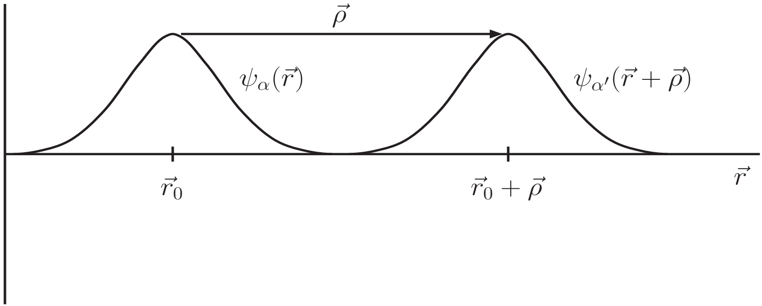
Symetrie w mechanice kwantowej

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

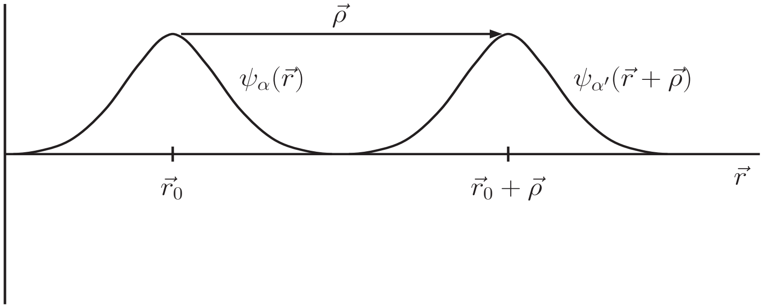
Translacja przestrzenna

Dokonajmy translacji przestrzennej pewnego układu fizycznego o ustalony wektor $\vec{\rho}$. Przed transformacją układ opisywany jest przez funkcję falową $\psi_\alpha(\vec{r})$, gdzie indeks α oznacza zbiór wszystkich liczb kwantowych niezbędnych do jego opisu.



Po transformacji układ jest opisywany przez funkcję falową $\psi_{\alpha'}(\vec{r}+\vec{\rho})$, gdzie teraz zbiór wszystkich liczb kwantowych niezbędnych do jego opisu oznaczyliśmy przez α'.

Dokonajmy translacji przestrzennej pewnego układu fizycznego o ustalony wektor $\vec{\rho}$. Przed transformacją układ opisywany jest przez funkcję falową $\psi_\alpha(\vec{r})$, gdzie indeks α oznacza zbiór wszystkich liczb kwantowych niezbędnych do jego opisu.



Po transformacji układ jest opisywany przez funkcję falową $\psi_{\alpha'}(\vec{r}+\vec{\rho})$, gdzie teraz zbiór wszystkich liczb kwantowych niezbędnych do jego opisu oznaczyliśmy przez α'.

Translacja przestrzenna

Jest oczywiste, że przy translacji zachodzi związek

$$\psi_{\alpha'}(\vec{r}+\vec{\rho}) = \psi_{\alpha}(\vec{r}).$$

W przestrzeni Hilberta stanów fizycznych $\mathcal{H}$ translacja przestrzenna jest reprezentowana przez unitarny operator przesunięcia przestrzennego $U_{\vec{r}}(\vec{\rho})$

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\psi_{\alpha}(\vec{r}) = \psi_{\alpha'}(\vec{r}) = \psi_{\alpha}(\vec{r}-\vec{\rho}).$$

Translacja przestrzenna

Jest oczywiste, że przy translacji zachodzi związek

$$\psi_{\alpha'}(\vec{r} + \vec{\rho}) = \psi_{\alpha}(\vec{r}).$$

W przestrzeni Hilberta stanów fizycznych $\mathcal{H}$ translacja przestrzenna jest reprezentowana przez unitarny operator przesunięcia przestrzennego $U_{\vec{r}}(\vec{\rho})$

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\psi_{\alpha}(\vec{r}) = \psi_{\alpha'}(\vec{r}) = \psi_{\alpha}(\vec{r} - \vec{\rho}).$$

Translacja przestrzenna

Przyjmijmy dla prostoty $\vec{\rho} = [\rho, 0, 0]$ i rozwińmy w szereg Taylora

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) \quad = \quad \psi_\alpha(x - \rho, y, z) =$$

Translacja przestrzenna

Przyjmijmy dla prostoty $\vec{\rho} = [\rho, 0, 0]$ i rozwińmy w szereg Taylora

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = \psi_\alpha(x - \rho, y, z) = \psi_\alpha(x, y, z) + \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial x}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho)$$

Translacja przestrzenna

Przyjmijmy dla prostoty $\vec{\rho} = [\rho, 0, 0]$ i rozwińmy w szereg Taylora

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) \quad = \quad \psi_\alpha(x - \rho, y, z) = \psi_\alpha(x, y, z) + \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial x}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho)$$

$$+$$

Przyjmijmy dla prostoty $\vec{\rho} = [\rho, 0, 0]$ i rozwińmy w szereg Taylora

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) &= \psi_\alpha(x - \rho, y, z) = \psi_\alpha(x, y, z) + \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial x}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho) \\ &+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho)^2 + \ldots\end{aligned}$$

Przyjmijmy dla prostoty $\vec{\rho} = [\rho, 0, 0]$ i rozwińmy w szereg Taylora

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) &= \psi_\alpha(x - \rho, y, z) = \psi_\alpha(x, y, z) + \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial x}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho) \\
&+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho)^2 + \ldots \\
&=
\end{aligned}$$

Translacja przestrzenna

Przyjmijmy dla prostoty $\vec{\rho} = [\rho, 0, 0]$ i rozwińmy w szereg Taylora

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) &= \psi_\alpha(x - \rho, y, z) = \psi_\alpha(x, y, z) + \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial x}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho) \\
&+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho)^2 + \ldots \\
&= \left[1 + \frac{(-\rho)}{1!}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(-\rho)^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \ldots\right]\psi_\alpha(x, y, z)
\end{aligned}$$

Translacja przestrzenna

Przyjmijmy dla prostoty $\vec{\rho} = [\rho, 0, 0]$ i rozwińmy w szereg Taylora

$$
\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) &= \psi_\alpha(x - \rho, y, z) = \psi_\alpha(x, y, z) + \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial x}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho) \\
&+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho)^2 + \ldots \\
&= \left[1 + \frac{(-\rho)}{1!}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(-\rho)^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \ldots\right]\psi_\alpha(x, y, z) \\
&=
\end{aligned}
$$

Translacja przestrzenna

Przyjmijmy dla prostoty $\vec{\rho} = [\rho, 0, 0]$ i rozwińmy w szereg Taylora

$$
\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) &= \psi_\alpha(x-\rho, y, z) = \psi_\alpha(x, y, z) + \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial x}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho) \\
&+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho)^2 + ... \\
&= \left[1 + \frac{(-\rho)}{1!}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(-\rho)^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots\right]\psi_\alpha(x, y, z) \\
&= e^{-\rho\frac{\partial}{\partial x}}\psi_\alpha(x, y, z),
\end{aligned}
$$

gdzie funkcję operatora rozumiemy jako jego rozwinięcie w szereg potęgowy, tzn.

$$
e^A = \sum_0^{+\infty} \frac{A^n}{n!},
$$

gdzie $A^n = \underbrace{A \circ A \circ ... \circ A}_{n \text{ razy}}$ rozumiemy jak n-krotne złożenie operatora.

Translacja przestrzenna

Przyjmijmy dla prostoty $\vec{\rho} = [\rho, 0, 0]$ i rozwińmy w szereg Taylora

$$
\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) &= \psi_\alpha(x - \rho, y, z) = \psi_\alpha(x, y, z) + \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial x}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho) \\
&+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_\alpha(x, y, z)(-\rho)^2 + \ldots \\
&= \left[1 + \frac{(-\rho)}{1!}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(-\rho)^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \ldots\right]\psi_\alpha(x, y, z) \\
&= e^{-\rho\frac{\partial}{\partial x}}\psi_\alpha(x, y, z),
\end{aligned}
$$

gdzie funkcję operatora rozumiemy jako jego rozwinięcie w szereg potęgowy, tzn.

$$
e^A = \sum_0^{+\infty} \frac{A^n}{n!},
$$

gdzie $A^n = \underbrace{A \circ A \circ \ldots \circ A}_{n \text{ razy}}$ rozumiemy jak n-krotne złożenie operatora.

Oczywiście dla $\vec{\rho} = [0, \rho, 0]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\rho \frac{\partial}{\partial y}} \psi_\alpha(x, y, z),$$

a dla $\vec{\rho} = [0, 0, \rho]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\rho \frac{\partial}{\partial z}} \psi_\alpha(x, y, z).$$

Translacja przestrzenna

Oczywiście dla $\vec{\rho} = [0, \rho, 0]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\rho \frac{\partial}{\partial y}} \psi_\alpha(x, y, z),$$

a dla $\vec{\rho} = [0, 0, \rho]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\rho \frac{\partial}{\partial z}} \psi_\alpha(x, y, z).$$

Dla dowolnego wektora $\vec{\rho} = [\rho_x, \rho_y, \rho_z]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) =$$

Translacja przestrzenna

Oczywiście dla $\vec{\rho} = [0, \rho, 0]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\rho \frac{\partial}{\partial y}} \psi_\alpha(x, y, z),$$

a dla $\vec{\rho} = [0, 0, \rho]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\rho \frac{\partial}{\partial z}} \psi_\alpha(x, y, z).$$

Dla dowolnego wektora $\vec{\rho} = [\rho_x, \rho_y, \rho_z]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) \quad = \quad e^{-\rho_x \frac{\partial}{\partial x}} e^{-\rho_y \frac{\partial}{\partial y}} e^{-\rho_z \frac{\partial}{\partial z}} \psi_\alpha(x, y, z).$$

Oczywiście dla $\vec{\rho} = [0, \rho, 0]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\rho \frac{\partial}{\partial y}} \psi_\alpha(x, y, z),$$

a dla $\vec{\rho} = [0, 0, \rho]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\rho \frac{\partial}{\partial z}} \psi_\alpha(x, y, z).$$

Dla dowolnego wektora $\vec{\rho} = [\rho_x, \rho_y, \rho_z]$ otrzymamy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\rho_x \frac{\partial}{\partial x}} e^{-\rho_y \frac{\partial}{\partial y}} e^{-\rho_z \frac{\partial}{\partial z}} \psi_\alpha(x, y, z).$$

Translacja przestrzenna

Dla operatorów, które można reprezentować przez macierze kwadratowe, skończenie lub nieskończenie wymiarowe, zachodzi

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]},$$

pod warunkiem, że $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0.$

Zadanie. Udowodnić powyższy wzór.

Pochodne cząstkowe wzajemnie komutują, więc

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\left(\rho_x \frac{\partial}{\partial x} + \rho_y \frac{\partial}{\partial y} + \rho_z \frac{\partial}{\partial z}\right)} \psi_\alpha(x, y, z)$$

Translacja przestrzenna

Dla operatorów, które można reprezentować przez macierze kwadratowe, skończenie lub nieskończenie wymiarowe, zachodzi

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]},$$

pod warunkiem, że $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$.
Zadanie. Udowodnić powyższy wzór.
Pochodne cząstkowe wzajemnie komutują, więc

$$\psi_\alpha(\vec{r}-\vec{\rho}) \quad = \quad e^{-\left(\rho_x \frac{\partial}{\partial x} + \rho_y \frac{\partial}{\partial y} + \rho_z \frac{\partial}{\partial z}\right)} \psi_\alpha(x,y,z)$$
$$=$$

Dla operatorów, które można reprezentować przez macierze kwadratowe, skończenie lub nieskończenie wymiarowe, zachodzi

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]},$$

pod warunkiem, że $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$.
Zadanie. Udowodnić powyższy wzór.
Pochodne cząstkowe wzajemnie komutują, więc

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\vec{r}-\vec{\rho}) &= e^{-\left(\rho_x \frac{\partial}{\partial x} + \rho_y \frac{\partial}{\partial y} + \rho_z \frac{\partial}{\partial z}\right)} \psi_\alpha(x,y,z) \\ &= e^{-\vec{\rho}\cdot\vec{\nabla}} \psi_\alpha(x,y,z) =\end{aligned}$$

Dla operatorów, które można reprezentować przez macierze kwadratowe, skończenie lub nieskończenie wymiarowe, zachodzi

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]},$$

pod warunkiem, że $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$.
Zadanie. Udowodnić powyższy wzór.
Pochodne cząstkowe wzajemnie komutują, więc

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\vec{r}-\vec{\rho}) &= e^{-\left(\rho_x \frac{\partial}{\partial x} + \rho_y \frac{\partial}{\partial y} + \rho_z \frac{\partial}{\partial z}\right)} \psi_\alpha(x,y,z) \\ &= e^{-\vec{\rho}\cdot\vec{\nabla}} \psi_\alpha(x,y,z) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}} \psi_\alpha(\vec{r}),\end{aligned}$$

Translacja przestrzenna

Dla operatorów, które można reprezentować przez macierze kwadratowe, skończenie lub nieskończenie wymiarowe, zachodzi

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]},$$

pod warunkiem, że $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0.$

Zadanie. Udowodnić powyższy wzór.

Pochodne cząstkowe wzajemnie komutują, więc

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\vec{r}-\vec{\rho}) &= e^{-\left(\rho_x \frac{\partial}{\partial x}+\rho_y \frac{\partial}{\partial y}+\rho_z \frac{\partial}{\partial z}\right)}\psi_\alpha(x,y,z) \\ &= e^{-\vec{\rho}\cdot\vec{\nabla}}\psi_\alpha(x,y,z) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}\psi_\alpha(\vec{r}),\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy definicję operatora pędu w reprezentacji położeniowej

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \qquad \Rightarrow$$

Translacja przestrzenna

Dla operatorów, które można reprezentować przez macierze kwadratowe, skończenie lub nieskończenie wymiarowe, zachodzi

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]},$$

pod warunkiem, że $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$.

Zadanie. Udowodnić powyższy wzór.

Pochodne cząstkowe wzajemnie komutują, więc

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) &= e^{-\left(\rho_x \frac{\partial}{\partial x} + \rho_y \frac{\partial}{\partial y} + \rho_z \frac{\partial}{\partial z}\right)} \psi_\alpha(x,y,z) \\ &= e^{-\vec{\rho}\cdot\vec{\nabla}} \psi_\alpha(x,y,z) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}} \psi_\alpha(\vec{r}), \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy definicję operatora pędu w reprezentacji położeniowej

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\nabla} = \frac{i}{\hbar}\vec{p}.$$

Dla operatorów, które można reprezentować przez macierze kwadratowe, skończenie lub nieskończenie wymiarowe, zachodzi

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]},$$

pod warunkiem, że $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$.
Zadanie. Udowodnić powyższy wzór.
Pochodne cząstkowe wzajemnie komutują, więc

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\vec{r}-\vec{\rho}) &= e^{-\left(\rho_x \frac{\partial}{\partial x} + \rho_y \frac{\partial}{\partial y} + \rho_z \frac{\partial}{\partial z}\right)} \psi_\alpha(x,y,z) \\ &= e^{-\vec{\rho}\cdot\vec{\nabla}} \psi_\alpha(x,y,z) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}} \psi_\alpha(\vec{r}),\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy definicję operatora pędu w reprezentacji położeniowej

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\nabla} = \frac{i}{\hbar}\vec{p}.$$

Otrzymaliśmy wzór

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}\psi_\alpha(\vec{r}).$$

Porównajmy ten wynik z wzorem

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}).$$

Translacja przestrzenna

Otrzymaliśmy wzór

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}\psi_\alpha(\vec{r}).$$

Porównajmy ten wynik z wzorem

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}).$$

Widzimy, że unitarny operator przesunięcia przestrzennego $U_{\vec{r}}(\vec{\rho})$ ma postać

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}.$$

Mówimy, że operator pędu jest generatorem translacji przestrzennej. Pojęcie generatora wyjaśnimy bliżej za chwilę.

