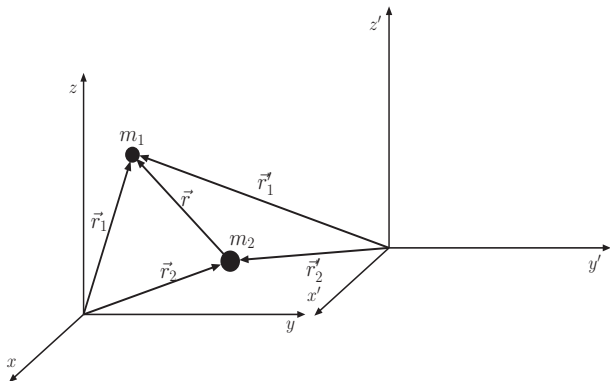


pozostaje niezmienny przy operacji przesunięcia układu współrzędnych.

Problem ruchu dwóch ciał

Tylko wektor różnicy położeń

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$



pozostaje niezmienny przy operacji przesunięcia układu współrzędnych.

Problem ruchu dwóch ciał

Dlatego siła oddziaływania \vec{F} obu ciał może zależeć tylko od **względnego położenia** $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Podobnie, wykorzystując fakt, że rozpatrywany układ dwóch ciał możemy obserwować z dowolnie wybranego inercjalnego układu odniesienia, dochodzimy do wniosku, że siła \vec{F} może zależeć tylko od **względnej prędkości** $\dot{\vec{r}} \equiv \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2$ obu ciał i od czasu.

Problem ruchu dwóch ciał

Dlatego siła oddziaływania \vec{F} obu ciał może zależeć tylko od **względnego położenia** $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Podobnie, wykorzystując fakt, że rozpatrywany układ dwóch ciał możemy obserwować z dowolnie wybranego inercjalnego układu odniesienia, dochodzimy do wniosku, że **siła \vec{F} może zależeć tylko od względnej prędkości** $\dot{\vec{r}} \equiv \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2$ obu ciał i od czasu. Zatem równania ruchu przyjmują postać

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Problem ruchu dwóch ciał

Dlatego siła oddziaływania \vec{F} obu ciał może zależeć tylko od **względnego położenia** $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Podobnie, wykorzystując fakt, że rozpatrywany układ dwóch ciał możemy obserwować z dowolnie wybranego inercjalnego układu odniesienia, dochodzimy do wniosku, że **siła \vec{F} może zależeć tylko od względnej prędkości** $\dot{\vec{r}} \equiv \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2$ obu ciał i od czasu. Zatem równania ruchu przyjmują postać

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Dodajmy stronami oba równania

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0$$

Problem ruchu dwóch ciał

Dlatego siła oddziaływania \vec{F} obu ciał może zależeć tylko od **względnej położenia** $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Podobnie, wykorzystując fakt, że rozpatrywany układ dwóch ciał możemy obserwować z dowolnie wybranego inercjalnego układu odniesienia, dochodzimy do wniosku, że **siła \vec{F} może zależeć tylko od względnej prędkości** $\dot{\vec{r}} \equiv \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2$ obu ciał i od czasu. Zatem równania ruchu przyjmują postać

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Dodajmy stronami oba równania

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0$$

i podzielmy obie strony przez $m_1 + m_2$

$$\frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

Problem ruchu dwóch ciał

Dlatego siła oddziaływania \vec{F} obu ciał może zależeć tylko od **wzłędnego położenia** $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Podobnie, wykorzystując fakt, że rozpatrywany układ dwóch ciał możemy obserwować z dowolnie wybranego inercjalnego układu odniesienia, dochodzimy do wniosku, że **siła \vec{F} może zależeć tylko od wzłędnej prędkości** $\dot{\vec{r}} \equiv \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2$ obu ciał i od czasu. Zatem równania ruchu przyjmują postać

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Dodajmy stronami oba równania

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0$$

i podzielmy obie strony przez $m_1 + m_2$

$$\frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

Po lewej stronie otrzymanego równania występuje druga pochodna czasowa wektora

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

który opisuje położenie środka masy rozpatrywanego układu dwóch ciał.

Po lewej stronie otrzymanego równania występuje druga pochodna czasowa wektora

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

który opisuje **położenie środka masy** rozpatrywanego układu dwóch ciał.

Otrzymane równanie przyjmuje więc postać

$$\frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = \ddot{\vec{R}} = 0$$

Problem ruchu dwóch ciał

Po lewej stronie otrzymanego równania występuje druga pochodna czasowa wektora

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

który opisuje **położenie środka masy** rozpatrywanego układu dwóch ciał.

Otrzymane równanie przyjmuje więc postać

$$\frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = \ddot{\vec{R}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{R}} = \text{const.}$$

Problem ruchu dwóch ciał

Po lewej stronie otrzymanego równania występuje druga pochodna czasowa wektora

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

który opisuje położenie środka masy rozpatrywanego układu dwóch ciał.

Otrzymane równanie przyjmuje więc postać

$$\frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = \ddot{\vec{R}} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{R}} = \text{const.}$$

Wnioskujemy stąd, że środek masy odosobnionego układu dwóch ciał porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Problem ruchu dwóch ciał

Po lewej stronie otrzymanego równania występuje druga pochodna czasowa wektora

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

który opisuje położenie środka masy rozpatrywanego układu dwóch ciał.

Otrzymane równanie przyjmuje więc postać

$$\frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = \ddot{\vec{R}} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{R}} = \text{const.}$$

Wnioskujemy stąd, że środek masy odosobnionego układu dwóch ciał porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$,

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$,

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 =$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t),$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_2 &= \end{aligned}$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Odejmijmy stronami drugie równanie od pierwszego

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Odejmijmy stronami drugie równanie od pierwszego

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) =$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Odejmijmy stronami drugie równanie od pierwszego

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) =$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Odejmijmy stronami drugie równanie od pierwszego

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).\end{aligned}$$

Odejmijmy stronami drugie równanie od pierwszego

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

Zdefiniujmy masę zredukowaną układu dwóch ciał

$$m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Zdefiniujemy masę zredukowaną układu dwóch ciał

$$m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Wówczas nasze równanie przyjmie postać

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

Zdefiniujemy masę zredukowaną układu dwóch ciał

$$m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Wówczas nasze równanie przyjmie postać

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

Widzimy, że problem ruchu dwóch ciał został sprowadzony do

- ruchu ciała o masie zredukowanej pod wpływem takiej samej siły, którą ciała wzajemnie na siebie oddziałują,

Zdefiniujemy masę zredukowaną układu dwóch ciał

$$m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Wówczas nasze równanie przyjmie postać

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

Widzimy, że problem ruchu dwóch ciał został sprowadzony do

- ruchu ciała o masie zredukowanej pod wpływem takiej samej siły, którą ciała wzajemnie na siebie oddziałują,
- jednostajnego ruchu środka masy.

Zdefiniujmy masę zredukowaną układu dwóch ciał

$$m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Wówczas nasze równanie przyjmie postać

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

Widzimy, że problem ruchu dwóch ciał został sprowadzony do

- ruchu ciała o masie zredukowanej pod wpływem takiej samej siły, którą ciała wzajemnie na siebie oddziałują,
- jednostajnego ruchu środka masy.

