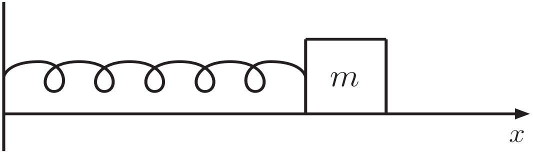
Oscylator harmoniczny

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

24 kwietnia 2023

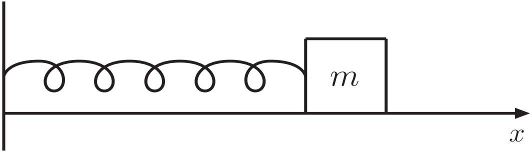
Najprostszy przykład jednowymiarowego oscylatora harmonicznego stanowi siało o masie m, które ślizga się bez tarcia po podłożu pod wpływem sprężyny przyczepionej do ściany. Sprężyna spełnia prawo Hooke'a $F = -Kx$, gdzie współczynnik sprężystości K jest zadany.



Z II zasady dynamiki Newtona otrzymujemy równanie ruchu

$$m\ddot{x} = -Kx$$

Najprostszy przykład jednowymiarowego oscylatora harmonicznego stanowi siało o masie m, które ślizga się bez tarcia po podłożu pod wpływem sprężyny przyczepionej do ściany. Sprężyna spełnia prawo Hooke'a $F = -Kx$, gdzie współczynnik sprężystości K jest zadany.

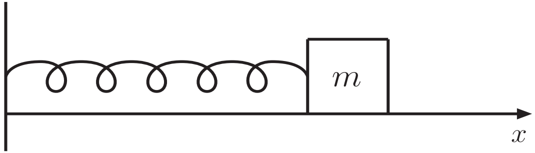


Z II zasady dynamiki Newtona otrzymujemy równanie ruchu

$$m\ddot{x} = -Kx \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} = -\frac{K}{m}x$$

Klasyczny oscylator harmoniczny

Najprostszy przykład jednowymiarowego oscylatora harmonicznego stanowi siało o masie m, które ślizga się bez tarcia po podłożu pod wpływem sprężyny przyczepionej do ściany. Sprężyna spełnia prawo Hooke'a $F = -Kx$, gdzie współczynnik sprężystości K jest zadany.

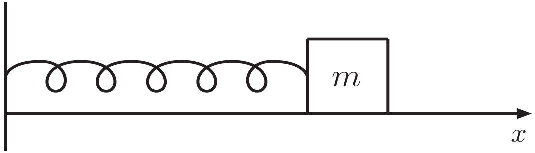


Z II zasady dynamiki Newtona otrzymujemy równanie ruchu

$$m\ddot{x} = -Kx \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} = -\frac{K}{m}x \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} = -\omega^2 x,$$

Klasyczny oscylator harmoniczny

Najprostszy przykład jednowymiarowego oscylatora harmonicznego stanowi siało o masie m, które ślizga się bez tarcia po podłożu pod wpływem sprężyny przyczepionej do ściany. Sprężyna spełnia prawo Hooke'a $F = -Kx$, gdzie współczynnik sprężystości K jest zadany.



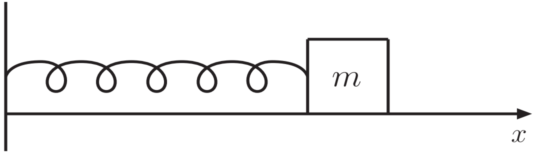
Z II zasady dynamiki Newtona otrzymujemy równanie ruchu

$$m\ddot{x} = -Kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{K}{m}x \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\omega^2 x,$$

gdzie oznaczyliśmy $\omega^2 \equiv \frac{K}{m}$.

Klasyczny oscylator harmoniczny

Najprostszy przykład jednowymiarowego oscylatora harmonicznego stanowi siało o masie m, które ślizga się bez tarcia po podłożu pod wpływem sprężyny przyczepionej do ściany. Sprężyna spełnia prawo Hooke'a $F = -Kx$, gdzie współczynnik sprężystości K jest zadany.



Z II zasady dynamiki Newtona otrzymujemy równanie ruchu

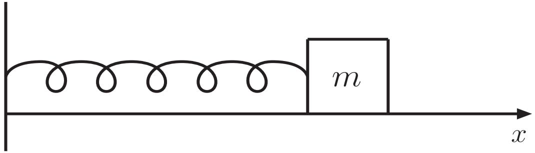
$$m\ddot{x} = -Kx \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} = -\frac{K}{m}x \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} = -\omega^2 x,$$

gdzie oznaczyliśmy $\omega^2 \equiv \frac{K}{m}$.

Innymi przykładami jednowymiarowego oscylatora są wahadło matematyczne, albo obwód elektryczny LC, gdzie rolę wychylenia z położenia równowagi odgrywa ładunek elektryczny $q(t)$.

Klasyczny oscylator harmoniczny

Najprostszy przykład jednowymiarowego oscylatora harmonicznego stanowi siało o masie m, które ślizga się bez tarcia po podłożu pod wpływem sprężyny przyczepionej do ściany. Sprężyna spełnia prawo Hooke'a $F = -Kx$, gdzie współczynnik sprężystości K jest zadany.



Z II zasady dynamiki Newtona otrzymujemy równanie ruchu

$$m\ddot{x} = -Kx \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} = -\frac{K}{m}x \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} = -\omega^2 x,$$

gdzie oznaczyliśmy $\omega^2 \equiv \frac{K}{m}$.

Innymi przykładami jednowymiarowego oscylatora są wahadło matematyczne, albo obwód elektryczny LC, gdzie rolę wychylenia z położenia równowagi odgrywa ładunek elektryczny $q(t)$.

Klasyczny oscylator harmoniczny

Każdy klasyczny jednowymiarowy oscylator harmoniczny jest opisywany równaniem

$$\ddot{x} = -\omega^2 x,$$

z odpowiednim wzorem na częstość kołową ω, która dla wahadła matematycznego dana jest wzorem $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, a dla obwodu LC wzorem $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$.

Rozwiązanie ogólne tego równania zwykle przedstawiamy w jednej z następujących postaci:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha),$$

Klasyczny oscylator harmoniczny

Każdy klasyczny jednowymiarowy oscylator harmoniczny jest opisywany równaniem

$$\ddot{x} = -\omega^2 x,$$

z odpowiednim wzorem na częstość kołową ω, która dla wahadła matematycznego dana jest wzorem $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, a dla obwodu LC wzorem $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$.
Rozwiązanie ogólne tego równania zwykle przedstawiamy w jednej z następujących postaci:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha), \qquad x(t) = B \cos(\omega t + \beta)$$

Klasyczny oscylator harmoniczny

Każdy klasyczny jednowymiarowy oscylator harmoniczny jest opisywany równaniem

$$\ddot{x} = -\omega^2 x,$$

z odpowiednim wzorem na częstość kołową ω, która dla wahadła matematycznego dana jest wzorem $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, a dla obwodu LC wzorem $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$.
Rozwiązanie ogólne tego równania zwykle przedstawiamy w jednej z następujących postaci:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha), \qquad x(t) = B\cos(\omega t + \beta)$$

lub wykorzystując liczby zespolone

$$x(t) = Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t},$$

Klasyczny oscylator harmoniczny

Każdy klasyczny jednowymiarowy oscylator harmoniczny jest opisywany równaniem

$$\ddot{x} = -\omega^2 x,$$

z odpowiednim wzorem na częstość kołową ω, która dla wahadła matematycznego dana jest wzorem $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, a dla obwodu LC wzorem $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$.
Rozwiązanie ogólne tego równania zwykle przedstawiamy w jednej z następujących postaci:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha), \qquad x(t) = B\cos(\omega t + \beta)$$

lub wykorzystując liczby zespolone

$$x(t) = Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t},$$

gdzie A, α, B, β, C i D są dowolnymi stałymi.

Klasyczny oscylator harmoniczny

Każdy klasyczny jednowymiarowy oscylator harmoniczny jest opisywany równaniem

$$\ddot{x} = -\omega^2 x,$$

z odpowiednim wzorem na częstość kołową ω, która dla wahadła matematycznego dana jest wzorem $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, a dla obwodu LC wzorem $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$.
Rozwiązanie ogólne tego równania zwykle przedstawiamy w jednej z następujących postaci:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha), \qquad x(t) = B\cos(\omega t + \beta)$$

lub wykorzystując liczby zespolone

$$x(t) = Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t},$$

gdzie A, α, B, β, C i D są dowolnymi stałymi.
Zadanie. Pokazać, że każda z powyższych funkcji jest rozwiązaniem równania $\ddot{x} = -\omega^2 x$.

Klasyczny oscylator harmoniczny

Każdy klasyczny jednowymiarowy oscylator harmoniczny jest opisywany równaniem

$$\ddot{x} = -\omega^2 x,$$

z odpowiednim wzorem na częstość kołową ω, która dla wahadła matematycznego dana jest wzorem $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, a dla obwodu LC wzorem $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$.
Rozwiązanie ogólne tego równania zwykle przedstawiamy w jednej z następujących postaci:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha), \qquad x(t) = B \cos(\omega t + \beta)$$

lub wykorzystując liczby zespolone

$$x(t) = Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t},$$

gdzie A, α, B, β, C i D są dowolnymi stałymi.
Zadanie. Pokazać, że każda z powyższych funkcji jest rozwiązaniem równania $\ddot{x} = -\omega^2 x$.

Rozważmy klasyczny jednowymiarowy oscylator harmoniczny o częstości kołowej ω opisywany funkcją Hamiltona, która w tym przypadku równa jest całkowitej energii mechanicznej E

$$H = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2.$$

Zauważmy, że jeśli nie ma ruchu, tzn. $x = 0$ i $p = 0$, to całkowita energia mechaniczna $E = 0$.

Jego odpowiednik kwantowy otrzymamy narzucając warunki kwantyzacji

$$[x, p] = i\hbar, \qquad [x, x] = [p, p] = 0.$$

Oscylator harmoniczny

Rozważmy klasyczny jednowymiarowy oscylator harmoniczny o częstości kołowej ω opisywany funkcją Hamiltona, która w tym przypadku równa jest całkowitej energii mechanicznej E

$$H = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2.$$

Zauważmy, że jeśli nie ma ruchu, tzn. $x = 0$ i $p = 0$, to całkowita energia mechaniczna $E = 0$.
Jego odpowiednik kwantowy otrzymamy narzucając warunki kwantyzacji

$$[x, p] = i\hbar, \qquad [x, x] = [p, p] = 0.$$

Zauważmy, że warunki $[x, x] = xx - xx = 0$ i $[p, p] = pp - pp = 0$ są trywialne w przypadku jednowymiarowym.

Oscylator harmoniczny

Rozważmy klasyczny jednowymiarowy oscylator harmoniczny o częstości kołowej ω opisywany funkcją Hamiltona, która w tym przypadku równa jest całkowitej energii mechanicznej E

$$H = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Zauważmy, że jeśli nie ma ruchu, tzn. $x = 0$ i $p = 0$, to całkowita energia mechaniczna $E = 0$.
Jego odpowiednik kwantowy otrzymamy narzucając warunki kwantyzacji

$$[x, p] = i\hbar, \qquad [x, x] = [p, p] = 0.$$

Zauważmy, że warunki $[x, x] = xx - xx = 0$ i $[p, p] = pp - pp = 0$ są trywialne w przypadku jednowymiarowym.

Będziemy pracować w reprezentacji energetycznej, tzn. w bazie wektorów własnych operatora Hamiltona

$$H\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle\,.$$

Wcześniej pokazaliśmy, że H jest operatorem hermitowskim, dlatego stany własne $|\,n\rangle$ odpowiadające różnym wartościom E_n są ortogonalne.

Będziemy pracować w reprezentacji energetycznej, tzn. w bazie wektorów własnych operatora Hamiltona

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle .$$

Wcześniej pokazaliśmy, że H jest operatorem hermitowskim, dlatego stany własne $|n\rangle$ odpowiadające różnym wartościom E_n są ortogonalne. Załóżmy przy tym, że są one unormowane

$$\langle k|n\rangle = \delta_{kn}.$$

Będziemy pracować w reprezentacji energetycznej, tzn. w bazie wektorów własnych operatora Hamiltona

$$H\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle\,.$$

Wcześniej pokazaliśmy, że H jest operatorem hermitowskim, dlatego stany własne $|\,n\rangle$ odpowiadające różnym wartościom E_n są ortogonalne. Załóżmy przy tym, że są one unormowane

$$\langle k|n\rangle = \delta_{kn}.$$

Na razie wiemy tylko, że wartości własne E_n muszą być rzeczywiste, gdyż H jest operatorem hermitowskim.

Będziemy pracować w reprezentacji energetycznej, tzn. w bazie wektorów własnych operatora Hamiltona

$$H\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle\,.$$

Wcześniej pokazaliśmy, że H jest operatorem hermitowskim, dlatego stany własne $|\,n\rangle$ odpowiadające różnym wartościom E_n są ortogonalne. Załóżmy przy tym, że są one unormowane

$$\langle k|n\rangle = \delta_{kn}.$$

Na razie wiemy tylko, że wartości własne E_n muszą być rzeczywiste, gdyż H jest operatorem hermitowskim.
O liczbach k, n wiemy tylko, że są rzeczywiste, tak jak odpowiednie wartości własne.

Będziemy pracować w reprezentacji energetycznej, tzn. w bazie wektorów własnych operatora Hamiltona

$$H\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle\,.$$

Wcześniej pokazaliśmy, że H jest operatorem hermitowskim, dlatego stany własne $|\,n\rangle$ odpowiadające różnym wartościom E_n są ortogonalne. Załóżmy przy tym, że są one unormowane

$$\langle k|n\rangle = \delta_{kn}.$$

Na razie wiemy tylko, że wartości własne E_n muszą być rzeczywiste, gdyż H jest operatorem hermitowskim.
O liczbach k, n wiemy tylko, że są rzeczywiste, tak jak odpowiednie wartości własne.