Translacja przestrzenna

Otrzymaliśmy wzór

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}\psi_\alpha(\vec{r}).$$

Porównajmy ten wynik z wzorem

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}).$$

Widzimy, że unitarny operator przesunięcia przestrzennego $U_{\vec{r}}(\vec{\rho})$ ma postać

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}.$$

Mówimy, że operator pędu jest generatorem translacji przestrzennej. Pojęcie generatora wyjaśnimy bliżej za chwilę.

Mimo, że korzystaliśmy z reprezentacji położeniowej, to operator $U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}$ nie zależy od wyboru reprezentacji i możemy zapisać związek pomiędzy stanem wyjściowym $|\alpha(t)\rangle$ a stanem przesuniętym $|\alpha'(t)\rangle$ w dowolnej reprezentacji możemy zapisać następująco

Translacja przestrzenna

Mimo, że korzystaliśmy z reprezentacji położeniowej, to operator $U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}$ nie zależy od wyboru reprezentacji i możemy zapisać związek pomiędzy stanem wyjściowym $|\alpha(t)\rangle$ a stanem przesuniętym $|\alpha'(t)\rangle$ w dowolnej reprezentacji możemy zapisać następująco

$$|\alpha'(t)\rangle = U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\,|\alpha(t)\rangle\,.$$

Mimo, że korzystaliśmy z reprezentacji położeniowej, to operator $U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}$ nie zależy od wyboru reprezentacji i możemy zapisać związek pomiędzy stanem wyjściowym $|\alpha(t)\rangle$ a stanem przesuniętym $|\alpha'(t)\rangle$ w dowolnej reprezentacji możemy zapisać następująco

$$|\alpha'(t)\rangle = U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\,|\alpha(t)\rangle\,.$$

Translacja przestrzenna

Pokażemy, że operator translacji przestrzennej jest operatorem unitarnym. Obliczmy

$$
\begin{aligned}
U^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho}) &= \left[e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}\right]^{\dagger} = \left[\sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}\right)^{n}\right]^{\dagger} \\
&= \sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left[\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}\right)^{n}\right]^{\dagger} = \sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left[\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}\right)^{\dagger}\right]^{n} \\
&= \sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}^{\dagger}\right)^{n} = \sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}\right)^{n} = e^{+\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}},
\end{aligned}
$$

gdzie skorzystaliśmy z hermitowskości operatora pędu $\vec{p}^{\dagger} = \vec{p}$.

Pokażemy, że operator translacji przestrzennej jest operatorem unitarnym. Obliczmy

$$
\begin{aligned}
U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho}) &= \left[e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}\right]^{\dagger} = \left[\sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}\right)^{n}\right]^{\dagger} \\
&= \sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left[\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}\right)^{n}\right]^{\dagger} = \sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left[\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}\right)^{\dagger}\right]^{n} \\
&= \sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}^{\dagger}\right)^{n} = \sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}\right)^{n} = e^{+\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}},
\end{aligned}
$$

gdzie skorzystaliśmy z hermitowskości operatora pędu $\vec{p}^{\dagger} = \vec{p}$. W takim razie

$$U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho})U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}} = 1,$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że składowe operatora pędu komutują, $[p_i, p_j] = 0$.

Translacja przestrzenna

Pokażemy, że operator translacji przestrzennej jest operatorem unitarnym. Obliczmy

$$
\begin{aligned}
U^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho}) &= \left[e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}\right]^{\dagger} = \left[\sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}\right)^{n}\right]^{\dagger} \\
&= \sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left[\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}\right)^{n}\right]^{\dagger} = \sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left[\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}\right)^{\dagger}\right]^{n} \\
&= \sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}^{\dagger}\right)^{n} = \sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}\right)^{n} = e^{+\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}},
\end{aligned}
$$

gdzie skorzystaliśmy z hermitowskości operatora pędu $\vec{p}^{\dagger} = \vec{p}$. W takim razie

$$
U^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho})U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}} = 1,
$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że składowe operatora pędu komutują, $[p_i, p_j] = 0$.

Translacja przestrzenna

Stan przesunięty $|\alpha'(t)\rangle$ nie musi spełniać równania Schrödingera, nawet jeśli stan wyjściowy $|\alpha(t)\rangle$ je spełniał.
Obliczmy

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha'(t)\rangle &= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\,|\alpha(t)\rangle\right) = U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle \\ &= U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H\,|\alpha(t)\rangle = U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho})\,|\alpha'(t)\rangle\,, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równania Schrödingera dla stanu $|\alpha(t)\rangle$

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle = H\,|\alpha(t)\rangle$$

i ze związku
$U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\,|\alpha(t)\rangle = |\alpha'(t)\rangle \quad \Rightarrow \quad U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho}) U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\,|\alpha(t)\rangle = U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho})\,|\alpha'(t)\rangle$
$\Rightarrow \quad |\alpha(t)\rangle = U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho})\,|\alpha'(t)\rangle\,.$

Translacja przestrzenna

Stan przesunięty $|\alpha'(t)\rangle$ nie musi spełniać równania Schrödingera, nawet jeśli stan wyjściowy $|\alpha(t)\rangle$ je spełniał.
Obliczmy

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle &= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\,|\alpha(t)\rangle\right) = U_{\vec{r}}(\vec{\rho})i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&= U_{\vec{r}}(\vec{\rho})H\,|\alpha(t)\rangle = U_{\vec{r}}(\vec{\rho})HU^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho})\,|\alpha'(t)\rangle\,,
\end{aligned}
$$

gdzie skorzystaliśmy z równania Schrödingera dla stanu $|\alpha(t)\rangle$

$$
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle = H\,|\alpha(t)\rangle
$$

i ze związku
$U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\,|\alpha(t)\rangle = |\alpha'(t)\rangle \quad \Rightarrow \quad U^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho})U_{\vec{r}}(\vec{\rho})\,|\alpha(t)\rangle = U^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho})\,|\alpha'(t)\rangle$
$\Rightarrow \quad |\alpha(t)\rangle = U^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho})\,|\alpha'(t)\rangle\,.$

Widzimy, że stan przesunięty $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia równanie

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle = U_{\vec{r}}(\vec{\rho})HU_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho})\,|\alpha'(t)\rangle\,.$$

Równanie to jest równoważne równaniu Schrödingera

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle = H\,|\alpha'(t)\rangle$$

tylko jeśli

Translacja przestrzenna

Widzimy, że stan przesunięty $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia równanie

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha'(t)\rangle = U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho}) |\alpha'(t)\rangle .$$

Równanie to jest równoważne równaniu Schrödingera

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha'(t)\rangle = H |\alpha'(t)\rangle$$

tylko jeśli

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho}) = H.$$

Widzimy, że stan przesunięty $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia równanie

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha'(t)\rangle = U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho}) |\alpha'(t)\rangle .$$

Równanie to jest równoważne równaniu Schrödingera

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha'(t)\rangle = H |\alpha'(t)\rangle$$

tylko jeśli

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho}) = H.$$

Pomnóżmy obie strony tego równania z prawej strony przez $U_{\vec{r}}(\vec{\rho})$

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H U^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = H \quad \Rightarrow \quad U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H = H U_{\vec{r}}(\vec{\rho}).$$

Translacja przestrzenna

Pomnóżmy obie strony tego równania z prawej strony przez $U_{\vec{r}}(\vec{\rho})$

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H U^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = H \quad \Rightarrow \quad U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H = H U_{\vec{r}}(\vec{\rho}).$$

Stan $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia równanie Schrödingera tylko jeśli

$$[U_{\vec{r}}(\vec{\rho}), H] = 0 \quad \Rightarrow$$

Pomnóżmy obie strony tego równania z prawej strony przez $U_{\vec{r}}(\vec{\rho})$

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H U^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = H \quad \Rightarrow \quad U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H = H U_{\vec{r}}(\vec{\rho}).$$

Stan $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia równanie Schrödingera tylko jeśli

$$[U_{\vec{r}}(\vec{\rho}), H] = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}, H\right] = 0.$$

Pomnóżmy obie strony tego równania z prawej strony przez $U_{\vec{r}}(\vec{\rho})$

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H U_{\vec{r}}^{\dagger}(\vec{\rho}) = H \quad \Rightarrow \quad U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H = H U_{\vec{r}}(\vec{\rho}).$$

Stan $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia równanie Schrödingera tylko jeśli

$$[U_{\vec{r}}(\vec{\rho}), H] = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}, H\right] = 0.$$

Ostatnia równość zachodzi tylko jeśli

$$[\vec{p}, H] = 0.$$

Translacja przestrzenna

Pomnóżmy obie strony tego równania z prawej strony przez $U_{\vec{r}}(\vec{\rho})$

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H U^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = H \quad \Rightarrow \quad U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H = H U_{\vec{r}}(\vec{\rho}).$$

Stan $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia równanie Schrödingera tylko jeśli

$$[U_{\vec{r}}(\vec{\rho}), H] = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}, H\right] = 0.$$

Ostatnia równość zachodzi tylko jeśli

$$[\vec{p}, H] = 0.$$

Aby zrozumieć sens tej relacji komutacji wprowadzimy nieco inne sformułowanie mechaniki kwantowej niż to, które rozważaliśmy dotychczas. Sformułowanie to nosi nazwę obrazu Heisenberga.

Pomnóżmy obie strony tego równania z prawej strony przez $U_{\vec{r}}(\vec{\rho})$

$$U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H U^{\dagger}_{\vec{r}}(\vec{\rho}) = H \quad \Rightarrow \quad U_{\vec{r}}(\vec{\rho}) H = H U_{\vec{r}}(\vec{\rho}).$$

Stan $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia równanie Schrödingera tylko jeśli

$$[U_{\vec{r}}(\vec{\rho}), H] = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}, H\right] = 0.$$

Ostatnia równość zachodzi tylko jeśli

$$[\vec{p}, H] = 0.$$

Aby zrozumieć sens tej relacji komutacji wprowadzimy nieco inne sformułowanie mechaniki kwantowej niż to, które rozważaliśmy dotychczas. Sformułowanie to nosi nazwę obrazu Heisenberga.

Dotychczas pracowaliśmy w tzw. obrazie Schrödingera, gdzie ewolucja stanów kwantowych jest opisywana równaniem Schrödingera, które w notacji Diraca ma postać

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha_S(t)\rangle = H |\alpha_S(t)\rangle,$$

gdzie dodaliśmy indeks S dla podkreślenia, że $|\alpha_S(t)\rangle$ jest stanem kwantowym w obrazie Schrödingera.

Dotychczas pracowaliśmy w tzw. obrazie Schrödingera, gdzie ewolucja stanów kwantowych jest opisywana równaniem Schrödingera, które w notacji Diraca ma postać

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha_S(t)\rangle = H |\alpha_S(t)\rangle,$$

gdzie dodaliśmy indeks S dla podkreślenia, że $|\alpha_S(t)\rangle$ jest stanem kwantowym w obrazie Schrödingera. Równanie sprzężone hermitowsko do równania Schrödingera ma postać

$$-i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle\alpha_S(t)| = \langle\alpha_S(t)| H^\dagger$$

Obraz Schrödingera

Dotychczas pracowaliśmy w tzw. obrazie Schrödingera, gdzie ewolucja stanów kwantowych jest opisywana równaniem Schrödingera, które w notacji Diraca ma postać

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha_S(t)\right\rangle = H\left|\alpha_S(t)\right\rangle,$$

gdzie dodaliśmy indeks S dla podkreślenia, że $\left|\alpha_S(t)\right\rangle$ jest stanem kwantowym w obrazie Schrödingera. Równanie sprzężone hermitowsko do równania Schrödingera ma postać

$$-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\alpha_S(t)\right| = \left\langle\alpha_S(t)\right| H^\dagger = \left\langle\alpha_S(t)\right| H,$$

Obraz Schrödingera

Dotychczas pracowaliśmy w tzw. obrazie Schrödingera, gdzie ewolucja stanów kwantowych jest opisywana równaniem Schrödingera, które w notacji Diraca ma postać

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha_S(t)\right\rangle = H\left|\alpha_S(t)\right\rangle,$$

gdzie dodaliśmy indeks S dla podkreślenia, że $\left|\alpha_S(t)\right\rangle$ jest stanem kwantowym w obrazie Schrödingera. Równanie sprzężone hermitowsko do równania Schrödingera ma postać

$$-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\alpha_S(t)\right| = \left\langle\alpha_S(t)\right| H^\dagger = \left\langle\alpha_S(t)\right| H,$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że operator Hamiltona jest hermitowski.

Obraz Schrödingera

Dotychczas pracowaliśmy w tzw. obrazie Schrödingera, gdzie ewolucja stanów kwantowych jest opisywana równaniem Schrödingera, które w notacji Diraca ma postać

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha_S(t)\rangle = H\,|\alpha_S(t)\rangle,$$

gdzie dodaliśmy indeks S dla podkreślenia, że $|\alpha_S(t)\rangle$ jest stanem kwantowym w obrazie Schrödingera. Równanie sprzężone hermitowsko do równania Schrödingera ma postać

$$-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\langle\alpha_S(t)| = \langle\alpha_S(t)|\,H^\dagger = \langle\alpha_S(t)|\,H,$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że operator Hamiltona jest hermitowski.

Załóżmy, że operator H nie zależy jawnie od czasu, wtedy rozwiązania równania Schródingera i równania do niego sprzężonego mają postać

$$\begin{aligned} |\alpha_S(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\,|\alpha_S(t_0)\rangle\,, \\ \langle\alpha_S(t)| &= \langle\alpha_S(t_0)|\,e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Rzeczywiście, wstawmy stan $|\alpha_S(t)\rangle$ do równania Schródingera i obliczmy pochodną

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha_S(t)\rangle &= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\,|\alpha_S(t_0)\rangle\right) \\ &= i\hbar\left(-\frac{i}{\hbar}\right)He^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\,|\alpha_S(t_0)\rangle = H\,|\alpha_S(t)\rangle\,. \end{aligned}$$

Zauważmy, że ponieważ operator $e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$ rozumiemy jako rozwinięcie w szereg potęgowy, to wszystko jedno, czy operator H napiszemy z lewej, czy z prawej strony eksponenty.

Obraz Schrödingera

Załóżmy, że operator H nie zależy jawnie od czasu, wtedy rozwiązania równania Schródingera i równania do niego sprzężonego mają postać

$$
\begin{aligned}
|\alpha_S(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\,|\alpha_S(t_0)\rangle\,, \\
\langle\alpha_S(t)| &= \langle\alpha_S(t_0)|\,e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}.
\end{aligned}
$$

Rzeczywiście, wstawmy stan $|\alpha_S(t)\rangle$ do równania Schródingera i obliczmy pochodną

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha_S(t)\rangle &= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\,|\alpha_S(t_0)\rangle\right) \\
&= i\hbar\left(-\frac{i}{\hbar}\right)He^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\,|\alpha_S(t_0)\rangle = H\,|\alpha_S(t)\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że ponieważ operator $e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$ rozumiemy jako rozwinięcie w szereg potęgowy, to wszystko jedno, czy operator H napiszemy z lewej, czy z prawej strony eksponenty.

Rzeczywiście

$$
\begin{aligned}
He^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} &= H\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\right)^n H^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\right)^n H^{n+1} \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\right)^n H^n\right] H = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}H.
\end{aligned}
$$

Zadanie. Pokazać, że podany wyżej stan $\langle\alpha_S(t)|$ jest rozwiązaniem równania sprzężonego równania Schrödingera.

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} He^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} &= H\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\right)^n H^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\right)^n H^{n+1} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\right)^n H^n\right] H = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}H. \end{aligned}$$

Zadanie. Pokazać, że podany wyżej stan $\langle\alpha_S(t)|$ jest rozwiązaniem równania sprzężonego równania Schrödingera.

