

# Operator momentu pędu

Składanie stanów własnych operatora momentu pędu

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki  
Uniwersytet Śląski, Katowice  
<http://kk.us.edu.pl>

# Definicja operatora momentu pędu

Operator momentu pędu  $\vec{J}$  jest to operator hermitowski, który spełnia następujące związki komutacyjne

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k, \quad \text{dla } i, j = 1, 2, 3.$$

# Definicja operatora momentu pędu

Operator momentu pędu  $\vec{J}$  jest to operator hermitowski, który spełnia następujące związki komutacyjne

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k, \quad \text{dla } i, j = 1, 2, 3.$$

**Zadanie.** Pokazać, że

$$[\vec{J}^2, J_i] = 0 \quad \text{i} \quad \vec{J}^2{}^\dagger = \vec{J}^2, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3.$$

Operator momentu pędu  $\vec{J}$  jest to operator hermitowski, który spełnia następujące związki komutacyjne

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k, \quad \text{dla } i, j = 1, 2, 3.$$

**Zadanie.** Pokazać, że

$$[\vec{J}^2, J_i] = 0 \quad \text{i} \quad \vec{J}^2{}^\dagger = \vec{J}^2, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3.$$

Ponieważ operator  $\vec{J}^2$  komutuje ze składowymi operatora  $\vec{J}$ ,

Operator momentu pędu  $\vec{J}$  jest to operator hermitowski, który spełnia następujące związki komutacyjne

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k, \quad \text{dla } i, j = 1, 2, 3.$$

**Zadanie.** Pokazać, że

$$[\vec{J}^2, J_i] = 0 \quad \text{i} \quad \vec{J}^2{}^\dagger = \vec{J}^2, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3.$$

Ponieważ operator  $\vec{J}^2$  komutuje ze składowymi operatora  $\vec{J}$ , a te nie komutują z sobą,

Operator momentu pędu  $\vec{J}$  jest to operator hermitowski, który spełnia następujące związki komutacyjne

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k, \quad \text{dla } i, j = 1, 2, 3.$$

**Zadanie.** Pokazać, że

$$[\vec{J}^2, J_i] = 0 \quad \text{i} \quad \vec{J}^2{}^\dagger = \vec{J}^2, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3.$$

Ponieważ operator  $\vec{J}^2$  komutuje ze składowymi operatora  $\vec{J}$ , a te nie komutują z sobą, to możemy wybrać reprezentację,

# Definicja operatora momentu pędu

Operator momentu pędu  $\vec{J}$  jest to operator hermitowski, który spełnia następujące związki komutacyjne

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k, \quad \text{dla } i, j = 1, 2, 3.$$

**Zadanie.** Pokazać, że

$$[\vec{J}^2, J_i] = 0 \quad \text{i} \quad \vec{J}^2{}^\dagger = \vec{J}^2, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3.$$

Ponieważ operator  $\vec{J}^2$  komutuje ze składowymi operatora  $\vec{J}$ , a te nie komutują z sobą, to możemy wybrać reprezentację, czyli bazę wektorów własnych,

# Definicja operatora momentu pędu

Operator momentu pędu  $\vec{J}$  jest to operator hermitowski, który spełnia następujące związki komutacyjne

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k, \quad \text{dla } i, j = 1, 2, 3.$$

**Zadanie.** Pokazać, że

$$[\vec{J}^2, J_i] = 0 \quad \text{i} \quad \vec{J}^2^\dagger = \vec{J}^2, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3.$$

Ponieważ operator  $\vec{J}^2$  komutuje ze składowymi operatora  $\vec{J}$ , a te nie komutują z sobą, to możemy wybrać reprezentację, czyli bazę wektorów własnych, w której jedna ze składowych  $\vec{J}$ , np.  $J_3$  i  $\vec{J}^2$  są diagonalne.



# Definicja operatora momentu pędu

Operator momentu pędu  $\vec{J}$  jest to operator hermitowski, który spełnia następujące związki komutacyjne

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k, \quad \text{dla } i, j = 1, 2, 3.$$

**Zadanie.** Pokazać, że

$$[\vec{J}^2, J_i] = 0 \quad \text{i} \quad \vec{J}^2{}^\dagger = \vec{J}^2, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3.$$

Ponieważ operator  $\vec{J}^2$  komutuje ze składowymi operatora  $\vec{J}$ , a te nie komutują z sobą, to możemy wybrać reprezentację, czyli bazę wektorów własnych, w której jedna ze składowych  $\vec{J}$ , np.  $J_3$  i  $\vec{J}^2$  są diagonalne.

# Stany własne momentu pędu

Wektory własne operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  będziemy numerować liczbami  $j$  i  $m$ , o których wiemy tylko, że są liczbami rzeczywistymi,

# Stany własne momentu pędu

Wektory własne operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  będziemy numerować liczbami  $j$  i  $m$ , o których wiemy tylko, że są liczbami rzeczywistymi, gdyż operatory  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  są hermitowskie.

# Stany własne momentu pędu

Wektory własne operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  będziemy numerować liczbami  $j$  i  $m$ , o których wiemy tylko, że są liczbami rzeczywistymi, gdyż operatory  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  są hermitowskie.

Przez analogię do operatora orbitalnego momentu pędu przyjmijmy, że

$$\begin{aligned}\vec{J}^2 |jm\rangle &= f(j)\hbar^2 |jm\rangle, \\ J_3 |jm\rangle &= m\hbar |jm\rangle,\end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Wektory własne operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  będziemy numerować liczbami  $j$  i  $m$ , o których wiemy tylko, że są liczbami rzeczywistymi, gdyż operatory  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  są hermitowskie.

Przez analogię do operatora orbitalnego momentu pędu przyjmijmy, że

$$\begin{aligned}\vec{J}^2 |jm\rangle &= f(j)\hbar^2 |jm\rangle, \\ J_3 |jm\rangle &= m\hbar |jm\rangle,\end{aligned}$$

gdzie  $f(j)$  jest dowolną, różnowartościową funkcją  $j$ .

# Stany własne momentu pędu

Wektory własne operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  będziemy numerować liczbami  $j$  i  $m$ , o których wiemy tylko, że są liczbami rzeczywistymi, gdyż operatory  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  są hermitowskie.

Przez analogię do operatora orbitalnego momentu pędu przyjmijmy, że

$$\begin{aligned}\vec{J}^2 |jm\rangle &= f(j)\hbar^2 |jm\rangle, \\ J_3 |jm\rangle &= m\hbar |jm\rangle,\end{aligned}$$

gdzie  $f(j)$  jest dowolną, różnowartościową funkcją  $j$ .  
Założymy również, że stany  $|jm\rangle$  są unormowane,

# Stany własne momentu pędu

Wektory własne operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  będziemy numerować liczbami  $j$  i  $m$ , o których wiemy tylko, że są liczbami rzeczywistymi, gdyż operatory  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  są hermitowskie.

Przez analogię do operatora orbitalnego momentu pędu przyjmijmy, że

$$\begin{aligned}\vec{J}^2 |jm\rangle &= f(j)\hbar^2 |jm\rangle, \\ J_3 |jm\rangle &= m\hbar |jm\rangle,\end{aligned}$$

gdzie  $f(j)$  jest dowolną, różnowartościową funkcją  $j$ .  
Założymy również, że stany  $|jm\rangle$  są unormowane, tzn.

$$\langle jm|j' m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'},$$

# Stany własne momentu pędu

Wektory własne operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  będziemy numerować liczbami  $j$  i  $m$ , o których wiemy tylko, że są liczbami rzeczywistymi, gdyż operatory  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  są hermitowskie.

Przez analogię do operatora orbitalnego momentu pędu przyjmijmy, że

$$\begin{aligned}\vec{J}^2 |jm\rangle &= f(j)\hbar^2 |jm\rangle, \\ J_3 |jm\rangle &= m\hbar |jm\rangle,\end{aligned}$$

gdzie  $f(j)$  jest dowolną, różnowartościową funkcją  $j$ .  
Założymy również, że stany  $|jm\rangle$  są unormowane, tzn.

$$\langle jm|j' m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'},$$

gdzie  $\delta_{jj'}$  jest deltą Kroneckera lub Diraca.



# Stany własne momentu pędu

Wektory własne operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  będziemy numerować liczbami  $j$  i  $m$ , o których wiemy tylko, że są liczbami rzeczywistymi, gdyż operatory  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  są hermitowskie.

Przez analogię do operatora orbitalnego momentu pędu przyjmijmy, że

$$\begin{aligned}\vec{J}^2 |jm\rangle &= f(j)\hbar^2 |jm\rangle, \\ J_3 |jm\rangle &= m\hbar |jm\rangle,\end{aligned}$$

gdzie  $f(j)$  jest dowolną, różnowartościową funkcją  $j$ .  
Założymy również, że stany  $|jm\rangle$  są unormowane, tzn.

$$\langle jm|j' m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'},$$

gdzie  $\delta_{jj'}$  jest deltą Kroneckera lub Diraca.

# Stany własne momentu pędu

Wówczas elementy macierze operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  mają postać

$$\langle jm | \vec{J}^2 | j' m' \rangle = f(j') \hbar^2 \langle jm | j' m' \rangle =$$

Wówczas elementy macierze operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  mają postać

$$\langle jm | \vec{J}^2 | j' m' \rangle = f(j') \hbar^2 \langle jm | j' m' \rangle = f(j) \hbar^2 \delta_{jj'} \delta_{mm'},$$

Wówczas elementy macierzowe operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  mają postać

$$\frac{\langle jm|\vec{J}^2|j'm'\rangle}{\langle jm|J_3|j'm'\rangle} = f(j')\hbar^2 \langle jm|j'm'\rangle = f(j)\hbar^2 \delta_{jj'}\delta_{mm'},$$

Wówczas elementy macierzowe operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm|\vec{J}^2|j'm'\rangle &= f(j')\hbar^2 \langle jm|j'm'\rangle = f(j)\hbar^2 \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \\ \langle jm|J_3|j'm'\rangle &= \end{aligned}$$

Wówczas elementy macierze operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm|\vec{J}^2|j'm'\rangle &= f(j')\hbar^2 \langle jm|j'm'\rangle = f(j)\hbar^2 \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \\ \langle jm|J_3|j'm'\rangle &= m'\hbar \langle jm|j'm'\rangle =\end{aligned}$$

Wówczas elementy macierzowe operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm|\vec{J}^2|j'm'\rangle &= f(j')\hbar^2 \langle jm|j'm'\rangle = f(j)\hbar^2 \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \\ \langle jm|J_3|j'm'\rangle &= m'\hbar \langle jm|j'm'\rangle = m\hbar \delta_{jj'} \delta_{mm'}.\end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Wówczas elementy macierzowe operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm|\vec{J}^2|j'm'\rangle &= f(j')\hbar^2 \langle jm|j'm'\rangle = f(j)\hbar^2 \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \\ \langle jm|J_3|j'm'\rangle &= m'\hbar \langle jm|j'm'\rangle = m\hbar \delta_{jj'} \delta_{mm'}.\end{aligned}$$

Zdefiniujmy operatory

$$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2 \quad \Rightarrow \quad J_{\pm}^{\dagger} = J_{\mp}.$$



# Stany własne momentu pędu

Wówczas elementy macierzowe operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm|\vec{J}^2|j'm'\rangle &= f(j')\hbar^2 \langle jm|j'm'\rangle = f(j)\hbar^2 \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \\ \langle jm|J_3|j'm'\rangle &= m'\hbar \langle jm|j'm'\rangle = m\hbar \delta_{jj'} \delta_{mm'}.\end{aligned}$$

Zdefiniujmy operatory

$$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2 \quad \Rightarrow \quad J_{\pm}^{\dagger} = J_{\mp}.$$

**Zadanie.** Pokazać, że

$$[J_3, J_+] = \hbar J_+, \quad [J_3, J_-] = -\hbar J_-, \quad [J_+, J_-] = 2\hbar J_3.$$

# Stany własne momentu pędu

Wówczas elementy macierze operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm|\vec{J}^2|j'm'\rangle &= f(j')\hbar^2 \langle jm|j'm'\rangle = f(j)\hbar^2 \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \\ \langle jm|J_3|j'm'\rangle &= m'\hbar \langle jm|j'm'\rangle = m\hbar \delta_{jj'} \delta_{mm'}.\end{aligned}$$

Zdefiniujmy operatory

$$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2 \quad \Rightarrow \quad J_{\pm}^{\dagger} = J_{\mp}.$$

**Zadanie.** Pokazać, że

$$[J_3, J_+] = \hbar J_+, \quad [J_3, J_-] = -\hbar J_-, \quad [J_+, J_-] = 2\hbar J_3.$$

# Stany własne momentu pędu

Rozważmy element macierzowy równania

$$[J_3, J_+] = \hbar J_+ \quad \Rightarrow \quad J_3 J_+ - J_+ J_3 = \hbar J_+$$

$$\langle j'' m'' | J_3 J_+ | j m \rangle - \langle j'' m'' | J_+ J_3 | j m \rangle = \hbar \langle j'' m'' | J_+ | j m \rangle.$$

# Stany własne momentu pędu

Rozważmy element macierzowy równania

$$[J_3, J_+] = \hbar J_+ \Rightarrow J_3 J_+ - J_+ J_3 = \hbar J_+$$

$$\langle j'' m'' | J_3 J_+ | j m \rangle - \langle j'' m'' | J_+ J_3 | j m \rangle = \hbar \langle j'' m'' | J_+ | j m \rangle.$$

Skorzystajmy z relacji zupełności stanów własnych operatora momentu pędu i konwencji sumacyjnej

$$\mathbb{I} = \sum_{j' m'} |j' m'\rangle \langle j' m'| + \int |\tilde{j}' \tilde{m}'\rangle \langle \tilde{j}' \tilde{m}'| d\tilde{j}' d\tilde{m}' \equiv |j' m'\rangle \langle j' m'|$$

# Stany własne momentu pędu

Rozważmy element macierzowy równania

$$[J_3, J_+] = \hbar J_+ \Rightarrow J_3 J_+ - J_+ J_3 = \hbar J_+$$

$$\langle j'' m'' | J_3 J_+ | j m \rangle - \langle j'' m'' | J_+ J_3 | j m \rangle = \hbar \langle j'' m'' | J_+ | j m \rangle.$$

Skorzystajmy z relacji zupełności stanów własnych operatora momentu pędu i konwencji sumacyjnej

$$\mathbb{I} = \sum_{j' m'} |j' m'\rangle \langle j' m'| + \int |\tilde{j}' \tilde{m}'\rangle \langle \tilde{j}' \tilde{m}'| d\tilde{j}' d\tilde{m}' \equiv |j' m'\rangle \langle j' m'|$$

gdzie sumujemy po dyskretnym i całkujemy po ciągłym zakresie widma operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$ , a po prawej stronie relacji  $\equiv$  pominęliśmy symbole sumowania i całkowania.

# Stany własne momentu pędu

Rozważmy element macierzowy równania

$$[J_3, J_+] = \hbar J_+ \Rightarrow J_3 J_+ - J_+ J_3 = \hbar J_+$$

$$\langle j'' m'' | J_3 J_+ | j m \rangle - \langle j'' m'' | J_+ J_3 | j m \rangle = \hbar \langle j'' m'' | J_+ | j m \rangle.$$

Skorzystajmy z relacji zupełności stanów własnych operatora momentu pędu i konwencji sumacyjnej

$$\mathbb{I} = \sum_{j' m'} |j' m'\rangle \langle j' m'| + \int |\tilde{j}' \tilde{m}'\rangle \langle \tilde{j}' \tilde{m}'| d\tilde{j}' d\tilde{m}' \equiv |j' m'\rangle \langle j' m'|$$

gdzie sumujemy po dyskretnym i całkujemy po ciągłym zakresie widma operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$ , a po prawej stronie relacji  $\equiv$  pominęliśmy symbole sumowania i całkowania. Wstawiając operator jednostkowy pomiędzy operatory  $J_3$  i  $J_+$  dostaniemy

$$\begin{aligned} \langle j'' m'' | J_3 |j' m'\rangle \langle j' m'| J_+ |j m\rangle & - \langle j'' m'' | J_+ |j' m'\rangle \langle j' m'| J_3 |j m\rangle \\ & = \hbar \langle j'' m'' | J_+ |j m\rangle. \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Rozważmy element macierzowy równania

$$[J_3, J_+] = \hbar J_+ \Rightarrow J_3 J_+ - J_+ J_3 = \hbar J_+$$

$$\langle j'' m'' | J_3 J_+ | j m \rangle - \langle j'' m'' | J_+ J_3 | j m \rangle = \hbar \langle j'' m'' | J_+ | j m \rangle.$$

Skorzystajmy z relacji zupełności stanów własnych operatora momentu pędu i konwencji sumacyjnej

$$\mathbb{I} = \sum_{j' m'} |j' m'\rangle \langle j' m'| + \int |\tilde{j}' \tilde{m}'\rangle \langle \tilde{j}' \tilde{m}'| d\tilde{j}' d\tilde{m}' \equiv |j' m'\rangle \langle j' m'|$$

gdzie sumujemy po dyskretnym i całkujemy po ciągłym zakresie widma operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$ , a po prawej stronie relacji  $\equiv$  pominęliśmy symbole sumowania i całkowania. Wstawiając operator jednostkowy pomiędzy operatory  $J_3$  i  $J_+$  dostaniemy

$$\begin{aligned} \langle j'' m'' | J_3 |j' m'\rangle \langle j' m'| J_+ | j m \rangle &- \langle j'' m'' | J_+ |j' m'\rangle \langle j' m'| J_3 | j m \rangle \\ &= \hbar \langle j'' m'' | J_+ | j m \rangle. \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

$$\begin{aligned}\langle j'' m'' | J_3 | j' m' \rangle \langle j' m' | J_+ | jm \rangle &= \langle j'' m'' | J_+ | j' m' \rangle \langle j' m' | J_3 | jm \rangle \\ &= \hbar \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle.\end{aligned}$$

Skorzystajmy z faktu, że  $|jm\rangle$  są stanami własnymi operatora  $J_3$ .

$$\begin{aligned}m' \hbar \langle j'' m'' | j' m' \rangle \langle j' m' | J_+ | jm \rangle &= \langle j'' m'' | J_+ | j' m' \rangle m \hbar \langle j' m' | jm \rangle \\ &= \hbar \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle\end{aligned}$$



# Stany własne momentu pędu

$$\begin{aligned}\langle j'' m'' | J_3 | j' m' \rangle \langle j' m' | J_+ | jm \rangle &= \langle j'' m'' | J_+ | j' m' \rangle \langle j' m' | J_3 | jm \rangle \\ &= \hbar \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle.\end{aligned}$$

Skorzystajmy z faktu, że  $|jm\rangle$  są stanami własnymi operatora  $J_3$ .

$$\begin{aligned}m' \hbar \langle j'' m'' | j' m' \rangle \langle j' m' | J_+ | jm \rangle &= \langle j'' m'' | J_+ | j' m' \rangle m \hbar \langle j' m' | jm \rangle \\ &= \hbar \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle\end{aligned}$$

Wykorzystajmy normalizację stanów  $|jm\rangle$

$$\begin{aligned}m' \hbar \delta_{j'' j'} \delta_{m'' m'} \langle j' m' | J_+ | jm \rangle &= m \hbar \delta_{j' j} \delta_{m' m} \langle j'' m'' | J_+ | j' m' \rangle \\ &= \hbar \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle\end{aligned}$$

i wykonajmy sumowanie po  $j'$  i  $m'$ , wtedy otrzymamy

$$m'' \hbar \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle - m \hbar \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle = \hbar \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle.$$

# Stany własne momentu pędu

$$\begin{aligned}\langle j'' m'' | J_3 | j' m' \rangle \langle j' m' | J_+ | jm \rangle &= \langle j'' m'' | J_+ | j' m' \rangle \langle j' m' | J_3 | jm \rangle \\ &= \hbar \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle.\end{aligned}$$

Skorzystajmy z faktu, że  $|jm\rangle$  są stanami własnymi operatora  $J_3$ .

$$\begin{aligned}m' \hbar \langle j'' m'' | j' m' \rangle \langle j' m' | J_+ | jm \rangle &= \langle j'' m'' | J_+ | j' m' \rangle m \hbar \langle j' m' | jm \rangle \\ &= \hbar \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle\end{aligned}$$

Wykorzystajmy normalizację stanów  $|jm\rangle$

$$\begin{aligned}m' \hbar \delta_{j'' j'} \delta_{m'' m'} \langle j' m' | J_+ | jm \rangle &= m \hbar \delta_{j' j} \delta_{m' m} \langle j'' m'' | J_+ | j' m' \rangle \\ &= \hbar \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle\end{aligned}$$

i wykonajmy sumowanie po  $j'$  i  $m'$ , wtedy otrzymamy

$$m'' \hbar \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle - m \hbar \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle = \hbar \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle.$$

# Stany własne momentu pędu

Podzielmy obie strony przez  $\hbar$ , przenieśmy wyraz z prawej strony równania na lewą i wyłączmy element macierzowy operatora  $J_+$  poza nawias, wówczas otrzymamy

$$(m'' - m - 1) \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle = 0.$$

Zauważmy, że ponieważ

$$[\vec{J}^2, J_i] = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \Rightarrow \quad [\vec{J}^2, J_{\pm}] = 0.$$