Obliczmy element macierzowy operatora H w reprezentacji energetycznej

$$\langle k|H|n\rangle \quad = \quad \langle k|E_n|n\rangle =$$

Obliczmy element macierzowy operatora H w reprezentacji energetycznej

$$\langle k|H|n\rangle \quad = \quad \langle k|E_n|n\rangle = E_n \langle k|n\rangle$$

Obliczmy element macierzowy operatora H w reprezentacji energetycznej

$$\langle k|H|n\rangle = \langle k|E_n|n\rangle = E_n \langle k|n\rangle$$

$$=$$

Obliczmy element macierzowy operatora H w reprezentacji energetycznej

$$\begin{aligned} \langle k|H|n\rangle &= \langle k|E_n|n\rangle = E_n \langle k|n\rangle \\ &= \langle k \mid \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right) \mid n\rangle \end{aligned}$$

Obliczmy element macierzowy operatora H w reprezentacji energetycznej

$$
\begin{aligned}
\langle k|H|n\rangle &= \langle k|E_n|n\rangle = E_n \langle k|n\rangle \\
&= \langle k \mid \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right) \mid n\rangle \\
&=
\end{aligned}
$$

Obliczmy element macierzowy operatora H w reprezentacji energetycznej

$$\begin{aligned} \langle k|H|n\rangle &= \langle k|E_n|n\rangle = E_n \langle k|n\rangle \\ &= \langle k \mid \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right) \mid n\rangle \\ &= \frac{1}{2m}\left\langle k|p^2|n\right\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2\left\langle k|x^2|n\right\rangle . \end{aligned}$$

Obliczmy element macierzowy operatora H w reprezentacji energetycznej

$$
\begin{aligned}
\langle k|H|n\rangle &= \langle k|E_n|n\rangle = E_n \langle k|n\rangle \\
&= \langle k \mid \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right) \mid n\rangle \\
&= \frac{1}{2m}\left\langle k|p^2|n\right\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2\left\langle k|x^2|n\right\rangle .
\end{aligned}
$$

Wektory własne operatora hermitowskiego tworzą bazę, a więc zupełny układ wektorów w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Dlatego

$$\sum_n | \, n\rangle \langle n \, | + \int | \, n\rangle \langle n \, | dn \equiv | \, n\rangle \langle n \, | = \mathbb{I},$$

gdzie $\mathbb{I}$ oznacza operator jednostkowy.

Wektory własne operatora hermitowskiego tworzą bazę, a więc zupełny układ wektorów w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Dlatego

$$\sum_n | n\rangle \langle n | + \int | n\rangle \langle n | dn \equiv | n\rangle \langle n | = \mathbb{I},$$

gdzie $\mathbb{I}$ oznacza operator jednostkowy.
W równaniu tym wprowadziliśmy konwencję sumacyjną polegającą na pominięciu symbolu sumowania po dyskretnym i całkowania po ciągłym obszarze widma operatora H w przypadku, gdy wektor ket styka się z wektorem bra o tej samej liczbie kwantowej.

Wektory własne operatora hermitowskiego tworzą bazę, a więc zupełny układ wektorów w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Dlatego

$$\sum_n | \, n\rangle \langle n \, | + \int | \, n\rangle \langle n \, | dn \equiv | \, n\rangle \langle n \, | = \mathbb{I},$$

gdzie $\mathbb{I}$ oznacza operator jednostkowy.
W równaniu tym wprowadziliśmy konwencję sumacyjną polegającą na pominięciu symbolu sumowania po dyskretnym i całkowania po ciągłym obszarze widma operatora H w przypadku, gdy wektor ket styka się z wektorem bra o tej samej liczbie kwantowej.

Rozważmy pierwszy element macierzowy po prawej stronie równania

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\left\langle k|p^2|n\right\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2\left\langle k|x^2|n\right\rangle .$$

$$\left\langle k|p^2|n\right\rangle =$$

Rozważmy pierwszy element macierzowy po prawej stronie równania

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\left\langle k|p^2|n\right\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2\left\langle k|x^2|n\right\rangle .$$

$$\left\langle k|p^2|n\right\rangle = \langle k|p|l\rangle\langle l|p|n\rangle ,$$

Rozważmy pierwszy element macierzowy po prawej stronie równania

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\left\langle k|p^2|n\right\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2\left\langle k|x^2|n\right\rangle .$$

$$\left\langle k|p^2|n\right\rangle = \langle k|p|l\rangle\langle l|p|n\rangle , \qquad \text{bo} \quad |l\rangle\langle l| = \mathbb{I}$$

Rozważmy pierwszy element macierzowy po prawej stronie równania

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\left\langle k|p^2|n\right\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2\left\langle k|x^2|n\right\rangle.$$

$$\left\langle k|p^2|n\right\rangle = \langle k|p|l\rangle\langle l|p|n\rangle, \qquad \text{bo} \quad |l\rangle\langle l| = \mathbb{I}$$

ale pęd jest operatorem hermitowskim, $p^\dagger = p$,

Rozważmy pierwszy element macierzowy po prawej stronie równania

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\left\langle k|p^2|n\right\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2\left\langle k|x^2|n\right\rangle .$$

$$\left\langle k|p^2|n\right\rangle = \langle k|p|l\rangle\langle l|p|n\rangle , \qquad \text{bo} \quad |l\rangle\langle l| = \mathbb{I}$$

ale pęd jest operatorem hermitowskim, $p^\dagger = p$, więc

$$\langle l|p|n\rangle =$$

Rozważmy pierwszy element macierzowy po prawej stronie równania

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\left\langle k|p^2|n\right\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2\left\langle k|x^2|n\right\rangle .$$

$$\left\langle k|p^2|n\right\rangle = \langle k|p|l\rangle\langle l|p|n\rangle , \qquad \text{bo} \quad |l\rangle\langle l| = \mathbb{I}$$

ale pęd jest operatorem hermitowskim, $p^\dagger = p$, więc

$$\langle l|p|n\rangle = \langle n\,|p^\dagger|\,l\rangle^* =$$

Rozważmy pierwszy element macierzowy po prawej stronie równania

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\left\langle k|p^2|n\right\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2\left\langle k|x^2|n\right\rangle.$$

$$\left\langle k|p^2|n\right\rangle = \langle k|p|l\rangle\langle l|p|n\rangle, \qquad \text{bo} \quad |l\rangle\langle l| = \mathbb{I}$$

ale pęd jest operatorem hermitowskim, $p^\dagger = p$, więc

$$\langle l|p|n\rangle = \langle n\,|p^\dagger|\,l\rangle^* = \langle n|p|l\rangle^*.$$

Rozważmy pierwszy element macierzowy po prawej stronie równania

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\left\langle k|p^2|n\right\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2\left\langle k|x^2|n\right\rangle .$$

$$\left\langle k|p^2|n\right\rangle = \langle k|p|l\rangle\langle l|p|n\rangle , \qquad \text{bo} \quad |l\rangle\langle l| = \mathbb{I}$$

ale pęd jest operatorem hermitowskim, $p^\dagger = p$, więc

$$\langle l|p|n\rangle = \langle n\,|p^\dagger|\,l\rangle^* = \langle n|p|l\rangle^* .$$

Zatem

$$\left\langle k|p^2|n\right\rangle = \sum_l \langle k|p|l\rangle\langle n|p|l\rangle^* .$$

Rozważmy pierwszy element macierzowy po prawej stronie równania

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\left\langle k|p^2|n\right\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2\left\langle k|x^2|n\right\rangle .$$

$$\left\langle k|p^2|n\right\rangle = \langle k|p|l\rangle\langle l|p|n\rangle , \qquad \text{bo} \quad |l\rangle\langle l| = \mathbb{I}$$

ale pęd jest operatorem hermitowskim, $p^\dagger = p$, więc

$$\langle l|p|n\rangle = \langle n\,|p^\dagger|\,l\rangle^* = \langle n|p|l\rangle^* .$$

Zatem

$$\left\langle k|p^2|n\right\rangle = \sum_l \langle k|p|l\rangle\langle n|p|l\rangle^* .$$

Podobnie, drugi element macierzowy po prawej stronie równania

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\left\langle k|p^2|n\right\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2\left\langle k|x^2|n\right\rangle$$

możemy zapisać

$$\left\langle k|x^2|n\right\rangle =$$

Podobnie, drugi element macierzowy po prawej stronie równania

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\left\langle k|p^2|n\right\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2\left\langle k|x^2|n\right\rangle$$

możemy zapisać

$$\left\langle k|x^2|n\right\rangle = \langle k|x|l\rangle\,\langle l|x|n\rangle =$$

Podobnie, drugi element macierzowy po prawej stronie równania

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\left\langle k|p^2|n\right\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2\left\langle k|x^2|n\right\rangle$$

możemy zapisać

$$\left\langle k|x^2|n\right\rangle = \langle k|x|l\rangle\,\langle l|x|n\rangle = \sum_l \langle k|x|l\rangle\,\langle n|x|l\rangle^*\,.$$

Podobnie, drugi element macierzowy po prawej stronie równania

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\left\langle k|p^2|n\right\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2\left\langle k|x^2|n\right\rangle$$

możemy zapisać

$$\left\langle k|x^2|n\right\rangle = \langle k|x|l\rangle\langle l|x|n\rangle = \sum_l \langle k|x|l\rangle\langle n|x|l\rangle^* .$$

gdzie z kolei skorzystaliśmy z hermitowskości operatora położenia x.

Podobnie, drugi element macierzowy po prawej stronie równania

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\left\langle k|p^2|n\right\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2\left\langle k|x^2|n\right\rangle$$

możemy zapisać

$$\left\langle k|x^2|n\right\rangle = \langle k|x|l\rangle\,\langle l|x|n\rangle = \sum_l \langle k|x|l\rangle\,\langle n|x|l\rangle^*\,.$$

gdzie z kolei skorzystaliśmy z hermitowskości operatora położenia x.

Podsumujmy

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\sum_{l}\langle k|p|l\rangle\langle n|p|l\rangle^{*} + \frac{1}{2}m\omega^{2}\sum_{l}\langle k|x|l\rangle\langle n|x|l\rangle^{*}.$$

Dla $k = n$ otrzymamy

$$\langle n|H|n\rangle \quad =$$

Podsumujmy

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\sum_l \langle k|p|l\rangle \langle n|p|l\rangle^* + \frac{1}{2}m\omega^2 \sum_l \langle k|x|l\rangle \langle n|x|l\rangle^* .$$

Dla $k = n$ otrzymamy

$$\langle n|H|n\rangle \quad = \quad E_n \langle n|n\rangle =$$

Podsumujmy

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\sum_l \langle k|p|l\rangle \langle n|p|l\rangle^* + \frac{1}{2}m\omega^2 \sum_l \langle k|x|l\rangle \langle n|x|l\rangle^* .$$

Dla $k = n$ otrzymamy

$$\langle n|H|n\rangle = E_n \langle n|n\rangle = E_n$$

Podsumujmy

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\sum_l \langle k|p|l\rangle \langle n|p|l\rangle^* + \frac{1}{2}m\omega^2 \sum_l \langle k|x|l\rangle \langle n|x|l\rangle^* .$$

Dla $k = n$ otrzymamy

$$\langle n|H|n\rangle = E_n \langle n|n\rangle = E_n$$

$$=$$

Podsumujmy

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\sum_l \langle k|p|l\rangle \langle n|p|l\rangle^* + \frac{1}{2}m\omega^2 \sum_l \langle k|x|l\rangle \langle n|x|l\rangle^* .$$

Dla $k = n$ otrzymamy

$$\begin{aligned}\langle n|H|n\rangle &= E_n \langle n|n\rangle = E_n \\ &= \frac{1}{2m}\sum_l |\langle n|p|l\rangle|^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 \sum_l |\langle n|x|l\rangle|^2\end{aligned}$$

Podsumujmy

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\sum_l \langle k|p|l\rangle \langle n|p|l\rangle^* + \frac{1}{2}m\omega^2 \sum_l \langle k|x|l\rangle \langle n|x|l\rangle^* .$$

Dla $k = n$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \langle n|H|n\rangle &= E_n \langle n|n\rangle = E_n \\ &= \frac{1}{2m}\sum_l |\langle n|p|l\rangle|^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 \sum_l |\langle n|x|l\rangle|^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Podsumujmy

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\sum_l \langle k|p|l\rangle \langle n|p|l\rangle^* + \frac{1}{2}m\omega^2 \sum_l \langle k|x|l\rangle \langle n|x|l\rangle^* .$$

Dla $k = n$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \langle n|H|n\rangle &= E_n \langle n|n\rangle = E_n \\ &= \frac{1}{2m}\sum_l |\langle n|p|l\rangle|^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 \sum_l |\langle n|x|l\rangle|^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Widzimy, że wartości własne operatora energii oscylatora harmonicznego muszą być nieujemne, $E_n \geqslant 0$.

Podsumujmy

$$\langle k|H|n\rangle = \frac{1}{2m}\sum_l \langle k|p|l\rangle \langle n|p|l\rangle^* + \frac{1}{2}m\omega^2 \sum_l \langle k|x|l\rangle \langle n|x|l\rangle^* .$$

Dla $k = n$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \langle n|H|n\rangle &= E_n \langle n|n\rangle = E_n \\ &= \frac{1}{2m}\sum_l |\langle n|p|l\rangle|^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 \sum_l |\langle n|x|l\rangle|^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Widzimy, że wartości własne operatora energii oscylatora harmonicznego muszą być nieujemne, $E_n \geqslant 0$.

Zauważmy również, że E_n może się zerować tylko wtedy, gdy wszystkie elementy macierzowe operatorów pędu i położenia znikają

$$\langle l|p|n\rangle = 0 \quad \text{i} \quad \langle l|x|n\rangle = 0$$

Zauważmy również, że E_n może się zerować tylko wtedy, gdy wszystkie elementy macierzowe operatorów pędu i położenia znikają

$$\langle l|p|n\rangle = 0 \quad \text{i} \quad \langle l|x|n\rangle = 0 \qquad \text{dla wszystkich} \quad l, n.$$

Zauważmy również, że E_n może się zerować tylko wtedy, gdy wszystkie elementy macierzowe operatorów pędu i położenia znikają

$$\langle l|p|n\rangle = 0 \quad \text{i} \quad \langle l|x|n\rangle = 0 \qquad \text{dla wszystkich} \quad l, n.$$

Byłoby to jednak sprzeczne z warunkiem kwantyzacji $[x, p] = i\hbar$.

Zauważmy również, że E_n może się zerować tylko wtedy, gdy wszystkie elementy macierzowe operatorów pędu i położenia znikają

$$\langle l|p|n\rangle = 0 \quad \text{i} \quad \langle l|x|n\rangle = 0 \qquad \text{dla wszystkich} \quad l, n.$$

Byłoby to jednak sprzeczne z warunkiem kwantyzacji $[x, p] = i\hbar$.