Obraz Heisenberga

Zdefiniujmy wektor stanu i operator w obrazie Heisenberga

$$\begin{aligned} |\alpha_H\rangle &\equiv |\alpha_S(t_0)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\,|\alpha_S(t)\rangle\,, \\ \Omega_H &\equiv e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} & \langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle \\ = \; & \langle\alpha_S(t)|\,\underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_{I}\,\Omega_S\,\underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_{I}\,|\beta_S(t)\rangle \end{aligned}$$

Zdefiniujmy wektor stanu i operator w obrazie Heisenberga

$$
\begin{aligned}
|\alpha_H\rangle &\equiv |\alpha_S(t_0)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\,|\alpha_S(t)\rangle\,, \\
\Omega_H &\equiv e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}.
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
& \langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle \\
= \; & \langle\alpha_S(t)|\,\underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_{I}\,\Omega_S\,\underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_{I}\,|\beta_S(t)\rangle \\
= \; &
\end{aligned}
$$

Zdefiniujmy wektor stanu i operator w obrazie Heisenberga

$$
\begin{aligned}
|\alpha_H\rangle &\equiv |\alpha_S(t_0)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\,|\alpha_S(t)\rangle\,,\\
\Omega_H &\equiv e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}.
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
& \langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle\\
= & \langle\alpha_S(t)|\,\underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_{I}\,\Omega_S\,\underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_{I}\,|\beta_S(t)\rangle\\
= & \langle\alpha_H|\Omega_H|\beta_H\rangle\,,
\end{aligned}
$$

Obraz Heisenberga

Zdefiniujmy wektor stanu i operator w obrazie Heisenberga

$$
\begin{aligned}
|\alpha_H\rangle &\equiv |\alpha_S(t_0)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\,|\alpha_S(t)\rangle\,, \\
\Omega_H &\equiv e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}.
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
& \langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle \\
= & \langle\alpha_S(t)|\,\underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_{I}\Omega_S\,\underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_{I}\,|\beta_S(t)\rangle \\
= & \langle\alpha_H|\Omega_H|\beta_H\rangle\,,
\end{aligned}
$$

a więc element macierzowy operatora jest taki sam w obu orazach.

Zdefiniujmy wektor stanu i operator w obrazie Heisenberga

$$\begin{aligned} |\alpha_H\rangle &\equiv |\alpha_S(t_0)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\,|\alpha_S(t)\rangle\,, \\ \Omega_H &\equiv e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} & \langle\alpha_S(t)|\Omega_S|\beta_S(t)\rangle \\ = & \langle\alpha_S(t)|\,\underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_{I}\Omega_S\,\underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_{I}\,|\beta_S(t)\rangle \\ = & \langle\alpha_H|\Omega_H|\beta_H\rangle\,, \end{aligned}$$

a więc element macierzowy operatora jest taki sam w obu orazach.

Obraz Heisenberga

Obliczmy szybkość zmiany elementu macierzowego operatora w obrazie Heisenberga.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\alpha_H|\Omega_H|\beta_H\rangle \quad =$$

Obraz Heisenberga

Obliczmy szybkość zmiany elementu macierzowego operatora w obrazie Heisenberga.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \alpha_H | \Omega_H | \beta_H \rangle \quad = \quad \langle \alpha_H | \, \frac{\mathrm{d}\Omega_H}{\mathrm{d}t} \, | \beta_H \rangle$$

Obliczmy szybkość zmiany elementu macierzowego operatora w obrazie Heisenberga.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\alpha_H|\Omega_H|\beta_H\rangle = \langle\alpha_H|\,\frac{\mathrm{d}\Omega_H}{\mathrm{d}t}\,|\beta_H\rangle$$

$$=$$

Obliczmy szybkość zmiany elementu macierzowego operatora w obrazie Heisenberga.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\alpha_H|\Omega_H|\beta_H\rangle &= \langle\alpha_H|\,\frac{\mathrm{d}\Omega_H}{\mathrm{d}t}\,|\beta_H\rangle \\ &= \langle\alpha_H|\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\right)|\beta_H\rangle\end{aligned}$$

Obliczmy szybkość zmiany elementu macierzowego operatora w obrazie Heisenberga.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\alpha_H|\Omega_H|\beta_H\rangle &= \langle\alpha_H|\,\frac{\mathrm{d}\Omega_H}{\mathrm{d}t}\,|\beta_H\rangle \\
&= \langle\alpha_H|\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\right)|\beta_H\rangle \\
&=
\end{aligned}
$$

Obliczmy szybkość zmiany elementu macierzowego operatora w obrazie Heisenberga.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\alpha_H|\Omega_H|\beta_H\rangle &= \langle\alpha_H|\,\frac{\mathrm{d}\Omega_H}{\mathrm{d}t}\,|\beta_H\rangle \\
&= \langle\alpha_H|\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\right)|\beta_H\rangle \\
&= \langle\alpha_H|\,\underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\frac{\partial\Omega_S}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_{\frac{\partial\Omega_H}{\partial t}}\,|\beta_H\rangle
\end{aligned}$$

Obraz Heisenberga

Obliczmy szybkość zmiany elementu macierzowego operatora w obrazie Heisenberga.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\alpha_H|\Omega_H|\beta_H\rangle &= \langle\alpha_H|\,\frac{\mathrm{d}\Omega_H}{\mathrm{d}t}\,|\beta_H\rangle \\
&= \langle\alpha_H|\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\right)|\beta_H\rangle \\
&= \langle\alpha_H|\,\underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\frac{\partial\Omega_S}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_{\frac{\partial\Omega_H}{\partial t}}\,|\beta_H\rangle
\end{aligned}
$$

Obliczmy szybkość zmiany elementu macierzowego operatora w obrazie Heisenberga.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\alpha_H|\Omega_H|\beta_H\rangle &= \langle\alpha_H|\,\frac{\mathrm{d}\Omega_H}{\mathrm{d}t}\,|\beta_H\rangle \\
&= \langle\alpha_H|\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\right)|\beta_H\rangle \\
&= \langle\alpha_H|\,\underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\frac{\partial\Omega_S}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_{\frac{\partial\Omega_H}{\partial t}}\,|\beta_H\rangle \\
&+ \frac{1}{i\hbar}\langle\alpha_H|\left[\underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_{\Omega_H}, H\right]|\beta_H\rangle\,,
\end{aligned}
$$

Obliczmy szybkość zmiany elementu macierzowego operatora w obrazie Heisenberga.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\alpha_H|\Omega_H|\beta_H\rangle &= \langle\alpha_H|\,\frac{\mathrm{d}\Omega_H}{\mathrm{d}t}\,|\beta_H\rangle \\
&= \langle\alpha_H|\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\right)|\beta_H\rangle \\
&= \langle\alpha_H|\,\underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\frac{\partial\Omega_S}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_{\frac{\partial\Omega_H}{\partial t}}|\beta_H\rangle \\
&+ \frac{1}{i\hbar}\langle\alpha_H|\left[\underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_{\Omega_H}, H\right]|\beta_H\rangle\,,
\end{aligned}
$$

gdzie wyraz z komutatorem jest wynikiem różniczkowania obu eksponent.

Obliczmy szybkość zmiany elementu macierzowego operatora w obrazie Heisenberga.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\alpha_H|\Omega_H|\beta_H\rangle &= \langle\alpha_H|\,\frac{\mathrm{d}\Omega_H}{\mathrm{d}t}\,|\beta_H\rangle \\
&= \langle\alpha_H|\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\right)|\beta_H\rangle \\
&= \langle\alpha_H|\,\underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\frac{\partial\Omega_S}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_{\frac{\partial\Omega_H}{\partial t}}\,|\beta_H\rangle \\
&+ \frac{1}{i\hbar}\langle\alpha_H|\left[\underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\Omega_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}_{\Omega_H}, H\right]|\beta_H\rangle\,,
\end{aligned}
$$

gdzie wyraz z komutatorem jest wynikiem różniczkowania obu eksponent.

Obraz Heisenberga

Uwzględniając ostatnią równość dostajemy:

$$\langle\alpha_H|\,\frac{\mathrm{d}\Omega_H}{\mathrm{d}t}\,|\beta_H\rangle = \langle\alpha_H|\,\frac{\partial\Omega_H}{\partial t}\,|\beta_H\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\alpha_H|\,\left[\Omega_H, H\right]\,|\beta_H\rangle\,,$$

a opuszczając dowolne stany $\langle\alpha_H\,|$ i $|\beta_H\rangle$ i mnożąc obie strony przez $i\hbar$ otrzymamy równanie operatorowe ewolucji zmiennej dynamicznej Ω_H w obrazie Heisenberga

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\Omega_H}{\mathrm{d}t} = i\hbar\frac{\partial\Omega_H}{\partial t} + [\Omega_H, H]\,.$$

Obraz Heisenberga

Uwzględniając ostatnią równość dostajemy:

$$\langle\alpha_H|\ \frac{\mathrm{d}\Omega_H}{\mathrm{d}t}\ |\beta_H\rangle = \langle\alpha_H|\ \frac{\partial\Omega_H}{\partial t}\ |\beta_H\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\alpha_H|\ \Big[\Omega_H, H\Big]\ |\beta_H\rangle\,,$$

a opuszczając dowolne stany $\langle\alpha_H\,|$ i $|\beta_H\rangle$ i mnożąc obie strony przez $i\hbar$ otrzymamy równanie operatorowe ewolucji zmiennej dynamicznej Ω_H w obrazie Heisenberga

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\Omega_H}{\mathrm{d}t} = i\hbar\frac{\partial\Omega_H}{\partial t} + [\Omega_H, H]\,.$$

To właśnie w ten sposób Werner Heisenberg po raz pierwszy w 1925 r. sformułował mechanikę kwantową, a Erwin Schrödinger dopiero w następnym roku podał swoje równanie.

Uwzględniając ostatnią równość dostajemy:

$$\langle \alpha_H | \frac{\mathrm{d}\Omega_H}{\mathrm{d}t} | \beta_H \rangle = \langle \alpha_H | \frac{\partial \Omega_H}{\partial t} | \beta_H \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_H | \left[\Omega_H, H \right] | \beta_H \rangle ,$$

a opuszczając dowolne stany $\langle \alpha_H \mid$ i $|\beta_H\rangle$ i mnożąc obie strony przez $i\hbar$ otrzymamy równanie operatorowe ewolucji zmiennej dynamicznej Ω_H w obrazie Heisenberga

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}\Omega_H}{\mathrm{d}t} = i\hbar \frac{\partial \Omega_H}{\partial t} + [\Omega_H, H] .$$

To właśnie w ten sposób Werner Heisenberg po raz pierwszy w 1925 r. sformułował mechanikę kwantową, a Erwin Schrödinger dopiero w następnym roku podał swoje równanie.

Zauważmy, że jeśli operator Ω_H nie zależy jawnie od czasu i komutuje z operatorem Hamiltona, Uwzględniając ostatnią równość dostajemy:

$$\langle \alpha_H | \frac{\mathrm{d}\Omega_H}{\mathrm{d}t} | \beta_H \rangle = \langle \alpha_H | \frac{\partial \Omega_H}{\partial t} | \beta_H \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha_H | \left[\Omega_H, H \right] | \beta_H \rangle ,$$

a opuszczając dowolne stany $\langle \alpha_H |$ i $| \beta_H \rangle$ i mnożąc obie strony przez $i\hbar$ otrzymamy równanie operatorowe ewolucji zmiennej dynamicznej Ω_H w obrazie Heisenberga

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}\Omega_H}{\mathrm{d}t} = i\hbar \frac{\partial \Omega_H}{\partial t} + [\Omega_H, H] .$$

To właśnie w ten sposób Werner Heisenberg po raz pierwszy w 1925 r. sformułował mechanikę kwantową, a Erwin Schrödinger dopiero w następnym roku podał swoje równanie.
Zauważmy, że jeśli operator Ω_H nie zależy jawnie od czasu i komutuje z operatorem Hamiltona, tzn.

$$\frac{\partial \Omega_H}{\partial t} = 0 \quad \text{i} \quad [\Omega_H, H] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\Omega_H}{\mathrm{d}t} = 0,$$

co oznacza, że operator Ω_H jest stałą ruchu.

Obraz Heisenberga

Uwzględniając ostatnią równość dostajemy:

$$\langle\alpha_H|\,\frac{\mathrm{d}\Omega_H}{\mathrm{d}t}\,|\beta_H\rangle = \langle\alpha_H|\,\frac{\partial\Omega_H}{\partial t}\,|\beta_H\rangle + \frac{1}{i\hbar}\,\langle\alpha_H|\,\Big[\Omega_H, H\Big]\,|\beta_H\rangle\,,$$

a opuszczając dowolne stany $\langle\alpha_H\,|$ i $|\beta_H\rangle$ i mnożąc obie strony przez $i\hbar$ otrzymamy równanie operatorowe ewolucji zmiennej dynamicznej Ω_H w obrazie Heisenberga

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\Omega_H}{\mathrm{d}t} = i\hbar\frac{\partial\Omega_H}{\partial t} + [\Omega_H, H]\,.$$

To właśnie w ten sposób Werner Heisenberg po raz pierwszy w 1925 r. sformułował mechanikę kwantową, a Erwin Schrödinger dopiero w następnym roku podał swoje równanie.
Zauważmy, że jeśli operator Ω_H nie zależy jawnie od czasu i komutuje z operatorem Hamiltona, tzn.

$$\frac{\partial\Omega_H}{\partial t} = 0 \quad \mathrm{i} \quad [\Omega_H, H] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\Omega_H}{\mathrm{d}t} = 0,$$

co oznacza, że operator Ω_H jest stałą ruchu.

Translacja przestrzenna

Dlatego fakt, że $[\vec{p}, H] = 0$ oznacza, że pęd był stałą ruchu.

Widzimy, że jeśli układ kwantowy posiada symetrię względem translacji przestrzennych, to jego pęd jest zachowany.

Dlatego fakt, że $[\vec{p}, H] = 0$ oznacza, że pęd był stałą ruchu.

Widzimy, że jeśli układ kwantowy posiada symetrię względem translacji przestrzennych, to jego pęd jest zachowany.

Analogiczny związek pomiędzy symetrią względem translacji przestrzennych a zasadą zachowania pędu zachodzi również w mechanice klasycznej.

Translacja przestrzenna

Dlatego fakt, że $[\vec{p}, H] = 0$ oznacza, że pęd był stałą ruchu.

Widzimy, że jeśli układ kwantowy posiada symetrię względem translacji przestrzennych, to jego pęd jest zachowany.

Analogiczny związek pomiędzy symetrią względem translacji przestrzennych a zasadą zachowania pędu zachodzi również w mechanice klasycznej.

Przypomnijmy, że jeśli dwa operatory komutują, to mają wspólne wektory własne i są jednocześnie mierzalne.

Jeśli zatem stan $|\alpha\rangle$ będzie stanem własnym energii, tzn.

$$H\,|\alpha\rangle = E_\alpha\,|\alpha\rangle$$

i $[\vec{p}, H] = 0$, to stan $\vec{p}\,|\alpha\rangle$ będzie również stanem własnym operatora H do tej samej wartości własnej E_α, z czym na ogół wiąże się degeneracja wartości własnych energii, a więc symetria układu fizycznego prowadzi na ogół do degeneracji jego dozwolonych poziomów energetycznych.

Translacja przestrzenna

Dlatego fakt, że $[\vec{p}, H] = 0$ oznacza, że pęd był stałą ruchu.
Widzimy, że jeśli układ kwantowy posiada symetrię względem translacji przestrzennych, to jego pęd jest zachowany.
Analogiczny związek pomiędzy symetrią względem translacji przestrzennych a zasadą zachowania pędu zachodzi również w mechanice klasycznej.
Przypomnijmy, że jeśli dwa operatory komutują, to mają wspólne wektory własne i są jednocześnie mierzalne.
Jeśli zatem stan $|\alpha\rangle$ będzie stanem własnym energii, tzn.

$$H\,|\alpha\rangle = E_\alpha\,|\alpha\rangle$$

i $[\vec{p}, H] = 0$, to stan $\vec{p}\,|\alpha\rangle$ będzie również stanem własnym operatora H do tej samej wartości własnej E_α, z czym na ogół wiąże się degeneracja wartości własnych energii, a więc symetria układu fizycznego prowadzi na ogół do degeneracji jego dozwolonych poziomów energetycznych.

W dalszym ciągu postaramy się uogólnić te rozważania na przypadek dowolnej symetrii układu kwantowego.

Ogólnie, przekształcenie stanu kwantowego

$$|\psi\rangle \to |\psi'\rangle$$

jest symetrią jeżeli nie zmienia gęstości prawdopodobieństwa, tzn.