# Stany własne momentu pędu

Podzielmy obie strony przez  $\hbar$ , przenieśmy wyraz z prawej strony równania na lewą i wyłączmy element macierzowy operatora  $J_+$  poza nawias, wówczas otrzymamy

$$(m'' - m - 1) \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle = 0.$$

Zauważmy, że ponieważ

$$[\vec{J}^2, J_i] = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \Rightarrow \quad [\vec{J}^2, J_{\pm}] = 0.$$

Obliczmy element macierzowy komutatora

$$\vec{J}^2 J_{\pm} - J_{\pm} \vec{J}^2 = 0.$$

# Stany własne momentu pędu

Podzielmy obie strony przez  $\hbar$ , przenieśmy wyraz z prawej strony równania na lewą i wyłączmy element macierzowy operatora  $J_+$  poza nawias, wówczas otrzymamy

$$(m'' - m - 1) \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle = 0.$$

Zauważmy, że ponieważ

$$[\vec{J}^2, J_i] = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \Rightarrow \quad [\vec{J}^2, J_{\pm}] = 0.$$

Obliczmy element macierzowy komutatora

$$\vec{J}^2 J_{\pm} - J_{\pm} \vec{J}^2 = 0.$$

$$\langle j'' m'' | \vec{J}^2 J_{\pm} | jm \rangle - \langle j'' m'' | J_{\pm} \vec{J}^2 | jm \rangle = 0,$$

a wstawiając odpowiednio operator jednostkowy  $|j' m'\rangle \langle j' m'|$  otrzymamy

$$\langle j'' m'' | \vec{J}^2 | j' m' \rangle \langle j' m' | J_{\pm} | jm \rangle - \langle j'' m'' | J_{\pm} | j' m' \rangle \langle j' m' | \vec{J}^2 | jm \rangle = 0.$$

# Stany własne momentu pędu

Podzielmy obie strony przez  $\hbar$ , przenieśmy wyraz z prawej strony równania na lewą i wyłączmy element macierzowy operatora  $J_+$  poza nawias, wówczas otrzymamy

$$(m'' - m - 1) \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle = 0.$$

Zauważmy, że ponieważ

$$[\vec{J}^2, J_i] = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \Rightarrow \quad [\vec{J}^2, J_{\pm}] = 0.$$

Obliczmy element macierzowy komutatora

$$\vec{J}^2 J_{\pm} - J_{\pm} \vec{J}^2 = 0.$$

$$\langle j'' m'' | \vec{J}^2 J_{\pm} | jm \rangle - \langle j'' m'' | J_{\pm} \vec{J}^2 | jm \rangle = 0,$$

a wstawiając odpowiednio operator jednostkowy  $|j' m'\rangle \langle j' m'|$  otrzymamy

$$\langle j'' m'' | \vec{J}^2 | j' m' \rangle \langle j' m' | J_{\pm} | jm \rangle - \langle j'' m'' | J_{\pm} | j' m' \rangle \langle j' m' | \vec{J}^2 | jm \rangle = 0.$$

# Stany własne momentu pędu

Skorzystajmy z faktu, że  $|jm\rangle$  są stanami własnymi operatora  $\vec{J}^2$  i z przyjętej normalizacji stanów

$$f(j')\hbar^2\delta_{j''j'}\delta_{m''m'}\langle j'm' | J_{\pm} | jm \rangle - f(j)\hbar^2\delta_{j'j}\delta_{m'm}\langle j''m'' | J_{\pm} | j'm' \rangle = 0.$$

Dzieląc obie strony przez  $\hbar^2$  i wykonując sumowanie po  $j'$  i  $m'$  otrzymamy

$$(f(j'') - f(j))\langle j''m'' | J_{\pm} | jm \rangle = 0.$$

# Stany własne momentu pędu

Skorzystajmy z faktu, że  $|jm\rangle$  są stanami własnymi operatora  $J^2$  i z przyjętej normalizacji stanów

$$f(j')\hbar^2\delta_{j''j'}\delta_{m''m'}\langle j'm'|J_{\pm}|jm\rangle - f(j)\hbar^2\delta_{j'j}\delta_{m'm}\langle j''m''|J_{\pm}|j'm'\rangle = 0.$$

Dzieląc obie strony przez  $\hbar^2$  i wykonując sumowanie po  $j'$  i  $m'$  otrzymamy

$$(f(j'') - f(j))\langle j''m''|J_{\pm}|jm\rangle = 0.$$

Równanie to jest spełnione albo jeśli

$$f(j'') = f(j)$$



# Stany własne momentu pędu

Skorzystajmy z faktu, że  $|jm\rangle$  są stanami własnymi operatora  $J^2$  i z przyjętej normalizacji stanów

$$f(j')\hbar^2\delta_{j''j'}\delta_{m''m'}\langle j'm'|J_{\pm}|jm\rangle - f(j)\hbar^2\delta_{j'j}\delta_{m'm}\langle j''m''|J_{\pm}|j'm'\rangle = 0.$$

Dzieląc obie strony przez  $\hbar^2$  i wykonując sumowanie po  $j'$  i  $m'$  otrzymamy

$$(f(j'') - f(j))\langle j''m''|J_{\pm}|jm\rangle = 0.$$

Równanie to jest spełnione albo jeśli

$$f(j'') = f(j) \quad \Leftrightarrow \quad j'' = j,$$

# Stany własne momentu pędu

Skorzystajmy z faktu, że  $|jm\rangle$  są stanami własnymi operatora  $J^2$  i z przyjętej normalizacji stanów

$$f(j')\hbar^2\delta_{j''j'}\delta_{m''m'}\langle j'm'|J_{\pm}|jm\rangle - f(j)\hbar^2\delta_{j'j}\delta_{m'm}\langle j''m''|J_{\pm}|j'm'\rangle = 0.$$

Dzieląc obie strony przez  $\hbar^2$  i wykonując sumowanie po  $j'$  i  $m'$  otrzymamy

$$(f(j'') - f(j))\langle j''m''|J_{\pm}|jm\rangle = 0.$$

Równanie to jest spełnione albo jeśli

$$f(j'') = f(j) \quad \Leftrightarrow \quad j'' = j,$$

gdyż funkcja  $f(j)$  jest różnowartościowa,

# Stany własne momentu pędu

Skorzystajmy z faktu, że  $|jm\rangle$  są stanami własnymi operatora  $J^2$  i z przyjętej normalizacji stanów

$$f(j')\hbar^2\delta_{j''j'}\delta_{m''m'}\langle j'm' | J_{\pm} | jm \rangle - f(j)\hbar^2\delta_{j'j}\delta_{m'm}\langle j''m'' | J_{\pm} | j'm' \rangle = 0.$$

Dzieląc obie strony przez  $\hbar^2$  i wykonując sumowanie po  $j'$  i  $m'$  otrzymamy

$$(f(j'') - f(j))\langle j''m'' | J_{\pm} | jm \rangle = 0.$$

Równanie to jest spełnione albo jeśli

$$f(j'') = f(j) \quad \Leftrightarrow \quad j'' = j,$$

gdyż funkcja  $f(j)$  jest różnowartościowa,

albo jeśli

$$\langle j'' m'' | J_{\pm} | j m \rangle = 0.$$

Obliczenia prowadziliśmy dla dowolnych  $j, j'', m, m''$ , dlatego widzimy, że tylko elementy macierze dla  $j'' = j$ , a więc elementy postaci

$$\langle j m'' | J_{\pm} | j m \rangle$$

mogą być niezerowe,

albo jeśli

$$\langle j'' m'' | J_{\pm} | j m \rangle = 0.$$

Obliczenia prowadziliśmy dla dowolnych  $j, j'', m, m''$ , dlatego widzimy, że tylko elementy macierze dla  $j'' = j$ , a więc elementy postaci

$$\langle j m'' | J_{\pm} | j m \rangle$$

mogą być niezerowe, a zatem macierze operatorów  $J_{\pm}$  są diagonalne w  $j$ .

albo jeśli

$$\langle j'' m'' | J_{\pm} | j m \rangle = 0.$$

Obliczenia prowadziliśmy dla dowolnych  $j, j'', m, m''$ , dlatego widzimy, że tylko elementy macierze dla  $j'' = j$ , a więc elementy postaci

$$\langle j m'' | J_{\pm} | j m \rangle$$

mogą być niezerowe, a zatem macierze operatorów  $J_{\pm}$  są diagonalne w  $j$ .

# Stany własne momentu pędu

W takim razie znalezione wcześniej równanie

$$(m'' - m - 1) \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle = 0$$

przyjmuje postać

$$(m'' - m - 1) \langle jm'' | J_+ | jm \rangle = 0,$$

# Stany własne momentu pędu

W takim razie znalezione wcześniej równanie

$$(m'' - m - 1) \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle = 0$$

przyjmuje postać

$$(m'' - m - 1) \langle jm'' | J_+ | jm \rangle = 0,$$

co zachodzi jeśli

$$m'' = m + 1 \quad \text{lub} \quad \langle jm'' | J_+ | jm \rangle = 0.$$



# Stany własne momentu pędu

W takim razie znalezione wcześniej równanie

$$(m'' - m - 1) \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle = 0$$

przyjmuje postać

$$(m'' - m - 1) \langle jm'' | J_+ | jm \rangle = 0,$$

co zachodzi jeśli

$$m'' = m + 1 \quad \text{lub} \quad \langle jm'' | J_+ | jm \rangle = 0.$$

To oznacza, że nieznikające elementy macierzowe operatora  $J_+$  mają postać

$$\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle .$$

# Stany własne momentu pędu

W takim razie znalezione wcześniej równanie

$$(m'' - m - 1) \langle j'' m'' | J_+ | jm \rangle = 0$$

przyjmuje postać

$$(m'' - m - 1) \langle jm'' | J_+ | jm \rangle = 0,$$

co zachodzi jeśli

$$m'' = m + 1 \quad \text{lub} \quad \langle jm'' | J_+ | jm \rangle = 0.$$

To oznacza, że nieznikające elementy macierzone operatora  $J_+$  mają postać

$$\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle .$$

Ze względu na ortogonalność stanów  $|jm\rangle$ , równość ta implikuje związek

$$J_+ |jm\rangle = \lambda_m \hbar |jm + 1\rangle,$$

gdzie  $\lambda_m$  jest liczbą zespoloną.

Widzimy, że działanie operatora  $J_+$  na stan  $|jm\rangle$  powiększa wartość własną  $m$  operatora  $J_3$  o 1.

Ze względu na ortogonalność stanów  $|jm\rangle$ , równość ta implikuje związek

$$J_+ |jm\rangle = \lambda_m \hbar |jm + 1\rangle,$$

gdzie  $\lambda_m$  jest liczbą zespoloną.

Widzimy, że działanie operatora  $J_+$  na stan  $|jm\rangle$  powiększa wartość własną  $m$  operatora  $J_3$  o 1.

**Zadanie.** Pokazać, że obliczając elementy macierzowe równania

$$J_3 J_- - J_- J_3 = -\hbar J_-$$

otrzymamy

$$(m'' - m + 1) \langle jm'' | J_- | jm \rangle = 0,$$

**Zadanie.** Pokazać, że obliczając elementy macierzowe równania

$$J_3 J_- - J_- J_3 = -\hbar J_-$$

otrzymamy

$$(m'' - m + 1) \langle jm'' | J_- | jm \rangle = 0,$$

czyli

$$m'' = m - 1 \quad \text{lub} \quad \langle jm'' | J_- | jm \rangle = 0,$$

**Zadanie.** Pokazać, że obliczając elementy macierzowe równania

$$J_3 J_- - J_- J_3 = -\hbar J_-$$

otrzymamy

$$(m'' - m + 1) \langle jm'' | J_- | jm \rangle = 0,$$

czyli

$$m'' = m - 1 \quad \text{lub} \quad \langle jm'' | J_- | jm \rangle = 0,$$

a więc nie znikają tylko elementy macierzowe postaci

$$\langle jm - 1 | J_- | jm \rangle .$$

Widzimy, że działanie operatora  $J_-$  na stan  $|jm\rangle$  pomniejsza wartość własną  $m$  operatora  $J_3$  o 1,

**Zadanie.** Pokazać, że obliczając elementy macierzowe równania

$$J_3 J_- - J_- J_3 = -\hbar J_-$$

otrzymamy

$$(m'' - m + 1) \langle jm'' | J_- | jm \rangle = 0,$$

czyli

$$m'' = m - 1 \quad \text{lub} \quad \langle jm'' | J_- | jm \rangle = 0,$$

a więc nie znikają tylko elementy macierzowe postaci

$$\langle jm - 1 | J_- | jm \rangle .$$

Widzimy, że działanie operatora  $J_-$  na stan  $|jm\rangle$  pomniejsza wartość własną  $m$  operatora  $J_3$  o 1,



a zatem w wyniku działania operatora  $J_-$  na stan własny  $|jm\rangle$  otrzymamy

$$J_- |jm\rangle = \lambda'_m \hbar |jm - 1\rangle,$$

gdzie  $\lambda'_m$  jest liczbą zespoloną.

Mnożąc obustronnie przez  $\langle jm - 1|$  otrzymamy

$$\lambda'_m \hbar = \langle jm - 1|J_- |jm\rangle.$$

a zatem w wyniku działania operatora  $J_-$  na stan własny  $|jm\rangle$  otrzymamy

$$J_- |jm\rangle = \lambda'_m \hbar |jm - 1\rangle,$$

gdzie  $\lambda'_m$  jest liczbą zespoloną.

Mnożąc obustronnie przez  $\langle jm - 1|$  otrzymamy

$$\lambda'_m \hbar = \langle jm - 1|J_- |jm\rangle.$$

Znajdźmy związek pomiędzy liczbami  $\lambda_m$  i  $\lambda'_m$ .  
Skorzystajmy z równania

$$J_+ |jm\rangle = \lambda_m \hbar |jm + 1\rangle.$$

Znajdźmy związek pomiędzy liczbami  $\lambda_m$  i  $\lambda'_m$ .  
Skorzystajmy z równania

$$J_+ |jm\rangle = \lambda_m \hbar |jm + 1\rangle.$$

Mnożąc obustronnie przez  $\langle jm + 1|$  otrzymamy

$$\langle jm + 1|J_+ |jm\rangle =$$

Znajdźmy związek pomiędzy liczbami  $\lambda_m$  i  $\lambda'_m$ .  
Skorzystajmy z równania

$$J_+ |jm\rangle = \lambda_m \hbar |jm+1\rangle.$$

Mnożąc obustronnie przez  $\langle jm+1|$  otrzymamy

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \langle jm+1|\lambda_m \hbar|jm+1\rangle =$$

Znajdźmy związek pomiędzy liczbami  $\lambda_m$  i  $\lambda'_m$ .  
Skorzystajmy z równania

$$J_+ |jm\rangle = \lambda_m \hbar |jm+1\rangle.$$

Mnożąc obustronnie przez  $\langle jm+1|$  otrzymamy

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \langle jm+1|\lambda_m \hbar|jm+1\rangle = \lambda_m \hbar \langle jm+1|jm+1\rangle =$$

Znajdźmy związek pomiędzy liczbami  $\lambda_m$  i  $\lambda'_m$ .  
Skorzystajmy z równania

$$J_+ |jm\rangle = \lambda_m \hbar |jm+1\rangle.$$

Mnożąc obustronnie przez  $\langle jm+1|$  otrzymamy

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \langle jm+1|\lambda_m \hbar|jm+1\rangle = \lambda_m \hbar \langle jm+1|jm+1\rangle = \lambda_m \hbar.$$

Znajdźmy związek pomiędzy liczbami  $\lambda_m$  i  $\lambda'_m$ .  
Skorzystajmy z równania

$$J_+ |jm\rangle = \lambda_m \hbar |jm+1\rangle.$$

Mnożąc obustronnie przez  $\langle jm+1|$  otrzymamy

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \langle jm+1|\lambda_m \hbar|jm+1\rangle = \lambda_m \hbar \langle jm+1|jm+1\rangle = \lambda_m \hbar.$$



# Stany własne momentu pędu

Dokonując sprzężenia zespolonego równania

$$\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle = \lambda_m \hbar.$$

otrzymamy

$$\langle jm | J_+^\dagger | jm + 1 \rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

# Stany własne momentu pędu

Dokonując sprzężenia zespolonego równania

$$\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle = \lambda_m \hbar.$$

otrzymamy

$$\langle jm | J_+^\dagger | jm + 1 \rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

ale  $J_+^\dagger = J_-$ , więc

# Stany własne momentu pędu

Dokonując sprzężenia zespolonego równania

$$\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle = \lambda_m \hbar.$$

otrzymamy

$$\langle jm | J_+^\dagger | jm + 1 \rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

ale  $J_+^\dagger = J_-$ , więc

$$\langle jm | J_- | jm + 1 \rangle = \lambda_m^* \hbar.$$

# Stany własne momentu pędu

Dokonując sprzężenia zespolonego równania

$$\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle = \lambda_m \hbar.$$

otrzymamy

$$\langle jm | J_+^\dagger | jm + 1 \rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

ale  $J_+^\dagger = J_-$ , więc

$$\langle jm | J_- | jm + 1 \rangle = \lambda_m^* \hbar.$$

$\lambda_m^*$  nie jest równa  $\lambda'_m = \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle / \hbar$  lecz

$$\lambda_m^* = \lambda'_{m+1}.$$

# Stany własne momentu pędu

Dokonując sprzężenia zespolonego równania

$$\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle = \lambda_m \hbar.$$

otrzymamy

$$\langle jm | J_+^\dagger | jm + 1 \rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

ale  $J_+^\dagger = J_-$ , więc

$$\langle jm | J_- | jm + 1 \rangle = \lambda_m^* \hbar.$$

$\lambda_m^*$  nie jest równa  $\lambda'_m = \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle / \hbar$  lecz

$$\lambda_m^* = \lambda'_{m+1}.$$

# Stany własne momentu pędu

Skorzystajmy teraz z relacji

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_3 \quad \Rightarrow \quad J_+ J_- - J_- J_+ = 2\hbar J_3.$$

Skąd dla elementów macierzowych otrzymamy

$$\begin{aligned} \langle j'' m'' | J_+ | j' m' \rangle \langle j' m' | J_- | j m \rangle &- \langle j'' m'' | J_- | j' m' \rangle \langle j' m' | J_+ | j m \rangle \\ &= 2\hbar \langle j'' m'' | J_3 | j m \rangle = \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Skorzystajmy teraz z relacji

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_3 \quad \Rightarrow \quad J_+ J_- - J_- J_+ = 2\hbar J_3.$$

Skąd dla elementów macierzowych otrzymamy

$$\begin{aligned} \langle j'' m'' | J_+ | j' m' \rangle \langle j' m' | J_- | j m \rangle &- \langle j'' m'' | J_- | j' m' \rangle \langle j' m' | J_+ | j m \rangle \\ &= 2\hbar \langle j'' m'' | J_3 | j m \rangle = 2\hbar^2 m \delta_{j'' j} \delta_{m'' m}. \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Skorzystajmy teraz z relacji

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_3 \quad \Rightarrow \quad J_+ J_- - J_- J_+ = 2\hbar J_3.$$

Skąd dla elementów macierzowych otrzymamy

$$\begin{aligned} \langle j'' m'' | J_+ | j' m' \rangle \langle j' m' | J_- | jm \rangle &- \langle j'' m'' | J_- | j' m' \rangle \langle j' m' | J_+ | jm \rangle \\ &= 2\hbar \langle j'' m'' | J_3 | jm \rangle = 2\hbar^2 m \delta_{j'' j} \delta_{m'' m}. \end{aligned}$$

Ponieważ nie znikają tylko elementy macierzowe

$$\langle jm - 1 | J_- | jm \rangle \quad \text{i} \quad \langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle,$$



# Stany własne momentu pędu

Skorzystajmy teraz z relacji

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_3 \quad \Rightarrow \quad J_+ J_- - J_- J_+ = 2\hbar J_3.$$

Skąd dla elementów macierzowych otrzymamy

$$\begin{aligned} \langle j'' m'' | J_+ | j' m' \rangle \langle j' m' | J_- | jm \rangle &- \langle j'' m'' | J_- | j' m' \rangle \langle j' m' | J_+ | jm \rangle \\ &= 2\hbar \langle j'' m'' | J_3 | jm \rangle = 2\hbar^2 m \delta_{j'' j} \delta_{m'' m}. \end{aligned}$$

Ponieważ nie znikają tylko elementy macierzowe

$$\langle jm - 1 | J_- | jm \rangle \quad \text{i} \quad \langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle,$$

to z sumy po  $j'$  i  $m'$  pozostaną wyrazy

$$\begin{aligned} \langle j'' m'' | J_+ | jm - 1 \rangle \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle &- \langle j'' m'' | J_- | jm + 1 \rangle \langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle \\ &= 2\hbar^2 m \delta_{j'' j} \delta_{m'' m}. \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Skorzystajmy teraz z relacji

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_3 \quad \Rightarrow \quad J_+ J_- - J_- J_+ = 2\hbar J_3.$$

Skąd dla elementów macierzowych otrzymamy

$$\begin{aligned} \langle j'' m'' | J_+ | j' m' \rangle \langle j' m' | J_- | jm \rangle &- \langle j'' m'' | J_- | j' m' \rangle \langle j' m' | J_+ | jm \rangle \\ &= 2\hbar \langle j'' m'' | J_3 | jm \rangle = 2\hbar^2 m \delta_{j'' j} \delta_{m'' m}. \end{aligned}$$

Ponieważ nie znikają tylko elementy macierzowe

$$\langle jm - 1 | J_- | jm \rangle \quad \text{i} \quad \langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle,$$

to z sumy po  $j'$  i  $m'$  pozostaną wyrazy

$$\begin{aligned} \langle j'' m'' | J_+ | jm - 1 \rangle \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle &- \langle j'' m'' | J_- | jm + 1 \rangle \langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle \\ &= 2\hbar^2 m \delta_{j'' j} \delta_{m'' m}. \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Ponownie uwzględniając, że nie znikają tylko elementy macierzowe

$$\langle jm - 1 | J_- | jm \rangle \quad \text{i} \quad \langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle,$$

widzimy, że lewa i prawa strona równania

$$\begin{aligned} \langle j'' m'' | J_+ | jm - 1 \rangle \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle - \langle j'' m'' | J_- | jm + 1 \rangle \langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle \\ = 2\hbar^2 m \delta_{j''j} \delta_{m''m} \end{aligned}$$

nie znikają tylko gdy  $j'' = j$  i  $m'' = m$ .