$\langle n|[x, p]|n\rangle =$

Zauważmy również, że E_n może się zerować tylko wtedy, gdy wszystkie elementy macierzowe operatorów pędu i położenia znikają

$$\langle l|p|n\rangle = 0 \quad \text{i} \quad \langle l|x|n\rangle = 0 \qquad \text{dla wszystkich} \quad l, n.$$

Byłoby to jednak sprzeczne z warunkiem kwantyzacji $[x, p] = i\hbar$.

$$\langle n|[x, p]|n\rangle = \underbrace{\langle n|x|l\rangle \langle l|p|n\rangle - \langle n|p|l\rangle \langle l|x|n\rangle}_{0} =$$

Zauważmy również, że E_n może się zerować tylko wtedy, gdy wszystkie elementy macierzowe operatorów pędu i położenia znikają

$$\langle l|p|n\rangle = 0 \quad \text{i} \quad \langle l|x|n\rangle = 0 \qquad \text{dla wszystkich} \quad l, n.$$

Byłoby to jednak sprzeczne z warunkiem kwantyzacji $[x, p] = i\hbar$.

$$\langle n|[x, p]|n\rangle = \underbrace{\langle n|x|l\rangle \langle l|p|n\rangle - \langle n|p|l\rangle \langle l|x|n\rangle}_{0} = i\hbar \langle n|n\rangle =$$

Zauważmy również, że E_n może się zerować tylko wtedy, gdy wszystkie elementy macierzowe operatorów pędu i położenia znikają

$$\langle l|p|n\rangle = 0 \quad \text{i} \quad \langle l|x|n\rangle = 0 \qquad \text{dla wszystkich} \quad l, n.$$

Byłoby to jednak sprzeczne z warunkiem kwantyzacji $[x, p] = i\hbar$.

$$\langle n|[x, p]|n\rangle = \underbrace{\langle n|x|l\rangle \langle l|p|n\rangle - \langle n|p|l\rangle \langle l|x|n\rangle}_{0} = i\hbar \langle n|n\rangle = i\hbar.$$

Zauważmy również, że E_n może się zerować tylko wtedy, gdy wszystkie elementy macierzowe operatorów pędu i położenia znikają

$$\langle l|p|n\rangle = 0 \quad \text{i} \quad \langle l|x|n\rangle = 0 \qquad \text{dla wszystkich} \quad l, n.$$

Byłoby to jednak sprzeczne z warunkiem kwantyzacji $[x, p] = i\hbar$.

$$\langle n|[x, p]|n\rangle = \underbrace{\langle n|x|l\rangle \langle l|p|n\rangle - \langle n|p|l\rangle \langle l|x|n\rangle}_{0} = i\hbar \langle n|n\rangle = i\hbar.$$

Wszystkie elementy macierzowe znikają, a prawa strona nie jest zerem.

Zauważmy również, że E_n może się zerować tylko wtedy, gdy wszystkie elementy macierzowe operatorów pędu i położenia znikają

$$\langle l|p|n\rangle = 0 \quad \text{i} \quad \langle l|x|n\rangle = 0 \qquad \text{dla wszystkich} \quad l, n.$$

Byłoby to jednak sprzeczne z warunkiem kwantyzacji $[x, p] = i\hbar$.

$$\langle n|[x,p]|n\rangle = \underbrace{\langle n|x|l\rangle \langle l|p|n\rangle - \langle n|p|l\rangle \langle l|x|n\rangle}_{0} = i\hbar \langle n|n\rangle = i\hbar.$$

Wszystkie elementy macierzowe znikają, a prawa strona nie jest zerem.

Stąd wnioskujemy, że

$$E_n > 0.$$

Zdefiniujmy operator bezwymiarowy a

$$a = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \left(p - im\omega x\right)$$

Stąd wnioskujemy, że

$$E_n > 0.$$

Zdefiniujmy operator bezwymiarowy a

$$a = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,(p - im\omega x)$$

i znajdźmy operator sprzężony hermitowsko $a^\dagger$

$$a^\dagger =$$

Stąd wnioskujemy, że

$$E_n > 0.$$

Zdefiniujmy operator bezwymiarowy a

$$a = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (p - im\omega x)$$

i znajdźmy operator sprzężony hermitowsko $a^\dagger$

$$a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (p + im\omega x),$$

Stąd wnioskujemy, że

$$E_n > 0.$$

Zdefiniujmy operator bezwymiarowy a

$$a = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,(p - im\omega x)$$

i znajdźmy operator sprzężony hermitowsko $a^\dagger$

$$a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,(p + im\omega x)\,,$$

gdzie skorzystaliśmy z udowodnionych wcześniej własności
$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$

Stąd wnioskujemy, że

$$E_n > 0.$$

Zdefiniujmy operator bezwymiarowy a

$$a = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (p - im\omega x)$$

i znajdźmy operator sprzężony hermitowsko $a^\dagger$

$$a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (p + im\omega x) \, ,$$

gdzie skorzystaliśmy z udowodnionych wcześniej własności $(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$ i $(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger$, $\alpha \in \mathbb{C}$,

Stąd wnioskujemy, że

$$E_n > 0.$$

Zdefiniujmy operator bezwymiarowy a

$$a = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (p - im\omega x)$$

i znajdźmy operator sprzężony hermitowsko $a^\dagger$

$$a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (p + im\omega x),$$

gdzie skorzystaliśmy z udowodnionych wcześniej własności $(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$ i $(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger$, $\alpha \in \mathbb{C}$, oraz z hermitowskości operatorów pędu i położenia.

Stąd wnioskujemy, że

$$E_n > 0.$$

Zdefiniujmy operator bezwymiarowy a

$$a = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \left(p - im\omega x\right)$$

i znajdźmy operator sprzężony hermitowsko $a^\dagger$

$$a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \left(p + im\omega x\right),$$

gdzie skorzystaliśmy z udowodnionych wcześniej własności $(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$ i $(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger$, $\alpha \in \mathbb{C}$, oraz z hermitowskości operatorów pędu i położenia.

Obliczmy iloczyn

$$a^\dagger a = \left[\frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p + im\omega x)\right]\left[\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p - im\omega x)\right]$$

Obliczmy iloczyn

$$
\begin{aligned}
a^{\dagger} a &= \left[\frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,(p + im\omega x)\right]\left[\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,(p - im\omega x)\right] \\
&=
\end{aligned}
$$

Obliczmy iloczyn

$$
\begin{aligned}
a^\dagger a &= \left[\frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(p + im\omega x\right)\right]\left[\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(p - im\omega x\right)\right] \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(p + im\omega x\right)\left(p - im\omega x\right)
\end{aligned}
$$

Oscylator harmoniczny

Obliczmy iloczyn

$$
\begin{aligned}
a^{\dagger}a &= \left[\frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p+im\omega x)\right]\left[\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p-im\omega x)\right] \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}(p+im\omega x)(p-im\omega x) \\
&=
\end{aligned}
$$

Obliczmy iloczyn

$$\begin{aligned} a^\dagger a &= \left[\frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p+im\omega x)\right]\left[\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p-im\omega x)\right] \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega}(p+im\omega x)(p-im\omega x) \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(p^2-im\omega px+im\omega xp+m^2\omega^2x^2\right) \end{aligned}$$

Obliczmy iloczyn

$$
\begin{aligned}
a^\dagger a &= \left[\frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p + im\omega x)\right]\left[\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p - im\omega x)\right] \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}(p + im\omega x)(p - im\omega x) \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(p^2 - im\omega px + im\omega xp + m^2\omega^2 x^2\right) \\
&=
\end{aligned}
$$

Obliczmy iloczyn

$$
\begin{aligned}
a^\dagger a &= \left[\frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,(p+im\omega x)\right]\left[\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,(p-im\omega x)\right] \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}\,(p+im\omega x)\,(p-im\omega x) \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(p^2-im\omega px+im\omega xp+m^2\omega^2x^2\right) \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(p^2+im\omega\underbrace{[x,p]}_{i\hbar}+m^2\omega^2x^2\right)
\end{aligned}
$$

Obliczmy iloczyn

$$
\begin{aligned}
a^{\dagger} a &= \left[\frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p + im\omega x)\right]\left[\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p - im\omega x)\right] \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}(p + im\omega x)(p - im\omega x) \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(p^2 - im\omega px + im\omega xp + m^2\omega^2x^2\right) \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(p^2 + im\omega \underbrace{[x, p]}_{i\hbar} + m^2\omega^2x^2\right) \\
\\
&=
\end{aligned}
$$

Obliczmy iloczyn

$$\begin{aligned}
a^\dagger a &= \left[\frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p+im\omega x)\right]\left[\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p-im\omega x)\right] \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}(p+im\omega x)(p-im\omega x) \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(p^2 - im\omega px + im\omega xp + m^2\omega^2x^2\right) \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(p^2 + im\omega \underbrace{[x,p]}_{i\hbar} + m^2\omega^2x^2\right) \\
&= \frac{1}{\hbar\omega}\left(\underbrace{\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2}_{H} + \frac{1}{2m}im\omega i\hbar\right) =
\end{aligned}$$

Obliczmy iloczyn

$$
\begin{aligned}
a^\dagger a &= \left[\frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,(p+im\omega x)\right]\left[\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,(p-im\omega x)\right] \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}\,(p+im\omega x)\,(p-im\omega x) \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(p^2-im\omega px+im\omega xp+m^2\omega^2x^2\right) \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(p^2+im\omega\underbrace{[x,p]}_{i\hbar}+m^2\omega^2x^2\right) \\
&= \frac{1}{\hbar\omega}\left(\underbrace{\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2}_{H}+\frac{1}{2m}im\omega i\hbar\right) = \frac{1}{\hbar\omega}\left(H-\frac{1}{2}\hbar\omega\right).
\end{aligned}
$$

Obliczmy iloczyn

$$
\begin{aligned}
a^\dagger a &= \left[\frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,(p+im\omega x)\right]\left[\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,(p-im\omega x)\right] \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}\,(p+im\omega x)\,(p-im\omega x) \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(p^2 - im\omega px + im\omega xp + m^2\omega^2x^2\right) \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(p^2 + im\omega\,\underbrace{[x,p]}_{i\hbar} + m^2\omega^2x^2\right) \\
&= \frac{1}{\hbar\omega}\left(\underbrace{\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2}_{H} + \frac{1}{2m}im\omega i\hbar\right) = \frac{1}{\hbar\omega}\left(H - \frac{1}{2}\hbar\omega\right).
\end{aligned}
$$

Otrzymaliśmy związek

$$a^\dagger a = \frac{1}{\hbar\omega}\left(H - \frac{1}{2}\hbar\omega\right) \quad \Rightarrow \quad H = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

Otrzymaliśmy związek

$$a^\dagger a = \frac{1}{\hbar\omega}\left(H - \frac{1}{2}\hbar\omega\right) \quad \Rightarrow \quad H = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

Obliczmy teraz komutator operatorów a i $a^\dagger$.

$$\left[a, a^\dagger\right] \quad =$$

Otrzymaliśmy związek

$$a^\dagger a = \frac{1}{\hbar\omega}\left(H - \frac{1}{2}\hbar\omega\right) \quad \Rightarrow \quad H = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

Obliczmy teraz komutator operatorów a i $a^\dagger$.

$$\left[a, a^\dagger\right] = \frac{1}{2m\hbar\omega}\left[p - im\omega x, p + im\omega x\right]$$

Otrzymaliśmy związek

$$a^\dagger a = \frac{1}{\hbar\omega}\left(H - \frac{1}{2}\hbar\omega\right) \quad \Rightarrow \quad H = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

Obliczmy teraz komutator operatorów a i $a^\dagger$.

$$\left[a, a^\dagger\right] = \frac{1}{2m\hbar\omega}\left[p - im\omega x, p + im\omega x\right]$$

$$=$$

Otrzymaliśmy związek

$$a^\dagger a = \frac{1}{\hbar\omega}\left(H - \frac{1}{2}\hbar\omega\right) \quad \Rightarrow \quad H = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

Obliczmy teraz komutator operatorów a i $a^\dagger$.

$$\begin{aligned}\left[a, a^\dagger\right] &= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left[p - im\omega x, p + im\omega x\right] \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(\underbrace{[p,p]}_{0} + im\omega\underbrace{[p,x]}_{-i\hbar} - im\omega\underbrace{[x,p]}_{i\hbar} + m^2\omega^2\underbrace{[x,x]}_{0}\right)\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy związek

$$a^\dagger a = \frac{1}{\hbar\omega}\left(H - \frac{1}{2}\hbar\omega\right) \quad \Rightarrow \quad H = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

Obliczmy teraz komutator operatorów a i $a^\dagger$.

$$\begin{aligned}\left[a, a^\dagger\right] &= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left[p - im\omega x, p + im\omega x\right] \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(\underbrace{[p,p]}_{0} + im\omega\underbrace{[p,x]}_{-i\hbar} - im\omega\underbrace{[x,p]}_{i\hbar} + m^2\omega^2\underbrace{[x,x]}_{0}\right) \\ &= \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy związek

$$a^\dagger a = \frac{1}{\hbar\omega}\left(H - \frac{1}{2}\hbar\omega\right) \quad \Rightarrow \quad H = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

Obliczmy teraz komutator operatorów a i $a^\dagger$.

$$\begin{aligned}
\left[a, a^\dagger\right] &= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left[p - im\omega x, p + im\omega x\right] \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(\underbrace{[p,p]}_{0} + im\omega\underbrace{[p,x]}_{-i\hbar} - im\omega\underbrace{[x,p]}_{i\hbar} + m^2\omega^2\underbrace{[x,x]}_{0}\right) \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}2m\hbar\omega =
\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy związek

$$a^\dagger a = \frac{1}{\hbar\omega}\left(H - \frac{1}{2}\hbar\omega\right) \quad \Rightarrow \quad H = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

Obliczmy teraz komutator operatorów a i $a^\dagger$.

$$\begin{aligned}\left[a, a^\dagger\right] &= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left[p - im\omega x, p + im\omega x\right] \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(\underbrace{[p, p]}_{0} + im\omega \underbrace{[p, x]}_{-i\hbar} - im\omega \underbrace{[x, p]}_{i\hbar} + m^2\omega^2 \underbrace{[x, x]}_{0}\right) \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega} 2m\hbar\omega = 1.\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy związek

$$a^\dagger a = \frac{1}{\hbar\omega}\left(H - \frac{1}{2}\hbar\omega\right) \quad \Rightarrow \quad H = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

Obliczmy teraz komutator operatorów a i $a^\dagger$.

$$\begin{aligned}
\left[a, a^\dagger\right] &= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left[p - im\omega x, p + im\omega x\right] \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(\underbrace{[p,p]}_{0} + im\omega\underbrace{[p,x]}_{-i\hbar} - im\omega\underbrace{[x,p]}_{i\hbar} + m^2\omega^2\underbrace{[x,x]}_{0}\right) \\
&= \frac{1}{2m\hbar\omega}2m\hbar\omega = 1.
\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy prosty związek komutacyjny

$$\left[a, a^{\dagger}\right] = 1,$$

który, jak się później przekonamy, odgrywa niezmiernie ważną rolę nie tylko w teoretycznym opisie oscylatora harmonicznego.