W dalszym ciągu postaramy się uogólnić te rozważania na przypadek dowolnej symetrii układu kwantowego.
Ogólnie, przekształcenie stanu kwantowego

$$|\psi\rangle \to |\psi'\rangle$$

jest symetrią jeżeli nie zmienia gęstości prawdopodobieństwa, tzn.

$$|\psi'|^2 = \langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = |\psi|^2 .$$

Symetria w sensie kwantowym

W dalszym ciągu postaramy się uogólnić te rozważania na przypadek dowolnej symetrii układu kwantowego.
Ogólnie, przekształcenie stanu kwantowego

$$|\psi\rangle \to |\psi'\rangle$$

jest symetrią jeżeli nie zmienia gęstości prawdopodobieństwa, tzn.

$$|\psi'|^2 = \langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = |\psi|^2 .$$

To samo możemy sformułować w wersji *pozadiagonalnej*, tzn. dla gęstości prawdopodobieństwa przejścia od stanu kwantowego $|\psi\rangle$ do stanu kwantowego $|\phi\rangle$

$$|\langle\phi'|\psi'\rangle|^2 = |\langle\phi|\psi\rangle|^2 .$$

Symetria w sensie kwantowym

W dalszym ciągu postaramy się uogólnić te rozważania na przypadek dowolnej symetrii układu kwantowego.
Ogólnie, przekształcenie stanu kwantowego

$$|\psi\rangle \to |\psi'\rangle$$

jest symetrią jeżeli nie zmienia gęstości prawdopodobieństwa, tzn.

$$|\psi'|^2 = \langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = |\psi|^2 .$$

To samo możemy sformułować w wersji *pozadiagonalnej*, tzn. dla gęstości prawdopodobieństwa przejścia od stanu kwantowego $|\psi\rangle$ do stanu kwantowego $|\phi\rangle$

$$|\langle\phi'|\psi'\rangle|^2 = |\langle\phi|\psi\rangle|^2 .$$

Ponieważ kwadrat modułu liczby zespolnej z, jest dany wzorem $|z|^2 = z^* z$, to równanie

$$\left|\langle\phi'|\psi'\rangle\right|^2 = \left|\langle\phi|\psi\rangle\right|^2$$

ma dwa rozwiązania:

1. $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle$

Symetria w sensie kwantowym

Ponieważ kwadrat modułu liczby zespolnej z, jest dany wzorem $|z|^2 = z^* z$, to równanie

$$\left|\langle\phi'|\psi'\rangle\right|^2 = \left|\langle\phi|\psi\rangle\right|^2$$

ma dwa rozwiązania:

1. $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle$
2. $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\phi\rangle.$

Ponieważ kwadrat modułu liczby zespolnej z, jest dany wzorem $|z|^2 = z^* z$, to równanie

$$|\langle\phi'|\psi'\rangle|^2 = |\langle\phi|\psi\rangle|^2$$

ma dwa rozwiązania:

1. $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle$
2. $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\phi\rangle$.

W pierwszym przypadku napiszmy związek

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \langle\psi'| = \langle U\psi| = \langle\psi| U^\dagger,$$

Symetria w sensie kwantowym

Ponieważ kwadrat modułu liczby zespolnej z, jest dany wzorem $|z|^2 = z^* z$, to równanie

$$\left|\langle\phi'|\psi'\rangle\right|^2 = \left|\langle\phi|\psi\rangle\right|^2$$

ma dwa rozwiązania:

1. $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle$
2. $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\phi\rangle$.

W pierwszym przypadku napiszmy związek

$$|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \langle\psi'| = \langle U\psi| = \langle\psi|\,U^\dagger,$$

a w drugim

$$|\psi'\rangle = A\,|\psi\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \langle\psi'| = \langle A\psi| = \langle\psi|\,A^\dagger.$$

Symetria w sensie kwantowym

Ponieważ kwadrat modułu liczby zespolnej z, jest dany wzorem $|z|^2 = z^* z$, to równanie

$$|\langle\phi'|\psi'\rangle|^2 = |\langle\phi|\psi\rangle|^2$$

ma dwa rozwiązania:

1. $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle$
2. $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\phi\rangle$.

W pierwszym przypadku napiszmy związek

$$|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \langle\psi'| = \langle U\psi| = \langle\psi|\,U^\dagger,$$

a w drugim

$$|\psi'\rangle = A\,|\psi\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \langle\psi'| = \langle A\psi| = \langle\psi|\,A^\dagger.$$

Symetria w sensie kwantowym

Zarówno operator U jak i operator A muszą być unitarne

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I \qquad \text{i} \qquad A^\dagger A = AA^\dagger = I,$$

ale operator U jest operatorem liniowym, tzn.

$$U\left|\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\right\rangle = \alpha_1 U\left|\psi_1\right\rangle + \alpha_2 U\left|\psi_2\right\rangle,$$

Zarówno operator U jak i operator A muszą być unitarne

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I \qquad \text{i} \qquad A^\dagger A = AA^\dagger = I,$$

ale operator U jest operatorem liniowym, tzn.

$$U\left|\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\right\rangle = \alpha_1 U\left|\psi_1\right\rangle + \alpha_2 U\left|\psi_2\right\rangle,$$

a operator A jest operatorem antyliniowym, tzn.

$$A\left|\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\right\rangle = \alpha_1^* A\left|\psi_1\right\rangle + \alpha_2^* A\left|\psi_2\right\rangle,$$

dla dowolnych liczb zespolonych α_1, α_2.

Symetria w sensie kwantowym

Zarówno operator U jak i operator A muszą być unitarne

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I \qquad \text{i} \qquad A^\dagger A = AA^\dagger = I,$$

ale operator U jest operatorem liniowym, tzn.

$$U\left|\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\right\rangle = \alpha_1 U\left|\psi_1\right\rangle + \alpha_2 U\left|\psi_2\right\rangle,$$

a operator A jest operatorem antyliniowym, tzn.

$$A\left|\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\right\rangle = \alpha_1^* A\left|\psi_1\right\rangle + \alpha_2^* A\left|\psi_2\right\rangle,$$

dla dowolnych liczb zespolonych α_1, α_2.
Operator A nazywamy operatorem antyunitarnym.

Zarówno operator U jak i operator A muszą być unitarne

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I \qquad \text{i} \qquad A^\dagger A = AA^\dagger = I,$$

ale operator U jest operatorem liniowym, tzn.

$$U\,|\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\rangle = \alpha_1 U\,|\psi_1\rangle + \alpha_2 U\,|\psi_2\rangle\,,$$

a operator A jest operatorem antyliniowym, tzn.

$$A\,|\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\rangle = \alpha_1^* A\,|\psi_1\rangle + \alpha_2^* A\,|\psi_2\rangle\,,$$

dla dowolnych liczb zespolonych α_1, α_2.
Operator A nazywamy operatorem antyunitarnym.

Symetria w sensie kwantowym

Uogólnijmy związek $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle$ na przypadek elementu macierzowego pewnego operatora O.

$$\langle\phi'|O'|\psi'\rangle = \langle\phi|O|\psi\rangle\,.$$

Symetria w sensie kwantowym

Uogólnijmy związek $\langle \phi' | \psi' \rangle = \langle \phi | \psi \rangle$ na przypadek elementu macierzowego pewnego operatora O.

$$\langle \phi' | O' | \psi' \rangle = \langle \phi | O | \psi \rangle \, .$$

Wstawiając związki

$$|\psi'\rangle = U \, |\psi\rangle \qquad \text{i} \qquad \langle \phi' | = \langle \phi | \, U^\dagger$$

Uogólnijmy związek $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle$ na przypadek elementu macierzowego pewnego operatora O.

$$\langle\phi'|O'|\psi'\rangle = \langle\phi|O|\psi\rangle \,.$$

Wstawiając związki

$$|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle \qquad \text{i} \qquad \langle\phi'| = \langle\phi|\,U^\dagger$$

otrzymamy

$$\langle\phi|\,U^\dagger O' U|\,\psi\rangle = \langle\phi|O|\psi\rangle \,,$$

Uogólnijmy związek $\langle \phi' | \psi' \rangle = \langle \phi | \psi \rangle$ na przypadek elementu macierzowego pewnego operatora O.

$$\langle \phi' | O' | \psi' \rangle = \langle \phi | O | \psi \rangle \,.$$

Wstawiając związki

$$|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle \qquad \text{i} \qquad \langle \phi' | = \langle \phi |\, U^\dagger$$

otrzymamy

$$\langle \phi |\, U^\dagger O' U |\, \psi \rangle = \langle \phi | O | \psi \rangle \,,$$

co można rozpatrywać jako działanie operatora unitarnego na operator

$$U^\dagger O' U = O \qquad \Rightarrow \qquad O' = U O U^\dagger .$$

Symetria w sensie kwantowym

Uogólnijmy związek $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle$ na przypadek elementu macierzowego pewnego operatora O.

$$\langle\phi'|O'|\psi'\rangle = \langle\phi|O|\psi\rangle\,.$$

Wstawiając związki

$$|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle \qquad \text{i} \qquad \langle\phi'| = \langle\phi|\,U^\dagger$$

otrzymamy

$$\langle\phi|\,U^\dagger O' U|\,\psi\rangle = \langle\phi|O|\psi\rangle\,,$$

co można rozpatrywać jako działanie operatora unitarnego na operator

$$U^\dagger O' U = O \qquad \Rightarrow \qquad O' = UOU^\dagger.$$

Generatory infinitezymalne

Jeżeli transformacja unitarna zależy od pewnego ciągłego parametru, to możemy ją wyewoluować z operatora jednostkowego. Niech ε będzie nieskończenie małym parametrem rzeczywistym, wtedy możemy zapisać

$$U_\varepsilon = 1 - i\varepsilon G.$$

Generatory infinitezymalne

Jeżeli transformacja unitarna zależy od pewnego ciągłego parametru, to możemy ją wyewoluować z operatora jednostkowego. Niech ε będzie nieskończenie małym parametrem rzeczywistym, wtedy możemy zapisać

$$U_\varepsilon = 1 - i\varepsilon G.$$

G nazywamy generatorem infinitezymalnym transformacji.

Generatory infinitezymalne

Jeżeli transformacja unitarna zależy od pewnego ciągłego parametru, to możemy ją wyewoluować z operatora jednostkowego. Niech ε będzie nieskończenie małym parametrem rzeczywistym, wtedy możemy zapisać

$$U_\varepsilon = 1 - i\varepsilon G.$$

G nazywamy generatorem infinitezymalnym transformacji.
Operator odwrotny do U_ε ma postać:

$$U_\varepsilon^{-1} = 1 + i\varepsilon G,$$

gdyż

$$\begin{aligned} U_\varepsilon U_\varepsilon^{-1} &= (1 - i\varepsilon G)(1 + i\varepsilon G) \\ &= 1 - i\varepsilon G + i\varepsilon G + \varepsilon^2 G^2 \approx 1, \end{aligned}$$

gdzie zaniedbaliśmy wyraz $\sim \varepsilon^2$.

Jeżeli transformacja unitarna zależy od pewnego ciągłego parametru, to możemy ją wyewoluować z operatora jednostkowego. Niech ε będzie nieskończenie małym parametrem rzeczywistym, wtedy możemy zapisać

$$U_\varepsilon = 1 - i\varepsilon G.$$

G nazywamy generatorem infinitezymalnym transformacji. Operator odwrotny do U_ε ma postać:

$$U_\varepsilon^{-1} = 1 + i\varepsilon G,$$

gdyż

$$\begin{aligned} U_\varepsilon U_\varepsilon^{-1} &= (1 - i\varepsilon G)(1 + i\varepsilon G) \\ &= 1 - i\varepsilon G + i\varepsilon G + \varepsilon^2 G^2 \approx 1, \end{aligned}$$

gdzie zaniedbaliśmy wyraz $\sim \varepsilon^2$.

Generatory infinitezymalne

Zauważmy, że sprzężenie hermitowskie operatora U_ε ma postać:

$$U_\varepsilon^\dagger = (1 - i\varepsilon G)^\dagger = 1 + i\varepsilon G^\dagger,$$

a więc

$$U_\varepsilon^\dagger = U_\varepsilon^{-1} = 1 + i\varepsilon G \qquad \Leftrightarrow \qquad G = G^\dagger.$$

Zauważmy, że sprzężenie hermitowskie operatora U_ε ma postać:

$$U_\varepsilon^\dagger = (1 - i\varepsilon G)^\dagger = 1 + i\varepsilon G^\dagger,$$

a więc

$$U_\varepsilon^\dagger = U_\varepsilon^{-1} = 1 + i\varepsilon G \qquad \Leftrightarrow \qquad G = G^\dagger.$$

Zatem operator U_ε jest unitarny tylko jeśli operator G, czyli generator transformacji, jest hermitowski.

Generatory infinitezymalne

Zauważmy, że sprzężenie hermitowskie operatora U_ε ma postać:

$$U_\varepsilon^\dagger = (1 - i\varepsilon G)^\dagger = 1 + i\varepsilon G^\dagger,$$

a więc

$$U_\varepsilon^\dagger = U_\varepsilon^{-1} = 1 + i\varepsilon G \qquad \Leftrightarrow \qquad G = G^\dagger.$$

Zatem operator U_ε jest unitarny tylko jeśli operator G, czyli generator transformacji, jest hermitowski.

Generatory infinitezymalne

Wstawmy związek

$$U_\varepsilon = 1 - i\varepsilon G.$$

do równania

$$O' = UOU^\dagger = (1 - i\varepsilon G)O(1 + i\varepsilon G)$$

Wstawmy związek

$$U_\varepsilon = 1 - i\varepsilon G.$$

do równania

$$O' = UOU^\dagger = (1 - i\varepsilon G)O(1 + i\varepsilon G) \approx O - i\varepsilon(GO - OG)$$

Wstawmy związek

$$U_\varepsilon = 1 - i\varepsilon G.$$

do równania

$$O' = UOU^\dagger = (1 - i\varepsilon G)O(1 + i\varepsilon G) \approx O - i\varepsilon(GO - OG)$$
$$=$$

Wstawmy związek

$$U_\varepsilon = 1 - i\varepsilon G.$$

do równania

$$\begin{aligned} O' &= UOU^\dagger = (1 - i\varepsilon G)O(1 + i\varepsilon G) \approx O - i\varepsilon(GO - OG) \\ &= O - i\varepsilon[G, O]. \end{aligned}$$

Wstawmy związek

$$U_\varepsilon = 1 - i\varepsilon G.$$

do równania

$$\begin{aligned} O' &= UOU^\dagger = (1 - i\varepsilon G)O(1 + i\varepsilon G) \approx O - i\varepsilon(GO - OG) \\ &= O - i\varepsilon[G, O]. \end{aligned}$$

Widzimy, że operator O jest symetryczny, tzn. $O' = O$, względem rozpatrywanej transformacji unitarnej, jeśli

$$[G, O] = 0.$$

Wstawmy związek

$$U_\varepsilon = 1 - i\varepsilon G.$$

do równania

$$\begin{aligned} O' &= UOU^\dagger = (1 - i\varepsilon G)O(1 + i\varepsilon G) \approx O - i\varepsilon(GO - OG) \\ &= O - i\varepsilon[G, O]. \end{aligned}$$

Widzimy, że operator O jest symetryczny, tzn. $O' = O$, względem rozpatrywanej transformacji unitarnej, jeśli

$$[G, O] = 0.$$

Generatory infinitezymalne

Operator U_λ dla skończonego parametru λ otrzymamy dokonując eksponencjacji. Przyjmijmy, że $\lambda = n\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\lambda}{n}$ i znajdźmy granicę przy $n \to \infty$.

$$U_\lambda = (1 - i\varepsilon G)^n = \left(1 + \frac{-i\lambda G}{n}\right)^n \to e^{-i\lambda G},$$

a więc

$$U_\lambda = e^{-i\lambda G}.$$

Zadanie. Rozwijając w szereg Taylora pokazać, że

$O' = U_\lambda O U_\lambda^\dagger = e^{-i\lambda G} O e^{i\lambda G}$

Operator U_λ dla skończonego parametru λ otrzymamy dokonując eksponencjacji. Przyjmijmy, że $\lambda = n\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\lambda}{n}$ i znajdźmy granicę przy $n \to \infty$.