# Stany własne momentu pędu

Ponownie uwzględniając, że nie znikają tylko elementy macierzowe

$$\langle jm - 1 | J_- | jm \rangle \quad \text{i} \quad \langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle,$$

widzimy, że lewa i prawa strona równania

$$\begin{aligned} \langle j'' m'' | J_+ | jm - 1 \rangle \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle - \langle j'' m'' | J_- | jm + 1 \rangle \langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle \\ = 2\hbar^2 m \delta_{j''j} \delta_{m''m} \end{aligned}$$

nie znikają tylko gdy  $j'' = j$  i  $m'' = m$ .

Nasze równanie przybiera wtedy postać

$$\begin{aligned} \langle jm | J_+ | jm - 1 \rangle \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle - \langle jm | J_- | jm + 1 \rangle \langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle \\ = 2m\hbar^2. \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Ponownie uwzględniając, że nie znikają tylko elementy macierzowe

$$\langle jm - 1 | J_- | jm \rangle \quad \text{i} \quad \langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle,$$

widzimy, że lewa i prawa strona równania

$$\begin{aligned} \langle j'' m'' | J_+ | jm - 1 \rangle \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle - \langle j'' m'' | J_- | jm + 1 \rangle \langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle \\ = 2\hbar^2 m \delta_{j''j} \delta_{m''m} \end{aligned}$$

nie znikają tylko gdy  $j'' = j$  i  $m'' = m$ .

Nasze równanie przybiera wtedy postać

$$\begin{aligned} \langle jm | J_+ | jm - 1 \rangle \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle - \langle jm | J_- | jm + 1 \rangle \langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle \\ = 2m\hbar^2. \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Wykorzystując związki

$$\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle = \lambda_m \hbar \quad \text{i} \quad \langle jm | J_- | jm + 1 \rangle = \lambda_m^* \hbar.$$

w równaniu

$$\begin{aligned} \langle jm | J_+ | jm - 1 \rangle \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle - \langle jm | J_- | jm + 1 \rangle \langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle \\ = 2m\hbar^2 \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Wykorzystując związki

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar \quad \text{i} \quad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar.$$

w równaniu

$$\begin{aligned} \langle jm|J_+|jm-1\rangle \langle jm-1|J_-|jm\rangle - \langle jm|J_-|jm+1\rangle \langle jm+1|J_+|jm\rangle \\ = 2m\hbar^2 \end{aligned}$$

otrzymamy

$$\lambda_{m-1} \hbar \lambda_{m-1}^* \hbar - \lambda_m^* \hbar \lambda_m \hbar = 2m\hbar^2,$$

# Stany własne momentu pędu

Wykorzystując związki

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar \quad \text{i} \quad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar.$$

w równaniu

$$\begin{aligned} \langle jm|J_+|jm-1\rangle \langle jm-1|J_-|jm\rangle - \langle jm|J_-|jm+1\rangle \langle jm+1|J_+|jm\rangle \\ = 2m\hbar^2 \end{aligned}$$

otrzymamy

$$\lambda_{m-1} \hbar \lambda_{m-1}^* \hbar - \lambda_m^* \hbar \lambda_m \hbar = 2m\hbar^2,$$

Skąd wynika równanie różnicowe

$$|\lambda_{m-1}|^2 - |\lambda_m|^2 = 2m.$$



# Stany własne momentu pędu

Wykorzystując związki

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar \quad \text{i} \quad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar.$$

w równaniu

$$\begin{aligned} \langle jm|J_+|jm-1\rangle \langle jm-1|J_-|jm\rangle - \langle jm|J_-|jm+1\rangle \langle jm+1|J_+|jm\rangle \\ = 2m\hbar^2 \end{aligned}$$

otrzymamy

$$\lambda_{m-1} \hbar \lambda_{m-1}^* \hbar - \lambda_m^* \hbar \lambda_m \hbar = 2m\hbar^2,$$

Skąd wynika równanie różnicowe

$$|\lambda_{m-1}|^2 - |\lambda_m|^2 = 2m.$$

# Stany własne momentu pędu

Zauważmy, że  $\lambda_m$  może zależeć nie tylko od  $m$ , ale również od  $j$ .  
Rozwiązanie ogólne naszego równania różnicowego ma postać

$$|\lambda_m|^2 = C - m(m + 1),$$

gdzie  $C$  jest dowolną stałą niezależną od  $m$ , która jednak może zależeć od  $j$ .

# Stany własne momentu pędu

Zauważmy, że  $\lambda_m$  może zależeć nie tylko od  $m$ , ale również od  $j$ .  
Rozwiązanie ogólne naszego równania różnicowego ma postać

$$|\lambda_m|^2 = C - m(m + 1),$$

gdzie  $C$  jest dowolną stałą niezależną od  $m$ , która jednak może zależeć od  $j$ .

Rzeczywiście

$$|\lambda_{m-1}|^2 - |\lambda_m|^2 =$$

# Stany własne momentu pędu

Zauważmy, że  $\lambda_m$  może zależeć nie tylko od  $m$ , ale również od  $j$ .  
Rozwiązanie ogólne naszego równania różnicowego ma postać

$$|\lambda_m|^2 = C - m(m + 1),$$

gdzie  $C$  jest dowolną stałą niezależną od  $m$ , która jednak może zależeć od  $j$ .

Rzeczywiście

$$|\lambda_{m-1}|^2 - |\lambda_m|^2 = C - (m-1)m - [C - m(m+1)]$$

# Stany własne momentu pędu

Zauważmy, że  $\lambda_m$  może zależeć nie tylko od  $m$ , ale również od  $j$ .  
Rozwiązanie ogólne naszego równania różnicowego ma postać

$$|\lambda_m|^2 = C - m(m + 1),$$

gdzie  $C$  jest dowolną stałą niezależną od  $m$ , która jednak może zależeć od  $j$ .

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} |\lambda_{m-1}|^2 - |\lambda_m|^2 &= C - (m-1)m - [C - m(m+1)] \\ &= \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Zauważmy, że  $\lambda_m$  może zależeć nie tylko od  $m$ , ale również od  $j$ .  
Rozwiązanie ogólne naszego równania różnicowego ma postać

$$|\lambda_m|^2 = C - m(m + 1),$$

gdzie  $C$  jest dowolną stałą niezależną od  $m$ , która jednak może zależeć od  $j$ .

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} |\lambda_{m-1}|^2 - |\lambda_m|^2 &= C - (m-1)m - [C - m(m+1)] \\ &= -m^2 + m + m^2 + m = \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Zauważmy, że  $\lambda_m$  może zależeć nie tylko od  $m$ , ale również od  $j$ .  
Rozwiązanie ogólne naszego równania różnicowego ma postać

$$|\lambda_m|^2 = C - m(m + 1),$$

gdzie  $C$  jest dowolną stałą niezależną od  $m$ , która jednak może zależeć od  $j$ .

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} |\lambda_{m-1}|^2 - |\lambda_m|^2 &= C - (m-1)m - [C - m(m+1)] \\ &= -m^2 + m + m^2 + m = 2m. \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Zauważmy, że  $\lambda_m$  może zależeć nie tylko od  $m$ , ale również od  $j$ .  
Rozwiązanie ogólne naszego równania różnicowego ma postać

$$|\lambda_m|^2 = C - m(m+1),$$

gdzie  $C$  jest dowolną stałą niezależną od  $m$ , która jednak może zależeć od  $j$ .

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} |\lambda_{m-1}|^2 - |\lambda_m|^2 &= C - (m-1)m - [C - m(m+1)] \\ &= -m^2 + m + m^2 + m = 2m. \end{aligned}$$

Oczywiście musi zachodzić

$$|\lambda_m|^2 \geq 0.$$



# Stany własne momentu pędu

Zauważmy, że  $\lambda_m$  może zależeć nie tylko od  $m$ , ale również od  $j$ .  
Rozwiązanie ogólne naszego równania różnicowego ma postać

$$|\lambda_m|^2 = C - m(m+1),$$

gdzie  $C$  jest dowolną stałą niezależną od  $m$ , która jednak może zależeć od  $j$ .

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} |\lambda_{m-1}|^2 - |\lambda_m|^2 &= C - (m-1)m - [C - m(m+1)] \\ &= -m^2 + m + m^2 + m = 2m. \end{aligned}$$

Oczywiście musi zachodzić

$$|\lambda_m|^2 \geq 0.$$

# Stany własne momentu pędu

Rozważmy funkcję

$$g(m) = |\lambda_m|^2 = C - m(m + 1) = -m^2 - m + C.$$

Znajdźmy jej miejsca zerowe

$$g(m) = 0 \Leftrightarrow$$

# Stany własne momentu pędu

Rozważmy funkcję

$$g(m) = |\lambda_m|^2 = C - m(m+1) = -m^2 - m + C.$$

Znajdźmy jej miejsca zerowe

$$g(m) = 0 \Leftrightarrow -m^2 - m + C = -\left(m^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} + C = 0$$

# Stany własne momentu pędu

Rozważmy funkcję

$$g(m) = |\lambda_m|^2 = C - m(m+1) = -m^2 - m + C.$$

Znajdźmy jej miejsca zerowe

$$g(m) = 0 \Leftrightarrow -m^2 - m + C = -\left(m^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} + C = 0$$
$$\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1 + 4C}{4}$$

# Stany własne momentu pędu

Rozważmy funkcję

$$g(m) = |\lambda_m|^2 = C - m(m+1) = -m^2 - m + C.$$

Znajdźmy jej miejsca zerowe

$$g(m) = 0 \Leftrightarrow -m^2 - m + C = -\left(m^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} + C = 0$$

$$\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1 + 4C}{4}$$

$$m = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4C}, \quad \text{dla } C \geq -\frac{1}{4}.$$

# Stany własne momentu pędu

Rozważmy funkcję

$$g(m) = |\lambda_m|^2 = C - m(m+1) = -m^2 - m + C.$$

Znajdźmy jej miejsca zerowe

$$g(m) = 0 \Leftrightarrow -m^2 - m + C = -\left(m^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} + C = 0$$

$$\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1 + 4C}{4}$$

$$m = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4C}, \quad \text{dla } C \geq -\frac{1}{4}.$$

Otrzymaliśmy dwa rozwiązania

$$m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4C}, \quad m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4C}.$$

# Stany własne momentu pędu

Rozważmy funkcję

$$g(m) = |\lambda_m|^2 = C - m(m+1) = -m^2 - m + C.$$

Znajdźmy jej miejsca zerowe

$$g(m) = 0 \Leftrightarrow -m^2 - m + C = -\left(m^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} + C = 0$$

$$\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1 + 4C}{4}$$

$$m = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4C}, \quad \text{dla } C \geq -\frac{1}{4}.$$

Otrzymaliśmy dwa rozwiązania

$$m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4C}, \quad m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4C}.$$

# Stany własne momentu pędu

Ponieważ gałęzie paraboli  $g(m)$  są skierowane w dół, to dla  $m < m_2$  i  $m > m_1$  mamy

$$g(m) = |\lambda_m|^2 < 0,$$

co daje sprzeczność.



# Stany własne momentu pędu

Ponieważ gałęzie paraboli  $g(m)$  są skierowane w dół, to dla  $m < m_2$  i  $m > m_1$  mamy

$$g(m) = |\lambda_m|^2 < 0,$$

co daje sprzeczność.

Przypomnijmy otrzymany wcześniej układ równań

$$\begin{cases} (m'' - m - 1) \langle jm'' | J_+ | jm \rangle = 0, \\ (m'' - m + 1) \langle jm'' | J_- | jm \rangle = 0 \end{cases}$$

Dla górnej wartości  $m$ , tzn.  $m = m_1$ , pierwsze równanie tego układu jest spełnione jeśli  $m'' = m_1 + 1$ , a dla dolnej wartości  $m$ , tzn.  $m = m_2$ , drugie równanie jest spełnione dla  $m'' = m_2 - 1$ .

# Stany własne momentu pędu

Ponieważ gałęzie paraboli  $g(m)$  są skierowane w dół, to dla  $m < m_2$  i  $m > m_1$  mamy

$$g(m) = |\lambda_m|^2 < 0,$$

co daje sprzeczność.

Przypomnijmy otrzymany wcześniej układ równań

$$\begin{cases} (m'' - m - 1) \langle jm'' | J_+ | jm \rangle = 0, \\ (m'' - m + 1) \langle jm'' | J_- | jm \rangle = 0 \end{cases}$$

Dla górnej wartości  $m$ , tzn.  $m = m_1$ , pierwsze równanie tego układu jest spełnione jeśli  $m'' = m_1 + 1$ , a dla dolnej wartości  $m$ , tzn.  $m = m_2$ , drugie równanie jest spełnione dla  $m'' = m_2 - 1$ .

Odpowiednie elementy macierzowe w powyższych równaniach wiążą się ze zdefiniowanymi wcześniej współczynnikami  $\lambda_m$  i  $\lambda_m^*$

$$\langle jm_1 + 1 | J_+ | jm_1 \rangle = \lambda_{m_1} \hbar \quad \text{i} \quad \langle jm_2 | J_- | jm_2 + 1 \rangle = \lambda_{m_2}^* \hbar,$$

# Stany własne momentu pędu

Ponieważ gałęzie paraboli  $g(m)$  są skierowane w dół, to dla  $m < m_2$  i  $m > m_1$  mamy

$$g(m) = |\lambda_m|^2 < 0,$$

co daje sprzeczność.

Przypomnijmy otrzymany wcześniej układ równań

$$\begin{cases} (m'' - m - 1) \langle jm'' | J_+ | jm \rangle = 0, \\ (m'' - m + 1) \langle jm'' | J_- | jm \rangle = 0 \end{cases}$$

Dla górnej wartości  $m$ , tzn.  $m = m_1$ , pierwsze równanie tego układu jest spełnione jeśli  $m'' = m_1 + 1$ , a dla dolnej wartości  $m$ , tzn.  $m = m_2$ , drugie równanie jest spełnione dla  $m'' = m_2 - 1$ . Odpowiednie elementy macierzowe w powyższych równaniach wiążą się ze zdefiniowanymi wcześniej współczynnikami  $\lambda_m$  i  $\lambda_m^*$

$$\langle jm_1 + 1 | J_+ | jm_1 \rangle = \lambda_{m_1} \hbar \quad \text{i} \quad \langle jm_2 | J_- | jm_2 + 1 \rangle = \lambda_{m_2}^* \hbar,$$

## Stany własne momentu pędu

a ponieważ  $m = m_1$  i  $m = m_2$  są miejscami zerowymi funkcji  $g(m)$ ,  $g(m_1) = |\lambda_{m_1}|^2 = |\lambda_{m_2}|^2 = 0$ , to aby uniknąć ujemnych wartości kwadratu modułu, powinniśmy przyjąć

$$\langle jm_1 + 1 | J_+ | jm_1 \rangle = 0 \quad \text{i} \quad \langle jm_2 | J_- | jm_2 + 1 \rangle = 0,$$

co gwarantuje, że największą wartością własną operatora  $J_3$  jest  $m_1 \hbar$ , najmniejszą wartością własną operatora  $J_3$  jest  $(m_2 + 1) \hbar$ , a więc

$$m_2 + 1 \leq m \leq m_1.$$

Wykorzystując obliczone wartości  $m_1$  i  $m_2$  dostaniemy

$$m_2 + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4C} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4C} = -m_1.$$

## Stany własne momentu pędu

a ponieważ  $m = m_1$  i  $m = m_2$  są miejscami zerowymi funkcji  $g(m)$ ,  $g(m_1) = |\lambda_{m_1}|^2 = |\lambda_{m_2}|^2 = 0$ , to aby uniknąć ujemnych wartości kwadratu modułu, powinniśmy przyjąć

$$\langle jm_1 + 1 | J_+ | jm_1 \rangle = 0 \quad \text{i} \quad \langle jm_2 | J_- | jm_2 + 1 \rangle = 0,$$

co gwarantuje, że największą wartością własną operatora  $J_3$  jest  $m_1 \hbar$ , najmniejszą wartością własną operatora  $J_3$  jest  $(m_2 + 1) \hbar$ , a więc

$$m_2 + 1 \leq m \leq m_1.$$

Wykorzystując obliczone wartości  $m_1$  i  $m_2$  dostaniemy

$$m_2 + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4C} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4C} = -m_1.$$

# Stany własne momentu pędu

Czyli  $m$  zmienia się co 1 w zakresie

$$-m_1 \leq m \leq m_1.$$

Aby to było możliwe, to różnica maksymalnej i minimalnej wartości  $m$  musi być liczbą całkowitą

$$m_1 - (-m_1) = 2m_1 = 0, 1, 2, \dots,$$

# Stany własne momentu pędu

Czyli  $m$  zmienia się co 1 w zakresie

$$-m_1 \leq m \leq m_1.$$

Aby to było możliwe, to różnica maksymalnej i minimalnej wartości  $m$  musi być liczbą całkowitą

$$m_1 - (-m_1) = 2m_1 = 0, 1, 2, \dots,$$

a więc

$$m_1 = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

# Stany własne momentu pędu

Czyli  $m$  zmienia się co 1 w zakresie

$$-m_1 \leq m \leq m_1.$$

Aby to było możliwe, to różnica maksymalnej i minimalnej wartości  $m$  musi być liczbą całkowitą

$$m_1 - (-m_1) = 2m_1 = 0, 1, 2, \dots,$$

a więc

$$m_1 = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

Dla  $m = m_1$  zachodzi

$$C - m_1(m_1 + 1) = 0 \Rightarrow C = m_1(m_1 + 1).$$



# Stany własne momentu pędu

Czyli  $m$  zmienia się co 1 w zakresie

$$-m_1 \leq m \leq m_1.$$

Aby to było możliwe, to różnica maksymalnej i minimalnej wartości  $m$  musi być liczbą całkowitą

$$m_1 - (-m_1) = 2m_1 = 0, 1, 2, \dots,$$

a więc

$$m_1 = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

Dla  $m = m_1$  zachodzi

$$C - m_1(m_1 + 1) = 0 \Rightarrow C = m_1(m_1 + 1).$$

Musimy jeszcze znaleźć postać funkcji  $f(j)$ .

Odwróćmy związki

$$\begin{cases} J_+ = J_1 + iJ_2 \\ J_- = J_1 - iJ_2 \end{cases}$$

Musimy jeszcze znaleźć postać funkcji  $f(j)$ .

Odwróćmy związki

$$\begin{cases} J_+ = J_1 + iJ_2 \\ J_- = J_1 - iJ_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \\ J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \end{cases}$$

# Stany własne momentu pędu

Musimy jeszcze znaleźć postać funkcji  $f(j)$ .

Odwróćmy związki

$$\begin{cases} J_+ = J_1 + iJ_2 \\ J_- = J_1 - iJ_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \\ J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \end{cases}$$

i obliczmy

$$\vec{J}^2 =$$

# Stany własne momentu pędu

Musimy jeszcze znaleźć postać funkcji  $f(j)$ .

Odwróćmy związki

$$\begin{cases} J_+ = J_1 + iJ_2 \\ J_- = J_1 - iJ_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \\ J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \end{cases}$$

i obliczmy

$$\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$$

# Stany własne momentu pędu

Musimy jeszcze znaleźć postać funkcji  $f(j)$ .

Odwróćmy związki

$$\begin{cases} J_+ = J_1 + iJ_2 \\ J_- = J_1 - iJ_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \\ J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \end{cases}$$

i obliczmy

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 &= J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \\ &= \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Musimy jeszcze znaleźć postać funkcji  $f(j)$ .

Odwróćmy związki

$$\begin{cases} J_+ = J_1 + iJ_2 \\ J_- = J_1 - iJ_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \\ J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \end{cases}$$

i obliczmy

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 &= J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( J_+^2 + J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+ - J_+^2 - J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+ \right) + J_3^2 \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Musimy jeszcze znaleźć postać funkcji  $f(j)$ .

Odwróćmy związki

$$\begin{cases} J_+ = J_1 + iJ_2 \\ J_- = J_1 - iJ_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \\ J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \end{cases}$$

i obliczmy

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 &= J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( J_+^2 + J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+ - J_+^2 - J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+ \right) + J_3^2 \\ &= \end{aligned}$$



# Stany własne momentu pędu

Musimy jeszcze znaleźć postać funkcji  $f(j)$ .

Odwróćmy związki

$$\begin{cases} J_+ = J_1 + iJ_2 \\ J_- = J_1 - iJ_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \\ J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \end{cases}$$

i obliczmy

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 &= J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( J_+^2 + J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+ - J_+^2 - J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+ \right) + J_3^2 \\ &= \frac{1}{2} (J_+J_- + J_-J_+) + J_3^2. \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Musimy jeszcze znaleźć postać funkcji  $f(j)$ .