Przykład 1. Rozważmy ruch układu elektron-proton. Masa protonu $m_p \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \approx 938 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, a masa elektronu $m_e \approx 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} \approx 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$,

Przykład 1. Rozważmy ruch układu elektron-proton. Masa protonu $m_p \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \approx 938 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, a masa elektronu $m_e \approx 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} \approx 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, a zatem

$$m_p \gg m_e$$

Przykład 1. Rozważmy ruch układu elektron-proton. Masa protonu $m_p \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \approx 938 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, a masa elektronu $m_e \approx 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} \approx 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, a zatem

$$m_p \gg m_e \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m_e} \gg \frac{1}{m_p}$$

Przykład 1. Rozważmy ruch układu elektron-proton. Masa protonu $m_p \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \approx 938 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, a masa elektronu $m_e \approx 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} \approx 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, a zatem

$$m_p \gg m_e \Rightarrow \frac{1}{m_e} \gg \frac{1}{m_p} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_e}$$

Przykład 1. Rozważmy ruch układu elektron-proton. Masa protonu $m_p \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \approx 938 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, a masa elektronu $m_e \approx 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} \approx 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, a zatem

$$m_p \gg m_e \Rightarrow \frac{1}{m_e} \gg \frac{1}{m_p} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_e} \approx \frac{1}{m_e},$$

Przykład 1. Rozważmy ruch układu elektron-proton. Masa protonu $m_p \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \approx 938 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, a masa elektronu $m_e \approx 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} \approx 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, a zatem

$$m_p \gg m_e \Rightarrow \frac{1}{m_e} \gg \frac{1}{m_p} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_e} \approx \frac{1}{m_e},$$

skąd wynika, że masa zredukowana układu jest w bardzo dobrym przybliżeniu równa masie elektronu, $m \approx m_e$.

Problem ruchu dwóch ciał

Przykład 1. Rozważmy ruch układu elektron-proton. Masa protonu $m_p \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \approx 938 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, a masa elektronu $m_e \approx 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} \approx 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, a zatem

$$m_p \gg m_e \Rightarrow \frac{1}{m_e} \gg \frac{1}{m_p} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_e} \approx \frac{1}{m_e},$$

skąd wynika, że masa zredukowana układu jest w bardzo dobrym przybliżeniu równa masie elektronu, $m \approx m_e$.

Odwróćmy związki definicyjne na wektory określające położenie względne i położenie środka masy

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_e \\ \vec{R} = \frac{m_p \vec{r}_p + m_e \vec{r}_e}{m_p + m_e} \end{cases}$$

Problem ruchu dwóch ciał

Przykład 1. Rozważmy ruch układu elektron-proton. Masa protonu $m_p \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \approx 938 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, a masa elektronu $m_e \approx 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} \approx 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, a zatem

$$m_p \gg m_e \Rightarrow \frac{1}{m_e} \gg \frac{1}{m_p} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_e} \approx \frac{1}{m_e},$$

skąd wynika, że masa zredukowana układu jest w bardzo dobrym przybliżeniu równa masie elektronu, $m \approx m_e$.

Odwróćmy związki definicyjne na wektory określające położenie względne i położenie środka masy

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_e \\ \vec{R} = \frac{m_p \vec{r}_p + m_e \vec{r}_e}{m_p + m_e} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_p = \frac{m_e}{m_p + m_e} \vec{r} + \vec{R} \\ \vec{r}_e = -\frac{m_p}{m_p + m_e} \vec{r} + \vec{R} \end{cases}$$

Problem ruchu dwóch ciał

Przykład 1. Rozważmy ruch układu elektron-proton. Masa protonu $m_p \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \approx 938 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, a masa elektronu $m_e \approx 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} \approx 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, a zatem

$$m_p \gg m_e \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m_e} \gg \frac{1}{m_p} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_e} \approx \frac{1}{m_e},$$

skąd wynika, że masa zredukowana układu jest w bardzo dobrym przybliżeniu równa masie elektronu, $m \approx m_e$.

Odwróćmy związki definicyjne na wektory określające położenie względne i położenie środka masy

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_e \\ \vec{R} = \frac{m_p \vec{r}_p + m_e \vec{r}_e}{m_p + m_e} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_p = \frac{m_e}{m_p + m_e} \vec{r} + \vec{R} \\ \vec{r}_e = -\frac{m_p}{m_p + m_e} \vec{r} + \vec{R} \end{array} \right.$$

Problem ruchu dwóch ciał

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor \vec{R} i obliczmy

$$\frac{|\vec{r}_p|}{|\vec{r}_e|} = \frac{\left| \frac{m_e}{m_p + m_e} \vec{r} \right|}{\left| -\frac{m_p}{m_p + m_e} \vec{r} \right|} =$$

Problem ruchu dwóch ciał

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor \vec{R} i obliczmy

$$\frac{|\vec{r}_p|}{|\vec{r}_e|} = \frac{\left| \frac{m_e}{m_p+m_e} \vec{r} \right|}{\left| -\frac{m_p}{m_p+m_e} \vec{r} \right|} = \frac{\frac{m_e}{m_p+m_e} |\vec{r}|}{\frac{m_p}{m_p+m_e} |\vec{r}|} =$$

Problem ruchu dwóch ciał

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor \vec{R} i obliczmy

$$\frac{|\vec{r}_p|}{|\vec{r}_e|} = \frac{\left| \frac{m_e}{m_p+m_e} \vec{r} \right|}{\left| -\frac{m_p}{m_p+m_e} \vec{r} \right|} = \frac{\frac{m_e}{m_p+m_e} |\vec{r}|}{\frac{m_p}{m_p+m_e} |\vec{r}|} = \frac{m_e}{m_p} \approx$$

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor \vec{R} i obliczmy

$$\frac{|\vec{r}_p|}{|\vec{r}_e|} = \frac{\left| \frac{m_e}{m_p+m_e} \vec{r} \right|}{\left| -\frac{m_p}{m_p+m_e} \vec{r} \right|} = \frac{\frac{m_e}{m_p+m_e} |\vec{r}|}{\frac{m_p}{m_p+m_e} |\vec{r}|} = \frac{m_e}{m_p} \approx \frac{0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}}{938 \frac{\text{MeV}}{c^2}} =$$

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor \vec{R} i obliczmy

$$\frac{|\vec{r}_p|}{|\vec{r}_e|} = \frac{\left| \frac{m_e}{m_p+m_e} \vec{r} \right|}{\left| -\frac{m_p}{m_p+m_e} \vec{r} \right|} = \frac{\frac{m_e}{m_p+m_e} |\vec{r}|}{\frac{m_p}{m_p+m_e} |\vec{r}|} = \frac{m_e}{m_p} \approx \frac{0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}}{938 \frac{\text{MeV}}{c^2}} = 5.45 \times 10^{-4}.$$

Problem ruchu dwóch ciał

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor \vec{R} i obliczmy

$$\frac{|\vec{r}_p|}{|\vec{r}_e|} = \frac{\left| \frac{m_e}{m_p+m_e} \vec{r} \right|}{\left| -\frac{m_p}{m_p+m_e} \vec{r} \right|} = \frac{\frac{m_e}{m_p+m_e} |\vec{r}|}{\frac{m_p}{m_p+m_e} |\vec{r}|} = \frac{m_e}{m_p} \approx \frac{0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}}{938 \frac{\text{MeV}}{c^2}} = 5.45 \times 10^{-4}.$$

