

MECHANIKA KWANTOWA

Karol Kołodziej

Zestaw 2

Ponieważ operatory orbitalnego momentu pędu spełniają następujące relacje komutacji:

$$[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k, \quad [\vec{L}^2, L_i] = 0,$$

to stany własne orbitalnego momentu pędu wybiera się zwykle w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\vec{L}^2 |lm\rangle &= l(l+1)\hbar^2 |lm\rangle, \\ L_z |lm\rangle &= m\hbar |lm\rangle,\end{aligned}$$

gdzie, jak pokażemy w dalszej części kursu, $l = 0, 1, 2, \dots$ i $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$.

1. Pokazać, że dla wartości oczekiwanych w stanie $|lm\rangle$ zachodzi

- (a) $\langle lm | L_x | lm \rangle = \langle lm | L_y | lm \rangle = 0$,
- (b) $\langle lm | L_x L_y + L_y L_x | lm \rangle = 0$,
- (c) $\langle lm | L_x^2 | lm \rangle = \langle lm | L_y^2 | lm \rangle$.

2. Jaką relację nieoznaczoności spełniają składowe L_1 i L_2 operatora orbitalnego momentu pędu, dla których $[L_1, L_2] = i\hbar L_3$? W których stanach własnych $|lm\rangle$ operatorów \vec{L}^2 i L_3 można jednocześnie najdokładniej zmierzyć L_1 i L_2 ?

3. Pokazać, że wariancja kąta azymutalnego φ i wariancja trzeciej składowej orbitalnego momentu pędu L_3 w stanie kwantowym opisywanym funkcją falową $\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \varphi$ wynoszą odpowiednio $\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\right)$ i \hbar^2 .

4. Udowodnić, że jeśli operator A komutuje z dwoma składowymi momentu pędu, to komutuje również z trzecią.

5. Macierze Pauliego, σ_i , $i = 1, 2, 3$, można zdefiniować jako macierze 2×2 spełniające warunki:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} \equiv \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Udowodnić, że

- (a) $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$,
- (b) $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = i$,
- (c) $\text{Tr } \sigma_i = 0$,
- (d) $\det \sigma_i = -1$.

6. Niech $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ i $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$ będą dowolnymi wektorami o składowych rzeczywistych lub zespolonych, a $\vec{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$, gdzie σ_i , $i = 1, 2, 3$ są macierzami Pauliego. Oznaczmy $\hat{a} \equiv \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$. Udowodnić, że

$$(a) \hat{a}^2 = \vec{a}^2,$$

$$(b) \{\hat{a}, \hat{b}\} = 2\vec{a} \cdot \vec{b},$$

$$(c) \hat{a} \cdot \hat{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

7. Udowodnić, że

$$\begin{aligned} e^{i\varphi\frac{1}{2}\sigma_3} \sigma_1 e^{-i\varphi\frac{1}{2}\sigma_3} &= \sigma_1 \cos \varphi - \sigma_2 \sin \varphi, \\ e^{i\varphi\frac{1}{2}\sigma_3} \sigma_2 e^{-i\varphi\frac{1}{2}\sigma_3} &= \sigma_2 \cos \varphi + \sigma_1 \sin \varphi, \end{aligned}$$

gdzie σ_i , $i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego.

Literatura: J.B. Brojan, J. Mostowski, K. Wódkiewicz, *Zbiór zadań z mechaniki kwantowej*.