Odwróćmy związki

$$\begin{cases} J_+ = J_1 + iJ_2 \\ J_- = J_1 - iJ_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \\ J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \end{cases}$$

i obliczmy

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 &= J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( J_+^2 + J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+ - J_+^2 - J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+ \right) + J_3^2 \\ &= \frac{1}{2} (J_+J_- + J_-J_+) + J_3^2. \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Znajdźmy diagonalny element macierzowy równania

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) + J_3^2.$$

Skorzystajmy z równania własnego operatora  $\vec{J}^2$  i wstawmy pomiędzy operatory  $J_+$  i  $J_-$  operator jednostkowy  $|j' m'\rangle \langle j' m'|$

$$\langle jm | \vec{J}^2 | jm \rangle =$$

# Stany własne momentu pędu

Znajdźmy diagonalny element macierzowy równania

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) + J_3^2.$$

Skorzystajmy z równania własnego operatora  $\vec{J}^2$  i wstawmy pomiędzy operatory  $J_+$  i  $J_-$  operator jednostkowy  $|j' m'\rangle \langle j' m'|$

$$\langle jm | \vec{J}^2 | jm \rangle = f(j) \hbar^2 \delta_{jj} \delta_{mm} =$$

# Stany własne momentu pędu

Znajdźmy diagonalny element macierzowy równania

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) + J_3^2.$$

Skorzystajmy z równania własnego operatora  $\vec{J}^2$  i wstawmy pomiędzy operatory  $J_+$  i  $J_-$  operator jednostkowy  $|j' m'\rangle \langle j' m'|$

$$\langle jm | \vec{J}^2 | jm \rangle = f(j) \hbar^2 \delta_{jj} \delta_{mm} = f(j) \hbar^2$$

# Stany własne momentu pędu

Znajdźmy diagonalny element macierzowy równania

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) + J_3^2.$$

Skorzystajmy z równania własnego operatora  $\vec{J}^2$  i wstawmy pomiędzy operatory  $J_+$  i  $J_-$  operator jednostkowy  $|j' m'\rangle \langle j' m'|$

$$\begin{aligned} \langle jm | \vec{J}^2 | jm \rangle &= f(j) \hbar^2 \delta_{jj} \delta_{mm} = f(j) \hbar^2 \\ &= \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Znajdźmy diagonalny element macierzowy równania

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) + J_3^2.$$

Skorzystajmy z równania własnego operatora  $\vec{J}^2$  i wstawmy pomiędzy operatory  $J_+$  i  $J_-$  operator jednostkowy  $|j' m'\rangle \langle j' m'|$

$$\begin{aligned} \langle jm | \vec{J}^2 | jm \rangle &= f(j) \hbar^2 \delta_{jj} \delta_{mm} = f(j) \hbar^2 \\ &= \frac{1}{2} \langle jm | J_+ | jm - 1 \rangle \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Znajdźmy diagonalny element macierzowy równania

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) + J_3^2.$$

Skorzystajmy z równania własnego operatora  $\vec{J}^2$  i wstawmy pomiędzy operatory  $J_+$  i  $J_-$  operator jednostkowy  $|j' m'\rangle \langle j' m'|$

$$\begin{aligned} \langle jm | \vec{J}^2 | jm \rangle &= f(j) \hbar^2 \delta_{jj} \delta_{mm} = f(j) \hbar^2 \\ &= \frac{1}{2} \langle jm | J_+ | jm - 1 \rangle \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle \\ &+ \end{aligned}$$



# Stany własne momentu pędu

Znajdźmy diagonalny element macierzowy równania

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) + J_3^2.$$

Skorzystajmy z równania własnego operatora  $\vec{J}^2$  i wstawmy pomiędzy operatory  $J_+$  i  $J_-$  operator jednostkowy  $|j' m'\rangle \langle j' m'|$

$$\begin{aligned} \langle jm | \vec{J}^2 | jm \rangle &= f(j) \hbar^2 \delta_{jj} \delta_{mm} = f(j) \hbar^2 \\ &= \frac{1}{2} \langle jm | J_+ | jm - 1 \rangle \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \langle jm | J_- | jm + 1 \rangle \langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Znajdźmy diagonalny element macierzowy równania

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) + J_3^2.$$

Skorzystajmy z równania własnego operatora  $\vec{J}^2$  i wstawmy pomiędzy operatory  $J_+$  i  $J_-$  operator jednostkowy  $|j' m'\rangle \langle j' m'|$

$$\begin{aligned} \langle jm | \vec{J}^2 | jm \rangle &= f(j) \hbar^2 \delta_{jj} \delta_{mm} = f(j) \hbar^2 \\ &= \frac{1}{2} \langle jm | J_+ | jm - 1 \rangle \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \langle jm | J_- | jm + 1 \rangle \langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle \\ &+ \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Znajdźmy diagonalny element macierzowy równania

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) + J_3^2.$$

Skorzystajmy z równania własnego operatora  $\vec{J}^2$  i wstawmy pomiędzy operatory  $J_+$  i  $J_-$  operator jednostkowy  $|j' m'\rangle \langle j' m'|$

$$\begin{aligned} \langle jm | \vec{J}^2 | jm \rangle &= f(j) \hbar^2 \delta_{jj} \delta_{mm} = f(j) \hbar^2 \\ &= \frac{1}{2} \langle jm | J_+ | jm - 1 \rangle \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \langle jm | J_- | jm + 1 \rangle \langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle \\ &+ \langle jm | J_3^2 | jm \rangle, \end{aligned}$$

Znajdźmy diagonalny element macierzowy równania

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) + J_3^2.$$

Skorzystajmy z równania własnego operatora  $\vec{J}^2$  i wstawmy pomiędzy operatory  $J_+$  i  $J_-$  operator jednostkowy  $|j' m'\rangle \langle j' m'|$

$$\begin{aligned} \langle jm | \vec{J}^2 | jm \rangle &= f(j) \hbar^2 \delta_{jj} \delta_{mm} = f(j) \hbar^2 \\ &= \frac{1}{2} \langle jm | J_+ | jm - 1 \rangle \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \langle jm | J_- | jm + 1 \rangle \langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle \\ &+ \langle jm | J_3^2 | jm \rangle, \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Wykorzystajmy związki

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar \quad \text{i} \quad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar$$

w równaniu

$$\begin{aligned}\langle jm|\vec{J}^2|jm\rangle &= f(j)\hbar^2\delta_{jj}\delta_{mm} = f(j)\hbar^2 \\ &= \frac{1}{2}\langle jm|J_+|jm-1\rangle\langle jm-1|J_-|jm\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\langle jm|J_-|jm+1\rangle\langle jm+1|J_+|jm\rangle \\ &+ \langle jm|J_3^2|jm\rangle = \frac{1}{2}|\lambda_{m-1}|^2\hbar^2 + \frac{1}{2}|\lambda_m|^2\hbar^2 + m^2\hbar^2\end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Wykorzystajmy związki

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar \quad \text{i} \quad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar$$

w równaniu

$$\begin{aligned}\langle jm|\vec{J}^2|jm\rangle &= f(j)\hbar^2\delta_{jj}\delta_{mm} = f(j)\hbar^2 \\ &= \frac{1}{2}\langle jm|J_+|jm-1\rangle\langle jm-1|J_-|jm\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\langle jm|J_-|jm+1\rangle\langle jm+1|J_+|jm\rangle \\ &+ \langle jm|J_3^2|jm\rangle = \frac{1}{2}|\lambda_{m-1}|^2\hbar^2 + \frac{1}{2}|\lambda_m|^2\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\ &= \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Wykorzystajmy związki

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar \quad \text{i} \quad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar$$

w równaniu

$$\begin{aligned}\langle jm|\vec{J}^2|jm\rangle &= f(j)\hbar^2\delta_{jj}\delta_{mm} = f(j)\hbar^2 \\ &= \frac{1}{2}\langle jm|J_+|jm-1\rangle\langle jm-1|J_-|jm\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2}\langle jm|J_-|jm+1\rangle\langle jm+1|J_+|jm\rangle \\ &\quad + \langle jm|J_3^2|jm\rangle = \frac{1}{2}|\lambda_{m-1}|^2\hbar^2 + \frac{1}{2}|\lambda_m|^2\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\ &= \frac{1}{2}(C - (m-1)m)\hbar^2 + \frac{1}{2}(C - m(m+1))\hbar^2 + m^2\hbar^2\end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Wykorzystajmy związki

$$\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle = \lambda_m \hbar \quad \text{i} \quad \langle jm | J_- | jm + 1 \rangle = \lambda_m^* \hbar$$

w równaniu

$$\begin{aligned} \langle jm | \vec{J}^2 | jm \rangle &= f(j) \hbar^2 \delta_{jj} \delta_{mm} = f(j) \hbar^2 \\ &= \frac{1}{2} \langle jm | J_+ | jm - 1 \rangle \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle jm | J_- | jm + 1 \rangle \langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle \\ &\quad + \langle jm | J_3^2 | jm \rangle = \frac{1}{2} |\lambda_{m-1}|^2 \hbar^2 + \frac{1}{2} |\lambda_m|^2 \hbar^2 + m^2 \hbar^2 \\ &= \frac{1}{2} (C - (m-1)m) \hbar^2 + \frac{1}{2} (C - m(m+1)) \hbar^2 + m^2 \hbar^2 \end{aligned}$$



$$f(j)\hbar^2 = \frac{1}{2}(C - (m-1)m)\hbar^2 + \frac{1}{2}(C - m(m+1))\hbar^2 + m^2\hbar^2$$
$$=$$

$$\begin{aligned} f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}(C - (m-1)m)\hbar^2 + \frac{1}{2}(C - m(m+1))\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\ &= C\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar^2(-m^2 + m - m^2 - m + 2m^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}(C - (m-1)m)\hbar^2 + \frac{1}{2}(C - m(m+1))\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\ &= C\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar^2(-m^2 + m - m^2 - m + 2m^2) \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}(C - (m-1)m)\hbar^2 + \frac{1}{2}(C - m(m+1))\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\ &= C\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar^2(-m^2 + m - m^2 - m + 2m^2) \\ &= C\hbar^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}(C - (m-1)m)\hbar^2 + \frac{1}{2}(C - m(m+1))\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\ &= C\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar^2(-m^2 + m - m^2 - m + 2m^2) \\ &= C\hbar^2 = m_1(m_1 + 1)\hbar^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}(C - (m-1)m)\hbar^2 + \frac{1}{2}(C - m(m+1))\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\ &= C\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar^2(-m^2 + m - m^2 - m + 2m^2) \\ &= C\hbar^2 = m_1(m_1 + 1)\hbar^2. \end{aligned}$$

Oznaczmy  $m_1 \equiv j$ ,

$$\begin{aligned} f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}(C - (m-1)m)\hbar^2 + \frac{1}{2}(C - m(m+1))\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\ &= C\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar^2(-m^2 + m - m^2 - m + 2m^2) \\ &= C\hbar^2 = m_1(m_1 + 1)\hbar^2. \end{aligned}$$

Oznaczmy  $m_1 \equiv j$ , wówczas  $f(j) = j(j+1)$

$$\begin{aligned} f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}(C - (m-1)m)\hbar^2 + \frac{1}{2}(C - m(m+1))\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\ &= C\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar^2(-m^2 + m - m^2 - m + 2m^2) \\ &= C\hbar^2 = m_1(m_1 + 1)\hbar^2. \end{aligned}$$

Oznaczmy  $m_1 \equiv j$ , wówczas  $f(j) = j(j+1)$  i równania własne momentu pędu przyjmują postać



# Stany własne momentu pędu

$$\begin{aligned} f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}(C - (m-1)m)\hbar^2 + \frac{1}{2}(C - m(m+1))\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\ &= C\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar^2(-m^2 + m - m^2 - m + 2m^2) \\ &= C\hbar^2 = m_1(m_1 + 1)\hbar^2. \end{aligned}$$

Oznaczmy  $m_1 \equiv j$ , wówczas  $f(j) = j(j+1)$  i równania własne momentu pędu przyjmują postać

$$\vec{J}^2 |jm\rangle =$$

# Stany własne momentu pędu

$$\begin{aligned} f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}(C - (m-1)m)\hbar^2 + \frac{1}{2}(C - m(m+1))\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\ &= C\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar^2(-m^2 + m - m^2 - m + 2m^2) \\ &= C\hbar^2 = m_1(m_1 + 1)\hbar^2. \end{aligned}$$

Oznaczmy  $m_1 \equiv j$ , wówczas  $f(j) = j(j+1)$  i równania własne momentu pędu przyjmują postać

$$\vec{J}^2 |jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle,$$

# Stany własne momentu pędu

$$\begin{aligned} f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}(C - (m-1)m)\hbar^2 + \frac{1}{2}(C - m(m+1))\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\ &= C\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar^2(-m^2 + m - m^2 - m + 2m^2) \\ &= C\hbar^2 = m_1(m_1 + 1)\hbar^2. \end{aligned}$$

Oznaczmy  $m_1 \equiv j$ , wówczas  $f(j) = j(j+1)$  i równania własne momentu pędu przyjmują postać

$$\vec{J}^2 |jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

$$\begin{aligned} f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}(C - (m-1)m)\hbar^2 + \frac{1}{2}(C - m(m+1))\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\ &= C\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar^2(-m^2 + m - m^2 - m + 2m^2) \\ &= C\hbar^2 = m_1(m_1 + 1)\hbar^2. \end{aligned}$$

Oznaczmy  $m_1 \equiv j$ , wówczas  $f(j) = j(j+1)$  i równania własne momentu pędu przyjmują postać

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 |jm\rangle &= j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \\ J_3 |jm\rangle & \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

$$\begin{aligned} f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}(C - (m-1)m)\hbar^2 + \frac{1}{2}(C - m(m+1))\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\ &= C\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar^2(-m^2 + m - m^2 - m + 2m^2) \\ &= C\hbar^2 = m_1(m_1 + 1)\hbar^2. \end{aligned}$$

Oznaczmy  $m_1 \equiv j$ , wówczas  $f(j) = j(j+1)$  i równania własne momentu pędu przyjmują postać

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 |jm\rangle &= j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \\ J_3 |jm\rangle &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}(C - (m-1)m)\hbar^2 + \frac{1}{2}(C - m(m+1))\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\ &= C\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar^2(-m^2 + m - m^2 - m + 2m^2) \\ &= C\hbar^2 = m_1(m_1 + 1)\hbar^2. \end{aligned}$$

Oznaczmy  $m_1 \equiv j$ , wówczas  $f(j) = j(j+1)$  i równania własne momentu pędu przyjmują postać

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 |jm\rangle &= j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \\ J_3 |jm\rangle &= m\hbar |jm\rangle, \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

$$\begin{aligned} f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}(C - (m-1)m)\hbar^2 + \frac{1}{2}(C - m(m+1))\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\ &= C\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar^2(-m^2 + m - m^2 - m + 2m^2) \\ &= C\hbar^2 = m_1(m_1 + 1)\hbar^2. \end{aligned}$$

Oznaczmy  $m_1 \equiv j$ , wówczas  $f(j) = j(j+1)$  i równania własne momentu pędu przyjmują postać

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 |jm\rangle &= j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \\ J_3 |jm\rangle &= m\hbar |jm\rangle, \quad m = -j, -j+1, \dots, j-1, j. \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

$$\begin{aligned} f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}(C - (m-1)m)\hbar^2 + \frac{1}{2}(C - m(m+1))\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\ &= C\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar^2(-m^2 + m - m^2 - m + 2m^2) \\ &= C\hbar^2 = m_1(m_1 + 1)\hbar^2. \end{aligned}$$

Oznaczmy  $m_1 \equiv j$ , wówczas  $f(j) = j(j+1)$  i równania własne momentu pędu przyjmują postać

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 |jm\rangle &= j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \\ J_3 |jm\rangle &= m\hbar |jm\rangle, \quad m = -j, -j+1, \dots, j-1, j. \end{aligned}$$

Widzimy, że dla każdej wartości  $j$  istnieje  $2j+1$  różnych wartości  $m$ .



# Stany własne momentu pędu

$$\begin{aligned} f(j)\hbar^2 &= \frac{1}{2}(C - (m-1)m)\hbar^2 + \frac{1}{2}(C - m(m+1))\hbar^2 + m^2\hbar^2 \\ &= C\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar^2(-m^2 + m - m^2 - m + 2m^2) \\ &= C\hbar^2 = m_1(m_1 + 1)\hbar^2. \end{aligned}$$

Oznaczmy  $m_1 \equiv j$ , wówczas  $f(j) = j(j+1)$  i równania własne momentu pędu przyjmują postać

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 |jm\rangle &= j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \\ J_3 |jm\rangle &= m\hbar |jm\rangle, \quad m = -j, -j+1, \dots, j-1, j. \end{aligned}$$

Widzimy, że dla każdej wartości  $j$  istnieje  $2j+1$  różnych wartości  $m$ .

Wróćmy do elementów macierzowych operatorów  $J_{\pm}$ .

$$\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle = \lambda_m \hbar, \quad \langle jm | J_- | jm + 1 \rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

Przy czym

$$|\lambda_m|^2 = C - m(m + 1) =$$

Wróćmy do elementów macierzowych operatorów  $J_{\pm}$ .

$$\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle = \lambda_m \hbar, \quad \langle jm | J_- | jm + 1 \rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

Przy czym

$$|\lambda_m|^2 = C - m(m + 1) = j(j + 1) - m(m + 1)$$

Wróćmy do elementów macierzowych operatorów  $J_{\pm}$ .

$$\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle = \lambda_m \hbar, \quad \langle jm | J_- | jm + 1 \rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

Przy czym

$$\begin{aligned} |\lambda_m|^2 &= C - m(m + 1) = j(j + 1) - m(m + 1) \\ &= \end{aligned}$$

Wróćmy do elementów macierzowych operatorów  $J_{\pm}$ .

$$\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle = \lambda_m \hbar, \quad \langle jm | J_- | jm + 1 \rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

Przy czym

$$\begin{aligned} |\lambda_m|^2 &= C - m(m + 1) = j(j + 1) - m(m + 1) \\ &= j^2 + j - m^2 - m \end{aligned}$$

Wróćmy do elementów macierzowych operatorów  $J_{\pm}$ .

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar, \quad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

Przy czym

$$\begin{aligned} |\lambda_m|^2 &= C - m(m+1) = j(j+1) - m(m+1) \\ &= j^2 + j - m^2 - m + jm - jm = \end{aligned}$$

Wróćmy do elementów macierzowych operatorów  $J_{\pm}$ .

$$\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle = \lambda_m \hbar, \quad \langle jm | J_- | jm + 1 \rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

Przy czym

$$\begin{aligned} |\lambda_m|^2 &= C - m(m + 1) = j(j + 1) - m(m + 1) \\ &= j^2 + j - m^2 - m + jm - jm = j(j + m + 1) - m(j + m + 1) \end{aligned}$$

Wróćmy do elementów macierzowych operatorów  $J_{\pm}$ .

$$\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle = \lambda_m \hbar, \quad \langle jm | J_- | jm + 1 \rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

Przy czym

$$\begin{aligned} |\lambda_m|^2 &= C - m(m + 1) = j(j + 1) - m(m + 1) \\ &= j^2 + j - m^2 - m + jm - jm = j(j + m + 1) - m(j + m + 1) \\ &= \end{aligned}$$



Wróćmy do elementów macierzowych operatorów  $J_{\pm}$ .

$$\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle = \lambda_m \hbar, \quad \langle jm | J_- | jm + 1 \rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

Przy czym

$$\begin{aligned} |\lambda_m|^2 &= C - m(m + 1) = j(j + 1) - m(m + 1) \\ &= j^2 + j - m^2 - m + jm - jm = j(j + m + 1) - m(j + m + 1) \\ &= (j - m)(j + m + 1). \end{aligned}$$

Wróćmy do elementów macierzowych operatorów  $J_{\pm}$ .

$$\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle = \lambda_m \hbar, \quad \langle jm | J_- | jm + 1 \rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

Przy czym

$$\begin{aligned} |\lambda_m|^2 &= C - m(m + 1) = j(j + 1) - m(m + 1) \\ &= j^2 + j - m^2 - m + jm - jm = j(j + m + 1) - m(j + m + 1) \\ &= (j - m)(j + m + 1). \end{aligned}$$

Możemy wybrać fazę zespoloną równą 1,

Wróćmy do elementów macierzowych operatorów  $J_{\pm}$ .