Widzimy, że rozmiary orbit protonu i elektronu w ruchu względnym mają się do siebie jak

$$\frac{|\vec{r}_p|}{|\vec{r}_e|} \approx 5.45 \times 10^{-4}.$$

Problem ruchu dwóch ciał

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor \vec{R} i obliczmy

$$\frac{|\vec{r}_p|}{|\vec{r}_e|} = \frac{\left| \frac{m_e}{m_p+m_e} \vec{r} \right|}{\left| -\frac{m_p}{m_p+m_e} \vec{r} \right|} = \frac{\frac{m_e}{m_p+m_e} |\vec{r}|}{\frac{m_p}{m_p+m_e} |\vec{r}|} = \frac{m_e}{m_p} \approx \frac{0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}}{938 \frac{\text{MeV}}{c^2}} = 5.45 \times 10^{-4}.$$

Widzimy, że rozmiary orbit protonu i elektronu w ruchu względnym mają się do siebie jak

$$\frac{|\vec{r}_p|}{|\vec{r}_e|} \approx 5.45 \times 10^{-4}.$$

Jak się dalej przekonamy te klasyczne rozważania mają charakter czysto jakościowy i niekoniecznie muszą być spójne z przewidywaniami ilościowymi otrzymanymi w ramach mechaniki kwantowej.

Problem ruchu dwóch ciał

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor \vec{R} i obliczmy

$$\frac{|\vec{r}_p|}{|\vec{r}_e|} = \frac{\left| \frac{m_e}{m_p+m_e} \vec{r} \right|}{\left| -\frac{m_p}{m_p+m_e} \vec{r} \right|} = \frac{\frac{m_e}{m_p+m_e} |\vec{r}|}{\frac{m_p}{m_p+m_e} |\vec{r}|} = \frac{m_e}{m_p} \approx \frac{0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}}{938 \frac{\text{MeV}}{c^2}} = 5.45 \times 10^{-4}.$$

Widzimy, że rozmiary orbit protonu i elektronu w ruchu względnym mają się do siebie jak

$$\frac{|\vec{r}_p|}{|\vec{r}_e|} \approx 5.45 \times 10^{-4}.$$

Jak się dalej przekonamy te klasyczne rozważania mają charakter czysto jakościowy i niekoniecznie muszą być spójne z przewidywaniami ilościowymi otrzymanymi w ramach mechaniki kwantowej.

Model Bohra atomu wodoru

Elektron w atomie wodoru porusza się pod wpływem siły przyciągania kulombowskiego wytwarzanego przez proton w jądrze. W jednostkach, w których współczynnik $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ w prawie Coulomba jest bezwymiarowy i równy 1, siła ta ma postać

$$\vec{F} = -\frac{e^2}{r^2}\hat{r},$$

gdzie e jest ładunkiem protonu, $r = |\vec{r}|$ jest odległością elektronu od jądra, \vec{r} jest wektorem ich względnego położenia, a $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ - wektorem jednostkowym w kierunku \vec{r} . Znak '-' wskazuje, że siła ma charakter przyciągający.

Siła kulombowska jest przykładem siły centralnej, czyli siły działającej wzdłuż wektora \hat{r} , która ma ogólną postać

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)\hat{r}.$$

Model Bohra atomu wodoru

Elektron w atomie wodoru porusza się pod wpływem siły przyciągania kulombowskiego wytwarzanego przez proton w jądrze. W jednostkach, w których współczynnik $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ w prawie Coulomba jest bezwymiarowy i równy 1, siła ta ma postać

$$\vec{F} = -\frac{e^2}{r^2}\hat{r},$$

gdzie e jest ładunkiem protonu, $r = |\vec{r}|$ jest odległością elektronu od jądra, \vec{r} jest wektorem ich względnego położenia, a $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ - wektorem jednostkowym w kierunku \vec{r} . Znak '-' wskazuje, że siła ma charakter przyciągający.

Siła kulombowska jest przykładem siły centralnej, czyli siły działającej wzdłuż wektora \hat{r} , która ma ogólną postać

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)\hat{r}.$$

Model Bohra atomu wodoru

Ruch elektronu odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

którą wybierzemy jako płaszczyznę xOy .

Ruch elektronu odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

którą wybierzemy jako płaszczyznę xOy .

Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Ruch elektronu odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

którą wybierzemy jako płaszczyznę xOy .

Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Rzeczywiście, obliczmy

Ruch elektronu odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

którą wybierzemy jako płaszczyznę xOy .

Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Rzeczywiście, obliczmy

$$\dot{\vec{L}} =$$

Ruch elektronu odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

którą wybierzemy jako płaszczyznę xOy .

Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Rzeczywiście, obliczmy

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) =$$

Ruch elektronu odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

którą wybierzemy jako płaszczyznę xOy .

Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Rzeczywiście, obliczmy

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} =$$

Ruch elektronu odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

którą wybierzemy jako płaszczyznę xOy .

Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Rzeczywiście, obliczmy

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t)$$

Ruch elektronu odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

którą wybierzemy jako płaszczyznę xOy .

Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Rzeczywiście, obliczmy

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t)$$

=

Ruch elektronu odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

którą wybierzemy jako płaszczyznę xOy .

Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Rzeczywiście, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \\ &= \vec{r} \times \left(f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r} \right)\end{aligned}$$

Model Bohra atomu wodoru

Ruch elektronu odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

którą wybierzemy jako płaszczyznę xOy .

Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Rzeczywiście, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \\ &= \vec{r} \times \left(f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_0\end{aligned}$$

Ruch elektronu odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

którą wybierzemy jako płaszczyznę xOy .

Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Rzeczywiście, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \\ &= \vec{r} \times \left(f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_0 = 0\end{aligned}$$

Model Bohra atomu wodoru

Ruch elektronu odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

którą wybierzemy jako płaszczyznę xOy .

Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Rzeczywiście, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \\ &= \vec{r} \times \left(f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_0 = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}\end{aligned}$$

Ruch elektronu odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego orbitalnego momentu pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

którą wybierzemy jako płaszczyznę xOy .

Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Rzeczywiście, obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \\ &= \vec{r} \times \left(f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_0 = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}\end{aligned}$$

Model Bohra atomu wodoru

Elektron pod wpływem siły kulombowskiej porusza się po okręgu, a zatem jego prędkość jest w każdym punkcie prostopadła do wektora położenia, więc

$$L = |\vec{r} \times \vec{p}| = rmv \sin(90^\circ) = rmr\dot{\varphi} = mr^2\dot{\varphi}$$

gdzie $v = r\dot{\varphi}$ jest prędkością liniową elektronu.

Model Bohra atomu wodoru

Elektron pod wpływem siły kulombowskiej porusza się po okręgu, a zatem jego prędkość jest w każdym punkcie prostopadła do wektora położenia, więc

$$L = |\vec{r} \times \vec{p}| = rmv \sin(90^\circ) = rmr\dot{\varphi} = mr^2\dot{\varphi}$$

gdzie $v = r\dot{\varphi}$ jest prędkością liniową elektronu.

Ze wzoru na L możemy wyznaczyć prędkość kątową

Model Bohra atomu wodoru

Elektron pod wpływem siły kulombowskiej porusza się po okręgu, a zatem jego prędkość jest w każdym punkcie prostopadła do wektora położenia, więc

$$L = |\vec{r} \times \vec{p}| = rmv \sin(90^\circ) = rmr\dot{\varphi} = mr^2\dot{\varphi}$$

gdzie $v = r\dot{\varphi}$ jest prędkością liniową elektronu.