Otrzymaliśmy prosty związek komutacyjny

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1,$$

który, jak się później przekonamy, odgrywa niezmiernie ważną rolę nie tylko w teoretycznym opisie oscylatora harmonicznego.
Wygodnie jest zdefiniować jeszcze jeden operator

$$N \equiv a^\dagger a,$$

Otrzymaliśmy prosty związek komutacyjny

$$\left[a, a^{\dagger}\right] = 1,$$

który, jak się później przekonamy, odgrywa niezmiernie ważną rolę nie tylko w teoretycznym opisie oscylatora harmonicznego. Wygodnie jest zdefiniować jeszcze jeden operator

$$N \equiv a^{\dagger} a,$$

przy użyciu którego Hamiltonian H wyraża się wzorem

$$H = \left(a^{\dagger} a + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega = \left(N + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega.$$

Otrzymaliśmy prosty związek komutacyjny

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1,$$

który, jak się później przekonamy, odgrywa niezmiernie ważną rolę nie tylko w teoretycznym opisie oscylatora harmonicznego.
Wygodnie jest zdefiniować jeszcze jeden operator

$$N \equiv a^\dagger a,$$

przy użyciu którego Hamiltonian H wyraża się wzorem

$$H = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

Znajdźmy relacje komutacji operatora N z operatorami a i $a^\dagger$.

$$[N, a] =$$

Znajdźmy relacje komutacji operatora N z operatorami a i $a^\dagger$.

$$[N, a] = \left[a^\dagger a, a\right] =$$

Znajdźmy relacje komutacji operatora N z operatorami a i $a^\dagger$.

$$[N, a] = \left[a^\dagger a, a\right] = a^\dagger [a, a] + \left[a^\dagger, a\right] a =$$

Znajdźmy relacje komutacji operatora N z operatorami a i $a^\dagger$.

$$[N, a] \quad = \quad \left[a^\dagger a, a\right] = a^\dagger [a, a] + \left[a^\dagger, a\right] a = -a,$$

Znajdźmy relacje komutacji operatora N z operatorami a i $a^\dagger$.

$$[N, a] = \left[a^\dagger a, a\right] = a^\dagger [a, a] + \left[a^\dagger, a\right] a = -a,$$

$$\left[N, a^\dagger\right]$$

Znajdźmy relacje komutacji operatora N z operatorami a i $a^\dagger$.

$$
\begin{aligned}
[N, a] &= \left[a^\dagger a, a\right] = a^\dagger [a, a] + \left[a^\dagger, a\right] a = -a, \\
\left[N, a^\dagger\right] &=
\end{aligned}
$$

Znajdźmy relacje komutacji operatora N z operatorami a i $a^\dagger$.

$$
\begin{aligned}
[N, a] &= \left[a^\dagger a, a\right] = a^\dagger [a, a] + \left[a^\dagger, a\right] a = -a, \\
\left[N, a^\dagger\right] &= \left[a^\dagger a, a^\dagger\right] =
\end{aligned}
$$

Znajdźmy relacje komutacji operatora N z operatorami a i $a^\dagger$.

$$
\begin{aligned}
[N, a] &= \left[a^\dagger a, a\right] = a^\dagger [a, a] + \left[a^\dagger, a\right] a = -a, \\
\left[N, a^\dagger\right] &= \left[a^\dagger a, a^\dagger\right] = a^\dagger \left[a, a^\dagger\right] + \left[a^\dagger, a^\dagger\right] a =
\end{aligned}
$$

Znajdźmy relacje komutacji operatora N z operatorami a i $a^\dagger$.

$$
\begin{aligned}
[N, a] &= \left[a^\dagger a, a\right] = a^\dagger [a, a] + \left[a^\dagger, a\right] a = -a, \\
\left[N, a^\dagger\right] &= \left[a^\dagger a, a^\dagger\right] = a^\dagger \left[a, a^\dagger\right] + \left[a^\dagger, a^\dagger\right] a = a^\dagger,
\end{aligned}
$$

Znajdźmy relacje komutacji operatora N z operatorami a i $a^\dagger$.

$$
\begin{aligned}
[N, a] &= \left[a^\dagger a, a\right] = a^\dagger [a, a] + \left[a^\dagger, a\right] a = -a, \\
\left[N, a^\dagger\right] &= \left[a^\dagger a, a^\dagger\right] = a^\dagger \left[a, a^\dagger\right] + \left[a^\dagger, a^\dagger\right] a = a^\dagger,
\end{aligned}
$$

gdzie skorzystaliśmy z własności komutatora

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C] B$$

Znajdźmy relacje komutacji operatora N z operatorami a i $a^\dagger$.

$$\begin{aligned}[N, a] &= \left[a^\dagger a, a\right] = a^\dagger [a, a] + \left[a^\dagger, a\right] a = -a, \\ \left[N, a^\dagger\right] &= \left[a^\dagger a, a^\dagger\right] = a^\dagger \left[a, a^\dagger\right] + \left[a^\dagger, a^\dagger\right] a = a^\dagger,\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z własności komutatora

$$[AB, C] = A [B, C] + [A, C] B$$

i z relacji

$$\left[a, a^\dagger\right] = -\left[a^\dagger, a\right] = 1, \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0.$$

Znajdźmy relacje komutacji operatora N z operatorami a i $a^\dagger$.

$$\begin{aligned} [N, a] &= \left[a^\dagger a, a\right] = a^\dagger [a, a] + \left[a^\dagger, a\right] a = -a, \\ \left[N, a^\dagger\right] &= \left[a^\dagger a, a^\dagger\right] = a^\dagger \left[a, a^\dagger\right] + \left[a^\dagger, a^\dagger\right] a = a^\dagger, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z własności komutatora

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

i z relacji

$$\left[a, a^\dagger\right] = -\left[a^\dagger, a\right] = 1, \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0.$$

Obliczmy jeszcze komutatory

$$[H, a] \quad =$$

Obliczmy jeszcze komutatory

$$[H, a] = \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a\right] =$$

Obliczmy jeszcze komutatory

$$[H, a] = \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a\right] = \hbar\omega\,[N, a] =$$

Obliczmy jeszcze komutatory

$$[H, a] = \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a\right] = \hbar\omega\,[N, a] = -\hbar\omega\; a$$

Obliczmy jeszcze komutatory

$$[H, a] = \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a\right] = \hbar\omega\,[N, a] = -\hbar\omega\; a$$

$$\left[H, a^\dagger\right]$$

Obliczmy jeszcze komutatory

$$[H, a] = \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a\right] = \hbar\omega\,[N, a] = -\hbar\omega\; a$$

$$\left[H, a^{\dagger}\right] =$$

Obliczmy jeszcze komutatory

$$
\begin{aligned}
[H, a] &= \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a\right] = \hbar\omega\,[N, a] = -\hbar\omega\; a \\
\left[H, a^\dagger\right] &= \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a^\dagger\right] =
\end{aligned}
$$

Obliczmy jeszcze komutatory

$$
\begin{aligned}
[H, a] &= \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a\right] = \hbar\omega\,[N, a] = -\hbar\omega\; a \\
\left[H, a^\dagger\right] &= \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a^\dagger\right] = \hbar\omega\left[N, a^\dagger\right] =
\end{aligned}
$$

Obliczmy jeszcze komutatory

$$
\begin{aligned}
[H, a] &= \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a\right] = \hbar\omega\,[N, a] = -\hbar\omega\ a \\
\left[H, a^\dagger\right] &= \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a^\dagger\right] = \hbar\omega\left[N, a^\dagger\right] = \hbar\omega\ a^\dagger .
\end{aligned}
$$

Obliczmy jeszcze komutatory

$$
\begin{aligned}
[H, a] &= \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a\right] = \hbar\omega\,[N, a] = -\hbar\omega\; a \\
\left[H, a^\dagger\right] &= \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a^\dagger\right] = \hbar\omega\left[N, a^\dagger\right] = \hbar\omega\; a^\dagger .
\end{aligned}
$$

Zdefiniujmy stan kwantowy $a\,|n\rangle$ i obliczmy jego energię.

Obliczmy jeszcze komutatory

$$
\begin{aligned}
[H, a] &= \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a\right] = \hbar\omega\,[N, a] = -\hbar\omega\; a \\
\left[H, a^{\dagger}\right] &= \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a^{\dagger}\right] = \hbar\omega\left[N, a^{\dagger}\right] = \hbar\omega\; a^{\dagger}.
\end{aligned}
$$

Zdefiniujmy stan kwantowy $a\,|n\rangle$ i obliczmy jego energię.

$$H\left(a\,|n\rangle\right) \quad =$$

Obliczmy jeszcze komutatory

$$\begin{aligned}[H,a] &= \left[\left(N+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a\right] = \hbar\omega\,[N,a] = -\hbar\omega\ a \\ \left[H,a^\dagger\right] &= \left[\left(N+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a^\dagger\right] = \hbar\omega\left[N,a^\dagger\right] = \hbar\omega\ a^\dagger.\end{aligned}$$

Zdefiniujmy stan kwantowy $a\,|n\rangle$ i obliczmy jego energię.

$$H\,(a\,|n\rangle) = (aH - \hbar\omega\ a)\,|n\rangle =$$

Obliczmy jeszcze komutatory

$$
\begin{aligned}
[H, a] &= \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a\right] = \hbar\omega\,[N, a] = -\hbar\omega\ a \\
\left[H, a^\dagger\right] &= \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a^\dagger\right] = \hbar\omega\left[N, a^\dagger\right] = \hbar\omega\ a^\dagger .
\end{aligned}
$$

Zdefiniujmy stan kwantowy $a\,|n\rangle$ i obliczmy jego energię.

$$
H\,(a\,|n\rangle) = (aH - \hbar\omega\ a)\,|n\rangle = a\,(H - \hbar\omega)\,|n\rangle =
$$

Obliczmy jeszcze komutatory

$$
\begin{aligned}
[H, a] &= \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a\right] = \hbar\omega\,[N, a] = -\hbar\omega\; a \\
\left[H, a^\dagger\right] &= \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a^\dagger\right] = \hbar\omega\left[N, a^\dagger\right] = \hbar\omega\; a^\dagger.
\end{aligned}
$$

Zdefiniujmy stan kwantowy $a\,|n\rangle$ i obliczmy jego energię.

$$
H\left(a\,|n\rangle\right) = \left(aH - \hbar\omega\; a\right)|n\rangle = a\left(H - \hbar\omega\right)|n\rangle = a\left(E_n - \hbar\omega\right)|n\rangle
$$

Obliczmy jeszcze komutatory

$$
\begin{aligned}
[H, a] &= \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a\right] = \hbar\omega\,[N, a] = -\hbar\omega\; a \\
\left[H, a^\dagger\right] &= \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a^\dagger\right] = \hbar\omega\left[N, a^\dagger\right] = \hbar\omega\; a^\dagger .
\end{aligned}
$$

Zdefiniujmy stan kwantowy $a\,|n\rangle$ i obliczmy jego energię.

$$
\begin{aligned}
H\,(a\,|n\rangle) &= (aH - \hbar\omega\; a)\,|n\rangle = a\,(H - \hbar\omega)\,|n\rangle = a\,(E_n - \hbar\omega)\,|n\rangle \\
&=
\end{aligned}
$$

Obliczmy jeszcze komutatory

$$\begin{aligned}[H, a] &= \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a\right] = \hbar\omega\,[N, a] = -\hbar\omega\ a \\ \left[H, a^\dagger\right] &= \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a^\dagger\right] = \hbar\omega\left[N, a^\dagger\right] = \hbar\omega\ a^\dagger.\end{aligned}$$

Zdefiniujmy stan kwantowy $a\,|n\rangle$ i obliczmy jego energię.

$$\begin{aligned}H\,(a\,|n\rangle) &= (aH - \hbar\omega\ a)\,|n\rangle = a\,(H - \hbar\omega)\,|n\rangle = a\,(E_n - \hbar\omega)\,|n\rangle \\ &= (E_n - \hbar\omega)\,(a\,|n\rangle)\,.\end{aligned}$$

Obliczmy jeszcze komutatory

$$\begin{aligned}
[H, a] &= \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a\right] = \hbar\omega\,[N, a] = -\hbar\omega\ a \\
\left[H, a^\dagger\right] &= \left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a^\dagger\right] = \hbar\omega\left[N, a^\dagger\right] = \hbar\omega\ a^\dagger.
\end{aligned}$$

Zdefiniujmy stan kwantowy $a\,|n\rangle$ i obliczmy jego energię.

$$\begin{aligned}
H\,(a\,|n\rangle) &= (aH - \hbar\omega\ a)\,|n\rangle = a\,(H - \hbar\omega)\,|n\rangle = a\,(E_n - \hbar\omega)\,|n\rangle \\
&= (E_n - \hbar\omega)\,(a\,|n\rangle)\,.
\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy związek

$$[H, a] = Ha - aH = -\hbar\omega\ a \quad \Rightarrow \quad Ha = aH - \hbar\omega\ a.$$

Obliczmy jeszcze komutatory

$$
\begin{aligned}
[H, a] &= \left[\left(N+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a\right] = \hbar\omega\,[N, a] = -\hbar\omega\; a \\
\left[H, a^\dagger\right] &= \left[\left(N+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega, a^\dagger\right] = \hbar\omega\left[N, a^\dagger\right] = \hbar\omega\; a^\dagger .
\end{aligned}
$$

Zdefiniujmy stan kwantowy $a\,|n\rangle$ i obliczmy jego energię.

$$
\begin{aligned}
H\,(a\,|n\rangle) &= (aH - \hbar\omega\; a)\,|n\rangle = a\,(H - \hbar\omega)\,|n\rangle = a\,(E_n - \hbar\omega)\,|n\rangle \\
&= (E_n - \hbar\omega)\,(a\,|n\rangle)\,.
\end{aligned}
$$

gdzie wykorzystaliśmy związek

$$
[H, a] = Ha - aH = -\hbar\omega\; a \quad \Rightarrow \quad Ha = aH - \hbar\omega\; a.
$$

Pokazaliśmy, że

$$H(a\,|n\rangle) = (E_n - \hbar\omega)\,(a\,|n\rangle)\,,$$

a wcześniej założyliśmy, że

$$H\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle\,.$$

Oscylator harmoniczny

Pokazaliśmy, że

$$H(a|n\rangle) = (E_n - \hbar\omega)(a|n\rangle),$$

a wcześniej założyliśmy, że

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle.$$

Widzimy, że energia stanu $a|n\rangle$ jest o $\hbar\omega$ niższa od energii stanu $|n\rangle$.

Pokazaliśmy, że

$$H(a\,|n\rangle) = (E_n - \hbar\omega)\,(a\,|n\rangle)\,,$$

a wcześniej założyliśmy, że

$$H\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle\,.$$

Widzimy, że energia stanu $a\,|n\rangle$ jest o $\hbar\omega$ niższa od energii stanu $|n\rangle$.