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar, \quad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

Przy czym

$$\begin{aligned} |\lambda_m|^2 &= C - m(m+1) = j(j+1) - m(m+1) \\ &= j^2 + j - m^2 - m + jm - jm = j(j+m+1) - m(j+m+1) \\ &= (j-m)(j+m+1). \end{aligned}$$

Możemy wybrać fazę zespoloną równą 1, wtedy

$$\lambda_m = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} = [(j-m)(j+m+1)]^{\frac{1}{2}}.$$

Wróćmy do elementów macierzowych operatorów  $J_{\pm}$ .

$$\langle jm+1|J_+|jm\rangle = \lambda_m \hbar, \quad \langle jm|J_-|jm+1\rangle = \lambda_m^* \hbar,$$

Przy czym

$$\begin{aligned} |\lambda_m|^2 &= C - m(m+1) = j(j+1) - m(m+1) \\ &= j^2 + j - m^2 - m + jm - jm = j(j+m+1) - m(j+m+1) \\ &= (j-m)(j+m+1). \end{aligned}$$

Możemy wybrać fazę zespoloną równą 1, wtedy

$$\lambda_m = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} = [(j-m)(j+m+1)]^{\frac{1}{2}}.$$

Elementy macierzowe operatorów  $J_{\pm}$  mają postać

$$\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle = \lambda_m \hbar = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar$$

Elementy macierzowe operatorów  $J_{\pm}$  mają postać

$$\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle = \lambda_m \hbar = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar$$
$$\langle jm - 1 | J_- | jm \rangle$$

Elementy macierzowe operatorów  $J_{\pm}$  mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle &= \lambda_m \hbar = [j(j + 1) - m(m + 1)]^{\frac{1}{2}} \hbar \\ \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle &= \end{aligned}$$

Elementy macierzowe operatorów  $J_{\pm}$  mają postać

$$\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle = \lambda_m \hbar = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar$$

$$\langle jm - 1 | J_- | jm \rangle = \lambda_{m-1}^* \hbar =$$



Elementy macierzowe operatorów  $J_{\pm}$  mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle &= \lambda_m \hbar = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar \\ \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle &= \lambda_{m-1}^* \hbar = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar,\end{aligned}$$

Elementy macierzowe operatorów  $J_{\pm}$  mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle &= \lambda_m \hbar = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar \\ \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle &= \lambda_{m-1}^* \hbar = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar,\end{aligned}$$

co inaczej możemy zapisać

$$J_{\pm} | jm \rangle = [j(j+1) - m(m \pm 1)]^{\frac{1}{2}} \hbar | jm \pm 1 \rangle.$$

Elementy macierzowe operatorów  $J_{\pm}$  mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle &= \lambda_m \hbar = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar \\ \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle &= \lambda_{m-1}^* \hbar = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar,\end{aligned}$$

co inaczej możemy zapisać

$$J_{\pm} | jm \rangle = [j(j+1) - m(m \pm 1)]^{\frac{1}{2}} \hbar | jm \pm 1 \rangle.$$

Uwzględniając, że

Elementy macierzowe operatorów  $J_{\pm}$  mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle &= \lambda_m \hbar = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar \\ \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle &= \lambda_{m-1}^* \hbar = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar,\end{aligned}$$

co inaczej możemy zapisać

$$J_{\pm} | jm \rangle = [j(j+1) - m(m \pm 1)]^{\frac{1}{2}} \hbar | jm \pm 1 \rangle.$$

Uwzględniając, że  $J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$

Elementy macierzowe operatorów  $J_{\pm}$  mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle &= \lambda_m \hbar = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar \\ \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle &= \lambda_{m-1}^* \hbar = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar,\end{aligned}$$

co inaczej możemy zapisać

$$J_{\pm} | jm \rangle = [j(j+1) - m(m \pm 1)]^{\frac{1}{2}} \hbar | jm \pm 1 \rangle.$$

Uwzględniając, że  $J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$  i  $J_2 = -\frac{i}{2}(J_+ - J_-)$

Elementy macierzowe operatorów  $J_{\pm}$  mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle &= \lambda_m \hbar = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar \\ \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle &= \lambda_{m-1}^* \hbar = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar,\end{aligned}$$

co inaczej możemy zapisać

$$J_{\pm} | jm \rangle = [j(j+1) - m(m \pm 1)]^{\frac{1}{2}} \hbar | jm \pm 1 \rangle.$$

Uwzględniając, że  $J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$  i  $J_2 = -\frac{i}{2}(J_+ - J_-)$  oraz

$$J_3 | jm \rangle = m \hbar | jm \rangle$$

Elementy macierzowe operatorów  $J_{\pm}$  mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle &= \lambda_m \hbar = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar \\ \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle &= \lambda_{m-1}^* \hbar = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar,\end{aligned}$$

co inaczej możemy zapisać

$$J_{\pm} | jm \rangle = [j(j+1) - m(m \pm 1)]^{\frac{1}{2}} \hbar | jm \pm 1 \rangle.$$

Uwzględniając, że  $J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$  i  $J_2 = -\frac{i}{2}(J_+ - J_-)$  oraz

$$J_3 | jm \rangle = m \hbar | jm \rangle$$

możemy znaleźć reprezentacje macierzowe operatorów  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  i  $\vec{J}^2$  dla poszczególnych wartości  $j$ .

Elementy macierzowe operatorów  $J_{\pm}$  mają postać

$$\begin{aligned}\langle jm + 1 | J_+ | jm \rangle &= \lambda_m \hbar = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar \\ \langle jm - 1 | J_- | jm \rangle &= \lambda_{m-1}^* \hbar = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar,\end{aligned}$$

co inaczej możemy zapisać

$$J_{\pm} | jm \rangle = [j(j+1) - m(m \pm 1)]^{\frac{1}{2}} \hbar | jm \pm 1 \rangle.$$

Uwzględniając, że  $J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$  i  $J_2 = -\frac{i}{2}(J_+ - J_-)$  oraz

$$J_3 | jm \rangle = m \hbar | jm \rangle$$

możemy znaleźć reprezentacje macierzowe operatorów  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  i  $\vec{J}^2$  dla poszczególnych wartości  $j$ .



Jeżeli  $j = 0 \Rightarrow m = 0$

Jeżeli  $j = 0 \Rightarrow m = 0$  i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).

Jeżeli  $j = 0 \Rightarrow m = 0$  i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).

Jeżeli  $j = \frac{1}{2}$

Jeżeli  $j = 0 \Rightarrow m = 0$  i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).

Jeżeli  $j = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

# Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Jeżeli  $j = 0 \Rightarrow m = 0$  i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).

Jeżeli  $j = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  i macierz reprezentująca operator  $J_3$  ma postać

# Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Jeżeli  $j = 0 \Rightarrow m = 0$  i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).

Jeżeli  $j = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  i macierz reprezentująca operator  $J_3$  ma postać

$$J_3 = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

# Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Jeżeli  $j = 0 \Rightarrow m = 0$  i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).

Jeżeli  $j = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  i macierz reprezentująca operator  $J_3$  ma postać

$$J_3 = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

=

# Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Jeżeli  $j = 0 \Rightarrow m = 0$  i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).

Jeżeli  $j = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  i macierz reprezentująca operator  $J_3$  ma postać

$$\begin{aligned} J_3 &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \\ & \end{pmatrix} \end{aligned}$$



# Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Jeżeli  $j = 0 \Rightarrow m = 0$  i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).

Jeżeli  $j = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  i macierz reprezentująca operator  $J_3$  ma postać

$$\begin{aligned} J_3 &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & -\frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Jeżeli  $j = 0 \Rightarrow m = 0$  i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).

Jeżeli  $j = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  i macierz reprezentująca operator  $J_3$  ma postać

$$\begin{aligned} J_3 &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & -\frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Jeżeli  $j = 0 \Rightarrow m = 0$  i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).

Jeżeli  $j = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  i macierz reprezentująca operator  $J_3$  ma postać

$$\begin{aligned} J_3 &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & -\frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & -\frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Jeżeli  $j = 0 \Rightarrow m = 0$  i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).

Jeżeli  $j = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  i macierz reprezentująca operator  $J_3$  ma postać

$$\begin{aligned} J_3 &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & -\frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & -\frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Jeżeli  $j = 0 \Rightarrow m = 0$  i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).

Jeżeli  $j = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  i macierz reprezentująca operator  $J_3$  ma postać

$$\begin{aligned} J_3 &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & -\frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & -\frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Jeżeli  $j = 0 \Rightarrow m = 0$  i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).

Jeżeli  $j = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  i macierz reprezentująca operator  $J_3$  ma postać

$$\begin{aligned} J_3 &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & -\frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & -\frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Jeżeli  $j = 0 \Rightarrow m = 0$  i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).

Jeżeli  $j = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  i macierz reprezentująca operator  $J_3$  ma postać

$$\begin{aligned} J_3 &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & -\frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & -\frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Jeżeli  $j = 0 \Rightarrow m = 0$  i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).

Jeżeli  $j = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  i macierz reprezentująca operator  $J_3$  ma postać

$$\begin{aligned} J_3 &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & -\frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & -\frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$



# Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Jeżeli  $j = 0 \Rightarrow m = 0$  i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).

Jeżeli  $j = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  i macierz reprezentująca operator  $J_3$  ma postać

$$\begin{aligned} J_3 &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & -\frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & -\frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równania własnego operatora  $J_3$  i z ortogonalności stanów własnych momentu pędu  $|jm\rangle$ .

# Reprezentacje macierzowe momentu pędu

Jeżeli  $j = 0 \Rightarrow m = 0$  i wszystkie te operatory są reprezentowane przez macierze zerowe (0).

Jeżeli  $j = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  i macierz reprezentująca operator  $J_3$  ma postać

$$\begin{aligned} J_3 &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_3 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & -\frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & -\frac{\hbar}{2} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równania własnego operatora  $J_3$  i z ortogonalności stanów własnych momentu pędu  $|jm\rangle$ .

Korzystając z relacji

$$J_+ |jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_+$

$$J_+ = \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ |jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_+$

$$J_+ = \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix}$$

=

Korzystając z relacji

$$J_+ |jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_+$

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ |jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_+$

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \\ & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ |jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_+$

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ |jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_+$

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Korzystając z relacji

$$J_+ |jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_+$

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ |jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_+$

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ |jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_+$

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ |jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_+$

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ |jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_+$

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ |jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_+$

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ |jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_+$

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ |jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_+$

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Korzystając z relacji

$$J_+ |jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_+$

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ |jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_+$

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Korzystając z relacji

$$J_+ |jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm+1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_+$

$$\begin{aligned} J_+ &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

a korzystając z relacji

$$J_- |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_-$

$$J_- = \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix}$$

a korzystając z relacji

$$J_- |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_-$

$$J_- = \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix}$$

=

a korzystając z relacji

$$J_- |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_-$

$$J_- = \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix}$$
$$= \hbar \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

a korzystając z relacji

$$J_- |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_-$

$$\begin{aligned} J_- &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a korzystając z relacji

$$J_- |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_-$

$$\begin{aligned} J_- &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



a korzystając z relacji

$$J_- |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_-$

$$\begin{aligned} J_- &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a korzystając z relacji

$$J_- |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_-$

$$\begin{aligned} J_- &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a korzystając z relacji

$$J_- |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_-$

$$\begin{aligned} J_- &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a korzystając z relacji

$$J_- |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_-$

$$\begin{aligned} J_- &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

a korzystając z relacji

$$J_- |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_-$

$$\begin{aligned} J_- &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a korzystając z relacji

$$J_- |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_-$

$$\begin{aligned} J_- &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a korzystając z relacji

$$J_- |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_-$

$$\begin{aligned} J_- &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a korzystając z relacji

$$J_- |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_-$

$$\begin{aligned} J_- &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



a korzystając z relacji

$$J_- |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_-$

$$\begin{aligned} J_- &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a korzystając z relacji

$$J_- |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_-$

$$\begin{aligned} J_- &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a korzystając z relacji

$$J_- |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_-$

$$\begin{aligned} J_- &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a korzystając z relacji

$$J_- |jm\rangle = [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar |jm-1\rangle$$

znajdujemy macierz reprezentującą operator  $J_-$

$$\begin{aligned} J_- &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle & \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów  $J_1$  i  $J_2$ .

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) =$$

Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów  $J_1$  i  $J_2$ .

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów  $J_1$  i  $J_2$ .

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

=

Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów  $J_1$  i  $J_2$ .

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$



Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów  $J_1$  i  $J_2$ .

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$J_2$

Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów  $J_1$  i  $J_2$ .

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$J_2 =$$

Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów  $J_1$  i  $J_2$ .

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_2 = -\frac{i}{2}(J_+ - J_-) =$$

Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów  $J_1$  i  $J_2$ .

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$J_2 = -\frac{i}{2}(J_+ - J_-) = -\frac{i}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów  $J_1$  i  $J_2$ .

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_2 = -\frac{i}{2}(J_+ - J_-) = -\frac{i}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

=

Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów  $J_1$  i  $J_2$ .

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= -\frac{i}{2}(J_+ - J_-) = -\frac{i}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Teraz łatwo znajdziemy macierze operatorów  $J_1$  i  $J_2$ .

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= -\frac{i}{2}(J_+ - J_-) = -\frac{i}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podsumujmy wyniki dla  $j = \frac{1}{2}$ .

$$J_1 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$



Podsumujmy wyniki dla  $j = \frac{1}{2}$ .

$$J_1 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

Podsumujmy wyniki dla  $j = \frac{1}{2}$ .

$$J_1 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Podsumujmy wyniki dla  $j = \frac{1}{2}$ .

$$J_1 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

a więc

$$\vec{J} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma},$$

Podsumujmy wyniki dla  $j = \frac{1}{2}$ .

$$J_1 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

a więc

$$\vec{J} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma},$$

gdzie  $\vec{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$ ,

Podsumujmy wyniki dla  $j = \frac{1}{2}$ .

$$J_1 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

a więc

$$\vec{J} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma},$$

gdzie  $\vec{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$ , a

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

są macierzami Pauliego.

Podsumujmy wyniki dla  $j = \frac{1}{2}$ .

$$J_1 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

a więc

$$\vec{J} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma},$$

gdzie  $\vec{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$ , a

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

są macierzami Pauliego.

Znajdźmy jeszcze postać macierzową operatora  $\vec{J}^2$ .

$$\vec{J}^2 =$$

Znajdźmy jeszcze postać macierzową operatora  $\vec{J}^2$ .

$$\vec{J}^2 = \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix}$$



Znajdźmy jeszcze postać macierzową operatora  $\vec{J}^2$ .

$$\vec{J}^2 = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \vec{J}^2 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \vec{J}^2 \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \vec{J}^2 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \vec{J}^2 \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix}$$

=

Znajdźmy jeszcze postać macierzową operatora  $\vec{J}^2$ .

$$\begin{aligned}\vec{J}^2 &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

Znajdźmy jeszcze postać macierzową operatora  $\vec{J}^2$ .

$$\begin{aligned}\vec{J}^2 &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równania własnego dla operatora kwadratu momentu pędu  $\vec{J}^2 |jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle$  i z ortogonalności stanów własnych  $|jm\rangle$ .

Znajdźmy jeszcze postać macierzową operatora  $\vec{J}^2$ .

$$\begin{aligned}\vec{J}^2 &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równania własnego dla operatora kwadratu momentu pędu  $\vec{J}^2 |jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle$  i z ortogonalności stanów własnych  $|jm\rangle$ .

**Zadanie.** Znaleźć postać macierzy reprezentujących operatory  $J_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  i  $\vec{J}^2$  dla  $j = 1$  i  $j = \frac{3}{2}$ .

Znajdźmy jeszcze postać macierzową operatora  $\vec{J}^2$ .

$$\begin{aligned}\vec{J}^2 &= \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \vec{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równania własnego dla operatora kwadratu momentu pędu  $\vec{J}^2 |jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle$  i z ortogonalności stanów własnych  $|jm\rangle$ .

**Zadanie.** Znaleźć postać macierzy reprezentujących operatory  $J_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  i  $\vec{J}^2$  dla  $j = 1$  i  $j = \frac{3}{2}$ .

Zauważmy, że w powyższych rozważaniach dla operatora całkowitego momentu pędu korzystaliśmy jedynie z jego hermitowskości oraz z relacji komutacyjnych.

$$J_i^\dagger = J_i, \quad [J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k.$$

Zauważmy, że w powyższych rozważaniach dla operatora całkowitego momentu pędu korzystaliśmy jedynie z jego hermitowskości oraz z relacji komutacyjnych.

$$J_i^\dagger = J_i, \quad [J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k.$$

Operator orbitalnego momentu pędu  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  spełnia dokładnie takie same związki

Zauważmy, że w powyższych rozważaniach dla operatora całkowitego momentu pędu korzystaliśmy jedynie z jego hermitowskości oraz z relacji komutacyjnych.

$$J_i^\dagger = J_i, \quad [J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k.$$

Operator orbitalnego momentu pędu  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  spełnia dokładnie takie same związki

$$L_i^\dagger = L_i, \quad [L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k.$$



Zauważmy, że w powyższych rozważaniach dla operatora całkowitego momentu pędu korzystaliśmy jedynie z jego hermitowskości oraz z relacji komutacyjnych.

$$J_i^\dagger = J_i, \quad [J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k.$$

Operator orbitalnego momentu pędu  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  spełnia dokładnie takie same związki

$$L_i^\dagger = L_i, \quad [L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k.$$

Przypomnijmy, że funkcjami własnymi operatorów  $\vec{L}^2$  i  $L_3$  są harmoniki sferyczne

$$\begin{aligned}\vec{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) &= l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ L_3 Y_{lm}(\theta, \varphi) &= m\hbar Y_{lm}(\theta, \varphi),\end{aligned}$$

gdzie  $l = 0, 1, 2, \dots$ , a  $-l \leq m \leq l$ .

Przypomnijmy, że funkcjami własnymi operatorów  $\vec{L}^2$  i  $L_3$  są harmoniki sferyczne

$$\begin{aligned}\vec{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) &= l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ L_3 Y_{lm}(\theta, \varphi) &= m\hbar Y_{lm}(\theta, \varphi),\end{aligned}$$

gdzie  $l = 0, 1, 2, \dots$ , a  $-l \leq m \leq l$ .

Stosując notację Diraca możemy zapisać

$$\begin{aligned}\vec{L}^2 |lm\rangle &= l(l+1)\hbar^2 |lm\rangle, \\ L_3 |lm\rangle &= m\hbar |lm\rangle.\end{aligned}$$

Przypomnijmy, że funkcjami własnymi operatorów  $\vec{L}^2$  i  $L_3$  są harmoniki sferyczne

$$\begin{aligned}\vec{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) &= l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ L_3 Y_{lm}(\theta, \varphi) &= m\hbar Y_{lm}(\theta, \varphi),\end{aligned}$$

gdzie  $l = 0, 1, 2, \dots$ , a  $-l \leq m \leq l$ .

Stosując notację Diraca możemy zapisać

$$\begin{aligned}\vec{L}^2 |lm\rangle &= l(l+1)\hbar^2 |lm\rangle, \\ L_3 |lm\rangle &= m\hbar |lm\rangle.\end{aligned}$$

Orbitalny moment pędu może przyjmować wartości całkowite (w jednostkach  $\hbar$ ) nieujemne, natomiast **spinowy moment pędu**,

Orbitalny moment pędu może przyjmować wartości całkowite (w jednostkach  $\hbar$ ) nieujemne, natomiast **spinowy moment pędu**, który również spełnia relacje

$$S_i^\dagger = S_i, \quad [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$$

Orbitalny moment pędu może przyjmować wartości całkowite (w jednostkach  $\hbar$ ) nieujemne, natomiast **spinowy moment pędu**, który również spełnia relacje

$$S_i^\dagger = S_i, \quad [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$$

może przyjmować wartości całkowite lub połówkowe.

Orbitalny moment pędu może przyjmować wartości całkowite (w jednostkach  $\hbar$ ) nieujemne, natomiast **spinowy moment pędu**, który również spełnia relacje

$$S_i^\dagger = S_i, \quad [S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k$$

może przyjmować wartości całkowite lub połówkowe.

Np. elektrony, neutrino, protony, neutrony mają spin  $\frac{1}{2}$ ,



Orbitalny moment pędu może przyjmować wartości całkowite (w jednostkach  $\hbar$ ) nieujemne, natomiast **spinowy moment pędu**, który również spełnia relacje

$$S_i^\dagger = S_i, \quad [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$$

może przyjmować wartości całkowite lub połówkowe.

Np. elektrony, neutrina, protony, neutrony mają spin  $\frac{1}{2}$ , foton i bozony elektrosłabe  $Z^0$  i  $W^\pm$  mają spin 1,

Orbitalny moment pędu może przyjmować wartości całkowite (w jednostkach  $\hbar$ ) nieujemne, natomiast **spinowy moment pędu**, który również spełnia relacje

$$S_i^\dagger = S_i, \quad [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$$

może przyjmować wartości całkowite lub połówkowe.

Np. elektrony, neutrina, protony, neutrony mają spin  $\frac{1}{2}$ , foton i bozony elektrosłabe  $Z^0$  i  $W^\pm$  mają spin 1, a mezony  $\pi$  i bozon Higgosa – spin 0.

Orbitalny moment pędu może przyjmować wartości całkowite (w jednostkach  $\hbar$ ) nieujemne, natomiast **spinowy moment pędu**, który również spełnia relacje

$$S_i^\dagger = S_i, \quad [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$$

**może przyjmować wartości całkowite lub połówkowe.**

Np. elektrony, neutrina, protony, neutrony mają spin  $\frac{1}{2}$ , foton i bozony elektrosłabe  $Z^0$  i  $W^\pm$  mają spin 1, a mezony  $\pi$  i bozon Higgsa – spin 0.

Zauważmy, że stany kwantowe o spinie  $\frac{1}{2}$  mają ciekawą własność. Mianowicie, nie przechodzą w siebie przy obrocie o kąt  $2\pi$ , ale dopiero przy obrocie o kąt  $4\pi$ .