$$U_\lambda = (1 - i\varepsilon G)^n = \left(1 + \frac{-i\lambda G}{n}\right)^n \to e^{-i\lambda G},$$

a więc

$$U_\lambda = e^{-i\lambda G}.$$

Zadanie. Rozwijając w szereg Taylora pokazać, że

$$O' = U_\lambda O U_\lambda^\dagger = e^{-i\lambda G} O e^{i\lambda G} \quad =$$

Operator U_λ dla skończonego parametru λ otrzymamy dokonując eksponencjacji. Przyjmijmy, że $\lambda = n\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\lambda}{n}$ i znajdźmy granicę przy $n \to \infty$.

$$U_\lambda = (1 - i\varepsilon G)^n = \left(1 + \frac{-i\lambda G}{n}\right)^n \to e^{-i\lambda G},$$

a więc

$$U_\lambda = e^{-i\lambda G}.$$

Zadanie. Rozwijając w szereg Taylora pokazać, że

$$O' = U_\lambda O U_\lambda^\dagger = e^{-i\lambda G} O e^{i\lambda G} \quad = \quad O - i\lambda[G,O] + \frac{(-i\lambda)^2}{2!}[G,[G,O]]$$

Generatory infinitezymalne

Operator U_λ dla skończonego parametru λ otrzymamy dokonując eksponencjacji. Przyjmijmy, że $\lambda = n\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\lambda}{n}$ i znajdźmy granicę przy $n \to \infty$.

$$U_\lambda = (1 - i\varepsilon G)^n = \left(1 + \frac{-i\lambda G}{n}\right)^n \to e^{-i\lambda G},$$

a więc

$$U_\lambda = e^{-i\lambda G}.$$

Zadanie. Rozwijając w szereg Taylora pokazać, że

$$O' = U_\lambda O U_\lambda^\dagger = e^{-i\lambda G} O e^{i\lambda G} \quad = \quad O - i\lambda[G, O] + \frac{(-i\lambda)^2}{2!}[G, [G, O]]$$

$$+$$

Operator U_λ dla skończonego parametru λ otrzymamy dokonując eksponencjacji. Przyjmijmy, że $\lambda = n\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\lambda}{n}$ i znajdźmy granicę przy $n \to \infty$.

$$U_\lambda = (1 - i\varepsilon G)^n = \left(1 + \frac{-i\lambda G}{n}\right)^n \to e^{-i\lambda G},$$

a więc

$$U_\lambda = e^{-i\lambda G}.$$

Zadanie. Rozwijając w szereg Taylora pokazać, że

$$\begin{aligned} O' = U_\lambda O U_\lambda^\dagger = e^{-i\lambda G} O e^{i\lambda G} &= O - i\lambda[G, O] + \frac{(-i\lambda)^2}{2!}[G, [G, O]] \\ &+ \frac{(-i\lambda)^3}{3!}[G, [G, [G, O]]] + \ldots . \end{aligned}$$

Operator U_λ dla skończonego parametru λ otrzymamy dokonując eksponencjacji. Przyjmijmy, że $\lambda = n\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\lambda}{n}$ i znajdźmy granicę przy $n \to \infty$.

$$U_\lambda = (1 - i\varepsilon G)^n = \left(1 + \frac{-i\lambda G}{n}\right)^n \to e^{-i\lambda G},$$

a więc

$$U_\lambda = e^{-i\lambda G}.$$

Zadanie. Rozwijając w szereg Taylora pokazać, że

$$\begin{aligned} O' = U_\lambda O U_\lambda^\dagger = e^{-i\lambda G} O e^{i\lambda G} \quad &= \quad O - i\lambda[G,O] + \frac{(-i\lambda)^2}{2!}[G,[G,O]] \\ &+ \quad \frac{(-i\lambda)^3}{3!}[G,[G,[G,O]]] + \ldots. \end{aligned}$$

Ten wzór pozwala, przynajmniej z zasady, znaleźć operator O' dla skończonego parametru λ.

Generatory infinitezymalne

Operator U_λ dla skończonego parametru λ otrzymamy dokonując eksponencjacji. Przyjmijmy, że $\lambda = n\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\lambda}{n}$ i znajdźmy granicę przy $n \to \infty$.

$$U_\lambda = (1 - i\varepsilon G)^n = \left(1 + \frac{-i\lambda G}{n}\right)^n \to e^{-i\lambda G},$$

a więc

$$U_\lambda = e^{-i\lambda G}.$$

Zadanie. Rozwijając w szereg Taylora pokazać, że

$$\begin{aligned} O' = U_\lambda O U_\lambda^\dagger = e^{-i\lambda G} O e^{i\lambda G} \quad &= \quad O - i\lambda[G, O] + \frac{(-i\lambda)^2}{2!}[G,[G,O]] \\ &+ \quad \frac{(-i\lambda)^3}{3!}[G,[G,[G,O]]] + \ldots . \end{aligned}$$

Ten wzór pozwala, przynajmniej z zasady, znaleźć operator O' dla skończonego parametru λ. Tu też widzimy, że $O' = O \quad \Leftrightarrow \quad [G, O] = 0.$

Operator U_λ dla skończonego parametru λ otrzymamy dokonując eksponencjacji. Przyjmijmy, że $\lambda = n\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\lambda}{n}$ i znajdźmy granicę przy $n \to \infty$.

$$U_\lambda = (1 - i\varepsilon G)^n = \left(1 + \frac{-i\lambda G}{n}\right)^n \to e^{-i\lambda G},$$

a więc

$$U_\lambda = e^{-i\lambda G}.$$

Zadanie. Rozwijając w szereg Taylora pokazać, że

$$\begin{aligned} O' = U_\lambda O U_\lambda^\dagger = e^{-i\lambda G} O e^{i\lambda G} &= O - i\lambda[G, O] + \frac{(-i\lambda)^2}{2!}[G, [G, O]] \\ &+ \frac{(-i\lambda)^3}{3!}[G, [G, [G, O]]] + \ldots . \end{aligned}$$

Ten wzór pozwala, przynajmniej z zasady, znaleźć operator O' dla skończonego parametru λ. Tu też widzimy, że
$O' = O \quad \Leftrightarrow \quad [G, O] = 0.$

Przesunięcie w czasie

Rozważmy teraz transformację przesunięcia w czasie, $t \to t + \tau$, przy której wektor stanu przekształca się następująco

$$|\alpha'(t+\tau)\rangle = |\alpha(t)\rangle \, .$$

Definiujemy unitarny operator translacji w czasie

$$U_t(\tau) \, |\alpha(t)\rangle \equiv |\alpha'(t)\rangle \, .$$

Przesunięcie w czasie

Rozważmy teraz transformację przesunięcia w czasie, $t \to t + \tau$, przy której wektor stanu przekształca się następująco

$$|\alpha'(t+\tau)\rangle = |\alpha(t)\rangle\,.$$

Definiujemy unitarny operator translacji w czasie

$$U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle \equiv |\alpha'(t)\rangle\,.$$

Łącząc to równanie z pierwszym dla $t - \tau$ otrzymamy

$$U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle \equiv |\alpha(t-\tau)\rangle\,.$$

Przesunięcie w czasie

Rozważmy teraz transformację przesunięcia w czasie, $t \to t + \tau$, przy której wektor stanu przekształca się następująco

$$|\alpha'(t+\tau)\rangle = |\alpha(t)\rangle \, .$$

Definiujemy unitarny operator translacji w czasie

$$U_t(\tau) \, |\alpha(t)\rangle \equiv |\alpha'(t)\rangle \, .$$

Łącząc to równanie z pierwszym dla $t - \tau$ otrzymamy

$$U_t(\tau) \, |\alpha(t)\rangle \equiv |\alpha(t-\tau)\rangle \, .$$

Przesunięcie w czasie

Rozwińmy w szereg wektor stanu $|\alpha(t-\tau)\rangle$

$$
\begin{aligned}
|\alpha(t-\tau)\rangle &= |\alpha(t)\rangle + \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle(-\tau) \\
&+ \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}|\alpha(t)\rangle(-\tau)^2 + \ldots = e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}|\alpha(t)\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Przesunięcie w czasie

Rozwińmy w szereg wektor stanu $|\alpha(t-\tau)\rangle$

$$
\begin{aligned}
|\alpha(t-\tau)\rangle &= |\alpha(t)\rangle + \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle(-\tau) \\
&+ \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}|\alpha(t)\rangle(-\tau)^2 + \ldots = e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}|\alpha(t)\rangle .
\end{aligned}
$$

Porównując ten wynik z wzorem

$$U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle \equiv |\alpha(t-\tau)\rangle$$

Przesunięcie w czasie

Rozwińmy w szereg wektor stanu $|\alpha(t-\tau)\rangle$

$$|\alpha(t-\tau)\rangle = |\alpha(t)\rangle + \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle\,(-\tau) + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,|\alpha(t)\rangle\,(-\tau)^2 + \ldots = e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\,|\alpha(t)\rangle\,.$$

Porównując ten wynik z wzorem

$$U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle \equiv |\alpha(t-\tau)\rangle$$

otrzymujemy następującą postać operatora ewolucji czasowej

$$U_t(\tau) = e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}.$$

Rozwińmy w szereg wektor stanu $|\alpha(t-\tau)\rangle$

$$
\begin{aligned}
|\alpha(t-\tau)\rangle &= |\alpha(t)\rangle + \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle\,(-\tau) \\
&+ \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,|\alpha(t)\rangle\,(-\tau)^2 + \ldots = e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\,|\alpha(t)\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Porównując ten wynik z wzorem

$$U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle \equiv |\alpha(t-\tau)\rangle$$

otrzymujemy następującą postać operatora ewolucji czasowej

$$U_t(\tau) = e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}.$$

Przesunięcie w czasie

Skorzystajmy z równania Schrödingera

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle = H |\alpha(t)\rangle \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar} H |\alpha(t)\rangle .$$

Skorzystajmy z równania Schrödingera

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle = H|\alpha(t)\rangle \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}H|\alpha(t)\rangle\,.$$

Załóżmy, że operator Hamiltona nie zależy jawnie od czasu, tzn.

Skorzystajmy z równania Schrödingera

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle = H|\alpha(t)\rangle \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\alpha(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}H|\alpha(t)\rangle\,.$$

Załóżmy, że operator Hamiltona nie zależy jawnie od czasu, tzn.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

Przesunięcie w czasie

Skorzystajmy z równania Schrödingera

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha(t)\right\rangle = H\left|\alpha(t)\right\rangle \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha(t)\right\rangle = \frac{1}{i\hbar}H\left|\alpha(t)\right\rangle .$$

Załóżmy, że operator Hamiltona nie zależy jawnie od czasu, tzn.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

i skorzystajmy z równania ewolucji operatora H

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = i\hbar\frac{\partial H}{\partial t} + [H, H] = 0$$

Przesunięcie w czasie

Skorzystajmy z równania Schrödingera

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle = H |\alpha(t)\rangle \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar} H |\alpha(t)\rangle .$$

Załóżmy, że operator Hamiltona nie zależy jawnie od czasu, tzn.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

i skorzystajmy z równania ewolucji operatora H

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = i\hbar \frac{\partial H}{\partial t} + [H, H] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Przesunięcie w czasie

Skorzystajmy z równania Schrödingera

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle = H |\alpha(t)\rangle \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar} H |\alpha(t)\rangle .$$

Załóżmy, że operator Hamiltona nie zależy jawnie od czasu, tzn.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

i skorzystajmy z równania ewolucji operatora H

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = i\hbar \frac{\partial H}{\partial t} + [H, H] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} |\alpha(t)\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{i\hbar} H |\alpha(t)\rangle\right) =$$

Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,|\alpha(t)\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{i\hbar}H\,|\alpha(t)\rangle\right) = \frac{1}{i\hbar}H\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle =$$

Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left|\alpha(t)\right\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{i\hbar}H\left|\alpha(t)\right\rangle\right) = \frac{1}{i\hbar}H\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha(t)\right\rangle = \frac{1}{(i\hbar)^2}\,H^2\left|\alpha(t)\right\rangle .$$

Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,|\alpha(t)\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{i\hbar}H\,|\alpha(t)\rangle\right) = \frac{1}{i\hbar}H\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle = \frac{1}{(i\hbar)^2}\,H^2\,|\alpha(t)\rangle\,.$$

Podobnie można zrobić z wyższymi pochodnymi w rozwinięciu funkcji $e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$.

Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left|\alpha(t)\right\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{i\hbar}H\left|\alpha(t)\right\rangle\right) = \frac{1}{i\hbar}H\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha(t)\right\rangle = \frac{1}{(i\hbar)^2}\,H^2\left|\alpha(t)\right\rangle .$$

Podobnie można zrobić z wyższymi pochodnymi w rozwinięciu funkcji $e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$.
W takim razie

$$U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle =$$

Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,|\alpha(t)\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{i\hbar}H\,|\alpha(t)\rangle\right) = \frac{1}{i\hbar}H\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle = \frac{1}{(i\hbar)^2}\,H^2\,|\alpha(t)\rangle\,.$$

Podobnie można zrobić z wyższymi pochodnymi w rozwinięciu funkcji $e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$.
W takim razie

$$U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle = e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\,|\alpha(t)\rangle =$$

Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,|\alpha(t)\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{i\hbar}H\,|\alpha(t)\rangle\right) = \frac{1}{i\hbar}H\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle = \frac{1}{(i\hbar)^2}\,H^2\,|\alpha(t)\rangle\,.$$

Podobnie można zrobić z wyższymi pochodnymi w rozwinięciu funkcji $e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$.
W takim razie

$$U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle = e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\,|\alpha(t)\rangle = e^{-\tau\frac{1}{i\hbar}H}\,|\alpha(t)\rangle =$$

Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,|\alpha(t)\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{i\hbar}H\,|\alpha(t)\rangle\right) = \frac{1}{i\hbar}H\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle = \frac{1}{(i\hbar)^2}\,H^2\,|\alpha(t)\rangle\,.$$

Podobnie można zrobić z wyższymi pochodnymi w rozwinięciu funkcji $e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$.
W takim razie

$$U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle = e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\,|\alpha(t)\rangle = e^{-\tau\frac{1}{i\hbar}H}\,|\alpha(t)\rangle = e^{\tau\frac{i}{\hbar}H}\,|\alpha(t)\rangle$$

Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,|\alpha(t)\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{i\hbar}H\,|\alpha(t)\rangle\right) = \frac{1}{i\hbar}H\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle = \frac{1}{(i\hbar)^2}\,H^2\,|\alpha(t)\rangle\,.$$

Podobnie można zrobić z wyższymi pochodnymi w rozwinięciu funkcji $e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$.
W takim razie

$$U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle = e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\,|\alpha(t)\rangle = e^{-\tau\frac{1}{i\hbar}H}\,|\alpha(t)\rangle = e^{\tau\frac{i}{\hbar}H}\,|\alpha(t)\rangle$$

i unitarny operator przesunięcia w czasie ma postać

$$U_t(\tau) = e^{\frac{i}{\hbar}\tau H}.$$

Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left|\alpha(t)\right\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{i\hbar}H\left|\alpha(t)\right\rangle\right) = \frac{1}{i\hbar}H\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha(t)\right\rangle = \frac{1}{(i\hbar)^2}\,H^2\left|\alpha(t)\right\rangle.$$

Podobnie można zrobić z wyższymi pochodnymi w rozwinięciu funkcji $e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$.
W takim razie

$$U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle = e^{-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\left|\alpha(t)\right\rangle = e^{-\tau\frac{1}{i\hbar}H}\left|\alpha(t)\right\rangle = e^{\tau\frac{i}{\hbar}H}\left|\alpha(t)\right\rangle$$

i unitarny operator przesunięcia w czasie ma postać

$$U_t(\tau) = e^{\frac{i}{\hbar}\tau H}.$$

Przesunięcie w czasie

Wzór ten zachodzi tylko jeśli operator H nie zależy jawnie od czasu. Ponieważ $[U_t(\tau), H] = 0$, to stan przesunięty $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia takie samo równanie Schrödingera co stan $|\alpha(t)\rangle$ i układ ma symetrię względem translacji czasowej.

Wzór ten zachodzi tylko jeśli operator H nie zależy jawnie od czasu. Ponieważ $[U_t(\tau), H] = 0$, to stan przesunięty $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia takie samo równanie Schrödingera co stan $|\alpha(t)\rangle$ i układ ma symetrię względem translacji czasowej.