Zdefiniujmy teraz stan kwantowy $a^\dagger |n\rangle$ i obliczmy jego energię.

$$H\left(a^\dagger |n\rangle\right) =$$

Zdefiniujmy teraz stan kwantowy $a^\dagger |n\rangle$ i obliczmy jego energię.

$$H\left(a^\dagger |n\rangle\right) = \left(a^\dagger H + \hbar\omega\, a^\dagger\right)|n\rangle =$$

Zdefiniujmy teraz stan kwantowy $a^\dagger \left|n\right\rangle$ i obliczmy jego energię.

$$H\left(a^\dagger \left|n\right\rangle\right) = \left(a^\dagger H + \hbar\omega\, a^\dagger\right)\left|n\right\rangle = a^\dagger\left(H + \hbar\omega\right)\left|n\right\rangle$$

Zdefiniujmy teraz stan kwantowy $a^\dagger \, |n\rangle$ i obliczmy jego energię.

$$H\left(a^\dagger \, |n\rangle\right) = \left(a^\dagger H + \hbar\omega \, a^\dagger\right) |n\rangle = a^\dagger \left(H + \hbar\omega\right) |n\rangle$$

$$=$$

Zdefiniujmy teraz stan kwantowy $a^\dagger\,|n\rangle$ i obliczmy jego energię.

$$\begin{aligned} H\left(a^\dagger\,|n\rangle\right) &= \left(a^\dagger H + \hbar\omega\; a^\dagger\right)|n\rangle = a^\dagger\left(H + \hbar\omega\right)|n\rangle \\ &= a^\dagger\left(E_n + \hbar\omega\right)|n\rangle = \end{aligned}$$

Zdefiniujmy teraz stan kwantowy $a^\dagger\,|n\rangle$ i obliczmy jego energię.

$$
\begin{aligned}
H\left(a^\dagger\,|n\rangle\right) &= \left(a^\dagger H + \hbar\omega\; a^\dagger\right)|n\rangle = a^\dagger\left(H+\hbar\omega\right)|n\rangle \\
&= a^\dagger\left(E_n+\hbar\omega\right)|n\rangle = \left(E_n+\hbar\omega\right)\left(a^\dagger\,|n\rangle\right),
\end{aligned}
$$

Zdefiniujmy teraz stan kwantowy $a^\dagger |n\rangle$ i obliczmy jego energię.

$$\begin{aligned} H\left(a^\dagger |n\rangle\right) &= \left(a^\dagger H + \hbar\omega\, a^\dagger\right)|n\rangle = a^\dagger\left(H + \hbar\omega\right)|n\rangle \\ &= a^\dagger\left(E_n + \hbar\omega\right)|n\rangle = \left(E_n + \hbar\omega\right)\left(a^\dagger |n\rangle\right), \end{aligned}$$

gdzie tym razem wykorzystaliśmy związek

$$\left[H, a^\dagger\right] = Ha^\dagger - a^\dagger H = \hbar\omega\, a^\dagger \quad \Rightarrow \quad Ha^\dagger = a^\dagger H + \hbar\omega\, a^\dagger.$$

Zdefiniujmy teraz stan kwantowy $a^\dagger\,|n\rangle$ i obliczmy jego energię.

$$\begin{aligned} H\left(a^\dagger\,|n\rangle\right) &= \left(a^\dagger H + \hbar\omega\ a^\dagger\right)|n\rangle = a^\dagger\left(H + \hbar\omega\right)|n\rangle \\ &= a^\dagger\left(E_n + \hbar\omega\right)|n\rangle = \left(E_n + \hbar\omega\right)\left(a^\dagger\,|n\rangle\right), \end{aligned}$$

gdzie tym razem wykorzystaliśmy związek

$$\left[H, a^\dagger\right] = Ha^\dagger - a^\dagger H = \hbar\omega\ a^\dagger \quad \Rightarrow \quad Ha^\dagger = a^\dagger H + \hbar\omega\ a^\dagger.$$

Czyli energia stanu $a^\dagger\,|n\rangle$ jest o $\hbar\omega$ wyższa od energii stanu $|n\rangle$.

Zdefiniujmy teraz stan kwantowy $a^\dagger\,|n\rangle$ i obliczmy jego energię.

$$
\begin{aligned}
H\left(a^\dagger\,|n\rangle\right) &= \left(a^\dagger H + \hbar\omega\; a^\dagger\right)|n\rangle = a^\dagger\left(H + \hbar\omega\right)|n\rangle \\
&= a^\dagger\left(E_n + \hbar\omega\right)|n\rangle = \left(E_n + \hbar\omega\right)\left(a^\dagger\,|n\rangle\right),
\end{aligned}
$$

gdzie tym razem wykorzystaliśmy związek

$$
\left[H, a^\dagger\right] = Ha^\dagger - a^\dagger H = \hbar\omega\; a^\dagger \quad \Rightarrow \quad Ha^\dagger = a^\dagger H + \hbar\omega\; a^\dagger.
$$

Czyli energia stanu $a^\dagger\,|n\rangle$ jest o $\hbar\omega$ wyższa od energii stanu $|n\rangle$.

Obliczmy energię stanu $a^2 |n\rangle = a(a|n\rangle)$.

$$H\left(a^2 |n\rangle\right) =$$

Obliczmy energię stanu $a^2 |n\rangle = a(a |n\rangle)$.

$$H\left(a^2 |n\rangle\right) = H\left(a\, a|n\rangle\right) =$$

Obliczmy energię stanu $a^2 |n\rangle = a(a |n\rangle)$.

$$H\left(a^2 |n\rangle\right) = H(a\, a|n\rangle) = (aH - \hbar\omega\, a)\, a\, |n\rangle$$

Obliczmy energię stanu $a^2 \left|n\right\rangle = a(a\left|n\right\rangle)$.

$$H\left(a^2\left|n\right\rangle\right) = H\left(a\, a\left|n\right\rangle\right) = \left(aH - \hbar\omega\, a\right) a\left|n\right\rangle$$
$$=$$

Obliczmy energię stanu $a^2 |n\rangle = a(a |n\rangle)$.

$$
\begin{aligned}
H\left(a^2 |n\rangle\right) &= H\left(a\, a|n\rangle\right) = \left(aH - \hbar\omega\; a\right) a\, |n\rangle \\
&= a\left(H - \hbar\omega\right) a\, |n\rangle =
\end{aligned}
$$

Obliczmy energię stanu $a^2 |n\rangle = a(a |n\rangle)$.

$$
\begin{aligned}
H\left(a^2 |n\rangle\right) &= H\left(a\, a|n\rangle\right) = \left(aH - \hbar\omega\, a\right) a\, |n\rangle \\
&= a\left(H - \hbar\omega\right) a\, |n\rangle = aHa\, |n\rangle - a\hbar\omega\, a\, |n\rangle
\end{aligned}
$$

Obliczmy energię stanu $a^2 \left|n\right\rangle = a(a \left|n\right\rangle)$.

$$\begin{aligned} H\left(a^2 \left|n\right\rangle\right) &= H\left(a\, a|n\rangle\right) = \left(aH - \hbar\omega\, a\right) a \left|n\right\rangle \\ &= a\left(H - \hbar\omega\right) a \left|n\right\rangle = aHa \left|n\right\rangle - a\hbar\omega\, a \left|n\right\rangle \\ &= \end{aligned}$$

Obliczmy energię stanu $a^2 \left| n \right\rangle = a(a \left| n \right\rangle)$.

$$
\begin{aligned}
H\left(a^2 \left| n \right\rangle\right) &= H\left(a\, a|n\rangle\right) = \left(aH - \hbar\omega\, a\right) a \left| n \right\rangle \\
&= a\left(H - \hbar\omega\right) a \left| n \right\rangle = aHa \left| n \right\rangle - a\hbar\omega\, a \left| n \right\rangle \\
&= a\left(E_n - \hbar\omega\right) a \left| n \right\rangle - a\hbar\omega\, a \left| n \right\rangle
\end{aligned}
$$

Obliczmy energię stanu $a^2 |n\rangle = a(a|n\rangle)$.

$$
\begin{aligned}
H\left(a^2 |n\rangle\right) &= H\left(a\, a|n\rangle\right) = \left(aH - \hbar\omega\ a\right) a\,|n\rangle \\
&= a\left(H - \hbar\omega\right) a\,|n\rangle = aHa\,|n\rangle - a\hbar\omega\ a\,|n\rangle \\
&= a\left(E_n - \hbar\omega\right) a\,|n\rangle - a\hbar\omega\ a\,|n\rangle \\
&=
\end{aligned}
$$

Obliczmy energię stanu $a^2 |n\rangle = a(a |n\rangle)$.

$$
\begin{aligned}
H\left(a^2 |n\rangle\right) &= H\left(a\, a|n\rangle\right) = \left(aH - \hbar\omega\, a\right) a\, |n\rangle \\
&= a\left(H - \hbar\omega\right) a\, |n\rangle = aHa\, |n\rangle - a\hbar\omega\, a\, |n\rangle \\
&= a\left(E_n - \hbar\omega\right) a\, |n\rangle - a\hbar\omega\, a\, |n\rangle \\
&= \left(E_n - 2\hbar\omega\right)\left(a^2 |n\rangle\right).
\end{aligned}
$$

Obliczmy energię stanu $a^2 \left|n\right\rangle = a(a \left|n\right\rangle)$.

$$\begin{aligned} H\left(a^2 \left|n\right\rangle\right) &= H\left(a\, a|n\rangle\right) = \left(aH - \hbar\omega\, a\right) a \left|n\right\rangle \\ &= a\left(H - \hbar\omega\right) a \left|n\right\rangle = aHa \left|n\right\rangle - a\hbar\omega\, a \left|n\right\rangle \\ &= a\left(E_n - \hbar\omega\right) a \left|n\right\rangle - a\hbar\omega\, a \left|n\right\rangle \\ &= \left(E_n - 2\hbar\omega\right)\left(a^2 \left|n\right\rangle\right). \end{aligned}$$

Jest ona o $2\hbar\omega$ niższa od E_n.

Obliczmy energię stanu $a^2 |n\rangle = a(a |n\rangle)$.

$$\begin{aligned} H\left(a^2 |n\rangle\right) &= H\left(a\, a|n\rangle\right) = \left(aH - \hbar\omega\, a\right) a\, |n\rangle \\ &= a\left(H - \hbar\omega\right) a\, |n\rangle = aHa\, |n\rangle - a\hbar\omega\, a\, |n\rangle \\ &= a\left(E_n - \hbar\omega\right) a\, |n\rangle - a\hbar\omega\, a\, |n\rangle \\ &= \left(E_n - 2\hbar\omega\right)\left(a^2 |n\rangle\right). \end{aligned}$$

Jest ona o $2\hbar\omega$ niższa od E_n.

Dla stanu stanu $a^3 |n\rangle$ otrzymalibyśmy

$$H\left(a^3 |n\rangle\right) =$$

Obliczmy energię stanu $a^2 |n\rangle = a(a |n\rangle)$.

$$\begin{aligned} H\left(a^2 |n\rangle\right) &= H\left(a\, a|n\rangle\right) = \left(aH - \hbar\omega\ a\right) a\,|n\rangle \\ &= a\left(H - \hbar\omega\right) a\,|n\rangle = aHa\,|n\rangle - a\hbar\omega\ a\,|n\rangle \\ &= a\left(E_n - \hbar\omega\right) a\,|n\rangle - a\hbar\omega\ a\,|n\rangle \\ &= \left(E_n - 2\hbar\omega\right)\left(a^2 |n\rangle\right). \end{aligned}$$

Jest ona o $2\hbar\omega$ niższa od E_n.
Dla stanu stanu $a^3 |n\rangle$ otrzymalibyśmy

$$H\left(a^3 |n\rangle\right) = \left(E_n - 3\hbar\omega\right)\left(a^3 |n\rangle\right),$$

Obliczmy energię stanu $a^2\,|n\rangle = a(a\,|n\rangle)$.

$$
\begin{aligned}
H\left(a^2\,|n\rangle\right) &= H\left(a\,a|n\rangle\right) = \left(aH - \hbar\omega\;a\right) a\,|n\rangle \\
&= a\left(H - \hbar\omega\right) a\,|n\rangle = aHa\,|n\rangle - a\hbar\omega\;a\,|n\rangle \\
&= a\left(E_n - \hbar\omega\right) a\,|n\rangle - a\hbar\omega\;a\,|n\rangle \\
&= \left(E_n - 2\hbar\omega\right)\left(a^2\,|n\rangle\right).
\end{aligned}
$$

Jest ona o $2\hbar\omega$ niższa od E_n.
Dla stanu stanu $a^3\,|n\rangle$ otrzymalibyśmy

$$
H\left(a^3\,|n\rangle\right) = \left(E_n - 3\hbar\omega\right)\left(a^3\,|n\rangle\right),
$$

itd.

Obliczmy energię stanu $a^2 \,|n\rangle = a(a\,|n\rangle)$.

$$
\begin{aligned}
H\left(a^2\,|n\rangle\right) &= H\left(a\; a|n\rangle\right) = \left(aH - \hbar\omega\; a\right) a\,|n\rangle \\
&= a\left(H - \hbar\omega\right) a\,|n\rangle = aHa\,|n\rangle - a\hbar\omega\; a\,|n\rangle \\
&= a\left(E_n - \hbar\omega\right) a\,|n\rangle - a\hbar\omega\; a\,|n\rangle \\
&= \left(E_n - 2\hbar\omega\right)\left(a^2\,|n\rangle\right).
\end{aligned}
$$

Jest ona o $2\hbar\omega$ niższa od E_n.
Dla stanu stanu $a^3\,|n\rangle$ otrzymalibyśmy

$$
H\left(a^3\,|n\rangle\right) = \left(E_n - 3\hbar\omega\right)\left(a^3\,|n\rangle\right),
$$

itd.

Powtarzając działanie operatora a możemy otrzymać stany o dowolnie małych, ujemnych energiach, co byłoby w sprzeczności z warunkiem dodatniości energii oscylatora harmonicznego

Powtarzając działanie operatora a możemy otrzymać stany o dowolnie małych, ujemnych energiach, co byłoby w sprzeczności z warunkiem dodatniości energii oscylatora harmonicznego chyba, że istnieje stan o najniższej energii, tzw. stan podstawowy, który oznaczymy $|0\rangle$, "odporny" na działanie operatora a.