Zauważmy, że stany kwantowe o spinie  $\frac{1}{2}$  mają ciekawą własność. Mianowicie, **nie przechodzą w siebie przy obrocie o kąt  $2\pi$ , ale dopiero przy obrocie o kąt  $4\pi$ .**

Rozważmy np. obrót o kąt  $2\pi$  względem osi  $Oz$ , dla którego unitarny operator obrotu ma postać

Zauważmy, że stany kwantowe o spinie  $\frac{1}{2}$  mają ciekawą własność. Mianowicie, **nie przechodzą w siebie przy obrocie o kąt  $2\pi$ , ale dopiero przy obrocie o kąt  $4\pi$ .**

Rozważmy np. obrót o kąt  $2\pi$  względem osi  $Oz$ , dla którego unitarny operator obrotu ma postać

$$U_R(2\pi) = e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi J_z},$$

Zauważmy, że stany kwantowe o spinie  $\frac{1}{2}$  mają ciekawą własność. Mianowicie, **nie przechodzą w siebie przy obrocie o kąt  $2\pi$ , ale dopiero przy obrocie o kąt  $4\pi$ .**

Rozważmy np. obrót o kąt  $2\pi$  względem osi  $Oz$ , dla którego unitarny operator obrotu ma postać

$$U_R(2\pi) = e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi J_z},$$

# Stany kwantowe o spinie połówkowym

a jego działanie na stan  $|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$  daje

$$U_R(2\pi) \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle =$$



# Stany kwantowe o spinie połówkowym

a jego działanie na stan  $|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$  daje

$$U_R(2\pi) \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi J_z} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle =$$

# Stany kwantowe o spinie połówkowym

a jego działanie na stan  $|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$  daje

$$U_R(2\pi) \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi J_z} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi (\pm\frac{1}{2}\hbar)} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle$$

# Stany kwantowe o spinie połówkowym

a jego działanie na stan  $|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$  daje

$$U_R(2\pi) \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi J_z} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi (\pm\frac{1}{2}\hbar)} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle$$
$$=$$

a jego działanie na stan  $|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$  daje

$$\begin{aligned}U_R(2\pi) \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi J_z} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi (\pm\frac{1}{2}\hbar)} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle \\ &= e^{\mp i\pi} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle\end{aligned}$$

a jego działanie na stan  $|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$  daje

$$\begin{aligned}U_R(2\pi) \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi J_z} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi (\pm\frac{1}{2}\hbar)} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle \\&= e^{\mp i\pi} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle \\&= \end{aligned}$$

a jego działanie na stan  $|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$  daje

$$\begin{aligned}U_R(2\pi) \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi J_z} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi (\pm\frac{1}{2}\hbar)} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle \\&= e^{\mp i\pi} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle \\&= (\cos(\mp\pi) + i \sin(\mp\pi)) \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle\end{aligned}$$

a jego działanie na stan  $|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$  daje

$$\begin{aligned}U_R(2\pi) \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi J_z} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi (\pm\frac{1}{2}\hbar)} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle \\&= e^{\mp i\pi} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle \\&= (\cos(\mp\pi) + i \sin(\mp\pi)) \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle \\&= \end{aligned}$$

a jego działanie na stan  $|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$  daje

$$\begin{aligned}U_R(2\pi) \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi J_z} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi (\pm\frac{1}{2}\hbar)} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle \\&= e^{\mp i\pi} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle \\&= (\cos(\mp\pi) + i \sin(\mp\pi)) \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle \\&= - \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle.\end{aligned}$$



a jego działanie na stan  $|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$  daje

$$\begin{aligned}U_R(2\pi) \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi J_z} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi (\pm\frac{1}{2}\hbar)} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle \\&= e^{\mp i\pi} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle \\&= (\cos(\mp\pi) + i \sin(\mp\pi)) \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle \\&= - \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle.\end{aligned}$$

Dopiero przy obrocie o kąt  $4\pi$  mielibyśmy

$$U_R(4\pi) \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle.$$

a jego działanie na stan  $|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$  daje

$$\begin{aligned}U_R(2\pi) \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi J_z} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi (\pm\frac{1}{2}\hbar)} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle \\&= e^{\mp i\pi} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle \\&= (\cos(\mp\pi) + i \sin(\mp\pi)) \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle \\&= - \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle.\end{aligned}$$

Dopiero przy obrocie o kąt  $4\pi$  mielibyśmy

$$U_R(4\pi) \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle.$$

Oczywiście stany kwantowe dla spinu całkowitego, dla którego wartości własne operatora  $S_3$  są całkowitymi wielokrotnościami  $\hbar$ , przy obrocie o kąt  $2\pi$  przejdą w siebie.

W mechanice kwantowej często pojawia się potrzeba złożenia momentów pędu poszczególnych części układu, np. orbitalnych momentów pędu dwóch elektronów w atomie,

W mechanice kwantowej często pojawia się potrzeba złożenia momentów pędu poszczególnych części układu, np. orbitalnych momentów pędu dwóch elektronów w atomie, albo orbitalnego i spinowego momentu pędu tego samego elektronu.

W mechanice kwantowej często pojawia się potrzeba złożenia momentów pędu poszczególnych części układu, np. orbitalnych momentów pędu dwóch elektronów w atomie, albo orbitalnego i spinowego momentu pędu tego samego elektronu.

# Definicja operatorów momentu pędu

Rozważmy dwa operatory momentu pędu  $\vec{J}^{(1)}$  i  $\vec{J}^{(2)}$ , które działają w dwóch różnych przestrzeniach Hilberta i dlatego wzajemnie komutują.

W takim razie zakładamy, że

$$[J_i^{(1)}, J_j^{(2)}] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3$$

# Definicja operatorów momentu pędu

Rozważmy dwa operatory momentu pędu  $\vec{J}^{(1)}$  i  $\vec{J}^{(2)}$ , które działają w dwóch różnych przestrzeniach Hilberta i dlatego wzajemnie komutują.

W takim razie zakładamy, że

$$[J_i^{(1)}, J_j^{(2)}] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3$$

oraz

$$[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k^{(1)}, \quad [J_i^{(2)}, J_j^{(2)}] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k^{(2)}.$$



# Definicja operatorów momentu pędu

Rozważmy dwa operatory momentu pędu  $\vec{J}^{(1)}$  i  $\vec{J}^{(2)}$ , które działają w dwóch różnych przestrzeniach Hilberta i dlatego wzajemnie komutują.

W takim razie zakładamy, że

$$[J_i^{(1)}, J_j^{(2)}] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3$$

oraz

$$[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k^{(1)}, \quad [J_i^{(2)}, J_j^{(2)}] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k^{(2)}.$$

Każdy z operatorów jest oczywiście hermitowski

$$J_i^{(1)\dagger} = J_i^{(1)} \quad \text{i} \quad J_i^{(2)\dagger} = J_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

# Definicja operatorów momentu pędu

Rozważmy dwa operatory momentu pędu  $\vec{J}^{(1)}$  i  $\vec{J}^{(2)}$ , które działają w dwóch różnych przestrzeniach Hilberta i dlatego wzajemnie komutują.

W takim razie zakładamy, że

$$[J_i^{(1)}, J_j^{(2)}] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3$$

oraz

$$[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k^{(1)}, \quad [J_i^{(2)}, J_j^{(2)}] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k^{(2)}.$$

Każdy z operatorów jest oczywiście hermitowski

$$J_i^{(1)\dagger} = J_i^{(1)} \quad \text{i} \quad J_i^{(2)\dagger} = J_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

# Stany własne momentu pędu

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów  $\vec{J}^{(1)2}$  i  $J_3^{(1)}$  przez  $|j_1 m_1\rangle$  a stany własne operatorów  $\vec{J}^{(2)2}$  i  $J_3^{(2)}$  przez  $|j_2 m_2\rangle$ ,

# Stany własne momentu pędu

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów  $\vec{J}^{(1)2}$  i  $J_3^{(1)}$  przez  $|j_1 m_1\rangle$  a stany własne operatorów  $\vec{J}^{(2)2}$  i  $J_3^{(2)}$  przez  $|j_2 m_2\rangle$ , tzn.

$$\vec{J}^{(1)2} |j_1 m_1\rangle = j_1(j_1 + 1) \hbar^2 |j_1 m_1\rangle$$

# Stany własne momentu pędu

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów  $\vec{J}^{(1)2}$  i  $J_3^{(1)}$  przez  $|j_1 m_1\rangle$  a stany własne operatorów  $\vec{J}^{(2)2}$  i  $J_3^{(2)}$  przez  $|j_2 m_2\rangle$ , tzn.

$$\begin{aligned} \vec{J}^{(1)2} |j_1 m_1\rangle &= j_1(j_1 + 1) \hbar^2 |j_1 m_1\rangle \\ J_3^{(1)} |j_1 m_1\rangle & \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów  $\vec{J}^{(1)2}$  i  $J_3^{(1)}$  przez  $|j_1 m_1\rangle$  a stany własne operatorów  $\vec{J}^{(2)2}$  i  $J_3^{(2)}$  przez  $|j_2 m_2\rangle$ , tzn.

$$\begin{aligned}\vec{J}^{(1)2} |j_1 m_1\rangle &= j_1(j_1 + 1) \hbar^2 |j_1 m_1\rangle \\ J_3^{(1)} |j_1 m_1\rangle &= \end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów  $\vec{J}^{(1)2}$  i  $J_3^{(1)}$  przez  $|j_1 m_1\rangle$  a stany własne operatorów  $\vec{J}^{(2)2}$  i  $J_3^{(2)}$  przez  $|j_2 m_2\rangle$ , tzn.

$$\begin{aligned}\vec{J}^{(1)2} |j_1 m_1\rangle &= j_1(j_1 + 1) \hbar^2 |j_1 m_1\rangle \\ J_3^{(1)} |j_1 m_1\rangle &= m_1 \hbar |j_1 m_1\rangle\end{aligned}$$

# Stany własne momentu pędu

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów  $\vec{J}^{(1)2}$  i  $J_3^{(1)}$  przez  $|j_1 m_1\rangle$  a stany własne operatorów  $\vec{J}^{(2)2}$  i  $J_3^{(2)}$  przez  $|j_2 m_2\rangle$ , tzn.

$$\vec{J}^{(1)2} |j_1 m_1\rangle = j_1(j_1 + 1) \hbar^2 |j_1 m_1\rangle$$

$$J_3^{(1)} |j_1 m_1\rangle = m_1 \hbar |j_1 m_1\rangle$$

$$\vec{J}^{(2)2} |j_2 m_2\rangle$$



# Stany własne momentu pędu

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów  $\vec{J}^{(1)2}$  i  $J_3^{(1)}$  przez  $|j_1 m_1\rangle$  a stany własne operatorów  $\vec{J}^{(2)2}$  i  $J_3^{(2)}$  przez  $|j_2 m_2\rangle$ , tzn.

$$\vec{J}^{(1)2} |j_1 m_1\rangle = j_1(j_1 + 1) \hbar^2 |j_1 m_1\rangle$$

$$J_3^{(1)} |j_1 m_1\rangle = m_1 \hbar |j_1 m_1\rangle$$

$$\vec{J}^{(2)2} |j_2 m_2\rangle =$$

# Stany własne momentu pędu

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów  $\vec{J}^{(1)2}$  i  $J_3^{(1)}$  przez  $|j_1 m_1\rangle$  a stany własne operatorów  $\vec{J}^{(2)2}$  i  $J_3^{(2)}$  przez  $|j_2 m_2\rangle$ , tzn.

$$\vec{J}^{(1)2} |j_1 m_1\rangle = j_1 (j_1 + 1) \hbar^2 |j_1 m_1\rangle$$

$$J_3^{(1)} |j_1 m_1\rangle = m_1 \hbar |j_1 m_1\rangle$$

$$\vec{J}^{(2)2} |j_2 m_2\rangle = j_2 (j_2 + 1) \hbar^2 |j_2 m_2\rangle$$

# Stany własne momentu pędu

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów  $\vec{J}^{(1)2}$  i  $J_3^{(1)}$  przez  $|j_1 m_1\rangle$  a stany własne operatorów  $\vec{J}^{(2)2}$  i  $J_3^{(2)}$  przez  $|j_2 m_2\rangle$ , tzn.

$$\vec{J}^{(1)2} |j_1 m_1\rangle = j_1 (j_1 + 1) \hbar^2 |j_1 m_1\rangle$$

$$J_3^{(1)} |j_1 m_1\rangle = m_1 \hbar |j_1 m_1\rangle$$

$$\vec{J}^{(2)2} |j_2 m_2\rangle = j_2 (j_2 + 1) \hbar^2 |j_2 m_2\rangle$$

$$J_3^{(2)} |j_2 m_2\rangle$$

# Stany własne momentu pędu

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów  $\vec{J}^{(1)2}$  i  $J_3^{(1)}$  przez  $|j_1 m_1\rangle$  a stany własne operatorów  $\vec{J}^{(2)2}$  i  $J_3^{(2)}$  przez  $|j_2 m_2\rangle$ , tzn.

$$\vec{J}^{(1)2} |j_1 m_1\rangle = j_1(j_1 + 1) \hbar^2 |j_1 m_1\rangle$$

$$J_3^{(1)} |j_1 m_1\rangle = m_1 \hbar |j_1 m_1\rangle$$

$$\vec{J}^{(2)2} |j_2 m_2\rangle = j_2(j_2 + 1) \hbar^2 |j_2 m_2\rangle$$

$$J_3^{(2)} |j_2 m_2\rangle =$$

# Stany własne momentu pędu

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów  $\vec{J}^{(1)2}$  i  $J_3^{(1)}$  przez  $|j_1 m_1\rangle$  a stany własne operatorów  $\vec{J}^{(2)2}$  i  $J_3^{(2)}$  przez  $|j_2 m_2\rangle$ , tzn.

$$\vec{J}^{(1)2} |j_1 m_1\rangle = j_1 (j_1 + 1) \hbar^2 |j_1 m_1\rangle$$

$$J_3^{(1)} |j_1 m_1\rangle = m_1 \hbar |j_1 m_1\rangle$$

$$\vec{J}^{(2)2} |j_2 m_2\rangle = j_2 (j_2 + 1) \hbar^2 |j_2 m_2\rangle$$

$$J_3^{(2)} |j_2 m_2\rangle = m_2 \hbar |j_2 m_2\rangle .$$

# Stany własne momentu pędu

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów  $\vec{J}^{(1)2}$  i  $J_3^{(1)}$  przez  $|j_1 m_1\rangle$  a stany własne operatorów  $\vec{J}^{(2)2}$  i  $J_3^{(2)}$  przez  $|j_2 m_2\rangle$ , tzn.

$$\vec{J}^{(1)2} |j_1 m_1\rangle = j_1(j_1 + 1) \hbar^2 |j_1 m_1\rangle$$

$$J_3^{(1)} |j_1 m_1\rangle = m_1 \hbar |j_1 m_1\rangle$$

$$\vec{J}^{(2)2} |j_2 m_2\rangle = j_2(j_2 + 1) \hbar^2 |j_2 m_2\rangle$$

$$J_3^{(2)} |j_2 m_2\rangle = m_2 \hbar |j_2 m_2\rangle.$$

Zakładamy, że operator  $\vec{J}^{(1)}$  nie działa na stany  $|j_2 m_2\rangle$ ,

# Stany własne momentu pędu

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów  $\vec{J}^{(1)2}$  i  $J_3^{(1)}$  przez  $|j_1 m_1\rangle$  a stany własne operatorów  $\vec{J}^{(2)2}$  i  $J_3^{(2)}$  przez  $|j_2 m_2\rangle$ , tzn.

$$\vec{J}^{(1)2} |j_1 m_1\rangle = j_1(j_1 + 1) \hbar^2 |j_1 m_1\rangle$$

$$J_3^{(1)} |j_1 m_1\rangle = m_1 \hbar |j_1 m_1\rangle$$

$$\vec{J}^{(2)2} |j_2 m_2\rangle = j_2(j_2 + 1) \hbar^2 |j_2 m_2\rangle$$

$$J_3^{(2)} |j_2 m_2\rangle = m_2 \hbar |j_2 m_2\rangle.$$

Zakładamy, że operator  $\vec{J}^{(1)}$  nie działa na stany  $|j_2 m_2\rangle$ , a operator  $\vec{J}^{(2)}$  nie działa na stany  $|j_1 m_1\rangle$ ,

# Stany własne momentu pędu

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów  $\vec{J}^{(1)2}$  i  $J_3^{(1)}$  przez  $|j_1 m_1\rangle$  a stany własne operatorów  $\vec{J}^{(2)2}$  i  $J_3^{(2)}$  przez  $|j_2 m_2\rangle$ , tzn.

$$\vec{J}^{(1)2} |j_1 m_1\rangle = j_1 (j_1 + 1) \hbar^2 |j_1 m_1\rangle$$

$$J_3^{(1)} |j_1 m_1\rangle = m_1 \hbar |j_1 m_1\rangle$$

$$\vec{J}^{(2)2} |j_2 m_2\rangle = j_2 (j_2 + 1) \hbar^2 |j_2 m_2\rangle$$

$$J_3^{(2)} |j_2 m_2\rangle = m_2 \hbar |j_2 m_2\rangle.$$

Zakładamy, że operator  $\vec{J}^{(1)}$  nie działa na stany  $|j_2 m_2\rangle$ , a operator  $\vec{J}^{(2)}$  nie działa na stany  $|j_1 m_1\rangle$ , gdyż te stany rozpinają różne przestrzenie Hilberta.



# Stany własne momentu pędu

Oznaczmy ortonormalne stany własne operatorów  $\vec{J}^{(1)2}$  i  $J_3^{(1)}$  przez  $|j_1 m_1\rangle$  a stany własne operatorów  $\vec{J}^{(2)2}$  i  $J_3^{(2)}$  przez  $|j_2 m_2\rangle$ , tzn.

$$\vec{J}^{(1)2} |j_1 m_1\rangle = j_1(j_1 + 1) \hbar^2 |j_1 m_1\rangle$$

$$J_3^{(1)} |j_1 m_1\rangle = m_1 \hbar |j_1 m_1\rangle$$

$$\vec{J}^{(2)2} |j_2 m_2\rangle = j_2(j_2 + 1) \hbar^2 |j_2 m_2\rangle$$

$$J_3^{(2)} |j_2 m_2\rangle = m_2 \hbar |j_2 m_2\rangle.$$

Zakładamy, że operator  $\vec{J}^{(1)}$  nie działa na stany  $|j_2 m_2\rangle$ , a operator  $\vec{J}^{(2)}$  nie działa na stany  $|j_1 m_1\rangle$ , gdyż te stany rozpinają różne przestrzenie Hilberta.

# Całkowity moment pędu

Zdefiniujmy operator całkowitego momentu pędu

$$\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}.$$

Obliczmy komutator

$$[J_i, J_j] =$$

Zdefiniujmy operator całkowitego momentu pędu

$$\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}.$$

Obliczmy komutator

$$[J_i, J_j] = [J_i^{(1)} + J_i^{(2)}, J_j^{(1)} + J_j^{(2)}]$$

Zdefiniujmy operator całkowitego momentu pędu

$$\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= [J_i^{(1)} + J_i^{(2)}, J_j^{(1)} + J_j^{(2)}] \\ &= \end{aligned}$$

Zdefiniujmy operator całkowitego momentu pędu

$$\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= [J_i^{(1)} + J_i^{(2)}, J_j^{(1)} + J_j^{(2)}] \\ &= [J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] + [J_i^{(1)}, J_j^{(2)}] + [J_i^{(2)}, J_j^{(1)}] + [J_i^{(2)}, J_j^{(2)}] \end{aligned}$$

Zdefiniujmy operator całkowitego momentu pędu

$$\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= [J_i^{(1)} + J_i^{(2)}, J_j^{(1)} + J_j^{(2)}] \\ &= [J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] + [J_i^{(1)}, J_j^{(2)}] + [J_i^{(2)}, J_j^{(1)}] + [J_i^{(2)}, J_j^{(2)}] \\ &= \end{aligned}$$

Zdefiniujmy operator całkowitego momentu pędu

$$\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= [J_i^{(1)} + J_i^{(2)}, J_j^{(1)} + J_j^{(2)}] \\ &= [J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] + [J_i^{(1)}, J_j^{(2)}] + [J_i^{(2)}, J_j^{(1)}] + [J_i^{(2)}, J_j^{(2)}] \\ &= [J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] + [J_i^{(2)}, J_j^{(2)}], \end{aligned}$$

Zdefiniujmy operator całkowitego momentu pędu

$$\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= [J_i^{(1)} + J_i^{(2)}, J_j^{(1)} + J_j^{(2)}] \\ &= [J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] + [J_i^{(1)}, J_j^{(2)}] + [J_i^{(2)}, J_j^{(1)}] + [J_i^{(2)}, J_j^{(2)}] \\ &= [J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] + [J_i^{(2)}, J_j^{(2)}], \end{aligned}$$

gdź składowe operatorów  $\vec{J}^{(1)}$  i  $\vec{J}^{(2)}$  komutują.



Zdefiniujmy operator całkowitego momentu pędu

$$\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= [J_i^{(1)} + J_i^{(2)}, J_j^{(1)} + J_j^{(2)}] \\ &= [J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] + [J_i^{(1)}, J_j^{(2)}] + [J_i^{(2)}, J_j^{(1)}] + [J_i^{(2)}, J_j^{(2)}] \\ &= [J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] + [J_i^{(2)}, J_j^{(2)}], \end{aligned}$$

gdź składowe operatorów  $\vec{J}^{(1)}$  i  $\vec{J}^{(2)}$  komutują.