Ze wzoru na L możemy wyznaczyć prędkość kątową

$$L = mr^2\dot{\varphi}$$

Model Bohra atomu wodoru

Elektron pod wpływem siły kulombowskiej porusza się po okręgu, a zatem jego prędkość jest w każdym punkcie prostopadła do wektora położenia, więc

$$L = |\vec{r} \times \vec{p}| = rmv \sin(90^\circ) = rmr\dot{\varphi} = mr^2\dot{\varphi}$$

gdzie $v = r\dot{\varphi}$ jest prędkością liniową elektronu.

Ze wzoru na L możemy wyznaczyć prędkość kątową

$$L = mr^2\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} .$$

Model Bohra atomu wodoru

Elektron pod wpływem siły kulombowskiej porusza się po okręgu, a zatem jego prędkość jest w każdym punkcie prostopadła do wektora położenia, więc

$$L = |\vec{r} \times \vec{p}| = rmv \sin(90^\circ) = rmr\dot{\varphi} = mr^2\dot{\varphi}$$

gdzie $v = r\dot{\varphi}$ jest prędkością liniową elektronu.

Ze wzoru na L możemy wyznaczyć prędkość kątową

$$L = mr^2\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}.$$

W przypadku atomu wodoru Bohr przyjął tzw. *regułę wyboru*: dla orbit stacjonarnych moment pędu musi być całkowitą wielokrotnością \hbar , a zatem

$$L = n\hbar, \quad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Model Bohra atomu wodoru

Elektron pod wpływem siły kulombowskiej porusza się po okręgu, a zatem jego prędkość jest w każdym punkcie prostopadła do wektora położenia, więc

$$L = |\vec{r} \times \vec{p}| = rmv \sin(90^\circ) = rmr\dot{\varphi} = mr^2\dot{\varphi}$$

gdzie $v = r\dot{\varphi}$ jest prędkością liniową elektronu.

Ze wzoru na L możemy wyznaczyć prędkość kątową

$$L = mr^2\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} .$$

W przypadku atomu wodoru Bohr przyjął tzw. *regułę wyboru*: dla orbit stacjonarnych moment pędu musi być całkowitą wielokrotnością \hbar , a zatem

$$L = n\hbar, \quad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Całkowita energia elektronu:

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \left(-\frac{e^2}{r}\right) = \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - \frac{e^2}{r}$$

Całkowita energia elektronu:

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \left(-\frac{e^2}{r}\right) = \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - \frac{e^2}{r}$$

=

Całkowita energia elektronu:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \left(-\frac{e^2}{r}\right) = \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - \frac{e^2}{r} \\ &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - \frac{e^2}{r} \end{aligned}$$

Całkowita energia elektronu:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \left(-\frac{e^2}{r}\right) = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r} \\ &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z wzoru $\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$.

Model Bohra atomu wodoru

Całkowita energia elektronu:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \left(-\frac{e^2}{r}\right) = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r} \\ &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z wzoru $\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$.

Siła dośrodkowa jest siłą przyciągania kulombowskiego:

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{m\vec{v}^2}{r}$$

Model Bohra atomu wodoru

Całkowita energia elektronu:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \left(-\frac{e^2}{r}\right) = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r} \\ &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z wzoru $\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$.

Siła dośrodkowa jest siłą przyciągania kulombowskiego:

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{m\vec{v}^2}{r} = mr\dot{\varphi}^2$$

Model Bohra atomu wodoru

Całkowita energia elektronu:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \left(-\frac{e^2}{r}\right) = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r} \\ &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z wzoru $\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$.

Siła dośrodkowa jest siłą przyciągania kulombowskiego:

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{m\vec{v}^2}{r} = mr\dot{\varphi}^2 = mr\frac{L^2}{m^2r^4}$$

Całkowita energia elektronu:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \left(-\frac{e^2}{r}\right) = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r} \\ &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z wzoru $\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$.

Siła dośrodkowa jest siłą przyciągania kulombowskiego:

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{m\vec{v}^2}{r} = mr\dot{\varphi}^2 = mr\frac{L^2}{m^2r^4} = \frac{L^2}{mr^3}.$$

Model Bohra atomu wodoru

Całkowita energia elektronu:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \left(-\frac{e^2}{r}\right) = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r} \\ &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z wzoru $\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$.

Siła dośrodkowa jest siłą przyciągania kulombowskiego:

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{m\vec{v}^2}{r} = mr\dot{\varphi}^2 = mr\frac{L^2}{m^2r^4} = \frac{L^2}{mr^3}.$$

Pomnóżmy obie strony przez r^2 i wstawmy $L = n\hbar \Rightarrow$

Model Bohra atomu wodoru

Całkowita energia elektronu:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \left(-\frac{e^2}{r}\right) = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r} \\ &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z wzoru $\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$.

Siła dośrodkowa jest siłą przyciągania kulombowskiego:

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{m\vec{v}^2}{r} = mr\dot{\varphi}^2 = mr\frac{L^2}{m^2r^4} = \frac{L^2}{mr^3}.$$

Pomnóżmy obie strony przez r^2 i wstawmy $L = n\hbar \Rightarrow$

$$e^2 = \frac{L^2}{mr}$$

Model Bohra atomu wodoru

Całkowita energia elektronu:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \left(-\frac{e^2}{r}\right) = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r} \\ &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z wzoru $\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$.

Siła dośrodkowa jest siłą przyciągania kulombowskiego:

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{m\vec{v}^2}{r} = mr\dot{\varphi}^2 = mr\frac{L^2}{m^2r^4} = \frac{L^2}{mr^3}.$$

Pomnóżmy obie strony przez r^2 i wstawmy $L = n\hbar \Rightarrow$

$$e^2 = \frac{L^2}{mr} = \frac{n^2\hbar^2}{mr}$$

Model Bohra atomu wodoru

Całkowita energia elektronu:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \left(-\frac{e^2}{r}\right) = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r} \\ &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z wzoru $\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$.

Siła dośrodkowa jest siłą przyciągania kulombowskiego:

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{m\vec{v}^2}{r} = mr\dot{\varphi}^2 = mr\frac{L^2}{m^2r^4} = \frac{L^2}{mr^3}.$$

Pomnóżmy obie strony przez r^2 i wstawmy $L = n\hbar \Rightarrow$

$$e^2 = \frac{L^2}{mr} = \frac{n^2\hbar^2}{mr} \quad \Rightarrow \quad r \equiv r_n = \frac{n^2\hbar^2}{me^2}.$$

Model Bohra atomu wodoru

Całkowita energia elektronu:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \left(-\frac{e^2}{r}\right) = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r} \\ &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z wzoru $\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$.