Powtarzając działanie operatora a możemy otrzymać stany o dowolnie małych, ujemnych energiach, co byłoby w sprzeczności z warunkiem dodatniości energii oscylatora harmonicznego chyba, że istnieje stan o najniższej energii, tzw. stan podstawowy, który oznaczymy $|0\rangle$, "odporny" na działanie operatora a.
Dla stanu podstawowego z definicji zachodzi równość

$$a\,|0\rangle = 0.$$

Powtarzając działanie operatora a możemy otrzymać stany o dowolnie małych, ujemnych energiach, co byłoby w sprzeczności z warunkiem dodatniości energii oscylatora harmonicznego chyba, że istnieje stan o najniższej energii, tzw. stan podstawowy, który oznaczymy $|0\rangle$, "odporny" na działanie operatora a.
Dla stanu podstawowego z definicji zachodzi równość

$$a\,|0\rangle = 0.$$

Aby znaleźć jego energię, podziałajmy obustronnie operatorem $a^\dagger$ na to równanie.

Powtarzając działanie operatora a możemy otrzymać stany o dowolnie małych, ujemnych energiach, co byłoby w sprzeczności z warunkiem dodatniości energii oscylatora harmonicznego chyba, że istnieje stan o najniższej energii, tzw. stan podstawowy, który oznaczymy $|0\rangle$, "odporny" na działanie operatora a.
Dla stanu podstawowego z definicji zachodzi równość

$$a\,|0\rangle = 0.$$

Aby znaleźć jego energię, podziałajmy obustronnie operatorem $a^\dagger$ na to równanie.

$$a^\dagger \left(a \left|0\right\rangle\right) = 0.$$

Skorzystajmy teraz z równania

$$H = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

$$a^\dagger\left(a\left|0\right\rangle\right) = 0.$$

Skorzystajmy teraz z równania

$$H = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad \Rightarrow \quad a^\dagger a\left|0\right\rangle = \left(\frac{1}{\hbar\omega}H - \frac{1}{2}\right)\left|0\right\rangle = 0,$$

$$a^\dagger \left(a \left|0\right\rangle\right) = 0.$$

Skorzystajmy teraz z równania

$$H = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad \Rightarrow \quad a^\dagger a \left|0\right\rangle = \left(\frac{1}{\hbar\omega}H - \frac{1}{2}\right)\left|0\right\rangle = 0,$$

skąd otrzymujemy równanie własne operatora H dla stanu podstawowego

$$H \left|0\right\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega \left|0\right\rangle,$$

$$a^\dagger \left(a \left|0\right\rangle\right) = 0.$$

Skorzystajmy teraz z równania

$$H = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad \Rightarrow \quad a^\dagger a \left|0\right\rangle = \left(\frac{1}{\hbar\omega}H - \frac{1}{2}\right)\left|0\right\rangle = 0,$$

skąd otrzymujemy równanie własne operatora H dla stanu podstawowego

$$H \left|0\right\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega \left|0\right\rangle,$$

a więc energia stanu podstawowego wynosi

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

$$a^{\dagger}\left(a\left|0\right\rangle\right)=0.$$

Skorzystajmy teraz z równania

$$H=\left(a^{\dagger}a+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad \Rightarrow \quad a^{\dagger}a\left|0\right\rangle=\left(\frac{1}{\hbar\omega}H-\frac{1}{2}\right)\left|0\right\rangle=0,$$

skąd otrzymujemy równanie własne operatora H dla stanu podstawowego

$$H\left|0\right\rangle=\frac{1}{2}\hbar\omega\left|0\right\rangle,$$

a więc energia stanu podstawowego wynosi

$$E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega.$$

Możemy określić stany

$$|1\rangle \equiv a^{\dagger}\,|0\rangle\,,$$

Możemy określić stany

$$|1\rangle \equiv a^\dagger\,|0\rangle\,, \qquad |2\rangle \equiv a^\dagger\,|1\rangle\,,$$

Możemy określić stany

$$|1\rangle \equiv a^\dagger \, |0\rangle \,, \qquad |2\rangle \equiv a^\dagger \, |1\rangle \,, \qquad |3\rangle \equiv a^\dagger \, |2\rangle \,, \qquad \ldots,$$

Możemy określić stany

$$|1\rangle \equiv a^{\dagger}\,|0\rangle\,, \quad |2\rangle \equiv a^{\dagger}\,|1\rangle\,, \quad |3\rangle \equiv a^{\dagger}\,|2\rangle\,, \quad \ldots,$$

których energie obliczymy na podstawie wzoru

$$H\left(a^{\dagger}\,|n\rangle\right) = \left(E_n + \hbar\omega\right)\left(a^{\dagger}\,|n\rangle\right),$$

Możemy określić stany

$$|1\rangle \equiv a^\dagger |0\rangle\,, \quad |2\rangle \equiv a^\dagger |1\rangle\,, \quad |3\rangle \equiv a^\dagger |2\rangle\,, \quad ...,$$

których energie obliczymy na podstawie wzoru

$$H\left(a^\dagger |n\rangle\right) = (E_n + \hbar\omega)\left(a^\dagger |n\rangle\right),$$

$$H|1\rangle \quad =$$

Możemy określić stany

$$|1\rangle \equiv a^\dagger\,|0\rangle\,, \quad |2\rangle \equiv a^\dagger\,|1\rangle\,, \quad |3\rangle \equiv a^\dagger\,|2\rangle\,, \quad \ldots,$$

których energie obliczymy na podstawie wzoru

$$H\left(a^\dagger\,|n\rangle\right) = (E_n + \hbar\omega)\left(a^\dagger\,|n\rangle\right),$$

$$H\,|1\rangle \;=\; Ha^\dagger\,|0\rangle = (E_0 + \hbar\omega)\;a^\dagger\,|0\rangle$$

Możemy określić stany

$$|1\rangle \equiv a^\dagger\,|0\rangle\,, \quad |2\rangle \equiv a^\dagger\,|1\rangle\,, \quad |3\rangle \equiv a^\dagger\,|2\rangle\,, \quad \ldots,$$

których energie obliczymy na podstawie wzoru

$$H\left(a^\dagger\,|n\rangle\right) = (E_n + \hbar\omega)\left(a^\dagger\,|n\rangle\right),$$

$$\begin{aligned} H\,|1\rangle &= Ha^\dagger\,|0\rangle = (E_0 + \hbar\omega)\;a^\dagger\,|0\rangle \\ &= \end{aligned}$$

Możemy określić stany

$$|1\rangle \equiv a^\dagger\,|0\rangle\,, \quad |2\rangle \equiv a^\dagger\,|1\rangle\,, \quad |3\rangle \equiv a^\dagger\,|2\rangle\,, \quad \ldots,$$

których energie obliczymy na podstawie wzoru

$$H\left(a^\dagger\,|n\rangle\right) = (E_n + \hbar\omega)\left(a^\dagger\,|n\rangle\right),$$

$$\begin{aligned} H\,|1\rangle &= Ha^\dagger\,|0\rangle = (E_0 + \hbar\omega)\;a^\dagger\,|0\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega\right)\;a^\dagger\,|0\rangle = \end{aligned}$$

Możemy określić stany

$$|1\rangle \equiv a^\dagger\,|0\rangle\,, \quad |2\rangle \equiv a^\dagger\,|1\rangle\,, \quad |3\rangle \equiv a^\dagger\,|2\rangle\,, \quad \ldots,$$

których energie obliczymy na podstawie wzoru

$$H\left(a^\dagger\,|n\rangle\right) = (E_n + \hbar\omega)\left(a^\dagger\,|n\rangle\right),$$

$$\begin{aligned} H\,|1\rangle &= Ha^\dagger\,|0\rangle = (E_0 + \hbar\omega)\;a^\dagger\,|0\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega\right)\;a^\dagger\,|0\rangle = \frac{3}{2}\hbar\omega\,|1\rangle\,. \end{aligned}$$

Możemy określić stany

$$|1\rangle \equiv a^\dagger\,|0\rangle\,,\quad |2\rangle \equiv a^\dagger\,|1\rangle\,,\quad |3\rangle \equiv a^\dagger\,|2\rangle\,,\quad \ldots,$$

których energie obliczymy na podstawie wzoru

$$H\left(a^\dagger\,|n\rangle\right) = (E_n + \hbar\omega)\left(a^\dagger\,|n\rangle\right),$$

$$\begin{aligned} H\,|1\rangle &= Ha^\dagger\,|0\rangle = (E_0 + \hbar\omega)\;a^\dagger\,|0\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega\right)\;a^\dagger\,|0\rangle = \frac{3}{2}\hbar\omega\,|1\rangle\,. \end{aligned}$$

Zatem energia E_1 stanu $|1\rangle$ wynosi

$$E_1 =$$

Możemy określić stany

$$|1\rangle \equiv a^\dagger\,|0\rangle\,, \quad |2\rangle \equiv a^\dagger\,|1\rangle\,, \quad |3\rangle \equiv a^\dagger\,|2\rangle\,, \quad \ldots,$$

których energie obliczymy na podstawie wzoru

$$H\left(a^\dagger\,|n\rangle\right) = (E_n + \hbar\omega)\left(a^\dagger\,|n\rangle\right),$$

$$\begin{aligned} H\,|1\rangle &= Ha^\dagger\,|0\rangle = (E_0 + \hbar\omega)\;a^\dagger\,|0\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega\right)\;a^\dagger\,|0\rangle = \frac{3}{2}\hbar\omega\,|1\rangle\,. \end{aligned}$$

Zatem energia E_1 stanu $|1\rangle$ wynosi

$$E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega =$$

Możemy określić stany

$$|1\rangle \equiv a^\dagger\,|0\rangle\,, \quad |2\rangle \equiv a^\dagger\,|1\rangle\,, \quad |3\rangle \equiv a^\dagger\,|2\rangle\,, \quad \ldots,$$

których energie obliczymy na podstawie wzoru

$$H\left(a^\dagger\,|n\rangle\right) = (E_n + \hbar\omega)\left(a^\dagger\,|n\rangle\right),$$

$$\begin{aligned} H\,|1\rangle &= Ha^\dagger\,|0\rangle = (E_0 + \hbar\omega)\;a^\dagger\,|0\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega\right)\;a^\dagger\,|0\rangle = \frac{3}{2}\hbar\omega\,|1\rangle\,. \end{aligned}$$

Zatem energia E_1 stanu $|1\rangle$ wynosi

$$E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

Możemy określić stany

$$|1\rangle \equiv a^\dagger\,|0\rangle\,, \quad |2\rangle \equiv a^\dagger\,|1\rangle\,, \quad |3\rangle \equiv a^\dagger\,|2\rangle\,, \quad \ldots,$$

których energie obliczymy na podstawie wzoru

$$H\left(a^\dagger\,|n\rangle\right) = (E_n + \hbar\omega)\left(a^\dagger\,|n\rangle\right),$$

$$\begin{aligned} H\,|1\rangle &= Ha^\dagger\,|0\rangle = (E_0 + \hbar\omega)\;a^\dagger\,|0\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega\right)\;a^\dagger\,|0\rangle = \frac{3}{2}\hbar\omega\,|1\rangle\,. \end{aligned}$$

Zatem energia E_1 stanu $|1\rangle$ wynosi

$$E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

Podobnie znajdujemy

$$H\,|2\rangle \quad =$$

Podobnie znajdujemy

$$H|2\rangle = Ha^{\dagger}|1\rangle =$$

Podobnie znajdujemy

$$H\,|2\rangle \quad = \quad Ha^\dagger\,|1\rangle = (E_1 + \hbar\omega)\; a^\dagger\,|1\rangle$$

Podobnie znajdujemy

$$H\,|2\rangle = Ha^\dagger\,|1\rangle = \left(E_1 + \hbar\omega\right)\,a^\dagger\,|1\rangle$$
$$=$$

Podobnie znajdujemy

$$\begin{aligned} H\,|2\rangle &= Ha^\dagger\,|1\rangle = (E_1 + \hbar\omega)\;a^\dagger\,|1\rangle \\ &= \left(\frac{3}{2}\hbar\omega + \hbar\omega\right)\;a^\dagger\,|1\rangle = \end{aligned}$$

Podobnie znajdujemy

$$
\begin{aligned}
H\,|2\rangle &= Ha^\dagger\,|1\rangle = (E_1 + \hbar\omega)\;a^\dagger\,|1\rangle \\
&= \left(\frac{3}{2}\hbar\omega + \hbar\omega\right)\;a^\dagger\,|1\rangle = \frac{5}{2}\hbar\omega\,|2\rangle\,,
\end{aligned}
$$

Podobnie znajdujemy

$$\begin{aligned} H\,|2\rangle &= Ha^\dagger\,|1\rangle = (E_1 + \hbar\omega)\; a^\dagger\,|1\rangle \\ &= \left(\frac{3}{2}\hbar\omega + \hbar\omega\right)\; a^\dagger\,|1\rangle = \frac{5}{2}\hbar\omega\,|2\rangle\,, \end{aligned}$$

a więc energia E_2 stanu $|2\rangle$ wynosi

$$E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega =$$

Podobnie znajdujemy

$$\begin{aligned} H\left|2\right\rangle &= Ha^{\dagger}\left|1\right\rangle = \left(E_1 + \hbar\omega\right)\, a^{\dagger}\left|1\right\rangle \\ &= \left(\frac{3}{2}\hbar\omega + \hbar\omega\right)\, a^{\dagger}\left|1\right\rangle = \frac{5}{2}\hbar\omega\left|2\right\rangle, \end{aligned}$$

a więc energia E_2 stanu $|2\rangle$ wynosi

$$E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega = \left(2 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

Podobnie znajdujemy

$$
\begin{aligned}
H\,|2\rangle &= Ha^\dagger\,|1\rangle = (E_1 + \hbar\omega)\ a^\dagger\,|1\rangle \\
&= \left(\frac{3}{2}\hbar\omega + \hbar\omega\right)\ a^\dagger\,|1\rangle = \frac{5}{2}\hbar\omega\,|2\rangle\,,
\end{aligned}
$$

a więc energia E_2 stanu $|2\rangle$ wynosi

$$
E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega = \left(2 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.
$$

Postępując tak dalej otrzymamy wzór na energię E_n stanu $|n\rangle$ oscylatora harmonicznego

Podobnie znajdujemy

$$\begin{aligned} H\,|2\rangle &= Ha^\dagger\,|1\rangle = (E_1 + \hbar\omega)\; a^\dagger\,|1\rangle \\ &= \left(\frac{3}{2}\hbar\omega + \hbar\omega\right)\; a^\dagger\,|1\rangle = \frac{5}{2}\hbar\omega\,|2\rangle\,, \end{aligned}$$

a więc energia E_2 stanu $|2\rangle$ wynosi

$$E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega = \left(2 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

Postępując tak dalej otrzymamy wzór na energię E_n stanu $|n\rangle$ oscylatora harmonicznego

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Podobnie znajdujemy

$$\begin{aligned} H\,|2\rangle &= Ha^\dagger\,|1\rangle = (E_1 + \hbar\omega)\; a^\dagger\,|1\rangle \\ &= \left(\frac{3}{2}\hbar\omega + \hbar\omega\right)\; a^\dagger\,|1\rangle = \frac{5}{2}\hbar\omega\,|2\rangle\,, \end{aligned}$$

a więc energia E_2 stanu $|2\rangle$ wynosi

$$E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega = \left(2 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

Postępując tak dalej otrzymamy wzór na energię E_n stanu $|n\rangle$ oscylatora harmonicznego

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Wstawmy wzory

$$H = \left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad \text{i} \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

do równania własnego operatora Hamiltona $H\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle$.

$$\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,|n\rangle \quad \Rightarrow$$

Wstawmy wzory

$$H = \left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad \mathrm{i} \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

do równania własnego operatora Hamiltona $H\left|n\right\rangle = E_n\left|n\right\rangle$.

$$\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\left|n\right\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\left|n\right\rangle \quad \Rightarrow \quad N\left|n\right\rangle = n\left|n\right\rangle,$$

Wstawmy wzory

$$H = \left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad \text{i} \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

do równania własnego operatora Hamiltona $H|n\rangle = E_n|n\rangle$.

$$\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,|n\rangle \quad \Rightarrow \quad N|n\rangle = n|n\rangle\,,$$

widzimy, że wartości własne operatora $N = a^\dagger a$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Wstawmy wzory

$$H = \left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad \text{i} \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

do równania własnego operatora Hamiltona $H\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle$.

$$\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,|n\rangle \quad \Rightarrow \quad N\,|n\rangle = n\,|n\rangle\,,$$

widzimy, że wartości własne operatora $N = a^\dagger a$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Dlatego operator N nazywany jest często operatorem *liczby obsadzeń*.