W takim razie

$$[J_i, J_j] = [J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] + [J_i^{(2)}, J_j^{(2)}]$$
$$=$$

W takim razie

$$\begin{aligned}[J_i, J_j] &= [J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] + [J_i^{(2)}, J_j^{(2)}] \\ &= i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k^{(1)} + i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k^{(2)}\end{aligned}$$

W takim razie

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= [J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] + [J_i^{(2)}, J_j^{(2)}] \\ &= i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k^{(1)} + i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k^{(2)} = i\hbar\varepsilon_{ijk} (J_k^{(1)} + J_k^{(2)}) \end{aligned}$$

W takim razie

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= [J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] + [J_i^{(2)}, J_j^{(2)}] \\ &= i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k^{(1)} + i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k^{(2)} = i\hbar\varepsilon_{ijk} (J_k^{(1)} + J_k^{(2)}) = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k. \end{aligned}$$

W takim razie

$$\begin{aligned}[J_i, J_j] &= [J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] + [J_i^{(2)}, J_j^{(2)}] \\ &= i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k^{(1)} + i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k^{(2)} = i\hbar\varepsilon_{ijk} \left( J_k^{(1)} + J_k^{(2)} \right) = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k.\end{aligned}$$

Widzimy, że operator całkowitego momentu pędu spełnia następujące relacje komutacji

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k.$$

W takim razie

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= [J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] + [J_i^{(2)}, J_j^{(2)}] \\ &= i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k^{(1)} + i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k^{(2)} = i\hbar\varepsilon_{ijk} \left( J_k^{(1)} + J_k^{(2)} \right) = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k. \end{aligned}$$

Widzimy, że operator całkowitego momentu pędu spełnia następujące relacje komutacji

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k.$$

Jest to oczywiście operator hermitowski, tak jak jego składowe.

W takim razie

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= [J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] + [J_i^{(2)}, J_j^{(2)}] \\ &= i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k^{(1)} + i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k^{(2)} = i\hbar\varepsilon_{ijk} \left( J_k^{(1)} + J_k^{(2)} \right) = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k. \end{aligned}$$

Widzimy, że operator całkowitego momentu pędu spełnia następujące relacje komutacji

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k.$$

Jest to oczywiście operator hermitowski, tak jak jego składowe.



Zdefiniujmy iloczyn tensorowy reprezentacji, tzn. przestrzeni rozpiętych przez wektory bazowe  $|j_1 m_1\rangle$  i  $|j_2 m_2\rangle$ .

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle.$$

Zdefiniujmy iloczyn tensorowy reprezentacji, tzn. przestrzeni rozpiętych przez wektory bazowe  $|j_1 m_1\rangle$  i  $|j_2 m_2\rangle$ .

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle.$$

Drugą naturalną reprezentację wyznaczają wektory własne operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$

$$\vec{J}^2 |jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle$$

Zdefiniujmy iloczyn tensorowy reprezentacji, tzn. przestrzeni rozpiętych przez wektory bazowe  $|j_1 m_1\rangle$  i  $|j_2 m_2\rangle$ .

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle.$$

Drugą naturalną reprezentację wyznaczają wektory własne operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 |jm\rangle &= j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle \\ J_3 |jm\rangle &= m\hbar |jm\rangle \end{aligned}$$

Zdefiniujmy iloczyn tensorowy reprezentacji, tzn. przestrzeni rozpiętych przez wektory bazowe  $|j_1 m_1\rangle$  i  $|j_2 m_2\rangle$ .

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle.$$

Drugą naturalną reprezentację wyznaczają wektory własne operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$

$$\begin{aligned}\vec{J}^2 |jm\rangle &= j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle \\ J_3 |jm\rangle &= \end{aligned}$$

Zdefiniujmy iloczyn tensorowy reprezentacji, tzn. przestrzeni rozpiętych przez wektory bazowe  $|j_1 m_1\rangle$  i  $|j_2 m_2\rangle$ .

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle.$$

Drugą naturalną reprezentację wyznaczają wektory własne operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$

$$\begin{aligned}\vec{J}^2 |jm\rangle &= j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle \\ J_3 |jm\rangle &= m\hbar |jm\rangle.\end{aligned}$$

Zdefiniujmy iloczyn tensorowy reprezentacji, tzn. przestrzeni rozpiętych przez wektory bazowe  $|j_1 m_1\rangle$  i  $|j_2 m_2\rangle$ .

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle.$$

Drugą naturalną reprezentację wyznaczają wektory własne operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$

$$\begin{aligned}\vec{J}^2 |jm\rangle &= j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle \\ J_3 |jm\rangle &= m\hbar |jm\rangle.\end{aligned}$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Ograniczmy się do podprzestrzeni stanów o ustalonych  $j_1$  i  $j_2$ , która ma wymiar  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ .

Wektory własne należące do tej podprzestrzeni oznaczymy  $|m_1 m_2\rangle$ .

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Ograniczmy się do podprzestrzeni stanów o ustalonych  $j_1$  i  $j_2$ , która ma wymiar  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ .

Wektory własne należące do tej podprzestrzeni oznaczymy  $|m_1 m_2\rangle$ .

Przejście pomiędzy reprezentacjami określa równanie

$$|jm\rangle = |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle,$$



# Stany własne całkowitego momentu pędu

Ograniczmy się do podprzestrzeni stanów o ustalonych  $j_1$  i  $j_2$ , która ma wymiar  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ .

Wektory własne należące do tej podprzestrzeni oznaczmy  $|m_1 m_2\rangle$ .

Przejście pomiędzy reprezentacjami określa równanie

$$|jm\rangle = |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle,$$

gdzie zastosowaliśmy konwencję sumacyjną

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2| \equiv |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2| = \mathbb{I}.$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Ograniczmy się do podprzestrzeni stanów o ustalonych  $j_1$  i  $j_2$ , która ma wymiar  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ .

Wektory własne należące do tej podprzestrzeni oznaczmy  $|m_1 m_2\rangle$ . Przejście pomiędzy reprezentacjami określa równanie

$$|jm\rangle = |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle,$$

gdzie zastosowaliśmy konwencję sumacyjną

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2| \equiv |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2| = \mathbb{I}.$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Obliczmy

$$J_3 |jm\rangle = J_3 |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle$$
$$=$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} J_3 |jm\rangle &= J_3 |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} + J_3^{(2)} \right) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} J_3 |jm\rangle &= J_3 |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} + J_3^{(2)} \right) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} J_3 |jm\rangle &= J_3 |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} + J_3^{(2)} \right) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes J_3^{(2)} |m_2\rangle \right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} J_3 |jm\rangle &= J_3 |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} + J_3^{(2)} \right) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes J_3^{(2)} |m_2\rangle \right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} J_3 |jm\rangle &= J_3 |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} + J_3^{(2)} \right) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes J_3^{(2)} |m_2\rangle \right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= (m_1 \hbar |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes m_2 \hbar |m_2\rangle) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \end{aligned}$$



Obliczmy

$$\begin{aligned} J_3 |jm\rangle &= J_3 |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} + J_3^{(2)} \right) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes J_3^{(2)} |m_2\rangle \right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( m_1 \hbar |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes m_2 \hbar |m_2\rangle \right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} J_3 |jm\rangle &= J_3 |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} + J_3^{(2)} \right) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes J_3^{(2)} |m_2\rangle \right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( m_1 \hbar |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes m_2 \hbar |m_2\rangle \right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= (m_1 + m_2) \hbar |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} J_3 |jm\rangle &= J_3 |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} + J_3^{(2)} \right) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes J_3^{(2)} |m_2\rangle \right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( m_1 \hbar |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes m_2 \hbar |m_2\rangle \right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= (m_1 + m_2) \hbar |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} J_3 |jm\rangle &= J_3 |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} + J_3^{(2)} \right) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes J_3^{(2)} |m_2\rangle \right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( m_1 \hbar |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes m_2 \hbar |m_2\rangle \right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= (m_1 + m_2) \hbar |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= (m_1 + m_2) \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} J_3 |jm\rangle &= J_3 |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} + J_3^{(2)} \right) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes J_3^{(2)} |m_2\rangle \right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( m_1 \hbar |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes m_2 \hbar |m_2\rangle \right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= (m_1 + m_2) \hbar |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= (m_1 + m_2) \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} J_3 |jm\rangle &= J_3 |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} + J_3^{(2)} \right) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes J_3^{(2)} |m_2\rangle \right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( m_1 \hbar |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes m_2 \hbar |m_2\rangle \right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= (m_1 + m_2) \hbar |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= (m_1 + m_2) \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= m \hbar |jm\rangle \end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} J_3 |jm\rangle &= J_3 |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} + J_3^{(2)} \right) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes J_3^{(2)} |m_2\rangle \right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( m_1 \hbar |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes m_2 \hbar |m_2\rangle \right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= (m_1 + m_2) \hbar |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= (m_1 + m_2) \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= m \hbar |jm\rangle = m \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle . \end{aligned}$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Obliczmy

$$\begin{aligned} J_3 |jm\rangle &= J_3 |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} + J_3^{(2)} \right) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes J_3^{(2)} |m_2\rangle \right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( m_1 \hbar |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes m_2 \hbar |m_2\rangle \right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= (m_1 + m_2) \hbar |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= (m_1 + m_2) \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= m \hbar |jm\rangle = m \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle . \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy związek

$$(m_1 + m_2) \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle = m \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle .$$



Obliczmy

$$\begin{aligned} J_3 |jm\rangle &= J_3 |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} + J_3^{(2)} \right) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( J_3^{(1)} |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes J_3^{(2)} |m_2\rangle \right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= \left( m_1 \hbar |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle + |m_1\rangle \otimes m_2 \hbar |m_2\rangle \right) \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= (m_1 + m_2) \hbar |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= (m_1 + m_2) \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle \\ &= m \hbar |jm\rangle = m \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle . \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy związek

$$(m_1 + m_2) \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle = m \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle .$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Porównując współczynniki przy liniowo niezależnych wektorach  $|m_1 m_2\rangle$  w równaniu

$$(m_1 + m_2) \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle = m \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle$$

otrzymujemy związek

$$(m_1 + m_2) \hbar \langle m_1 m_2 | jm\rangle = m \hbar \langle m_1 m_2 | jm\rangle,$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Porównując współczynniki przy liniowo niezależnych wektorach  $|m_1 m_2\rangle$  w równaniu

$$(m_1 + m_2) \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle = m \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle$$

otrzymujemy związek

$$(m_1 + m_2) \hbar \langle m_1 m_2 | jm\rangle = m \hbar \langle m_1 m_2 | jm\rangle ,$$
$$(m_1 + m_2 - m) \hbar \langle m_1 m_2 | jm\rangle$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Porównując współczynniki przy liniowo niezależnych wektorach  $|m_1 m_2\rangle$  w równaniu

$$(m_1 + m_2) \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle = m \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle$$

otrzymujemy związek

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \hbar \langle m_1 m_2 | jm\rangle &= m \hbar \langle m_1 m_2 | jm\rangle, \\ (m_1 + m_2 - m) \hbar \langle m_1 m_2 | jm\rangle &= \end{aligned}$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Porównując współczynniki przy liniowo niezależnych wektorach  $|m_1 m_2\rangle$  w równaniu

$$(m_1 + m_2) \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle = m \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle$$

otrzymujemy związek

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) \hbar \langle m_1 m_2 | jm\rangle &= m \hbar \langle m_1 m_2 | jm\rangle, \\(m_1 + m_2 - m) \hbar \langle m_1 m_2 | jm\rangle &= 0,\end{aligned}$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Porównując współczynniki przy liniowo niezależnych wektorach  $|m_1 m_2\rangle$  w równaniu

$$(m_1 + m_2) \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle = m \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle$$

otrzymujemy związek

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) \hbar \langle m_1 m_2 | jm\rangle &= m \hbar \langle m_1 m_2 | jm\rangle, \\ (m_1 + m_2 - m) \hbar \langle m_1 m_2 | jm\rangle &= 0,\end{aligned}$$

który pociąga  $\langle m_1 m_2 | jm\rangle = 0$ , albo

$$m = m_1 + m_2.$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Porównując współczynniki przy liniowo niezależnych wektorach  $|m_1 m_2\rangle$  w równaniu

$$(m_1 + m_2) \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle = m \hbar |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle$$

otrzymujemy związek

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) \hbar \langle m_1 m_2 | jm\rangle &= m \hbar \langle m_1 m_2 | jm\rangle, \\ (m_1 + m_2 - m) \hbar \langle m_1 m_2 | jm\rangle &= 0,\end{aligned}$$

który pociąga  $\langle m_1 m_2 | jm\rangle = 0$ , albo

$$m = m_1 + m_2.$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Ponieważ  $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$  a  $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$ , to

$$-j_1 - j_2 \leq m \leq j_1 + j_2.$$



# Stany własne całkowitego momentu pędu

Ponieważ  $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$  a  $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$ , to

$$-j_1 - j_2 \leq m \leq j_1 + j_2.$$

Zatem największa wartość  $m$  wynosi  $j_1 + j_2$ .

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Ponieważ  $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$  a  $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$ , to

$$-j_1 - j_2 \leq m \leq j_1 + j_2.$$

Zatem największa wartość  $m$  wynosi  $j_1 + j_2$ .

Wartość ta pojawia się tylko raz dla  $m_1 = j_1$  i  $m_2 = j_2$ .

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Ponieważ  $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$  a  $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$ , to

$$-j_1 - j_2 \leq m \leq j_1 + j_2.$$

Zatem największa wartość  $m$  wynosi  $j_1 + j_2$ .

Wartość ta pojawia się tylko raz dla  $m_1 = j_1$  i  $m_2 = j_2$ .

Stąd wynika, że największa wartość całkowitego momentu pędu  $j$  wynosi  $j = j_1 + j_2$ .

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Ponieważ  $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$  a  $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$ , to

$$-j_1 - j_2 \leq m \leq j_1 + j_2.$$

Zatem największa wartość  $m$  wynosi  $j_1 + j_2$ .

Wartość ta pojawia się tylko raz dla  $m_1 = j_1$  i  $m_2 = j_2$ .

Stąd wynika, że największa wartość całkowitego momentu pędu  $j$  wynosi  $j = j_1 + j_2$ .

Weźmy wartość  $m$  o jeden mniejszą:

$$m = j_1 + j_2 - 1.$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Ponieważ  $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$  a  $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$ , to

$$-j_1 - j_2 \leq m \leq j_1 + j_2.$$

Zatem największa wartość  $m$  wynosi  $j_1 + j_2$ .

Wartość ta pojawia się tylko raz dla  $m_1 = j_1$  i  $m_2 = j_2$ .

Stąd wynika, że największa wartość całkowitego momentu pędu  $j$  wynosi  $j = j_1 + j_2$ .

Weźmy wartość  $m$  o jeden mniejszą:

$$m = j_1 + j_2 - 1.$$

Można ją otrzymać na dwa sposoby, biorąc

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Ponieważ  $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$  a  $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$ , to

$$-j_1 - j_2 \leq m \leq j_1 + j_2.$$

Zatem największa wartość  $m$  wynosi  $j_1 + j_2$ .

Wartość ta pojawia się tylko raz dla  $m_1 = j_1$  i  $m_2 = j_2$ .

Stąd wynika, że największa wartość całkowitego momentu pędu  $j$  wynosi  $j = j_1 + j_2$ .

Weźmy wartość  $m$  o jeden mniejszą:

$$m = j_1 + j_2 - 1.$$

Można ją otrzymać na dwa sposoby, biorąc  $m_1 = j_1$  i  $m_2 = j_2 - 1$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Ponieważ  $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$  a  $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$ , to

$$-j_1 - j_2 \leq m \leq j_1 + j_2.$$

Zatem największa wartość  $m$  wynosi  $j_1 + j_2$ .

Wartość ta pojawia się tylko raz dla  $m_1 = j_1$  i  $m_2 = j_2$ .

Stąd wynika, że największa wartość całkowitego momentu pędu  $j$  wynosi  $j = j_1 + j_2$ .

Weźmy wartość  $m$  o jeden mniejszą:

$$m = j_1 + j_2 - 1.$$

Można ją otrzymać na dwa sposoby, biorąc  $m_1 = j_1$  i  $m_2 = j_2 - 1$  lub  $m_1 = j_1 - 1$  i  $m_2 = j_2$ .

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Ponieważ  $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$  a  $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$ , to

$$-j_1 - j_2 \leq m \leq j_1 + j_2.$$

Zatem największa wartość  $m$  wynosi  $j_1 + j_2$ .

Wartość ta pojawia się tylko raz dla  $m_1 = j_1$  i  $m_2 = j_2$ .

Stąd wynika, że największa wartość całkowitego momentu pędu  $j$  wynosi  $j = j_1 + j_2$ .

Weźmy wartość  $m$  o jeden mniejszą:

$$m = j_1 + j_2 - 1.$$

Można ją otrzymać na dwa sposoby, biorąc  $m_1 = j_1$  i  $m_2 = j_2 - 1$  lub  $m_1 = j_1 - 1$  i  $m_2 = j_2$ .



# Stany własne całkowitego momentu pędu

Jedna z tych wartości należy do podprzestrzeni o  $j = j_1 + j_2$ , do której należą stany odpowiadające

$$m = 0, \pm 1, \dots, \pm(j_1 + j_2) - 1, \pm(j_1 + j_2),$$

a druga należy do podprzestrzeni o  $j = j_1 + j_2 - 1$ , do której należą stany odpowiadające

$$m = 0, \pm 1, \dots, \pm(j_1 + j_2 - 1).$$

Jedna z tych wartości należy do podprzestrzeni o  $j = j_1 + j_2$ , do której należą stany odpowiadające

$$m = 0, \pm 1, \dots, \pm(j_1 + j_2) - 1, \pm(j_1 + j_2),$$

a druga należy do podprzestrzeni o  $j = j_1 + j_2 - 1$ , do której należą stany odpowiadające

$$m = 0, \pm 1, \dots, \pm(j_1 + j_2 - 1).$$

Takie postępowanie możemy kontynuować.

Jedna z tych wartości należy do podprzestrzeni o  $j = j_1 + j_2$ , do której należą stany odpowiadające

$$m = 0, \pm 1, \dots, \pm(j_1 + j_2) - 1, \pm(j_1 + j_2),$$

a druga należy do podprzestrzeni o  $j = j_1 + j_2 - 1$ , do której należą stany odpowiadające

$$m = 0, \pm 1, \dots, \pm(j_1 + j_2 - 1).$$

Takie postępowanie możemy kontynuować.

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Liczba liniowo niezależnych stanów w reprezentacji  $|jm\rangle$  i  $|m_1 m_2\rangle = |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle$  musi się zgadzać, tzn.

$$\sum_{j=j_{\min}}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^j 1 = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} 1,$$

gdyż każdej parze liczb kwantowych  $j, m$  i  $m_1, m_2$  odpowiada dokładnie jeden wektor stanu.

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Liczba liniowo niezależnych stanów w reprezentacji  $|jm\rangle$  i  $|m_1 m_2\rangle = |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle$  musi się zgadzać, tzn.

$$\sum_{j=j_{\min}}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^j 1 = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} 1,$$

gdyż każdej parze liczb kwantowych  $j, m$  i  $m_1, m_2$  odpowiada dokładnie jeden wektor stanu.

Wykonując wewnętrzną sumę po lewej stronie i obie sumy po prawej otrzymamy

$$\sum_{j=j_{\min}}^{j_1+j_2} (2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1).$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Liczba liniowo niezależnych stanów w reprezentacji  $|jm\rangle$  i  $|m_1 m_2\rangle = |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle$  musi się zgadzać, tzn.

$$\sum_{j=j_{\min}}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^j 1 = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} 1,$$

gdyż każdej parze liczb kwantowych  $j, m$  i  $m_1, m_2$  odpowiada dokładnie jeden wektor stanu.