Jeśli operator H zależy jawnie od czasu, to dla translacji infinitezymalnej możemy zapisać

$$e^{\frac{i}{\hbar}\tau\, H(t)} \approx 1 + \frac{i}{\hbar}\tau\, H(t).$$

Wzór ten zachodzi tylko jeśli operator H nie zależy jawnie od czasu. Ponieważ $[U_t(\tau), H] = 0$, to stan przesunięty $|\alpha'(t)\rangle$ spełnia takie samo równanie Schrödingera co stan $|\alpha(t)\rangle$ i układ ma symetrię względem translacji czasowej.
Jeśli operator H zależy jawnie od czasu, to dla translacji infinitezymalnej możemy zapisać

$$e^{\frac{i}{\hbar}\tau\, H(t)} \approx 1 + \frac{i}{\hbar}\tau\, H(t).$$

Przesunięcie w czasie

Dla stanu przesuniętego $|\alpha'(t)\rangle$ zachodzi

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle \quad &\approx \quad i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1+\frac{i}{\hbar}\tau\,H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\right] \\ &= \end{aligned}$$

Dla stanu przesuniętego $|\alpha'(t)\rangle$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle &\approx i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1+\frac{i}{\hbar}\tau\,H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\right] \\
&= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau H(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle
\end{aligned}
$$

Przesunięcie w czasie

Dla stanu przesuniętego $|\alpha'(t)\rangle$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle &\approx i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1+\frac{i}{\hbar}\tau\,H(t)\right)\,|\alpha(t)\rangle\right] \\
&= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau H(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&=
\end{aligned}
$$

Dla stanu przesuniętego $|\alpha'(t)\rangle$ zachodzi

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle &\approx i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1+\frac{i}{\hbar}\tau\,H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\right] \\
&= i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau \frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau H(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\,|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle + \frac{i\tau}{\hbar}H(t)H(t)\,|\alpha(t)\rangle
\end{aligned}$$

Przesunięcie w czasie

Dla stanu przesuniętego $|\alpha'(t)\rangle$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle &\approx i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1+\frac{i}{\hbar}\tau\,H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\right] \\
&= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle-\tau\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle-\tau H(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\,|\alpha(t)\rangle-\tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)H(t)\,|\alpha(t)\rangle \\
&=
\end{aligned}
$$

Dla stanu przesuniętego $|\alpha'(t)\rangle$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle &\approx i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1+\frac{i}{\hbar}\tau\,H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\right] \\
&= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau H(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\;|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle + \frac{i\tau}{\hbar}H(t)H(t)\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle
\end{aligned}
$$

Dla stanu przesuniętego $|\alpha'(t)\rangle$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle &\approx i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1+\frac{i}{\hbar}\tau\, H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\right] \\
&= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau H(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\,|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle + \frac{i\tau}{\hbar}H(t)H(t)\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&=
\end{aligned}
$$

Przesunięcie w czasie

Dla stanu przesuniętego $|\alpha'(t)\rangle$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle &\approx i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1+\frac{i}{\hbar}\tau\,H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\right] \\
&= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau H(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\,|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle + \frac{i\tau}{\hbar}H(t)H(t)\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\,,
\end{aligned}
$$

Dla stanu przesuniętego $|\alpha'(t)\rangle$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle &\approx i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1+\frac{i}{\hbar}\tau\,H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\right] \\
&= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau H(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\;|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle + \frac{i\tau}{\hbar}H(t)H(t)\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\,,
\end{aligned}
$$

gdzie po prawej stronie uwzględniliśmy część kolejnego wyrazu rozwinięcia eksponenty.

Przesunięcie w czasie

Dla stanu przesuniętego $|\alpha'(t)\rangle$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle &\approx i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1+\frac{i}{\hbar}\tau\, H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\right] \\
&= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle - \tau H(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\;|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle + \frac{i\tau}{\hbar}H(t)H(t)\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)|\alpha(t)\rangle\,,
\end{aligned}
$$

gdzie po prawej stronie uwzględniliśmy część kolejnego wyrazu rozwinięcia eksponenty.

Przesunięcie w czasie

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha'(t)\right\rangle \approx H(t)U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)\left|\alpha(t)\right\rangle$$

$$\approx$$

Przesunięcie w czasie

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha'(t)\right\rangle &\approx H(t)U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)\left|\alpha(t)\right\rangle \\
&\approx H(t)U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle
\end{aligned}
$$

Przesunięcie w czasie

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha'(t)\right\rangle &\approx H(t)U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)\left|\alpha(t)\right\rangle \\
&\approx H(t)U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle \\
&=
\end{aligned}
$$

Przesunięcie w czasie

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle \quad &\approx \quad H(t)U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)|\alpha(t)\rangle \\
&\approx \quad H(t)U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}U_t(\tau)\,|\alpha(t)\rangle \\
&= \quad H(t)\,|\alpha'(t)\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\,|\alpha'(t)\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Przesunięcie w czasie

$$
\begin{aligned}
i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\alpha'(t)\rangle &\approx H(t)U_t(\tau)|\alpha(t)\rangle - \tau \frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left(1 + \frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)|\alpha(t)\rangle \\
&\approx H(t)U_t(\tau)|\alpha(t)\rangle - \tau \frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} U_t(\tau)|\alpha(t)\rangle \\
&= H(t)|\alpha'(t)\rangle - \tau \frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}|\alpha'(t)\rangle .
\end{aligned}
$$

Widzimy, że dla $H = H(t)$, stan przesunięty w czasie nie spełnia równania Schrödingera.

Przesunięcie w czasie

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha'(t)\right\rangle &\approx H(t)U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle - \tau\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)\left|\alpha(t)\right\rangle \\
&\approx H(t)U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle - \tau\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle \\
&= H(t)\left|\alpha'(t)\right\rangle - \tau\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left|\alpha'(t)\right\rangle .
\end{aligned}
$$

Widzimy, że dla $H = H(t)$, stan przesunięty w czasie nie spełnia równania Schrödingera.

Wynik ten jest oczywisty, gdyż na skutek ewolucji czasowej hamiltonianu, stan przesunięty w czasie znajduje się w innych warunkach niż stan wyjściowy.

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\alpha'(t)\right\rangle &\approx H(t)U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left(1+\frac{i\tau}{\hbar}H(t)\right)\left|\alpha(t)\right\rangle \\
&\approx H(t)U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}U_t(\tau)\left|\alpha(t)\right\rangle \\
&= H(t)\left|\alpha'(t)\right\rangle - \tau\,\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\left|\alpha'(t)\right\rangle .
\end{aligned}
$$

Widzimy, że dla $H = H(t)$, stan przesunięty w czasie nie spełnia równania Schrödingera.
Wynik ten jest oczywisty, gdyż na skutek ewolucji czasowej hamiltonianu, stan przesunięty w czasie znajduje się w innych warunkach niż stan wyjściowy.

Obroty

Rozważmy obrót przestrzenny układu fizycznego.

Obroty

Rozważmy obrót przestrzenny układu fizycznego.

$$\vec{r} \to \vec{r}_R = R\vec{r},$$

gdzie R jest macierzą ortogonalną o wymiarze 3×3 , $R^T R = 1.$

Obroty

Rozważmy obrót przestrzenny układu fizycznego.

$$\vec{r} \; \to \; \vec{r}_R = R\vec{r},$$

gdzie R jest macierzą ortogonalną o wymiarze 3×3 , $R^T R = 1.$

Zauważmy, że obrót układu fizycznego o kąt α względem dowolnie wybranej osi,

Obroty

Rozważmy obrót przestrzenny układu fizycznego.

$$\vec{r} \;\rightarrow\; \vec{r}_R = R\vec{r},$$

gdzie R jest macierzą ortogonalną o wymiarze 3×3 , $R^T R = 1$.
Zauważmy, że obrót układu fizycznego o kąt α względem dowolnie wybranej osi, odpowiada obrotowi układu współrzędnych o kąt $-\alpha$ względem tej samej osi.

Obroty

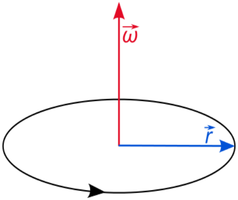
Rozważmy obrót przestrzenny układu fizycznego.

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}_R = R\vec{r},$$

gdzie R jest macierzą ortogonalną o wymiarze 3×3 , $R^T R = 1.$
Zauważmy, że obrót układu fizycznego o kąt α względem dowolnie wybranej osi, odpowiada obrotowi układu współrzędnych o kąt $-\alpha$ względem tej samej osi.

Wygodnie jest rozpatrywać obroty infinitezymalne.

Wprowadźmy wektor $\vec{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$ skierowany wzdłuż osi obrotu, którego składowymi są kąty, a zwrot określamy zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.



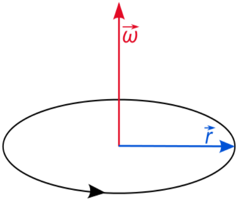
Obroty

Rozważmy obrót przestrzenny układu fizycznego.

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}_R = R\vec{r},$$

gdzie R jest macierzą ortogonalną o wymiarze 3×3 , $R^T R = 1$.
Zauważmy, że obrót układu fizycznego o kąt α względem dowolnie wybranej osi, odpowiada obrotowi układu współrzędnych o kąt $-\alpha$ względem tej samej osi.
Wygodnie jest rozpatrywać obroty infinitezymalne.

Wprowadźmy wektor $\vec{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$ skierowany wzdłuż osi obrotu, którego składowymi są kąty, a zwrot określamy zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.



Jeżeli dołączymy początek wektora $\vec{\omega} \times \vec{r}$ do końca wektora $\vec{r}$, to otrzymamy wektor obrócony $\vec{r}_R$:

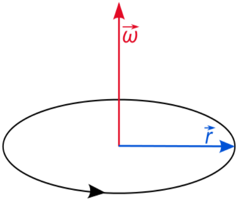
$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}_R = \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Rozważmy obrót przestrzenny układu fizycznego.

$$\vec{r} \;\rightarrow\; \vec{r}_R = R\vec{r},$$

gdzie R jest macierzą ortogonalną o wymiarze 3×3 , $R^T R = 1$.
Zauważmy, że obrót układu fizycznego o kąt α względem dowolnie wybranej osi, odpowiada obrotowi układu współrzędnych o kąt $-\alpha$ względem tej samej osi.
Wygodnie jest rozpatrywać obroty infinitezymalne.

Wprowadźmy wektor $\vec{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$ skierowany wzdłuż osi obrotu, którego składowymi są kąty, a zwrot określamy zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.



Jeżeli dołączymy początek wektora $\vec{\omega} \times \vec{r}$ do końca wektora $\vec{r}$, to otrzymamy wektor obrócony $\vec{r}_R$:

$$\vec{r} \;\rightarrow\; \vec{r}_R = \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Obroty

W dalszym ciągu, aby uniknąć skojarzeń z prędkością kątową zmienimy oznaczenie $\vec{\omega} = \vec{\varphi}$.

Zadanie. Pokazać, że macierz obrotu infinitezymalnego ma postać

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 1 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 1 \end{pmatrix}$$

Przy obrocie funkcja skalarna $\psi_\alpha(\vec{r})$ transformuje się następująco

$$\psi_{\alpha'}(R\,\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r}).$$

W dalszym ciągu, aby uniknąć skojarzeń z prędkością kątową zmienimy oznaczenie $\vec{\omega} = \vec{\varphi}$.

Zadanie. Pokazać, że macierz obrotu infinitezymalnego ma postać

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 1 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 1 \end{pmatrix}$$

Przy obrocie funkcja skalarna $\psi_\alpha(\vec{r})$ transformuje się następująco

$$\psi_{\alpha'}(R\,\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r}).$$

Definiujemy unitarny operator obrotu infinitezymalnego $U_R(\vec{\varphi})$:

$$U_R(\vec{\varphi})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_{\alpha'}(\vec{r}).$$

W dalszym ciągu, aby uniknąć skojarzeń z prędkością kątową zmienimy oznaczenie $\vec{\omega} = \vec{\varphi}$.

Zadanie. Pokazać, że macierz obrotu infinitezymalnego ma postać

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 1 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 1 \end{pmatrix}$$

Przy obrocie funkcja skalarna $\psi_\alpha(\vec{r})$ transformuje się następująco

$$\psi_{\alpha'}(R\,\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r}).$$

Definiujemy unitarny operator obrotu infinitezymalnego $U_R(\vec{\varphi})$:

$$U_R(\vec{\varphi})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Obroty

Obliczmy

$$U_R(\vec{\varphi})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha(R^{-1}\vec{r}),$$

gdzie skorzystaliśmy ze związku

$$\psi_{\alpha'}(R\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \psi_{\alpha'}(\vec{r}) = \psi_\alpha(R^{-1}\vec{r}).$$

Zauważmy również, że dla obrotów infinitezymalnych zachodzi

$$R\vec{r} = \vec{r} + \vec{\varphi} \times \vec{r} \quad \Rightarrow \quad R^{-1}\vec{r} = \vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}.$$

Obroty

Obliczmy

$$U_R(\vec{\varphi})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha(R^{-1}\vec{r}),$$

gdzie skorzystaliśmy ze związku

$$\psi_{\alpha'}(R\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \psi_{\alpha'}(\vec{r}) = \psi_\alpha(R^{-1}\vec{r}).$$

Zauważmy również, że dla obrotów infinitezymalnych zachodzi

$$R\vec{r} = \vec{r} + \vec{\varphi} \times \vec{r} \quad \Rightarrow \quad R^{-1}\vec{r} = \vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}.$$

W takim razie

$$U_R(\vec{\varphi})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}\right).$$

Obliczmy

$$U_R(\vec{\varphi})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha(R^{-1}\vec{r}),$$

gdzie skorzystaliśmy ze związku

$$\psi_{\alpha'}(R\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \psi_{\alpha'}(\vec{r}) = \psi_\alpha(R^{-1}\vec{r}).$$

Zauważmy również, że dla obrotów infinitezymalnych zachodzi

$$R\vec{r} = \vec{r} + \vec{\varphi} \times \vec{r} \quad \Rightarrow \quad R^{-1}\vec{r} = \vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}.$$

W takim razie

$$U_R(\vec{\varphi})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}\right).$$

Obroty

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}) \approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r})$$

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}) \quad &\approx \quad \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\ &= \end{aligned}$$

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$
\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar} (\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\, \psi_\alpha(\vec{r})
\end{aligned}
$$

Obroty

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\vec{r}-\vec{\varphi}\times\vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\varphi}\times\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\ &= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\times\vec{r})\cdot\vec{p}\,\psi_\alpha(\vec{r}) \\ &=\end{aligned}$$

Obroty

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$
\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\, \psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\right) \psi_\alpha(\vec{r})
\end{aligned}
$$

Obroty

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\,\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r})
\end{aligned}$$

Obliczmy

$$(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} \quad =$$

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\ &= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\, \psi_\alpha(\vec{r}) \\ &= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\right) \psi_\alpha(\vec{r}) \end{aligned}$$

Obliczmy

$$(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} = (\vec{\varphi} \times \vec{r})_i p_i =$$

Obroty

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$
\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\, \psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\right) \psi_\alpha(\vec{r})
\end{aligned}
$$

Obliczmy

$$
(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} = (\vec{\varphi} \times \vec{r})_i p_i = \varepsilon_{ijk} \varphi_j x_k p_i =
$$

Obroty

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$
\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\,\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r})
\end{aligned}
$$

Obliczmy

$$
(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} = (\vec{\varphi} \times \vec{r})_i p_i = \varepsilon_{ijk}\varphi_j x_k p_i = \varphi_j \varepsilon_{jki} x_k p_i
$$

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(\vec{r}-\vec{\varphi}\times\vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\varphi}\times\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\ &= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\times\vec{r})\cdot\vec{p}\,\psi_\alpha(\vec{r}) \\ &= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\times\vec{r})\cdot\vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r}) \end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} (\vec{\varphi}\times\vec{r})\cdot\vec{p} &= (\vec{\varphi}\times\vec{r})_i p_i = \varepsilon_{ijk}\varphi_j x_k p_i = \varphi_j \varepsilon_{jki} x_k p_i \\ &= \end{aligned}$$

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\,\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r})
\end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}
(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} &= (\vec{\varphi} \times \vec{r})_i p_i = \varepsilon_{ijk}\varphi_j x_k p_i = \varphi_j \varepsilon_{jki} x_k p_i \\
&= \varphi_j(\vec{r} \times \vec{p})_j =
\end{aligned}$$

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$
\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\, \psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\right) \psi_\alpha(\vec{r})
\end{aligned}
$$

Obliczmy

$$
\begin{aligned}
(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} &= (\vec{\varphi} \times \vec{r})_i p_i = \varepsilon_{ijk}\varphi_j x_k p_i = \varphi_j \varepsilon_{jki} x_k p_i \\
&= \varphi_j (\vec{r} \times \vec{p})_j = \varphi_j L_j =
\end{aligned}
$$

Obroty

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$
\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\, \psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\right) \psi_\alpha(\vec{r})
\end{aligned}
$$

Obliczmy

$$
\begin{aligned}
(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} &= (\vec{\varphi} \times \vec{r})_i p_i = \varepsilon_{ijk}\varphi_j x_k p_i = \varphi_j \varepsilon_{jki} x_k p_i \\
&= \varphi_j (\vec{r} \times \vec{p})_j = \varphi_j L_j = \vec{\varphi} \cdot \vec{L},
\end{aligned}
$$

Obroty

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r}-\vec{\varphi}\times\vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\varphi}\times\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\times\vec{r})\cdot\vec{p}\,\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left(1-\frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\times\vec{r})\cdot\vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r})
\end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}
(\vec{\varphi}\times\vec{r})\cdot\vec{p} &= (\vec{\varphi}\times\vec{r})_i p_i = \varepsilon_{ijk}\varphi_j x_k p_i = \varphi_j\varepsilon_{jki}x_k p_i \\
&= \varphi_j(\vec{r}\times\vec{p})_j = \varphi_j L_j = \vec{\varphi}\cdot\vec{L},
\end{aligned}$$

gdzie $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ jest operatorem orbitalnego momentu pędu.

