$$\int_{-1}^{1} (l-m)(l+m+1) \int_{-1}^{1} P_l(x) P_m(x)\, dx = P_m(x)\overset{0}{\overbrace{(1-x^2)}}\frac{dP_l(x)}{dx}\Big|_{-1}^{1}$$

$$- \int_{-1}^{1} \frac{dP_m}{dx} \cancel{(1-x^2)} \frac{dP_l}{dx}\, dx - P_l(x)\overset{0}{\overbrace{(1-x^2)}}\frac{dP_m}{dx}\Big|_{-1}^{1} +$$

$$+ \int_{-1}^{1} \frac{dP_l}{dx} \cancel{(1-x^2)} \frac{dP_m}{dx}\, dx = 0,$$

gdzie po prawej stronie wykonaliśmy całkowanie przez części.

Dla $l \neq m$ otrzymujemy

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_m(x)\, dx = (P_l, P_m) = 0.$$

Wróćmy do równania w ramce ze str. 93. Na razie znaleźliśmy jego fizyczne rozwiązanie dla $m = 0$ i $\lambda = l(l+1)$, gdzie $l = 0, 1, 2, \ldots$. Jeśli $m \neq 0$ i $|m| \leq l$, to fizyczne rozwiązania mają postać

$$P_l^m(w) = (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|} \frac{d^{|m|}}{dw^{|m|}} P_l(w)$$

Są to tzw. stowarzyszone funkcje Legendre'a.

<u>Zadanie</u>. Pokazać, że stowarzyszone funkcje Legendre'a spełniają równanie

$$\frac{d}{dw}\left[(1-w^2)\frac{dP_l^m}{dw}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-w^2}\right] P_l^m = 0$$

Oznaczmy $\quad v := \dfrac{d^{|m|}}{dw^{|m|}} P_l(w)$

Wówczas

$$P_l^m(w) = (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|} v$$

$$P_l^{m\prime} = -|m| w (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|-1} v + (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|} v'$$

$$\cancel{P_l^{m\prime\prime} = -|m| \left(\tfrac{1}{2}|m|-1\right)}$$

$$P_l^{m\prime\prime} = -|m| (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|-1} v - |m| w \left(\tfrac{1}{2}|m|-1\right)(-2w)(1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|-2} v$$

$$- \underline{\underline{|m| w (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|-1} v'}} - \underline{\underline{|m| w (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|-1} v'}} + \underline{(1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|} v''}$$

$$= (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|} v'' - 2|m| w (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|-1} v' - |m| (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|-1} v$$

$$+ |m| w^2 (|m|-2)(1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|-2} v$$

Wstawmy to do lewej strony naszego równania

$$(1-w^2)\Big[(1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|} v'' - 2|m| w (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|-1} v' - |m| (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|-1} v$$

$$+ |m| w^2 (|m|-2)(1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|-2} v\Big]$$

$$-2w \left[-|m| w (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|-1} v + (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|} v'\right]$$

$$+ \left[l(l+1) - \frac{m^2}{(1-w^2)}\right](1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|} v =$$

$$= (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|} \Big\{ (1-w^2) v'' - 2|m| w v' - |m| v + \frac{|m|(|m|-2) w^2}{1-w^2} v$$

$$+ \cancel{\frac{2|m|w^2}{1-w^2}} + \frac{2w^2 |m|}{1-w^2} v - 2wv' + l(l+1) v - \frac{m^2}{1-w^2} v \Big\}$$

$$= (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|} \left\{ (1-w^2)v'' - 2(|m|+1)wv' + \frac{-|m|(1-w^2)+m^2w^2 - \cancel{2|m|w^2} + \cancel{2|m|w^2} - m^2}{1-w^2} v \right.$$

$$\left. + l(l+1)v \right\} \qquad \overset{\shortparallel}{\frac{-m^2(\cancel{1-w^2}) - |m|(\cancel{1-w^2})}{\cancel{1-w^2}}} v$$

$$= (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|} \left\{ (1-w^2)v'' - 2(|m|+1)wv' + [l(l+1) - |m|(|m|+1)]v \right\} = *$$

