

MECHANIKA KWANTOWA

Karol Kołodziej

Zestaw 1

1. Udowodnić indukcyjnie wzór Leibniza

$$\frac{d^n}{dx^n} [u(x)v(x)] = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{d^m u(x)}{dx^m} \frac{d^{n-m} v(x)}{dx^{n-m}}.$$

2. Wielomiany Legendre'a $P_n(w)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, określone w przedziale domkniętym $[-1, 1]$ można zdefiniować poprzez tzw. wzór Rodriguesa

$$P_n(w) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dw^n} (w^2 - 1)^n, \quad w \in [-1, 1].$$

Wykorzystując wzór Leibniza zróżniczkować $(n + 1)$ -krotnie tożsamość

$$(w^2 - 1) \frac{d}{dw} (w^2 - 1)^n = 2nw (w^2 - 1)^n$$

i pokazać, że wielomiany Legendre'a spełniają następujące równanie różniczkowe II rzędu

$$\frac{d}{dw} \left[(1 - w^2) \frac{dP_n(w)}{dw} \right] + n(n + 1)P_n(w) = 0.$$

3. Pokazać, że wielomiany Legendre'a $P_n(w)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, są ortogonalne w przedziale domkniętym $[-1, 1]$, tzn. że

$$\int_{-1}^1 P_n(w)P_m(w) dw = 0, \quad \text{dla } n \neq m.$$

Wskazówka. Skorzystać z równania różniczkowego z zad. 2.

4. Pokazać, że stowarzyszone funkcje Legendrea $P_l^m(w)$ zdefiniowane na odcinku $[-1, 1]$ wzorem

$$P_l^m(w) = (1 - w^2)^{\frac{1}{2}|m|} \frac{d^{|m|}}{dw^{|m|}} P_l(w),$$

gdzie $P_l(w)$, $l = 0, 1, 2, \dots$, jest wielomianem Legendre'a, a m jest liczbą całkowitą, przy czym $|m| \leq l$, spełniają następujące równanie różniczkowe II rzędu

$$\frac{d}{dw} \left[(1 - w^2) \frac{dP_l^m(w)}{dw} \right] + \left[l(l + 1) - \frac{m^2}{1 - w^2} \right] P_l^m(w) = 0.$$

5. Pokazać, że stowarzyszone funkcje Legendre'a $P_l^m(w)$ spełniają następującą relację ortogonalności na odcinku $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 P_l^m(w)P_l^m(w) dw = \frac{2}{2l + 1} \frac{(l + |m|)!}{(l - |m|)!} \delta_{ll}.$$

6. Funkcja falowa cząstki, która znajduje się gdzieś na osi Ox jest dana wzorem

$$\psi(x, t) = Ae^{-\frac{x^2}{2a} + i\omega t}.$$

Wyznaczyć stałą A .

Literatura do zadań 1–5: F.W. Byron, R.W. Fuller, tom I, rozdz. 5