Obroty

Rozwińmy prawą stronę w szereg potęgowy

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}) &\approx \psi_\alpha(\vec{r}) - (\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\,\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r})
\end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}
(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} &= (\vec{\varphi} \times \vec{r})_i p_i = \varepsilon_{ijk}\varphi_j x_k p_i = \varphi_j \varepsilon_{jki} x_k p_i \\
&= \varphi_j (\vec{r} \times \vec{p})_j = \varphi_j L_j = \vec{\varphi} \cdot \vec{L},
\end{aligned}$$

gdzie $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ jest operatorem orbitalnego momentu pędu.

Zatem

$$\begin{aligned} U_R(\vec{\varphi})\psi_\alpha(\vec{r}) &= \psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}) = \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\right) \psi_\alpha(\vec{r}) \\ &= \end{aligned}$$

Zatem

$$
\begin{aligned}
U_R(\vec{\varphi})\psi_\alpha(\vec{r}) &= \psi_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\varphi}\times\vec{r}\right) = \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\times\vec{r})\cdot\vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})\right)\psi_\alpha(\vec{r}),
\end{aligned}
$$

Zatem

$$U_R(\vec{\varphi})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}) = \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r})$$
$$= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \cdot \vec{L})\right)\psi_\alpha(\vec{r}),$$

a więc unitarny operator obrotu infinitezymalnego ma postać

$$U_R(\vec{\varphi}) = 1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \cdot \vec{L})$$

Obroty

Zatem

$$\begin{aligned} U_R(\vec{\varphi})\psi_\alpha(\vec{r}) &= \psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}) = \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r}) \\ &= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \cdot \vec{L})\right)\psi_\alpha(\vec{r}), \end{aligned}$$

a więc unitarny operator obrotu infinitezymalnego ma postać

$$U_R(\vec{\varphi}) = 1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \cdot \vec{L})$$

Dla cząstki wektorowej, opisywanej przez wektorową funkcję falową $\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})$,

Zatem

$$\begin{aligned} U_R(\vec{\varphi})\psi_\alpha(\vec{r}) &= \psi_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\varphi}\times\vec{r}\right) = \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\times\vec{r})\cdot\vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r}) \\ &= \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})\right)\psi_\alpha(\vec{r}), \end{aligned}$$

a więc unitarny operator obrotu infinitezymalnego ma postać

$$U_R(\vec{\varphi}) = 1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})$$

Dla cząstki wektorowej, opisywanej przez wektorową funkcję falową $\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})$, prawo transformacyjne przy obrotach jest inne

$$\vec{\psi}_{\alpha'}(R\,\vec{r}) = R\,\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}).$$

Zatem

$$U_R(\vec{\varphi})\psi_\alpha(\vec{r}) \;=\; \psi_\alpha\left(\vec{r}-\vec{\varphi}\times\vec{r}\right) = \left(1-\frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\times\vec{r})\cdot\vec{p}\right)\psi_\alpha(\vec{r})$$
$$= \left(1-\frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})\right)\psi_\alpha(\vec{r}),$$

a więc unitarny operator obrotu infinitezymalnego ma postać

$$U_R(\vec{\varphi}) = 1-\frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})$$

Dla cząstki wektorowej, opisywanej przez wektorową funkcję falową $\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})$, prawo transformacyjne przy obrotach jest inne

$$\vec{\psi}_{\alpha'}(R\,\vec{r}) = R\,\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}).$$

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Korzystając ze wzoru $\vec{r}_R = \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ zarówno dla transformacji wektora $\vec{r}$ jak i $\vec{\psi}_\alpha$ otrzymamy

$$U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})$$

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Korzystając ze wzoru $\vec{r}_R = \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ zarówno dla transformacji wektora $\vec{r}$ jak i $\vec{\psi}_\alpha$ otrzymamy

$$U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \quad =$$

Obroty

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Korzystając ze wzoru $\vec{r}_R = \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ zarówno dla transformacji wektora $\vec{r}$ jak i $\vec{\psi}_\alpha$ otrzymamy

$$U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \quad = \quad R\,\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \approx$$

Obroty

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Korzystając ze wzoru $\vec{r}_R = \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ zarówno dla transformacji wektora $\vec{r}$ jak i $\vec{\psi}_\alpha$ otrzymamy

$$U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \quad = \quad R\,\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \approx \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) + \vec{\varphi} \times \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right)$$

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Korzystając ze wzoru $\vec{r}_R = \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ zarówno dla transformacji wektora $\vec{r}$ jak i $\vec{\psi}_\alpha$ otrzymamy

$$\begin{aligned} U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &= R\,\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \approx \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) + \vec{\varphi} \times \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \\ &\approx \end{aligned}$$

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Korzystając ze wzoru $\vec{r}_R = \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ zarówno dla transformacji wektora $\vec{r}$ jak i $\vec{\psi}_\alpha$ otrzymamy

$$\begin{aligned} U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &= R\,\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \approx \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) + \vec{\varphi} \times \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \\ &\approx \vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}\right) + \vec{\varphi} \times \vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}\right) \end{aligned}$$

Obroty

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Korzystając ze wzoru $\vec{r}_R = \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ zarówno dla transformacji wektora $\vec{r}$ jak i $\vec{\psi}_\alpha$ otrzymamy

$$\begin{aligned}
U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &= R\,\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \approx \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) + \vec{\varphi} \times \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \\
&\approx \vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}\right) + \vec{\varphi} \times \vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}\right) \\
&\approx
\end{aligned}$$

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Korzystając ze wzoru $\vec{r}_R = \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ zarówno dla transformacji wektora $\vec{r}$ jak i $\vec{\psi}_\alpha$ otrzymamy

$$\begin{aligned} U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &= R\,\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \approx \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) + \vec{\varphi}\times\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \\ &\approx \vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\varphi}\times\vec{r}\right) + \vec{\varphi}\times\vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\varphi}\times\vec{r}\right) \\ &\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \end{aligned}$$

Obroty

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Korzystając ze wzoru $\vec{r}_R = \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ zarówno dla transformacji wektora $\vec{r}$ jak i $\vec{\psi}_\alpha$ otrzymamy

$$\begin{aligned} U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &= R\,\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \approx \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) + \vec{\varphi} \times \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \\ &\approx \vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}\right) + \vec{\varphi} \times \vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}\right) \\ &\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \cdot \vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \end{aligned}$$

Obroty

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Korzystając ze wzoru $\vec{r}_R = \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ zarówno dla transformacji wektora $\vec{r}$ jak i $\vec{\psi}_\alpha$ otrzymamy

$$\begin{aligned}
U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &= R\,\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \approx \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) + \vec{\varphi} \times \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \\
&\approx \vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}\right) + \vec{\varphi} \times \vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}\right) \\
&\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \cdot \vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&+ \vec{\varphi} \times \left(\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \cdot \vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})\right).
\end{aligned}$$

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Korzystając ze wzoru $\vec{r}_R = \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ zarówno dla transformacji wektora $\vec{r}$ jak i $\vec{\psi}_\alpha$ otrzymamy

$$\begin{aligned} U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &= R\,\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \approx \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) + \vec{\varphi} \times \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \\ &\approx \vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}\right) + \vec{\varphi} \times \vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}\right) \\ &\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \cdot \vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\ &+ \vec{\varphi} \times \left(\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \cdot \vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})\right). \end{aligned}$$

Ostatni wyraz po prawej stronie możemy zaniedbać,

Unitarny operator obrotu definiujemy analogicznie do przypadku cząstki skalarnej

$$U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \vec{\psi}_{\alpha'}(\vec{r}).$$

Korzystając ze wzoru $\vec{r}_R = \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ zarówno dla transformacji wektora $\vec{r}$ jak i $\vec{\psi}_\alpha$ otrzymamy

$$\begin{aligned}
U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &= R\,\vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \approx \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) + \vec{\varphi} \times \vec{\psi}_\alpha\left(R^{-1}\vec{r}\right) \\
&\approx \vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}\right) + \vec{\varphi} \times \vec{\psi}_\alpha\left(\vec{r} - \vec{\varphi} \times \vec{r}\right) \\
&\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \cdot \vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&+ \vec{\varphi} \times \left(\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi} \cdot \vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})\right).
\end{aligned}$$

Ostatni wyraz po prawej stronie możemy zaniedbać, gdyż jest drugiego rzędu w $\vec{\varphi}$, więc

$$U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) + \vec{\varphi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}).$$

Obroty

gdyż jest drugiego rzędu w $\vec{\varphi}$, więc

$$U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) + \vec{\varphi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}).$$

Zadanie. Pokazać, że ostatni wyraz możemy zapisać w formie

$$\vec{\varphi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = -\frac{i}{\hbar}\left(\vec{\varphi}\cdot\vec{S}\right)\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}),$$

gdzie $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$, przy czym

$$S_x = i\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = i\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

gdyż jest drugiego rzędu w $\vec{\varphi}$, więc

$$U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) + \vec{\varphi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}).$$

Zadanie. Pokazać, że ostatni wyraz możemy zapisać w formie

$$\vec{\varphi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = -\frac{i}{\hbar}\left(\vec{\varphi}\cdot\vec{S}\right)\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}),$$

gdzie $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$, przy czym

$$S_x = i\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = i\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_z = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że macierze S_x, S_y i S_z są hermitowskie.

Obroty

$$S_z = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że macierze S_x, S_y i S_z są hermitowskie.

Zadanie. Pokazać, że macierz S_z można sprowadzić do postaci diagonalnej

$$S_z^{\mathrm{diag.}} = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$S_z = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że macierze S_x, S_y i S_z są hermitowskie.

Zadanie. Pokazać, że macierz S_z można sprowadzić do postaci diagonalnej

$$S_z^{\mathrm{diag.}} = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Obroty

W takim razie

$$U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \quad \approx \quad \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) + \vec{\varphi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})$$

$$=$$

W takim razie

$$
\begin{aligned}
U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) + \vec{\varphi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&= \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{S})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})
\end{aligned}
$$

W takim razie

$$
\begin{aligned}
U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) + \vec{\varphi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&= \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{S})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&=
\end{aligned}
$$

W takim razie

$$
\begin{aligned}
U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) + \vec{\varphi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&= \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{S})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left[1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\varphi}\cdot\left(\vec{L}+\vec{S}\right)\right]\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}).
\end{aligned}
$$

W takim razie

$$
\begin{aligned}
U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) + \vec{\varphi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&= \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{S})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left[1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\varphi}\cdot\left(\vec{L}+\vec{S}\right)\right]\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}).
\end{aligned}
$$

Widzimy, że unitarny operator obrotu infinitezymalnego dla cząstki wektorowej ma postać

$$
U_R(\vec{\varphi}) = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\varphi}\cdot\left(\vec{L}+\vec{S}\right) = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\varphi}\cdot\vec{J},
$$

W takim razie

$$\begin{aligned}
U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) + \vec{\varphi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&= \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{S})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left[1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\varphi}\cdot\left(\vec{L}+\vec{S}\right)\right]\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}).
\end{aligned}$$

Widzimy, że unitarny operator obrotu infinitezymalnego dla cząstki wektorowej ma postać

$$U_R(\vec{\varphi}) = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\varphi}\cdot\left(\vec{L}+\vec{S}\right) = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\varphi}\cdot\vec{J},$$

gdzie $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

W takim razie

$$\begin{aligned} U_R(\vec{\varphi})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &\approx \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) + \vec{\varphi}\times\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\ &= \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{L})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\varphi}\cdot\vec{S})\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\ &= \left[1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\varphi}\cdot\left(\vec{L}+\vec{S}\right)\right]\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}). \end{aligned}$$

Widzimy, że unitarny operator obrotu infinitezymalnego dla cząstki wektorowej ma postać

$$U_R(\vec{\varphi}) = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\varphi}\cdot\left(\vec{L}+\vec{S}\right) = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\varphi}\cdot\vec{J},$$

gdzie $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

Operator

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

jest operatorem całkowitego momentu pędu cząstki.
Operator $\vec{S}$ nazywamy spinowym momentem pędu.

Operator

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

jest operatorem całkowitego momentu pędu cząstki.
Operator $\vec{S}$ nazywamy spinowym momentem pędu.
Przypomnijmy, że wartości własne operatora $\vec{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ mają postać

$$l(l+1)\hbar^2, \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Operator

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

jest operatorem całkowitego momentu pędu cząstki.
Operator $\vec{S}$ nazywamy spinowym momentem pędu.
Przypomnijmy, że wartości własne operatora $\vec{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ mają postać

$$l(l+1)\hbar^2, \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Zadanie. Pokazać, że macierze spinowego momentu pędu $(S_x, S_y, S_z) \equiv (S_1, S_2, S_3)$ spełniają następujące reguły komutacyjne

$$[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k.$$

Operator

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

jest operatorem całkowitego momentu pędu cząstki.
Operator $\vec{S}$ nazywamy spinowym momentem pędu.
Przypomnijmy, że wartości własne operatora $\vec{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ mają postać

$$l(l+1)\hbar^2, \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Zadanie. Pokazać, że macierze spinowego momentu pędu $(S_x, S_y, S_z) \equiv (S_1, S_2, S_3)$ spełniają następujące reguły komutacyjne

$$[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k.$$

Zadanie. Pokazać, że

$$\vec{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 2\hbar^2\mathbb{I} = 1 \cdot (1+1)\hbar^2\mathbb{I} = s(s+1)\hbar^2\mathbb{I},$$

co odpowiada wartości $s = 1$.