Siła dośrodkowa jest siłą przyciągania kulombowskiego:

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{m\vec{v}^2}{r} = mr\dot{\varphi}^2 = mr\frac{L^2}{m^2r^4} = \frac{L^2}{mr^3}.$$

Pomnóżmy obie strony przez r^2 i wstawmy $L = n\hbar \Rightarrow$

$$e^2 = \frac{L^2}{mr} = \frac{n^2\hbar^2}{mr} \quad \Rightarrow \quad r \equiv r_n = \frac{n^2\hbar^2}{me^2}.$$

Obliczmy energię elektronu w n -tym stanie stacjonarnym

$$E_n = \frac{L^2}{2mr_n^2} - \frac{e^2}{r_n} = \frac{L^2}{2mr_n^2} - \frac{L^2}{mr_n^2}$$

Obliczmy energię elektronu w n -tym stanie stacjonarnym

$$E_n = \frac{L^2}{2mr_n^2} - \frac{e^2}{r_n} = \frac{L^2}{2mr_n^2} - \frac{L^2}{mr_n^2} = -\frac{L^2}{2mr_n^2}$$

Obliczmy energię elektronu w n -tym stanie stacjonarnym

$$E_n = \frac{L^2}{2mr_n^2} - \frac{e^2}{r_n} = \frac{L^2}{2mr_n^2} - \frac{L^2}{mr_n^2} = -\frac{L^2}{2mr_n^2} = -\frac{n^2\hbar^2}{2m\frac{n^4\hbar^4}{m^2e^4}}$$

Obliczmy energię elektronu w n -tym stanie stacjonarnym

$$E_n = \frac{L^2}{2mr_n^2} - \frac{e^2}{r_n} = \frac{L^2}{2mr_n^2} - \frac{L^2}{mr_n^2} = -\frac{L^2}{2mr_n^2} = -\frac{n^2\hbar^2}{2m\frac{n^4\hbar^4}{m^2e^4}} = -\frac{me^4}{2n^2\hbar^2}.$$

Obliczmy energię elektronu w n -tym stanie stacjonarnym

$$E_n = \frac{L^2}{2mr_n^2} - \frac{e^2}{r_n} = \frac{L^2}{2mr_n^2} - \frac{L^2}{mr_n^2} = -\frac{L^2}{2mr_n^2} = -\frac{n^2\hbar^2}{2m\frac{n^4\hbar^4}{m^2e^4}} = -\frac{me^4}{2n^2\hbar^2}.$$

Zdefiniujmy stałą Rydberga

$$R = \frac{me^4}{2\hbar^2}$$

Obliczmy energię elektronu w n -tym stanie stacjonarnym

$$E_n = \frac{L^2}{2mr_n^2} - \frac{e^2}{r_n} = \frac{L^2}{2mr_n^2} - \frac{L^2}{mr_n^2} = -\frac{L^2}{2mr_n^2} = -\frac{n^2\hbar^2}{2m\frac{n^4\hbar^4}{m^2e^4}} = -\frac{me^4}{2n^2\hbar^2}.$$

Zdefiniujmy stałą Rydberga

$$R = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 2.18 \times 10^{-18} \text{ J}$$

Obliczmy energię elektronu w n -tym stanie stacjonarnym

$$E_n = \frac{L^2}{2mr_n^2} - \frac{e^2}{r_n} = \frac{L^2}{2mr_n^2} - \frac{L^2}{mr_n^2} = -\frac{L^2}{2mr_n^2} = -\frac{n^2\hbar^2}{2m\frac{n^4\hbar^4}{m^2e^4}} = -\frac{me^4}{2n^2\hbar^2}.$$

Zdefiniujmy stałą Rydberga

$$R = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 2.18 \times 10^{-18} \text{ J} = 13.6 \text{ eV}.$$

Model Bohra atomu wodoru

Obliczmy energię elektronu w n -tym stanie stacjonarnym

$$E_n = \frac{L^2}{2mr_n^2} - \frac{e^2}{r_n} = \frac{L^2}{2mr_n^2} - \frac{L^2}{mr_n^2} = -\frac{L^2}{2mr_n^2} = -\frac{n^2\hbar^2}{2m\frac{n^4\hbar^4}{m^2e^4}} = -\frac{me^4}{2n^2\hbar^2}.$$

Zdefiniujmy stałą Rydberga

$$R = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 2.18 \times 10^{-18} \text{ J} = 13.6 \text{ eV}.$$

Przy jej użyciu

$$E_n = -\frac{R}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Model Bohra atomu wodoru

Obliczmy energię elektronu w n -tym stanie stacjonarnym

$$E_n = \frac{L^2}{2mr_n^2} - \frac{e^2}{r_n} = \frac{L^2}{2mr_n^2} - \frac{L^2}{mr_n^2} = -\frac{L^2}{2mr_n^2} = -\frac{n^2\hbar^2}{2m\frac{n^4\hbar^4}{m^2e^4}} = -\frac{me^4}{2n^2\hbar^2}.$$

Zdefiniujmy stałą Rydberga

$$R = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 2.18 \times 10^{-18} \text{ J} = 13.6 \text{ eV}.$$

Przy jej użyciu

$$E_n = -\frac{R}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Otrzymaliśmy dyskretne wartości dozwolonych energii.

Obliczmy energię elektronu w n -tym stanie stacjonarnym

$$E_n = \frac{L^2}{2mr_n^2} - \frac{e^2}{r_n} = \frac{L^2}{2mr_n^2} - \frac{L^2}{mr_n^2} = -\frac{L^2}{2mr_n^2} = -\frac{n^2\hbar^2}{2m\frac{n^4\hbar^4}{m^2e^4}} = -\frac{me^4}{2n^2\hbar^2}.$$

Zdefiniujmy stałą Rydberga

$$R = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 2.18 \times 10^{-18} \text{ J} = 13.6 \text{ eV}.$$

Przy jej użyciu

$$E_n = -\frac{R}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Otrzymaliśmy dyskretne wartości dozwolonych energii.

Przy przejściach pomiędzy dwoma dozwolonymi poziomami o energiach E_n i E_m , $n > m$, zostanie wyemitowany foton o energii

$$h\nu = E_n - E_m.$$

$n = 1$ – stan podstawowy $\Rightarrow E_1 = -R/1^2 = -R$.

Przy przejściach pomiędzy dwoma dozwolonymi poziomami o energiach E_n i E_m , $n > m$, zostanie wyemitowany foton o energii

$$h\nu = E_n - E_m.$$

$n = 1$ – stan podstawowy $\Rightarrow E_1 = -R/1^2 = -R$.

Aby zjonizować atom wodoru znajdujący się w stanie podstawowym trzeba dostarczyć elektronowi energię $+R$.

Przy przejściach pomiędzy dwoma dozwolonymi poziomami o energiach E_n i E_m , $n > m$, zostanie wyemitowany foton o energii

$$h\nu = E_n - E_m.$$

$n = 1$ – stan podstawowy $\Rightarrow E_1 = -R/1^2 = -R$.

Aby zjonizować atom wodoru znajdujący się w stanie podstawowym trzeba dostarczyć elektronowi energię $+R$.

Promień Bohra

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{me^2} \equiv a_0 = 5.23 \times 10^{-11} \text{m}.$$

Przy przejściach pomiędzy dwoma dozwolonymi poziomami o energiach E_n i E_m , $n > m$, zostanie wyemitowany foton o energii

$$h\nu = E_n - E_m.$$

$n = 1$ – stan podstawowy $\Rightarrow E_1 = -R/1^2 = -R$.

Aby zjonizować atom wodoru znajdujący się w stanie podstawowym trzeba dostarczyć elektronowi energię $+R$.