Wstawmy wzory

$$H = \left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad \text{i} \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

do równania własnego operatora Hamiltona $H|n\rangle = E_n|n\rangle$.

$$\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,|n\rangle \quad \Rightarrow \quad N|n\rangle = n|n\rangle,$$

widzimy, że wartości własne operatora $N = a^\dagger a$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Dlatego operator N nazywany jest często operatorem *liczby obsadzeń*. Operatory a i $a^\dagger$ nazywamy odpowiednio operatorem *obniżającym* i *podwyższającym* energię stanu.

Wstawmy wzory

$$H = \left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad \text{i} \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

do równania własnego operatora Hamiltona $H|n\rangle = E_n|n\rangle$.

$$\left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,|n\rangle \quad \Rightarrow \quad N|n\rangle = n|n\rangle,$$

widzimy, że wartości własne operatora $N = a^\dagger a$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi, $n = 0, 1, 2, \ldots$
Dlatego operator N nazywany jest często operatorem *liczby obsadzeń*. Operatory a i $a^\dagger$ nazywamy odpowiednio operatorem *obniżającym* i *podwyższającym* energię stanu.

Ich działanie na stan $|n\rangle$ o energii E_n daje odpowiednio

$$a\,|n\rangle \sim |n-1\rangle \qquad \text{i} \qquad a^\dagger\,|n\rangle \sim |n+1\rangle\,,$$

a więc stan o energii o $\hbar\omega$ niższej i o $\hbar\omega$ wyższej.

Ich działanie na stan $|n\rangle$ o energii E_n daje odpowiednio

$$a\,|n\rangle \sim |n-1\rangle \qquad \text{i} \qquad a^\dagger\,|n\rangle \sim |n+1\rangle\,,$$

a więc stan o energii o $\hbar\omega$ niższej i o $\hbar\omega$ wyższej.
Znajdźmy macierze operatorów a i $a^\dagger$ w reprezentacji energetycznej.

Ich działanie na stan $|n\rangle$ o energii E_n daje odpowiednio

$$a\,|n\rangle \sim |n-1\rangle \qquad \text{i} \qquad a^\dagger\,|n\rangle \sim |n+1\rangle\,,$$

a więc stan o energii o $\hbar\omega$ niższej i o $\hbar\omega$ wyższej.
Znajdźmy macierze operatorów a i $a^\dagger$ w reprezentacji energetycznej. Umówmy się, że w elemencie macierzowym

$$\langle i\,|a\,|j\rangle \equiv a_{ij}$$

wskaźnik i numeruje wiersze, a wskaźnik j kolumny.

Ich działanie na stan $|n\rangle$ o energii E_n daje odpowiednio

$$a\,|n\rangle \sim |n-1\rangle \qquad \text{i} \qquad a^\dagger\,|n\rangle \sim |n+1\rangle\,,$$

a więc stan o energii o $\hbar\omega$ niższej i o $\hbar\omega$ wyższej.
Znajdźmy macierze operatorów a i $a^\dagger$ w reprezentacji energetycznej. Umówmy się, że w elemencie macierzowym

$$\langle i\,|a\,|j\rangle \equiv a_{ij}$$

wskaźnik i numeruje wiersze, a wskaźnik j kolumny. Jedyne nieznikające elementy macierzowe mają postać

$$\langle n-1\,|a\,|n\rangle \equiv c_n$$

Ich działanie na stan $|n\rangle$ o energii E_n daje odpowiednio

$$a\,|n\rangle \sim |n-1\rangle \qquad \mathrm{i} \qquad a^\dagger\,|n\rangle \sim |n+1\rangle\,,$$

a więc stan o energii o $\hbar\omega$ niższej i o $\hbar\omega$ wyższej.
Znajdźmy macierze operatorów a i $a^\dagger$ w reprezentacji energetycznej. Umówmy się, że w elemencie macierzowym

$$\langle i\,|a\,|j\rangle \equiv a_{ij}$$

wskaźnik i numeruje wiersze, a wskaźnik j kolumny. Jedyne nieznikające elementy macierzowe mają postać

$$\langle n-1\,|a\,|n\rangle \equiv c_n \quad \Rightarrow \quad \langle n-1\,|a\,|n\rangle^* = \langle n\,|a^\dagger\,|n-1\rangle = c_n^*.$$

Ich działanie na stan $|n\rangle$ o energii E_n daje odpowiednio

$$a\,|n\rangle \sim |n-1\rangle \qquad \text{i} \qquad a^\dagger\,|n\rangle \sim |n+1\rangle\,,$$

a więc stan o energii o $\hbar\omega$ niższej i o $\hbar\omega$ wyższej.
Znajdźmy macierze operatorów a i $a^\dagger$ w reprezentacji energetycznej. Umówmy się, że w elemencie macierzowym

$$\langle i\,|a\,|j\rangle \equiv a_{ij}$$

wskaźnik i numeruje wiersze, a wskaźnik j kolumny. Jedyne nieznikające elementy macierzowe mają postać

$$\langle n-1\,|a\,|n\rangle \equiv c_n \quad \Rightarrow \quad \langle n-1\,|a\,|n\rangle^* = \langle n\,|a^\dagger\,|n-1\rangle = c_n^*.$$

Zauważmy, że

$$\langle n | N | n \rangle = n =$$

Zauważmy, że

$$\langle n | N | n \rangle = n = \langle n | a^\dagger a | n \rangle =$$

Zauważmy, że

$$\langle n | N | n \rangle \quad = \quad n = \langle n | a^\dagger a | n \rangle = \langle n | a^\dagger | n' \rangle \langle n' | a | n \rangle$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \langle n | N | n \rangle &= n = \langle n | a^\dagger a | n \rangle = \langle n | a^\dagger | n' \rangle \langle n' | a | n \rangle \\ &= \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \langle n | N | n \rangle &= n = \langle n | a^\dagger a | n \rangle = \langle n | a^\dagger | n' \rangle \langle n' | a | n \rangle \\ &= \langle n | a^\dagger | n-1 \rangle \langle n-1 | a | n \rangle = \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\langle n | N | n \rangle &= n = \langle n | a^\dagger a | n \rangle = \langle n | a^\dagger | n' \rangle \langle n' | a | n \rangle \\ &= \langle n | a^\dagger | n-1 \rangle \langle n-1 | a | n \rangle = c_n^* c_n =\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \langle n | N | n \rangle &= n = \langle n | a^\dagger a | n \rangle = \langle n | a^\dagger | n' \rangle \langle n' | a | n \rangle \\ &= \langle n | a^\dagger | n-1 \rangle \langle n-1 | a | n \rangle = c_n^* c_n = |c_n|^2 . \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\langle n\,|N\,|n\rangle &= n = \langle n\,|a^\dagger a\,|n\rangle = \langle n\,|a^\dagger\,|n'\rangle\,\langle n'\,|a\,|n\rangle \\ &= \langle n\,|a^\dagger\,|n-1\rangle\,\langle n-1\,|a\,|n\rangle = c_n^* c_n = |c_n|^2\,.\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad c_n = \sqrt{n}$, z dokładnością do czynnika fazowego.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \langle n | N | n \rangle &= n = \langle n | a^\dagger a | n \rangle = \langle n | a^\dagger | n' \rangle \langle n' | a | n \rangle \\ &= \langle n | a^\dagger | n-1 \rangle \langle n-1 | a | n \rangle = c_n^* c_n = |c_n|^2 . \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad c_n = \sqrt{n}$, z dokładnością do czynnika fazowego. Zatem, macierze operatorów a i $a^\dagger$ mają postać

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\langle n | N | n\rangle &= n = \langle n | a^\dagger a | n\rangle = \langle n | a^\dagger | n'\rangle \langle n' | a | n\rangle \\ &= \langle n | a^\dagger | n-1\rangle \langle n-1 | a | n\rangle = c_n^* c_n = |c_n|^2 \,.\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad c_n = \sqrt{n}$, z dokładnością do czynnika fazowego. Zatem, macierze operatorów a i $a^\dagger$ mają postać

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix},$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \langle n | N | n \rangle &= n = \langle n | a^\dagger a | n \rangle = \langle n | a^\dagger | n' \rangle \langle n' | a | n \rangle \\ &= \langle n | a^\dagger | n-1 \rangle \langle n-1 | a | n \rangle = c_n^* c_n = |c_n|^2 . \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad c_n = \sqrt{n}$, z dokładnością do czynnika fazowego. Zatem, macierze operatorów a i $a^\dagger$ mają postać

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}, \qquad a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \langle n | N | n \rangle &= n = \langle n | a^\dagger a | n \rangle = \langle n | a^\dagger | n' \rangle \langle n' | a | n \rangle \\ &= \langle n | a^\dagger | n-1 \rangle \langle n-1 | a | n \rangle = c_n^* c_n = |c_n|^2 . \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad c_n = \sqrt{n}$, z dokładnością do czynnika fazowego. Zatem, macierze operatorów a i $a^\dagger$ mają postać

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \qquad a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Teraz możemy łatwo znaleźć macierze operatorów x i p w reprezentacji energetycznej odwracając związki

$$a = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(p - im\omega x\right), \quad a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(p + im\omega x\right),$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right),$$

Teraz możemy łatwo znaleźć macierze operatorów x i p w reprezentacji energetycznej odwracając związki

$$a = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(p - im\omega x\right), \quad a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(p + im\omega x\right),$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right), \quad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(a^\dagger - a\right).$$

Teraz możemy łatwo znaleźć macierze operatorów x i p w reprezentacji energetycznej odwracając związki

$$a = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(p - im\omega x\right), \quad a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(p + im\omega x\right),$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right), \quad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(a^\dagger - a\right).$$

$$x \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix},$$

Oscylator harmoniczny

Teraz możemy łatwo znaleźć macierze operatorów x i p w reprezentacji energetycznej odwracając związki

$$a = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,(p - im\omega x)\,, \quad a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,(p + im\omega x)\,,$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right), \quad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(a^\dagger - a\right).$$

$$x \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix}, \quad p \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix},$$

Teraz możemy łatwo znaleźć macierze operatorów x i p w reprezentacji energetycznej odwracając związki

$$a = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(p - im\omega x\right), \quad a^{\dagger} = \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(p + im\omega x\right),$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^{\dagger} + a\right), \quad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(a^{\dagger} - a\right).$$

$$x \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}, \quad p \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix},$$

gdzie symbol $\sim$ zastępuje pominięte współczynniki proporcjonalności w kolorze czerwonym odpowiednio dla operatora x i p. Zauważmy, że po uwzględnieniu tych czynników macierze operatorów x i p są hermitowskie.

Należy podkreślić, że interpretacja a i $a^\dagger$ jako operatora obniżającego i podwyższającego energię stanu ściśle wiąże się z relacjami komutacji

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1, \qquad [a, a] = \left[a^\dagger, a^\dagger\right] = 0,$$

gdzie symbol $\sim$ zastępuje pominięte współczynniki proporcjonalności w kolorze czerwonym odpowiednio dla operatora x i p. Zauważmy, że po uwzględnieniu tych czynników macierze operatorów x i p są hermitowskie.
Należy podkreślić, że interpretacja a i $a^\dagger$ jako operatora obniżającego i podwyższającego energię stanu ściśle wiąże się z relacjami komutacji

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1, \qquad [a, a] = \left[a^\dagger, a^\dagger\right] = 0,$$

które z kolei są bezpośrednią konsekwencją warunków kwantyzacji

$$[x, p] = i\hbar, \qquad [x, x] = [p, p] = 0.$$

gdzie symbol $\sim$ zastępuje pominięte współczynniki proporcjonalności w kolorze czerwonym odpowiednio dla operatora x i p. Zauważmy, że po uwzględnieniu tych czynników macierze operatorów x i p są hermitowskie.
Należy podkreślić, że interpretacja a i $a^\dagger$ jako operatora obniżającego i podwyższającego energię stanu ściśle wiąże się z relacjami komutacji

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1, \qquad [a, a] = \left[a^\dagger, a^\dagger\right] = 0,$$

które z kolei są bezpośrednią konsekwencją warunków kwantyzacji

$$[x, p] = i\hbar, \qquad [x, x] = [p, p] = 0.$$

Znajdźmy funkcje falowe *(czyli wektory stanu w reprezentacji położeniowej)* oscylatora harmonicznego odpowiadające dozwolonym wartościom energii, $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Wykorzystajmy równanie definiujące stan podstawowy

$$a\left|0\right\rangle = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(p - im\omega x\right)\left|0\right\rangle = 0,$$

Znajdźmy funkcje falowe *(czyli wektory stanu w reprezentacji położeniowej)* oscylatora harmonicznego odpowiadające dozwolonym wartościom energii, $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
Wykorzystajmy równanie definiujące stan podstawowy

$$a\,|0\rangle = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (p - im\omega x)\,|0\rangle = 0,$$

które w reprezentacji położeniowej ma postać

$$\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - im\omega x\right) u_0(x) = 0.$$

Znajdźmy funkcje falowe *(czyli wektory stanu w reprezentacji położeniowej)* oscylatora harmonicznego odpowiadające dozwolonym wartościom energii, $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Wykorzystajmy równanie definiujące stan podstawowy

$$a\left|0\right\rangle = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(p - im\omega x\right)\left|0\right\rangle = 0,$$

które w reprezentacji położeniowej ma postać

$$\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - im\omega x\right)u_0(x) = 0.$$

Podzielmy obustronnie przez współczynnik i rozdzielmy zmienne.