Obroty

Ponieważ macierze spinowego momentu pędu i składowe orbitalnego momentu pędu działają w różnych przestrzeniach wektorowych, to

$$[L_i, S_j] = 0.$$

Obliczmy komutator

$$[J_i, J_j] = [L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [L_i, S_j] + [S_i, L_j] + [S_i, S_j]$$

Ponieważ macierze spinowego momentu pędu i składowe orbitalnego momentu pędu działają w różnych przestrzeniach wektorowych, to

$$[L_i, S_j] = 0.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= [L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [L_i, S_j] + [S_i, L_j] + [S_i, S_j] \\
&= [L_i, L_j] + [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k + i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k
\end{aligned}$$

Ponieważ macierze spinowego momentu pędu i składowe orbitalnego momentu pędu działają w różnych przestrzeniach wektorowych, to

$$[L_i, S_j] = 0.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= [L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [L_i, S_j] + [S_i, L_j] + [S_i, S_j] \\ &= [L_i, L_j] + [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k + i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k \\ &= i\hbar\varepsilon_{ijk} (L_k + S_k) = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k. \end{aligned}$$

Ponieważ macierze spinowego momentu pędu i składowe orbitalnego momentu pędu działają w różnych przestrzeniach wektorowych, to

$$[L_i, S_j] = 0.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= [L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [L_i, S_j] + [S_i, L_j] + [S_i, S_j] \\
&= [L_i, L_j] + [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k + i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k \\
&= i\hbar\varepsilon_{ijk} (L_k + S_k) = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$J_i^\dagger =$$

Ponieważ macierze spinowego momentu pędu i składowe orbitalnego momentu pędu działają w różnych przestrzeniach wektorowych, to

$$[L_i, S_j] = 0.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= [L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [L_i, S_j] + [S_i, L_j] + [S_i, S_j] \\
&= [L_i, L_j] + [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k + i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k \\
&= i\hbar\varepsilon_{ijk} (L_k + S_k) = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$J_i^\dagger = (L_i + S_i)^\dagger =$$

Ponieważ macierze spinowego momentu pędu i składowe orbitalnego momentu pędu działają w różnych przestrzeniach wektorowych, to

$$[L_i, S_j] = 0.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= [L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [L_i, S_j] + [S_i, L_j] + [S_i, S_j] \\ &= [L_i, L_j] + [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k + i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k \\ &= i\hbar\varepsilon_{ijk} (L_k + S_k) = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$J_i^\dagger = (L_i + S_i)^\dagger = L_i^\dagger + S_i^\dagger =$$

Ponieważ macierze spinowego momentu pędu i składowe orbitalnego momentu pędu działają w różnych przestrzeniach wektorowych, to

$$[L_i, S_j] = 0.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= [L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [L_i, S_j] + [S_i, L_j] + [S_i, S_j] \\
&= [L_i, L_j] + [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k + i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k \\
&= i\hbar\varepsilon_{ijk} (L_k + S_k) = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$J_i^\dagger = (L_i + S_i)^\dagger = L_i^\dagger + S_i^\dagger = L_i + S_i =$$

Ponieważ macierze spinowego momentu pędu i składowe orbitalnego momentu pędu działają w różnych przestrzeniach wektorowych, to

$$[L_i, S_j] = 0.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= [L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [L_i, S_j] + [S_i, L_j] + [S_i, S_j] \\
&= [L_i, L_j] + [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k + i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k \\
&= i\hbar\varepsilon_{ijk} (L_k + S_k) = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$J_i^\dagger = (L_i + S_i)^\dagger = L_i^\dagger + S_i^\dagger = L_i + S_i = J_i,$$

Obroty

Ponieważ macierze spinowego momentu pędu i składowe orbitalnego momentu pędu działają w różnych przestrzeniach wektorowych, to

$$[L_i, S_j] = 0.$$

Obliczmy komutator

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= [L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [L_i, S_j] + [S_i, L_j] + [S_i, S_j] \\
&= [L_i, L_j] + [S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k + i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k \\
&= i\hbar\varepsilon_{ijk} (L_k + S_k) = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$J_i^\dagger = (L_i + S_i)^\dagger = L_i^\dagger + S_i^\dagger = L_i + S_i = J_i,$$

Obroty

a więc operator $\vec{J}$ jest hermitowski.

Związki

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k \quad i \quad J_i^\dagger = J_i$$

można przyjąć jako definicję operatora całkowitego momentu pędu.

a więc operator $\vec{J}$ jest hermitowski.
Związki

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k \quad i \quad J_i^\dagger = J_i$$

można przyjąć jako definicję operatora całkowitego momentu pędu.
Wartość $s = 1$ dla cząstki wektorowej wiąże się ściśle z przyjętym prawem transformacyjnym dla funkcji falowej.

a więc operator $\vec{J}$ jest hermitowski.
Związki

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k \quad i \quad J_i^\dagger = J_i$$

można przyjąć jako definicję operatora całkowitego momentu pędu.
Wartość $s = 1$ dla cząstki wektorowej wiąże się ściśle z przyjętym prawem transformacyjnym dla funkcji falowej.
Zauważmy, że dla cząstki skalarnej $s = 0$.

a więc operator $\vec{J}$ jest hermitowski.
Związki

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k \quad i \quad J_i^\dagger = J_i$$

można przyjąć jako definicję operatora całkowitego momentu pędu.
Wartość $s = 1$ dla cząstki wektorowej wiąże się ściśle z przyjętym prawem transformacyjnym dla funkcji falowej.
Zauważmy, że dla cząstki skalarnej $s = 0$. Zwykle mówimy, że cząstka skalarna nie ma spinu.

a więc operator $\vec{J}$ jest hermitowski.
Związki

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k \quad i \quad J_i^\dagger = J_i$$

można przyjąć jako definicję operatora całkowitego momentu pędu.
Wartość $s = 1$ dla cząstki wektorowej wiąże się ściśle z przyjętym prawem transformacyjnym dla funkcji falowej.
Zauważmy, że dla cząstki skalarnej $s = 0$. Zwykle mówimy, że cząstka skalarna nie ma spinu.

Obroty skończone

Jak otrzymać operator unitarny reprezentujący obrót o skończony, a nie infinitezymalny, kąt $\vec{\varphi}$?

Przyjmijmy, że obrót infinitezymalny ma teraz postać

$$\Delta\vec{\varphi} = [\Delta\varphi, 0, 0] \, ,$$

Obroty skończone

Jak otrzymać operator unitarny reprezentujący obrót o skończony, a nie infinitezymalny, kąt $\vec{\varphi}$?
Przyjmijmy, że obrót infinitezymalny ma teraz postać

$$\Delta\vec{\varphi} = [\Delta\varphi, 0, 0]\,,$$

wówczas

$$U_R(\varphi + \Delta\varphi) = U_R(\Delta\varphi)U_R(\varphi)$$

Jak otrzymać operator unitarny reprezentujący obrót o skończony, a nie infinitezymalny, kąt $\vec{\varphi}$?
Przyjmijmy, że obrót infinitezymalny ma teraz postać

$$\Delta\vec{\varphi} = [\Delta\varphi, 0, 0]\,,$$

wówczas

$$U_R(\varphi + \Delta\varphi) \quad = \quad U_R(\Delta\varphi) U_R(\varphi) \approx \left(1 - \frac{i}{\hbar}\Delta\varphi J_x\right) U_R(\varphi)$$

Obroty skończone

Jak otrzymać operator unitarny reprezentujący obrót o skończony, a nie infinitezymalny, kąt $\vec{\varphi}$?
Przyjmijmy, że obrót infinitezymalny ma teraz postać

$$\Delta\vec{\varphi} = [\Delta\varphi, 0, 0]\,,$$

wówczas

$$U_R(\varphi + \Delta\varphi) \quad = \quad U_R(\Delta\varphi)U_R(\varphi) \approx \left(1 - \frac{i}{\hbar}\Delta\varphi J_x\right) U_R(\varphi)$$

$$=$$

Obroty skończone

Jak otrzymać operator unitarny reprezentujący obrót o skończony, a nie infinitezymalny, kąt $\vec{\varphi}$?
Przyjmijmy, że obrót infinitezymalny ma teraz postać

$$\Delta\vec{\varphi} = [\Delta\varphi, 0, 0]\,,$$

wówczas

$$\begin{aligned} U_R(\varphi + \Delta\varphi) &= U_R(\Delta\varphi)U_R(\varphi) \approx \left(1 - \frac{i}{\hbar}\Delta\varphi J_x\right) U_R(\varphi) \\ &= U_R(\varphi) - \frac{i}{\hbar}\Delta\varphi J_x U_R(\varphi). \end{aligned}$$

Obroty skończone

Jak otrzymać operator unitarny reprezentujący obrót o skończony, a nie infinitezymalny, kąt $\vec{\varphi}$?
Przyjmijmy, że obrót infinitezymalny ma teraz postać

$$\Delta\vec{\varphi} = [\Delta\varphi, 0, 0]\,,$$

wówczas

$$\begin{aligned} U_R(\varphi + \Delta\varphi) &= U_R(\Delta\varphi) U_R(\varphi) \approx \left(1 - \frac{i}{\hbar}\Delta\varphi J_x\right) U_R(\varphi) \\ &= U_R(\varphi) - \frac{i}{\hbar}\Delta\varphi J_x U_R(\varphi). \end{aligned}$$

Skąd otrzymujemy

$$\frac{U_R(\varphi + \Delta\varphi) - U_R(\varphi)}{\Delta\varphi} = -\frac{i}{\hbar} J_x U_R(\varphi),$$

Jak otrzymać operator unitarny reprezentujący obrót o skończony, a nie infinitezymalny, kąt $\vec{\varphi}$?
Przyjmijmy, że obrót infinitezymalny ma teraz postać

$$\Delta\vec{\varphi} = [\Delta\varphi, 0, 0]\,,$$

wówczas

$$\begin{aligned} U_R(\varphi + \Delta\varphi) &= U_R(\Delta\varphi)U_R(\varphi) \approx \left(1 - \frac{i}{\hbar}\Delta\varphi J_x\right) U_R(\varphi) \\ &= U_R(\varphi) - \frac{i}{\hbar}\Delta\varphi J_x U_R(\varphi). \end{aligned}$$

Skąd otrzymujemy

$$\frac{U_R(\varphi + \Delta\varphi) - U_R(\varphi)}{\Delta\varphi} = -\frac{i}{\hbar} J_x U_R(\varphi),$$

a w granicy $\Delta\varphi \to 0$ dostaniemy

$$\frac{\mathrm{d}U_R(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{i}{\hbar} J_x U_R(\varphi),$$

przy warunku brzegowym, $U_R(0) = 1$.
Rozdzielmy zmienne

$$\frac{\mathrm{d}U_R}{U_R} = -\frac{i}{\hbar} J_x \mathrm{d}\varphi$$

Obroty skończone

a w granicy $\Delta\varphi \to 0$ dostaniemy

$$\frac{\mathrm{d}U_R(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{i}{\hbar} J_x U_R(\varphi),$$

przy warunku brzegowym, $U_R(0) = 1$.
Rozdzielmy zmienne

$$\frac{\mathrm{d}U_R}{U_R} = -\frac{i}{\hbar} J_x \mathrm{d}\varphi$$

i scałkujmy obustronnie

$$\int\limits_{U_R(0)}^{U_R(\varphi)} \frac{\mathrm{d}U_R}{U_R} = -\frac{i}{\hbar} \int\limits_0^{\varphi} J_x \mathrm{d}\bar{\varphi} =$$

Obroty skończone

a w granicy $\Delta\varphi \to 0$ dostaniemy

$$\frac{\mathrm{d}U_R(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{i}{\hbar} J_x U_R(\varphi),$$

przy warunku brzegowym, $U_R(0) = 1$.
Rozdzielmy zmienne

$$\frac{\mathrm{d}U_R}{U_R} = -\frac{i}{\hbar} J_x \mathrm{d}\varphi$$

i scałkujmy obustronnie

$$\int\limits_{U_R(0)}^{U_R(\varphi)} \frac{\mathrm{d}U_R}{U_R} = -\frac{i}{\hbar} \int\limits_0^{\varphi} J_x \mathrm{d}\bar{\varphi} = -\frac{i}{\hbar} J_x \int\limits_0^{\varphi} \mathrm{d}\bar{\varphi} =$$

a w granicy $\Delta\varphi \to 0$ dostaniemy

$$\frac{\mathrm{d}U_R(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{i}{\hbar} J_x U_R(\varphi),$$

przy warunku brzegowym, $U_R(0) = 1$.
Rozdzielmy zmienne

$$\frac{\mathrm{d}U_R}{U_R} = -\frac{i}{\hbar} J_x \mathrm{d}\varphi$$

i scałkujmy obustronnie

$$\int\limits_{U_R(0)}^{U_R(\varphi)} \frac{\mathrm{d}U_R}{U_R} = -\frac{i}{\hbar} \int\limits_0^{\varphi} J_x \mathrm{d}\bar{\varphi} = -\frac{i}{\hbar} J_x \int\limits_0^{\varphi} \mathrm{d}\bar{\varphi} = -\frac{i}{\hbar} \varphi J_x.$$

Obroty skończone

a w granicy $\Delta\varphi \to 0$ dostaniemy

$$\frac{\mathrm{d}U_R(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{i}{\hbar} J_x U_R(\varphi),$$

przy warunku brzegowym, $U_R(0) = 1$.
Rozdzielmy zmienne

$$\frac{\mathrm{d}U_R}{U_R} = -\frac{i}{\hbar} J_x \mathrm{d}\varphi$$

i scałkujmy obustronnie

$$\int\limits_{U_R(0)}^{U_R(\varphi)} \frac{\mathrm{d}U_R}{U_R} = -\frac{i}{\hbar} \int\limits_0^{\varphi} J_x \mathrm{d}\bar{\varphi} = -\frac{i}{\hbar} J_x \int\limits_0^{\varphi} \mathrm{d}\bar{\varphi} = -\frac{i}{\hbar} \varphi J_x.$$

Obroty skończone

Otrzymujemy równanie

$$\ln U_R(\varphi) - \ln U_R(0) = -\frac{i}{\hbar}\varphi J_x,$$

a po skorzystaniu z warunku brzegowego $U_R(0) = 1$ dostaniemy

$$\ln U_R(\varphi) = -\frac{i}{\hbar}\varphi J_x,$$

Otrzymujemy równanie

$$\ln U_R(\varphi) - \ln U_R(0) = -\frac{i}{\hbar}\varphi J_x,$$

a po skorzystaniu z warunku brzegowego $U_R(0) = 1$ dostaniemy

$$\ln U_R(\varphi) = -\frac{i}{\hbar}\varphi J_x,$$

a więc operator unitarny reprezentujący obrót o skończony $\vec{\varphi} = [\varphi, 0, 0]$ ma postać

$$U_R(\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_x}$$

Otrzymujemy równanie

$$\ln U_R(\varphi) - \ln U_R(0) = -\frac{i}{\hbar}\varphi J_x,$$

a po skorzystaniu z warunku brzegowego $U_R(0) = 1$ dostaniemy

$$\ln U_R(\varphi) = -\frac{i}{\hbar}\varphi J_x,$$

a więc operator unitarny reprezentujący obrót o skończony $\vec{\varphi} = [\varphi, 0, 0]$ ma postać

$$U_R(\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_x}$$

Obroty skończone

Dla obrotu skończonego w postaci ogólnej $\vec{\varphi} = [\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z]$ dostaniemy

$$U_R(\vec{\varphi}) = e^{-\frac{i}{\hbar}(\varphi_x J_x + \varphi_y J_y + \varphi_z J_z)} =$$

Obroty skończone

Dla obrotu skończonego w postaci ogólnej $\vec{\varphi} = [\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z]$ dostaniemy

$$U_R(\vec{\varphi}) = e^{-\frac{i}{\hbar}(\varphi_x J_x + \varphi_y J_y + \varphi_z J_z)} = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\varphi}\cdot\vec{J}},$$

Obroty skończone

Dla obrotu skończonego w postaci ogólnej $\vec{\varphi} = [\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z]$ dostaniemy

$$U_R(\vec{\varphi}) = e^{-\frac{i}{\hbar}(\varphi_x J_x + \varphi_y J_y + \varphi_z J_z)} = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\varphi}\cdot\vec{J}},$$

a więc operator unitarny reprezentujący dowolny obrót skończony ma postać

$$U_R(\vec{\varphi}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\varphi}\cdot\vec{J}}.$$

Obroty skończone

Dla obrotu skończonego w postaci ogólnej $\vec{\varphi} = [\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z]$ dostaniemy

$$U_R(\vec{\varphi}) = e^{-\frac{i}{\hbar}(\varphi_x J_x + \varphi_y J_y + \varphi_z J_z)} = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\varphi}\cdot\vec{J}},$$

a więc operator unitarny reprezentujący dowolny obrót skończony ma postać

$$U_R(\vec{\varphi}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\varphi}\cdot\vec{J}}.$$