$$(1-w^2)v'' = (1-w^2)\frac{d^{|m|+2}}{dw^{|m|+2}} P_l(w)$$

Obliczamy

$$\frac{d^{|m|}}{dw^{|m|}} \left[(1-w^2)\frac{d^2}{dw^2} P_l(w) \right] = (1-w^2)\frac{d^{|m|+2}}{dw^{|m|+2}} P_l(w)$$

$$-2w|m|\frac{d^{|m|+1}}{dw^{|m|+1}} P_l - \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}|m|(|m|-1)\frac{d^{|m|}}{dw^{|m|}} P_l$$

$$wv' = w\frac{d^{|m|+1}}{dw^{|m|+1}} P_l(w)$$

$$\frac{d^{|m|}}{dw^{|m|}}\left[w\frac{dP_l}{dw} \right] = w\frac{d^{|m|+1}P_l}{dw^{|m|+1}} + |m|\frac{d^{|m|}P_l}{dw^{|m|}}$$

$$* = (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|} \left\{ \frac{d^{|m|}}{dw^{|m|}}\left[(1-w^2)\frac{d^2P_l}{dw^2}\right] + \overbrace{2w|m|\frac{d^{|m|+1}P_l}{dw^{|m|+1}}}^{=2|m|\left(\frac{d^{|m|}}{dw^{|m|}}\left(w\frac{dP_l}{dw}\right) - |m|\frac{d^{|m|}P_l}{dw^{|m|}}\right)} + |m|(|m|-1)\frac{d^{|m|}P_l}{dw^{|m|}} \right.$$

$$\left. - 2(|m|+1)\cdot\frac{d^{|m|}}{dw^{|m|}}\left[w\frac{dP_l}{dw}\right] + 2(|m|+1)|m|\frac{d^{|m|}P_l}{dw^{|m|}} + [l(l+1) - |m|(|m|+1)]\frac{d^{|m|}P_l}{dw^{|m|}} \right\}$$

$$= (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|} \left\{ \underline{\frac{d^{|m|}}{dw^{|m|}}\left[(1-w^2)\frac{d^2P_l}{dw^2}\right]} + 2|m|\cancel{\frac{d^{|m|}}{dw^{|m|}}\left[w\frac{dP_l}{dw}\right]} - 2|m|^2\frac{d^{|m|}P_l}{dw^{|m|}} \right.$$

$$+ |m|(|m|-1)\frac{d^{|m|}P_l}{dw^{|m|}} - 2(\cancel{|m|}+1)\frac{d^{|m|}}{dw^{|m|}}\left[w\frac{dP_l}{dw}\right] + 2(|m|+1)|m|\frac{d^{|m|}P_l}{dw^{|m|}}$$

$$+ \left[l(l+1) - |m|(|m|+1) \right] \frac{d^{|m|} P_l}{dw^{|m|}} \Big\}$$

$$= (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|} \frac{d^{|m|}}{dw^{|m|}} \Big\{ (1-w^2) \frac{d^2 P_l}{dw^2} - 2w \frac{dP_l}{dw} + [\cancel{m^2} - \cancel{|m|} + 2\cancel{|m|}$$

$$- \cancel{m^2} - \cancel{|m|} + l(l+1)] P_l \Big\} =$$

$$= (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|} \frac{d^{|m|}}{dw^{|m|}} \underbrace{\Big\{ \frac{d}{dw} \left[(1-w^2) \frac{dP_l}{dw} \right] + l(l+1) P_l \Big\}}_{=0 \text{ z równania Legendre'a}} = 0 \quad //$$

<u>Zadanie</u>

Pokazać, że stowarzyszone funkcje Legendre'a spełniają następującą relację ortogonalności w przedziale $[-1, +1]$

$$\left(P_l^m, P_{l'}^m \right) = \int_{-1}^{1} P_l^m(w) P_{l'}^m(w)\, dw = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \delta_{ll'}$$

Wobec tego unormowane rozwiązanie części kątowej mają postać

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \varepsilon \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$$

$\boxed{\text{Verte!}}$

gdzie

$$\varepsilon = \begin{cases} (-1)^m, & \text{dla } m > 0 \\ 1, & \text{dla } m \le 0. \end{cases}$$

Są to tzw. <u>funkcje kuliste</u> albo <u>harmoniki sferyczne</u>. Taki wybór ε jest umowny. Jest on możliwy, gdyż funkcje $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ są określone z dokładnością do fazy zespolonej.