Promień Bohra

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{me^2} \equiv a_0 = 5.23 \times 10^{-11} \text{m}.$$

W 1915 r. reguła kwantyzacji Bohra została uogólniona przez W. Wilsona, a rok później przez A. Sommerfelda na dowolne układy periodyczne, co pozwoliło wyjaśnić *m.in.* strukturę subtelną atomu wodoru i widma cząsteczek dwuatomowych, **ale problemy pozostały.**

- Brak możliwości opisu układów nieperiodycznych.
- Brak ilościowego wyjaśnienia natężeń poszczególnych linii widmowych.
- Niemożność wyjaśnienia zjawiska rozproszenia światła.
- Błędne przewidywania widm rotacyjnych niektórych cząsteczek dwuatomowych.

W 1915 r. reguła kwantyzacji Bohra została uogólniona przez W. Wilsona, a rok później przez A. Sommerfelda na dowolne układy periodyczne, co pozwoliło wyjaśnić *m.in.* strukturę subtelną atomu wodoru i widma cząsteczek dwuatomowych, **ale problemy pozostały.**

- Brak możliwości opisu układów nieperiodycznych.
- Brak ilościowego wyjaśnienia natężeń poszczególnych linii widmowych.
- Niemożność wyjaśnienia zjawiska rozproszenia światła.
- Błędne przewidywania widm rotacyjnych niektórych cząsteczek dwuatomowych.

W 1923 r. Bohr wprowadził **zasadę korespondencji**, która pozwoliła wykorzystywać teorię klasyczną jako przypadek graniczny. Umożliwiła ona zrozumienie niektórych własności układów atomowych, w szczególności natężeń linii widmowych. Szereg trudności jednak nadal pozostało.

- Dlaczego elektron poruszający się ruchem przyspieszonym nie emituje promieniowania w stanie stacjonarnym?
- Jaki jest mechanizm emisji i absorpcji promieniowania przy przejściach pomiędzy stanami stacjonarnymi?
- Skąd biorą się reguły kwantyzacji?
- Jak zrozumieć dualną naturę światła?

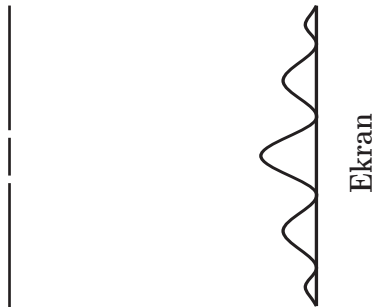
W 1923 r. Bohr wprowadził **zasadę korespondencji**, która pozwoliła wykorzystywać teorię klasyczną jako przypadek graniczny. Umożliwiła ona zrozumienie niektórych własności układów atomowych, w szczególności natężeń linii widmowych. Szereg trudności jednak nadal pozostało.

- Dlaczego elektron poruszający się ruchem przyspieszonym nie emituje promieniowania w stanie stacjonarnym?
- Jaki jest mechanizm emisji i absorpcji promieniowania przy przejściach pomiędzy stanami stacjonarnymi?
- Skąd biorą się reguły kwantyzacji?
- Jak zrozumieć dualną naturę światła?

Eksperyment dyfrakcyjny

Na ekranie obserwujemy obraz interferencyjny światła ugiętego na szczelinach.

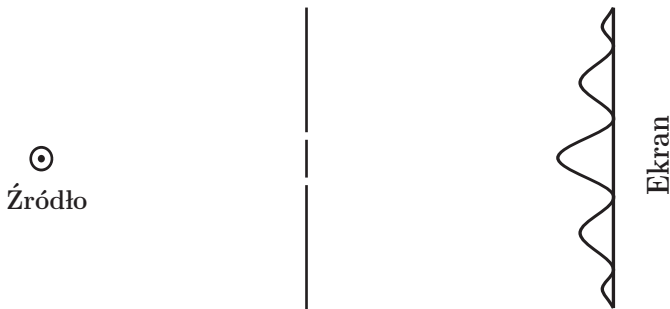
⊙
Źródło



Promieniowanie zachowuje się jak **fala** podczas przejścia przez szczeliny i w drodze do ekranu,

Eksperyment dyfrakcyjny

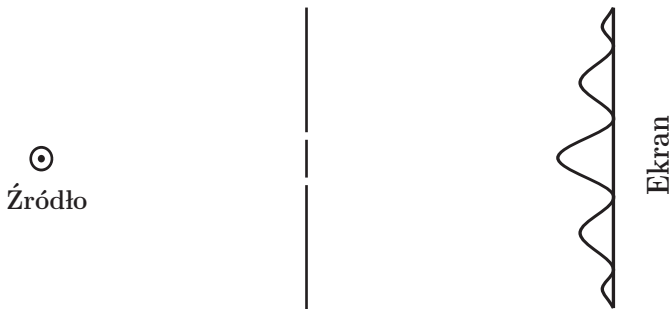
Na ekranie obserwujemy obraz interferencyjny światła ugiętego na szczelinach.



Promieniowanie zachowuje się jak **fala** podczas przejścia przez szczeliny i w drodze do ekranu, natomiast wybijając elektrony z świetlczego ekranu – zachowuje się jak **wiązka kwantów korpuskularnych**.

Eksperyment dyfrakcyjny

Na ekranie obserwujemy obraz interferencyjny światła ugiętego na szczelinach.



Promieniowanie zachowuje się jak **fala** podczas przejścia przez szczeliny i w drodze do ekranu, natomiast wybijając elektrony z światłoczułego ekranu – zachowuje się jak **wiązka kwantów korpuskularnych**.

Gdyby fotony były **korpuskułami**, to każdy z nich albo przechodziłby przez którąś szczelinę, albo odbijałby się od ściany. Wypadkowe natężenie promieniowania, tzn. liczba cząstek na jednostkę powierzchni i na jednostkę czasu, byłoby równe

$$I = I_1 + I_2,$$

gdzie I_1 jest natężeniem wiązki pierwszej, a I_2 - natężeniem wiązki drugiej.

Jeśli fotony mają naturę falową, to w pewnym uproszczeniu, możemy je przedstawić za pomocą funkcji zespolonych $\psi_1 \equiv \psi_1(\vec{r}, t)$ i $\psi_2 \equiv \psi_2(\vec{r}, t)$, przy czym

$$\psi_1 = |\psi_1|e^{i\varphi_1} \quad \text{i} \quad \psi_2 = |\psi_2|e^{i\varphi_2}.$$

Gdyby fotony były **korpuskułami**, to każdy z nich albo przechodziłby przez którąś szczelinę, albo odbijałby się od ściany. Wypadkowe natężenie promieniowania, tzn. liczba cząstek na jednostkę powierzchni i na jednostkę czasu, byłoby równe

$$I = I_1 + I_2,$$

gdzie I_1 jest natężeniem wiązki pierwszej, a I_2 - natężeniem wiązki drugiej.