Wykonując wewnętrzną sumę po lewej stronie i obie sumy po prawej otrzymamy

$$\sum_{j=j_{\min}}^{j_1+j_2} (2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1).$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Lewa strona jest sumą ciągu arytmetycznego, a więc

$$\frac{2j_{\min} + 1 + 2(j_1 + j_2) + 1}{2} (j_1 + j_2 - j_{\min} + 1) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1).$$

Przekształćmy lewą stronę

$$(j_1 + j_2 + 1 + j_{\min})(j_1 + j_2 + 1 - j_{\min}) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1).$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Lewa strona jest sumą ciągu arytmetycznego, a więc

$$\frac{2j_{\min} + 1 + 2(j_1 + j_2) + 1}{2} (j_1 + j_2 - j_{\min} + 1) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1).$$

Przekształćmy lewą stronę

$$(j_1 + j_2 + 1 + j_{\min})(j_1 + j_2 + 1 - j_{\min}) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1).$$

Skorzystajmy z wzoru skróconego mnożenia

$$(j_1 + j_2 + 1)^2 - j_{\min}^2 = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1),$$



# Stany własne całkowitego momentu pędu

Lewa strona jest sumą ciągu arytmetycznego, a więc

$$\frac{2j_{\min} + 1 + 2(j_1 + j_2) + 1}{2} (j_1 + j_2 - j_{\min} + 1) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1).$$

Przekształćmy lewą stronę

$$(j_1 + j_2 + 1 + j_{\min})(j_1 + j_2 + 1 - j_{\min}) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1).$$

Skorzystajmy z wzoru skróconego mnożenia

$$(j_1 + j_2 + 1)^2 - j_{\min}^2 = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1),$$

a więc

$$j_{\min}^2 = (j_1 + j_2 + 1)^2 - (2j_1 + 1)(2j_2 + 1).$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Lewa strona jest sumą ciągu arytmetycznego, a więc

$$\frac{2j_{\min} + 1 + 2(j_1 + j_2) + 1}{2} (j_1 + j_2 - j_{\min} + 1) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1).$$

Przekształćmy lewą stronę

$$(j_1 + j_2 + 1 + j_{\min})(j_1 + j_2 + 1 - j_{\min}) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1).$$

Skorzystajmy z wzoru skróconego mnożenia

$$(j_1 + j_2 + 1)^2 - j_{\min}^2 = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1),$$

a więc

$$j_{\min}^2 = (j_1 + j_2 + 1)^2 - (2j_1 + 1)(2j_2 + 1).$$

Przekształćmy równanie

$$j_{\min}^2 = (j_1 + j_2 + 1)^2 - (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$$
$$=$$

Przekształćmy równanie

$$\begin{aligned}j_{\min}^2 &= (j_1 + j_2 + 1)^2 - (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \\ &= j_1^2 + j_2^2 + 1 + 2j_1j_2 + 2j_1 + 2j_2 - 4j_1j_2 - 2j_1 - 2j_2 - 1\end{aligned}$$

Przekształćmy równanie

$$\begin{aligned}j_{\min}^2 &= (j_1 + j_2 + 1)^2 - (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \\ &= j_1^2 + j_2^2 + 1 + 2j_1j_2 + 2j_1 + 2j_2 - 4j_1j_2 - 2j_1 - 2j_2 - 1 \\ &= \end{aligned}$$

Przekształćmy równanie

$$\begin{aligned}j_{\min}^2 &= (j_1 + j_2 + 1)^2 - (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \\ &= j_1^2 + j_2^2 + 1 + 2j_1j_2 + 2j_1 + 2j_2 - 4j_1j_2 - 2j_1 - 2j_2 - 1 \\ &= j_1^2 + j_2^2 - 2j_1j_2 = (j_1 - j_2)^2.\end{aligned}$$

Przekształćmy równanie

$$\begin{aligned}j_{\min}^2 &= (j_1 + j_2 + 1)^2 - (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \\ &= j_1^2 + j_2^2 + 1 + 2j_1j_2 + 2j_1 + 2j_2 - 4j_1j_2 - 2j_1 - 2j_2 - 1 \\ &= j_1^2 + j_2^2 - 2j_1j_2 = (j_1 - j_2)^2.\end{aligned}$$

Skąd

$$j_{\min} = \pm \sqrt{(j_1 - j_2)^2} = \pm |j_1 - j_2|.$$

Przekształćmy równanie

$$\begin{aligned}j_{\min}^2 &= (j_1 + j_2 + 1)^2 - (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \\ &= j_1^2 + j_2^2 + 1 + 2j_1j_2 + 2j_1 + 2j_2 - 4j_1j_2 - 2j_1 - 2j_2 - 1 \\ &= j_1^2 + j_2^2 - 2j_1j_2 = (j_1 - j_2)^2.\end{aligned}$$

Skąd

$$j_{\min} = \pm \sqrt{(j_1 - j_2)^2} = \pm |j_1 - j_2|.$$

Ostatecznie, biorąc pod uwagę fakt, że wartości własne całkowitego momentu pędu są nieujemne, otrzymujemy wynik

$$j_{\min} = |j_1 - j_2|.$$



Przekształćmy równanie

$$\begin{aligned}j_{\min}^2 &= (j_1 + j_2 + 1)^2 - (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \\ &= j_1^2 + j_2^2 + 1 + 2j_1j_2 + 2j_1 + 2j_2 - 4j_1j_2 - 2j_1 - 2j_2 - 1 \\ &= j_1^2 + j_2^2 - 2j_1j_2 = (j_1 - j_2)^2.\end{aligned}$$

Skąd

$$j_{\min} = \pm \sqrt{(j_1 - j_2)^2} = \pm |j_1 - j_2|.$$

Ostatecznie, biorąc pod uwagę fakt, że wartości własne całkowitego momentu pędu są nieujemne, otrzymujemy wynik

$$j_{\min} = |j_1 - j_2|.$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Wcześniej pokazaliśmy, że maksymalna wartość  $j = j_1 + j_2$ .  
Zatem całkowity moment pędu może przyjmować wartości

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

zmieniając się o 1.

Wcześniej pokazaliśmy, że maksymalna wartość  $j = j_1 + j_2$ .  
Zatem **całkowity moment pędu może przyjmować wartości**

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

**zmieniając się o 1.**

Przykładowo, w atomie wodoropodobnym, aby uwzględnić spin elektronu wynoszący  $s = \frac{1}{2}$ , musimy go dodać zgodnie z tą regułą do orbitalnego momentu pędu elektronu.

Wcześniej pokazaliśmy, że maksymalna wartość  $j = j_1 + j_2$ .  
Zatem **całkowity moment pędu może przyjmować wartości**

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

**zmieniając się o 1.**

Przykładowo, w atomie wodoropodobnym, aby uwzględnić spin elektronu wynoszący  $s = \frac{1}{2}$ , musimy go dodać zgodnie z tą regułą do orbitalnego momentu pędu elektronu.

W stanie podstawowym mamy

$$n = 1$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Wcześniej pokazaliśmy, że maksymalna wartość  $j = j_1 + j_2$ .  
Zatem **całkowity moment pędu może przyjmować wartości**

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

**zmieniając się o 1.**

Przykładowo, w atomie wodoropodobnym, aby uwzględnić spin elektronu wynoszący  $s = \frac{1}{2}$ , musimy go dodać zgodnie z tą regułą do orbitalnego momentu pędu elektronu.

W stanie podstawowym mamy

$$n = 1 \Rightarrow l = 0$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Wcześniej pokazaliśmy, że maksymalna wartość  $j = j_1 + j_2$ .  
Zatem **całkowity moment pędu może przyjmować wartości**

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

**zmieniając się o 1.**

Przykładowo, w atomie wodoropodobnym, aby uwzględnić spin elektronu wynoszący  $s = \frac{1}{2}$ , musimy go dodać zgodnie z tą regułą do orbitalnego momentu pędu elektronu.

W stanie podstawowym mamy

$$n = 1 \Rightarrow l = 0 \Rightarrow j = \left| 0 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \dots, 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Wcześniej pokazaliśmy, że maksymalna wartość  $j = j_1 + j_2$ .  
Zatem **całkowity moment pędu może przyjmować wartości**

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

**zmieniając się o 1.**

Przykładowo, w atomie wodoropodobnym, aby uwzględnić spin elektronu wynoszący  $s = \frac{1}{2}$ , musimy go dodać zgodnie z tą regułą do orbitalnego momentu pędu elektronu.

W stanie podstawowym mamy

$$\begin{aligned} n = 1 \quad \Rightarrow \quad l = 0 \quad \Rightarrow \quad j &= \left| 0 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \dots, 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \quad j = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Wcześniej pokazaliśmy, że maksymalna wartość  $j = j_1 + j_2$ .  
Zatem **całkowity moment pędu może przyjmować wartości**

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

**zmieniając się o 1.**

Przykładowo, w atomie wodoropodobnym, aby uwzględnić spin elektronu wynoszący  $s = \frac{1}{2}$ , musimy go dodać zgodnie z tą regułą do orbitalnego momentu pędu elektronu.

W stanie podstawowym mamy

$$\begin{aligned} n = 1 \quad \Rightarrow \quad l = 0 \quad \Rightarrow \quad j &= \left| 0 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \dots, 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \quad j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



# Stany własne całkowitego momentu pędu

Wcześniej pokazaliśmy, że maksymalna wartość  $j = j_1 + j_2$ .  
Zatem **całkowity moment pędu może przyjmować wartości**

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

**zmieniając się o 1.**

Przykładowo, w atomie wodoropodobnym, aby uwzględnić spin elektronu wynoszący  $s = \frac{1}{2}$ , musimy go dodać zgodnie z tą regułą do orbitalnego momentu pędu elektronu.

W stanie podstawowym mamy

$$\begin{aligned} n = 1 \quad \Rightarrow \quad l = 0 \quad \Rightarrow \quad j &= \left| 0 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \dots, 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \quad j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Czyli elektron może występować w dwóch stanach kwantowych.  
W pierwszym stanie wzbudzonym mamy

Czyli elektron może występować w dwóch stanach kwantowych.  
W pierwszym stanie wzbudzonym mamy

$$n = 2$$

Czyli elektron może występować w dwóch stanach kwantowych.  
W pierwszym stanie wzbudzonym mamy

$$n = 2 \Rightarrow l = 0, 1.$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Czyli elektron może występować w dwóch stanach kwantowych.  
W pierwszym stanie wzbudzonym mamy

$$n = 2 \Rightarrow l = 0, 1.$$

W stanie z  $l = 0$  otrzymamy tak jak poprzednio

$$j = \left| 0 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \dots, 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow j = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.$$

Czyli elektron może występować w dwóch stanach kwantowych.  
W pierwszym stanie wzbudzonym mamy

$$n = 2 \Rightarrow l = 0, 1.$$

W stanie z  $l = 0$  otrzymamy tak jak poprzednio

$$j = \left| 0 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \dots, 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow j = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.$$

Natomiast w stanie z  $l = 1$  dostaniemy dwie możliwe wartości całkowitego momentu pędu  $j$

$$j = \left| 1 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \dots, 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

i 6 możliwych wartości jego trzeciej składowej:

$$j = \frac{1}{2}$$

Natomiast w stanie z  $l = 1$  dostaniemy dwie możliwe wartości całkowitego momentu pędu  $j$

$$j = \left| 1 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \dots, 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

i 6 możliwych wartości jego trzeciej składowej:

$$j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$



Natomiast w stanie z  $l = 1$  dostaniemy dwie możliwe wartości całkowitego momentu pędu  $j$

$$j = \left| 1 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \dots, 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

i 6 możliwych wartości jego trzeciej składowej:

$$j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2},$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Natomiast w stanie z  $l = 1$  dostaniemy dwie możliwe wartości całkowitego momentu pędu  $j$

$$j = \left| 1 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \dots, 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

i 6 możliwych wartości jego trzeciej składowej:

$$j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2},$$
$$j = \frac{3}{2}$$

Natomiast w stanie z  $l = 1$  dostaniemy dwie możliwe wartości całkowitego momentu pędu  $j$

$$j = \left| 1 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \dots, 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

i 6 możliwych wartości jego trzeciej składowej:

$$j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2},$$

$$j = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Natomiast w stanie z  $l = 1$  dostaniemy dwie możliwe wartości całkowitego momentu pędu  $j$

$$j = \left| 1 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \dots, 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

i 6 możliwych wartości jego trzeciej składowej:

$$j = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2},$$
$$j = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}.$$

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Natomiast w stanie z  $l = 1$  dostaniemy dwie możliwe wartości całkowitego momentu pędu  $j$

$$j = \left| 1 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \dots, 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

i 6 możliwych wartości jego trzeciej składowej:

$$\begin{aligned} j = \frac{1}{2} &\Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \\ j = \frac{3}{2} &\Rightarrow m = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Czyli na pierwszym poziomie wzbudzonym, odpowiadającym  $n = 2$ , elektron może występować w 8 różnych stanach kwantowych.

# Stany własne całkowitego momentu pędu

Natomiast w stanie z  $l = 1$  dostaniemy dwie możliwe wartości całkowitego momentu pędu  $j$

$$j = \left| 1 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \dots, 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

i 6 możliwych wartości jego trzeciej składowej:

$$\begin{aligned} j = \frac{1}{2} & \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \\ j = \frac{3}{2} & \Rightarrow m = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Czyli na pierwszym poziomie wzbudzonym, odpowiadającym  $n = 2$ , elektron może występować w 8 różnych stanach kwantowych.

Rozważmy równanie (przy ustalonym  $j_1$  i  $j_2$ )

$$|jm\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle$$

≡

Rozważmy równanie (przy ustalonym  $j_1$  i  $j_2$ )

$$\begin{aligned} |jm\rangle &= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle \\ &\equiv |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle . \end{aligned}$$



Rozważmy równanie (przy ustalonym  $j_1$  i  $j_2$ )

$$\begin{aligned} |jm\rangle &= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle \\ &\equiv |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle . \end{aligned}$$

Współczynniki rozwinięcia

$$\langle m_1 m_2 | jm\rangle$$

stanów  $|jm\rangle$  na stany  $|m_1 m_2\rangle$  noszą nazwę **współczynników Clebscha-Gordana**.

Rozważmy równanie (przy ustalonym  $j_1$  i  $j_2$ )

$$\begin{aligned} |jm\rangle &= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle \\ &\equiv |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle . \end{aligned}$$

Współczynniki rozwinięcia

$$\langle m_1 m_2 | jm\rangle$$

stanów  $|jm\rangle$  na stany  $|m_1 m_2\rangle$  noszą nazwę **współczynników Clebscha-Gordana**.

Rozwinięcie odwrotne ma postać

$$\begin{aligned} |m_1 m_2\rangle &= \sum_{m=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \\ &\equiv \end{aligned}$$

Rozwinięcie odwrotne ma postać

$$\begin{aligned} |m_1 m_2\rangle &= \sum_{m=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \\ &\equiv |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle . \end{aligned}$$

# Współczynniki Clebscha-Gordana

Rozwinięcie odwrotne ma postać

$$\begin{aligned} |m_1 m_2\rangle &= \sum_{m=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \\ &\equiv |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle. \end{aligned}$$

Zachodzą następujące związki normalizacyjne

$$\langle m_1 m_2 | jm\rangle \langle jm|m'_1 m'_2\rangle = \langle m_1 m_2 | m'_1 m'_2\rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2},$$

Rozwinięcie odwrotne ma postać

$$\begin{aligned} |m_1 m_2\rangle &= \sum_{m=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \\ &\equiv |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle. \end{aligned}$$

Zachodzą następujące związki normalizacyjne

$$\begin{aligned} \langle m_1 m_2 | jm \rangle \langle jm | m'_1 m'_2 \rangle &= \langle m_1 m_2 | m'_1 m'_2 \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}, \\ \langle jm | m_1 m_2 \rangle \langle m_1 m_2 | j' m' \rangle & \end{aligned}$$

Rozwinięcie odwrotne ma postać

$$\begin{aligned} |m_1 m_2\rangle &= \sum_{m=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \\ &\equiv |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle. \end{aligned}$$

Zachodzą następujące związki normalizacyjne

$$\begin{aligned} \langle m_1 m_2 | jm \rangle \langle jm | m'_1 m'_2 \rangle &= \langle m_1 m_2 | m'_1 m'_2 \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}, \\ \langle jm | m_1 m_2 \rangle \langle m_1 m_2 | j' m' \rangle &= \end{aligned}$$

Rozwinięcie odwrotne ma postać

$$\begin{aligned} |m_1 m_2\rangle &= \sum_{m=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \\ &\equiv |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle. \end{aligned}$$

Zachodzą następujące związki normalizacyjne

$$\begin{aligned} \langle m_1 m_2 | jm \rangle \langle jm | m'_1 m'_2 \rangle &= \langle m_1 m_2 | m'_1 m'_2 \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}, \\ \langle jm | m_1 m_2 \rangle \langle m_1 m_2 | j' m' \rangle &= \langle jm | j' m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \end{aligned}$$



# Współczynniki Clebscha-Gordana

Rozwinięcie odwrotne ma postać

$$\begin{aligned} |m_1 m_2\rangle &= \sum_{m=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \\ &\equiv |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle. \end{aligned}$$

Zachodzą następujące związki normalizacyjne

$$\begin{aligned} \langle m_1 m_2 | jm \rangle \langle jm | m'_1 m'_2 \rangle &= \langle m_1 m_2 | m'_1 m'_2 \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}, \\ \langle jm | m_1 m_2 \rangle \langle m_1 m_2 | j' m' \rangle &= \langle jm | j' m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \end{aligned}$$

a przy założeniu, że współczynniki Clebscha-Gordana są rzeczywiste możemy zapisać

$$\langle jm | m_1 m_2 \rangle = \langle jm | m_1 m_2 \rangle^*$$

# Współczynniki Clebscha-Gordana

Rozwinięcie odwrotne ma postać

$$\begin{aligned} |m_1 m_2\rangle &= \sum_{m=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \\ &\equiv |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle. \end{aligned}$$

Zachodzą następujące związki normalizacyjne

$$\begin{aligned} \langle m_1 m_2 | jm \rangle \langle jm | m'_1 m'_2 \rangle &= \langle m_1 m_2 | m'_1 m'_2 \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}, \\ \langle jm | m_1 m_2 \rangle \langle m_1 m_2 | j' m' \rangle &= \langle jm | j' m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \end{aligned}$$

a przy założeniu, że współczynniki Clebscha-Gordana są rzeczywiste możemy zapisać

$$\langle jm | m_1 m_2 \rangle = \langle jm | m_1 m_2 \rangle^* = \langle m_1 m_2 | jm \rangle.$$

# Współczynniki Clebscha-Gordana

Rozwinięcie odwrotne ma postać

$$\begin{aligned} |m_1 m_2\rangle &= \sum_{m=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle \\ &\equiv |jm\rangle \langle jm|m_1 m_2\rangle. \end{aligned}$$

Zachodzą następujące związki normalizacyjne

$$\begin{aligned} \langle m_1 m_2 | jm \rangle \langle jm | m'_1 m'_2 \rangle &= \langle m_1 m_2 | m'_1 m'_2 \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}, \\ \langle jm | m_1 m_2 \rangle \langle m_1 m_2 | j' m' \rangle &= \langle jm | j' m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \end{aligned}$$

a przy założeniu, że współczynniki Clebscha-Gordana są rzeczywiste możemy zapisać

$$\langle jm | m_1 m_2 \rangle = \langle jm | m_1 m_2 \rangle^* = \langle m_1 m_2 | jm \rangle.$$

Procedura konstruowania współczynników Clebscha-Gordana jest dość żmudna.

Wykorzystuje się w niej przytoczone związki normalizacyjne oraz związki rekurencyjne, które wyprowadza się przy użyciu operatorów  $J_{\pm}$  dla całkowitego momentu pędu.

Procedura konstruowania współczynników Clebscha-Gordana jest dość żmudna.

Wykorzystuje się w niej przytoczone związki normalizacyjne oraz związki rekurencyjne, które wyprowadza się przy użyciu operatorów  $J_{\pm}$  dla całkowitego momentu pędu.

$$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$$

Procedura konstruowania współczynników Clebscha-Gordana jest dość żmudna.

Wykorzystuje się w niej przytoczone związki normalizacyjne oraz związki rekurencyjne, które wyprowadza się przy użyciu operatorów  $J_{\pm}$  dla całkowitego momentu pędu.

$$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2 = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} \pm i \left( J_2^{(1)} + J_2^{(2)} \right)$$

Procedura konstruowania współczynników Clebscha-Gordana jest dość żmudna.

Wykorzystuje się w niej przytoczone związki normalizacyjne oraz związki rekurencyjne, które wyprowadza się przy użyciu operatorów  $J_{\pm}$  dla całkowitego momentu pędu.

$$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2 = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} \pm i \left( J_2^{(1)} + J_2^{(2)} \right)$$
$$=$$

Procedura konstruowania współczynników Clebscha-Gordana jest dość żmudna.

Wykorzystuje się w niej przytoczone związki normalizacyjne oraz związki rekurencyjne, które wyprowadza się przy użyciu operatorów  $J_{\pm}$  dla całkowitego momentu pędu.

$$\begin{aligned} J_{\pm} &= J_1 \pm iJ_2 = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} \pm i \left( J_2^{(1)} + J_2^{(2)} \right) \\ &= J_1^{(1)} \pm iJ_2^{(1)} + J_1^{(2)} \pm iJ_2^{(2)} \end{aligned}$$



Procedura konstruowania współczynników Clebscha-Gordana jest dość żmudna.

Wykorzystuje się w niej przytoczone związki normalizacyjne oraz związki rekurencyjne, które wyprowadza się przy użyciu operatorów  $J_{\pm}$  dla całkowitego momentu pędu.

$$\begin{aligned} J_{\pm} &= J_1 \pm iJ_2 = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} \pm i \left( J_2^{(1)} + J_2^{(2)} \right) \\ &= J_1^{(1)} \pm iJ_2^{(1)} + J_1^{(2)} \pm iJ_2^{(2)} = J_{\pm}^{(1)} + J_{\pm}^{(2)}. \end{aligned}$$

Procedura konstruowania współczynników Clebscha-Gordana jest dość żmudna.

Wykorzystuje się w niej przytoczone związki normalizacyjne oraz związki rekurencyjne, które wyprowadza się przy użyciu operatorów  $J_{\pm}$  dla całkowitego momentu pędu.

$$\begin{aligned} J_{\pm} &= J_1 \pm iJ_2 = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} \pm i(J_2^{(1)} + J_2^{(2)}) \\ &= J_1^{(1)} \pm iJ_2^{(1)} + J_1^{(2)} \pm iJ_2^{(2)} = J_{\pm}^{(1)} + J_{\pm}^{(2)}. \end{aligned}$$

Szczegółowy opis procedury konstruowania współczynników Clebscha-Gordana można znaleźć np. w §28 podręcznika L.I. Schiffa.

Procedura konstruowania współczynników Clebscha-Gordana jest dość żmudna.

Wykorzystuje się w niej przytoczone związki normalizacyjne oraz związki rekurencyjne, które wyprowadza się przy użyciu operatorów  $J_{\pm}$  dla całkowitego momentu pędu.

$$\begin{aligned} J_{\pm} &= J_1 \pm iJ_2 = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} \pm i(J_2^{(1)} + J_2^{(2)}) \\ &= J_1^{(1)} \pm iJ_2^{(1)} + J_1^{(2)} \pm iJ_2^{(2)} = J_{\pm}^{(1)} + J_{\pm}^{(2)}. \end{aligned}$$

Szczegółowy opis procedury konstruowania współczynników Clebscha-Gordana można znaleźć np. w §28 podręcznika L.I. Schiffa.