Jeśli fotony mają naturę falową, to w pewnym uproszczeniu, możemy je przedstawić za pomocą funkcji zespolonych

$\psi_1 \equiv \psi_1(\vec{r}, t)$ i $\psi_2 \equiv \psi_2(\vec{r}, t)$, przy czym

$$\psi_1 = |\psi_1|e^{i\varphi_1} \quad \text{i} \quad \psi_2 = |\psi_2|e^{i\varphi_2}.$$

Natężenie fali jest proporcjonalne do kwadratu modułu amplitudy:

$$I_1 = |\psi_1|^2 \quad \text{i} \quad I_2 = |\psi_2|^2,$$

a natężenie wypadkowe wyraża się wzorem

$$I = |\psi_1 + \psi_2|^2$$

Natężenie fali jest proporcjonalne do kwadratu modułu amplitudy:

$$I_1 = |\psi_1|^2 \quad \text{i} \quad I_2 = |\psi_2|^2,$$

a natężenie wypadkowe wyraża się wzorem

$$I = |\psi_1 + \psi_2|^2 = (\psi_1 + \psi_2)^*(\psi_1 + \psi_2)$$

Natężenie fali jest proporcjonalne do kwadratu modułu amplitudy:

$$I_1 = |\psi_1|^2 \quad \text{i} \quad I_2 = |\psi_2|^2,$$

a natężenie wypadkowe wyraża się wzorem

$$I = |\psi_1 + \psi_2|^2 = (\psi_1 + \psi_2)^*(\psi_1 + \psi_2)$$

=

Natężenie fali jest proporcjonalne do kwadratu modułu amplitudy:

$$I_1 = |\psi_1|^2 \quad \text{i} \quad I_2 = |\psi_2|^2,$$

a natężenie wypadkowe wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} I &= |\psi_1 + \psi_2|^2 = (\psi_1 + \psi_2)^*(\psi_1 + \psi_2) \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1 \end{aligned}$$

Natężenie fali jest proporcjonalne do kwadratu modułu amplitudy:

$$I_1 = |\psi_1|^2 \quad \text{i} \quad I_2 = |\psi_2|^2,$$

a natężenie wypadkowe wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} I &= |\psi_1 + \psi_2|^2 = (\psi_1 + \psi_2)^*(\psi_1 + \psi_2) \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1 \\ &= \end{aligned}$$

Natężenie fali jest proporcjonalne do kwadratu modułu amplitudy:

$$I_1 = |\psi_1|^2 \quad \text{i} \quad I_2 = |\psi_2|^2,$$

a natężenie wypadkowe wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} I &= |\psi_1 + \psi_2|^2 = (\psi_1 + \psi_2)^*(\psi_1 + \psi_2) \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1 \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_1\psi_2| \left(e^{-i\varphi_1} e^{i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2} e^{i\varphi_1} \right) \end{aligned}$$

Natężenie fali jest proporcjonalne do kwadratu modułu amplitudy:

$$I_1 = |\psi_1|^2 \quad \text{i} \quad I_2 = |\psi_2|^2,$$

a natężenie wypadkowe wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} I &= |\psi_1 + \psi_2|^2 = (\psi_1 + \psi_2)^*(\psi_1 + \psi_2) \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1 \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_1\psi_2| \left(e^{-i\varphi_1} e^{i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2} e^{i\varphi_1} \right) \\ &= \end{aligned}$$

Natężenie fali jest proporcjonalne do kwadratu modułu amplitudy:

$$I_1 = |\psi_1|^2 \quad \text{i} \quad I_2 = |\psi_2|^2,$$

a natężenie wypadkowe wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} I &= |\psi_1 + \psi_2|^2 = (\psi_1 + \psi_2)^*(\psi_1 + \psi_2) \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1 \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_1\psi_2| \left(e^{-i\varphi_1} e^{i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2} e^{i\varphi_1} \right) \\ &= I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \left(e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right) \end{aligned}$$

Natężenie fali jest proporcjonalne do kwadratu modułu amplitudy:

$$I_1 = |\psi_1|^2 \quad \text{i} \quad I_2 = |\psi_2|^2,$$

a natężenie wypadkowe wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} I &= |\psi_1 + \psi_2|^2 = (\psi_1 + \psi_2)^*(\psi_1 + \psi_2) \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1 \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_1\psi_2| \left(e^{-i\varphi_1} e^{i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2} e^{i\varphi_1} \right) \\ &= I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \left(e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right) \\ &= \end{aligned}$$

Natężenie fali jest proporcjonalne do kwadratu modułu amplitudy:

$$I_1 = |\psi_1|^2 \quad \text{i} \quad I_2 = |\psi_2|^2,$$

a natężenie wypadkowe wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} I &= |\psi_1 + \psi_2|^2 = (\psi_1 + \psi_2)^*(\psi_1 + \psi_2) \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1 \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_1\psi_2| \left(e^{-i\varphi_1} e^{i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2} e^{i\varphi_1} \right) \\ &= I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \left(e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right) \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \end{aligned}$$

Natężenie fali jest proporcjonalne do kwadratu modułu amplitudy:

$$I_1 = |\psi_1|^2 \quad \text{i} \quad I_2 = |\psi_2|^2,$$

a natężenie wypadkowe wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} I &= |\psi_1 + \psi_2|^2 = (\psi_1 + \psi_2)^*(\psi_1 + \psi_2) \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1 \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_1\psi_2| \left(e^{-i\varphi_1} e^{i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2} e^{i\varphi_1} \right) \\ &= I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \left(e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right) \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \end{aligned}$$

gdzie ostatni wyraz opisuje **interferencję**.

Natężenie fali jest proporcjonalne do kwadratu modułu amplitudy:

$$I_1 = |\psi_1|^2 \quad \text{i} \quad I_2 = |\psi_2|^2,$$

a natężenie wypadkowe wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} I &= |\psi_1 + \psi_2|^2 = (\psi_1 + \psi_2)^*(\psi_1 + \psi_2) \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1 \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_1\psi_2| \left(e^{-i\varphi_1} e^{i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2} e^{i\varphi_1} \right) \\ &= I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \left(e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right) \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \end{aligned}$$

gdzie ostatni wyraz opisuje **interferencję**.

Obserwowany w eksperymentach obraz dyfrakcyjny zgadza się z tym opisem.

Gdybyśmy chcieli zbadać, przez którą szczelinę przeszedł foton, to obraz dyfrakcyjny uległby zniekształceniu

Obserwowany w eksperymentach obraz dyfrakcyjny zgadza się z tym opisem.

Gdybyśmy chcieli zbadać, przez którą szczelinę przeszedł foton, to obraz dyfrakcyjny uległby zniekształceniu i byłby taki jak w przypadku ugięcia na pojedynczej szczelinie.

Obserwowany w eksperymentach obraz dyfrakcyjny zgadza się z tym opisem.

Gdybyśmy chcieli zbadać, przez którą szczelinę przeszedł foton, to obraz dyfrakcyjny uległby zniekształceniu i byłby taki jak w przypadku ugięcia na pojedynczej szczelinie.

Dyfrakcja na dwóch szczelinach jest możliwa tylko gdy obie szczeliny są otwarte.

Obserwowany w eksperymentach obraz dyfrakcyjny zgadza się z tym opisem.

Gdybyśmy chcieli zbadać, przez którą szczelinę przeszedł foton, to obraz dyfrakcyjny uległby zniekształceniu i **byłby taki jak w przypadku ugięcia na pojedynczej szczelinie.**

Dyfrakcja na dwóch szczelinach jest możliwa tylko gdy obie szczeliny są otwarte.

Musimy zrezygnować z klasycznego wyobrażenia cząstki jako obiektu, który w dowolnej chwili czasu ma określone położenie i pęd.

Obserwowany w eksperymentach obraz dyfrakcyjny zgadza się z tym opisem.

Gdybyśmy chcieli zbadać, przez którą szczelinę przeszedł foton, to obraz dyfrakcyjny uległby zniekształceniu i byłby taki jak w przypadku ugięcia na pojedynczej szczelinie.

Dyfrakcja na dwóch szczelinach jest możliwa tylko gdy obie szczeliny są otwarte.

Musimy zrezygnować z klasycznego wyobrażenia cząstki jako obiektu, który w dowolnej chwili czasu ma określone położenie i pęd.

Próba wyznaczenia położenia fotonu - zasłonięcie jednej ze szczelin - niszczy obraz dyfrakcyjny.

Obserwowany w eksperymentach obraz dyfrakcyjny zgadza się z tym opisem.

Gdybyśmy chcieli zbadać, przez którą szczelinę przeszedł foton, to obraz dyfrakcyjny uległby zniekształceniu i byłby taki jak w przypadku ugięcia na pojedynczej szczelinie.

Dyfrakcja na dwóch szczelinach jest możliwa tylko gdy obie szczeliny są otwarte.

Musimy zrezygnować z klasycznego wyobrażenia cząstki jako obiektu, który w dowolnej chwili czasu ma określone położenie i pęd.

Próba wyznaczenia położenia fotonu - zasłonięcie jednej ze szczelin - niszczy obraz dyfrakcyjny.

W **mechanice kwantowej** położenie cząstki ma sens tylko w eksperymencie, który ma na celu jego wyznaczenie.

Jeśli będziemy 'puszczać' fotony pojedynczo, to po pewnym czasie obraz stanie się identyczny, jak w przypadku jednoczesnej dyfrakcji dużej liczby fotonów.

W **mechanice kwantowej** położenie cząstki ma sens tylko w eksperymencie, który ma na celu jego wyznaczenie.

Jeśli będziemy 'puszczać' fotony pojedynczo, to po pewnym czasie obraz stanie się identyczny, jak w przypadku jednoczesnej dyfrakcji dużej liczby fotonów.

⇒ Własności falowe można więc powiązać z pojedynczym fotonem.

W **mechanice kwantowej** położenie cząstki ma sens tylko w eksperymencie, który ma na celu jego wyznaczenie.

Jeśli będziemy 'puszczać' fotony pojedynczo, to po pewnym czasie obraz stanie się identyczny, jak w przypadku jednoczesnej dyfrakcji dużej liczby fotonów.

⇒ **Własności falowe można więc powiązać z pojedynczym fotonem.**

Jakościowy sens mechaniki kwantowej ilustrują dwie zasady.

Zasada nieoznaczoności (Heisenberg 1927):

Wśród wielkości fizycznych opisujących zachowanie układu atomowego można wyróżnić pary o tej własności, że niemożliwe jest jednoznaczne przeprowadzenie ścisłego pomiaru obu wielkości z danej pary. Mówimy, że obie wielkości są kanonicznie sprzężone w sensie hamiltonowskim.

Jakościowy sens mechaniki kwantowej ilustrują dwie zasady.

Zasada nieoznaczoności (Heisenberg 1927):

Wśród wielkości fizycznych opisujących zachowanie układu atomowego można wyróżnić pary o tej własności, że niemożliwe jest jednoznaczne przeprowadzenie ścisłego pomiaru obu wielkości z danej pary. Mówimy, że obie wielkości są kanonicznie sprzężone w sensie hamiltonowskim.

Przykłady:

Jakościowy sens mechaniki kwantowej ilustrują dwie zasady.

Zasada nieoznaczoności (Heisenberg 1927):

Wśród wielkości fizycznych opisujących zachowanie układu atomowego można wyróżnić pary o tej własności, że niemożliwe jest jednoznaczne przeprowadzenie ścisłego pomiaru obu wielkości z danej pary. Mówimy, że obie wielkości są kanonicznie sprzężone w sensie hamiltonowskim.

Przykłady: współrzędne kartezjańskie położenia i pędu x i p_x ,

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2},$$

Nieoznaczoność i komplementarność

Jakościowy sens mechaniki kwantowej ilustrują dwie zasady.

Zasada nieoznaczoności (Heisenberg 1927):

Wśród wielkości fizycznych opisujących zachowanie układu atomowego można wyróżnić pary o tej własności, że niemożliwe jest jednoznaczne przeprowadzenie ścisłego pomiaru obu wielkości z danej pary. Mówimy, że obie wielkości są kanonicznie sprzężone w sensie hamiltonowskim.

Przykłady: współrzędne kartezjańskie położenia i pędu x i p_x ,

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2},$$

składowa J_z momentu pędu i kąt mierzony w płaszczyźnie xOy ,

$$\Delta \varphi \Delta J_z \geq \frac{\hbar}{2},$$

Jakościowy sens mechaniki kwantowej ilustrują dwie zasady.

Zasada nieoznaczoności (Heisenberg 1927):

Wśród wielkości fizycznych opisujących zachowanie układu atomowego można wyróżnić pary o tej własności, że niemożliwe jest jednoznaczne przeprowadzenie ścisłego pomiaru obu wielkości z danej pary. Mówimy, że obie wielkości są kanonicznie sprzężone w sensie hamiltonowskim.

Przykłady: współrzędne kartezjańskie położenia i pędu x i p_x ,

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2},$$

składowa J_z momentu pędu i kąt mierzony w płaszczyźnie xOy ,

$$\Delta \varphi \Delta J_z \geq \frac{\hbar}{2},$$

energia E cząstki i czas t , w którym jest ona mierzona

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

Zasada komplementarności (Bohr 1928) pozwala lepiej zrozumieć sens fizyczny zasady nieoznaczoności:

energia E cząstki i czas t , w którym jest ona mierzona

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Zasada komplementarności (Bohr 1928) pozwala lepiej zrozumieć sens fizyczny zasady nieoznaczoności:

Zjawiska atomowe nie dadzą się opisać w sposób zupełny. Pewne elementy opisu, które są niezbędne w fizyce klasycznej, w fizyce kwantowej wykluczają się wzajemnie, a zarazem wszystkie są nieodzowne do pełnego opisu różnych aspektów danego zjawiska fizycznego.

energia E cząstki i czas t , w którym jest ona mierzona

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Zasada komplementarności (Bohr 1928) pozwala lepiej zrozumieć sens fizyczny zasady nieoznaczoności:

Zjawiska atomowe nie dadzą się opisać w sposób zupełny. Pewne elementy opisu, które są niezbędne w fizyce klasycznej, w fizyce kwantowej wykluczają się wzajemnie, a zarazem wszystkie są nieodzowne do pełnego opisu różnych aspektów danego zjawiska fizycznego.

Z eksperymentalnego punktu widzenia oznacza to, że **żaden przyrząd nie może dać pomiarów dokładniejszych niż wynika to z zasady nieoznaczoności**. Nie wynika to ani z niedoskonałości przyrządu, ani z nieudolności eksperymentatora. Jest to raczej podstawowe prawo przyrody.

W fizyce klasycznej pomiar również zakłóca mierzony układ, ale wielkość tego zakłócenia można dokładnie obliczyć.

Z eksperymentalnego punktu widzenia oznacza to, że **żaden przyrząd nie może dać pomiarów dokładniejszych niż wynika to z zasady nieoznaczoności**. Nie wynika to ani z niedoskonałości przyrządu, ani z nieudolności eksperymentatora. Jest to raczej podstawowe prawo przyrody.

W fizyce klasycznej pomiar również zakłóca mierzony układ, ale wielkość tego zakłócenia można dokładnie obliczyć.