Oscylator harmoniczny

Znajdźmy funkcje falowe *(czyli wektory stanu w reprezentacji położeniowej)* oscylatora harmonicznego odpowiadające dozwolonym wartościom energii, $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
Wykorzystajmy równanie definiujące stan podstawowy

$$a\,|0\rangle = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,(p - im\omega x)\,|0\rangle = 0,$$

które w reprezentacji położeniowej ma postać

$$\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - im\omega x\right)u_0(x) = 0.$$

Podzielmy obustronnie przez współczynnik i rozdzielmy zmienne.

$$-i\hbar\frac{\mathrm{d}u_0(x)}{\mathrm{d}x} = im\omega x u_0(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u_0}{u_0} = -\frac{m\omega}{\hbar}x\mathrm{d}x.$$

$$-i\hbar\frac{\mathrm{d}u_0(x)}{\mathrm{d}x} = im\omega x u_0(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u_0}{u_0} = -\frac{m\omega}{\hbar}x\mathrm{d}x.$$

Scałkujmy obustronnie

$$\ln u_0 = -\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + \ln C_0$$

$$-i\hbar\frac{\mathrm{d}u_0(x)}{\mathrm{d}x} = im\omega x u_0(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u_0}{u_0} = -\frac{m\omega}{\hbar}x\mathrm{d}x.$$

Scałkujmy obustronnie

$$\ln u_0 = -\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + \ln C_0 \quad \Rightarrow \quad u_0(x) = C_0 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

$$-i\hbar\frac{\mathrm{d}u_0(x)}{\mathrm{d}x} = im\omega x u_0(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u_0}{u_0} = -\frac{m\omega}{\hbar}x\mathrm{d}x.$$

Scałkujmy obustronnie

$$\ln u_0 = -\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + \ln C_0 \quad \Rightarrow \quad u_0(x) = C_0 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

Stałą dowolną C_0 możemy wyznaczyć z warunku normalizacji

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u_0(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 1.$$

$$-i\hbar\frac{\mathrm{d}u_0(x)}{\mathrm{d}x} = im\omega x u_0(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u_0}{u_0} = -\frac{m\omega}{\hbar}x\mathrm{d}x.$$

Scałkujmy obustronnie

$$\ln u_0 = -\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + \ln C_0 \quad \Rightarrow \quad u_0(x) = C_0 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

Stałą dowolną C_0 możemy wyznaczyć z warunku normalizacji

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u_0(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 1.$$

Zadanie. Pokazać, że z dokładnością do fazy zespolonej

$$C_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

$$-i\hbar\frac{\mathrm{d}u_0(x)}{\mathrm{d}x} = im\omega x u_0(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u_0}{u_0} = -\frac{m\omega}{\hbar}x\mathrm{d}x.$$

Scałkujmy obustronnie

$$\ln u_0 = -\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + \ln C_0 \quad \Rightarrow \quad u_0(x) = C_0 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

Stałą dowolną C_0 możemy wyznaczyć z warunku normalizacji

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u_0(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 1.$$

Zadanie. Pokazać, że z dokładnością do fazy zespolonej

$$C_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Otrzymaliśmy rozwiązanie dla funkcji falowej stanu podstawowego

$$u_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

Aby znaleźć funkcje falowe wyższych stanów energetycznych, udowodnijmy tożsamość

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right),$$

Otrzymaliśmy rozwiązanie dla funkcji falowej stanu podstawowego

$$u_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

Aby znaleźć funkcje falowe wyższych stanów energetycznych, udowodnijmy tożsamość

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right),$$

która zachodzi dla dowolnej różniczkowalnej funkcji $g(x)$.

Otrzymaliśmy rozwiązanie dla funkcji falowej stanu podstawowego

$$u_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

Aby znaleźć funkcje falowe wyższych stanów energetycznych, udowodnijmy tożsamość

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right),$$

która zachodzi dla dowolnej różniczkowalnej funkcji $g(x)$.

Dowód. Przekształćmy prawą stronę tożsamości.

Dowód. Przekształćmy prawą stronę tożsamości.

$$e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}g(x)\right)$$

Dowód. Przekształćmy prawą stronę tożsamości.

$$e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}g(x)\right)$$

$$=$$

Dowód. Przekształćmy prawą stronę tożsamości.

$$e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}g(x)\right)$$

$$= \quad e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\left[e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}2x\right)g(x)+e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\right]$$

Dowód. Przekształćmy prawą stronę tożsamości.

$$
\begin{aligned}
& e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x) \right) \\
= \quad & e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \left[e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \left(-\frac{m\omega}{2\hbar} 2x \right) g(x) + e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \right] \\
= \quad &
\end{aligned}
$$

Dowód. Przekształćmy prawą stronę tożsamości.

$$
\begin{aligned}
& e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}g(x)\right) \\
= \quad & e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\left[e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}2x\right)g(x)+e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\right] \\
= \quad & \left(-\frac{m\omega}{\hbar}x\right)g(x)+\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} =
\end{aligned}
$$

Dowód. Przekształćmy prawą stronę tożsamości.

$$
\begin{aligned}
& e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}g(x)\right) \\
= \quad & e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\left[e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}2x\right)g(x) + e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\right] \\
= \quad & \left(-\frac{m\omega}{\hbar}x\right)g(x) + \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)g(x).
\end{aligned}
$$

Dowód. Przekształćmy prawą stronę tożsamości.

$$
\begin{aligned}
& e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}g(x)\right) \\
= \quad & e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\left[e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}2x\right)g(x)+e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\right] \\
= \quad & \left(-\frac{m\omega}{\hbar}x\right)g(x)+\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\frac{m\omega}{\hbar}x\right)g(x).
\end{aligned}
$$

Korzystając powtórnie z tożsamości

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right),$$

otrzymamy

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^2 g(x) =$$

Korzystając powtórnie z tożsamości

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right),$$

otrzymamy

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^2 g(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) g(x)\right]$$

Korzystając powtórnie z tożsamości

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right),$$

otrzymamy

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^2 g(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) g(x)\right]$$

$$=$$

Korzystając powtórnie z tożsamości

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right),$$

otrzymamy

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^2 g(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) g(x)\right]$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right)$$

Korzystając powtórnie z tożsamości

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right),$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^2 g(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) g(x)\right] \\ = & \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right) \\ = & \end{aligned}$$

Korzystając powtórnie z tożsamości

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right),$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^2 g(x) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) g(x)\right] \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right) \\ &= e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right)\right) \end{aligned}$$

Korzystając powtórnie z tożsamości

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right),$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^2 g(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) g(x)\right] \\ = & \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right) \\ = & e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right)\right) \\ = & \end{aligned}$$

Korzystając powtórnie z tożsamości

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right),$$

otrzymamy

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^2 g(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) g(x)\right] \\
= \quad &\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right) \\
= \quad &e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right)\right) \\
= \quad &e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right).
\end{aligned}$$

Korzystając powtórnie z tożsamości

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right),$$

otrzymamy

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^2 g(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) g(x)\right] \\
= \; & \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right) \\
= \; & e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right)\right) \\
= \; & e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right).
\end{aligned}$$

Uogólniając otrzymamy

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^n g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}g(x)\right).$$

Zadanie. Przeprowadzić indukcyjny dowód tej tożsamości.

Uogólniając otrzymamy

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^n g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right).$$

Zadanie. Przeprowadzić indukcyjny dowód tej tożsamości.

Operator $a^\dagger$ w reprezentacji położeniowej ma postać

$$a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + im\omega x\right) =$$

Uogólniając otrzymamy

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^n g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right).$$

Zadanie. Przeprowadzić indukcyjny dowód tej tożsamości.

Operator $a^\dagger$ w reprezentacji położeniowej ma postać

$$a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + im\omega x\right) = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)$$

Uogólniając otrzymamy

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^n g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}g(x)\right).$$

Zadanie. Przeprowadzić indukcyjny dowód tej tożsamości.
Operator $a^\dagger$ w reprezentacji położeniowej ma postać

$$a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + im\omega x\right) = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) \quad \Rightarrow$$

Uogólniając otrzymamy

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^n g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right).$$

Zadanie. Przeprowadzić indukcyjny dowód tej tożsamości.
Operator $a^\dagger$ w reprezentacji położeniowej ma postać

$$a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + im\omega x\right) = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) \quad \Rightarrow$$

$u_n(x)$

Uogólniając otrzymamy

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^n g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right).$$

Zadanie. Przeprowadzić indukcyjny dowód tej tożsamości.
Operator $a^\dagger$ w reprezentacji położeniowej ma postać

$$a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + im\omega x\right) = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) \quad \Rightarrow$$

$$u_n(x) =$$

Uogólniając otrzymamy

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^n g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}g(x)\right).$$

Zadanie. Przeprowadzić indukcyjny dowód tej tożsamości.
Operator $a^\dagger$ w reprezentacji położeniowej ma postać

$$a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + im\omega x\right) = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) \quad \Rightarrow$$

$$u_n(x) \quad = \quad \left(a^\dagger\right)^n u_0(x) =$$

Uogólniając otrzymamy

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^n g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right).$$

Zadanie. Przeprowadzić indukcyjny dowód tej tożsamości.
Operator $a^\dagger$ w reprezentacji położeniowej ma postać

$$a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + im\omega x\right) = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) \quad \Rightarrow$$

$$u_n(x) \quad = \quad \left(a^\dagger\right)^n u_0(x) = \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^n \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^n u_0(x)$$

Uogólniając otrzymamy

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^n g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right).$$

Zadanie. Przeprowadzić indukcyjny dowód tej tożsamości.
Operator $a^\dagger$ w reprezentacji położeniowej ma postać

$$a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + im\omega x\right) = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) \quad \Rightarrow$$

$$u_n(x) = \left(a^\dagger\right)^n u_0(x) = \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^n \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^n u_0(x)$$

$$=$$

Oscylator harmoniczny

Uogólniając otrzymamy

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^n g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}g(x)\right).$$

Zadanie. Przeprowadzić indukcyjny dowód tej tożsamości.
Operator $a^\dagger$ w reprezentacji położeniowej ma postać

$$a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + im\omega x\right) = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \left(a^\dagger\right)^n u_0(x) = \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^n \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^n u_0(x) \\ &= \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^n e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right), \end{aligned}$$

Uogólniając otrzymamy

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^n g(x) = e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} g(x)\right).$$

Zadanie. Przeprowadzić indukcyjny dowód tej tożsamości.
Operator $a^\dagger$ w reprezentacji położeniowej ma postać

$$a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + im\omega x\right) = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \left(a^\dagger\right)^n u_0(x) = \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^n \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^n u_0(x) \\ &= \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^n e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right), \end{aligned}$$

a więc ostatecznie

$$u_n(x) = C_n e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Stałe C_n wyznaczymy z warunku normalizacji

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u_n(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 1.$$

a więc ostatecznie

$$u_n(x) = C_n e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Stałe C_n wyznaczymy z warunku normalizacji

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u_n(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 1.$$

Oznaczmy $\alpha \equiv \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}$, wówczas otrzymamy

$$u_n(x) = C_n e^{\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-\alpha^2 x^2}.$$

a więc ostatecznie

$$u_n(x) = C_n e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Stałe C_n wyznaczymy z warunku normalizacji

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u_n(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 1.$$

Oznaczmy $\alpha \equiv \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}$, wówczas otrzymamy

$$u_n(x) = C_n e^{\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-\alpha^2 x^2}.$$

Zamieńmy zmienną w operatorze różniczkowym

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} = \alpha^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(\alpha x)^n},$$

Zamieńmy zmienną w operatorze różniczkowym

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} = \alpha^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(\alpha x)^n},$$

wtedy możemy zapisać

$$u_n(x) = \bar{C}_n e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} e^{\alpha^2 x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(\alpha x)^n} e^{-\alpha^2 x^2} \equiv$$

Zamieńmy zmienną w operatorze różniczkowym

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} = \alpha^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(\alpha x)^n},$$

wtedy możemy zapisać

$$u_n(x) = \bar{C}_n e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} e^{\alpha^2 x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(\alpha x)^n} e^{-\alpha^2 x^2} \equiv N_n H_n(\alpha x) e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2},$$

Zamieńmy zmienną w operatorze różniczkowym

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} = \alpha^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(\alpha x)^n},$$

wtedy możemy zapisać

$$u_n(x) = \bar{C}_n e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} e^{\alpha^2 x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(\alpha x)^n} e^{-\alpha^2 x^2} \equiv N_n H_n(\alpha x) e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2},$$

gdzie czynnik α^n został włączony do stałej normalizacyjnej $\bar{C}_n$.

Zamieńmy zmienną w operatorze różniczkowym

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} = \alpha^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(\alpha x)^n},$$

wtedy możemy zapisać

$$u_n(x) = \bar{C}_n e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} e^{\alpha^2 x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(\alpha x)^n} e^{-\alpha^2 x^2} \equiv N_n H_n(\alpha x) e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2},$$

gdzie czynnik α^n został włączony do stałej normalizacyjnej $\bar{C}_n$.
Funkcje postaci

$$H_n(\xi) \equiv (-1)^n e^{\xi^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n} e^{-\xi^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

nazywamy wielomianami Hermite'a.

Zamieńmy zmienną w operatorze różniczkowym

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} = \alpha^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(\alpha x)^n},$$

wtedy możemy zapisać

$$u_n(x) = \bar{C}_n e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} e^{\alpha^2 x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(\alpha x)^n} e^{-\alpha^2 x^2} \equiv N_n H_n(\alpha x) e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2},$$

gdzie czynnik α^n został włączony do stałej normalizacyjnej $\bar{C}_n$. Funkcje postaci

$$H_n(\xi) \equiv (-1)^n e^{\xi^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n} e^{-\xi^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

nazywamy wielomianami Hermite'a.

Zadanie. Pokazać, że

$$H_0(\xi) = 1, \qquad H_1(\xi) = 2\xi, \qquad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2.$$

Obliczmy iloczyn nieoznaczoności położenia i pędu w stanie $|n\rangle$.
Przypomnijmy, że jedyne nieznikające elementy macierzowe mają postać

$$\langle n-1\,|a\,|n\rangle \equiv c_n$$

Obliczmy iloczyn nieoznaczoności położenia i pędu w stanie $|n\rangle$. Przypomnijmy, że jedyne nieznikające elementy macierzowe mają postać

$$\langle n-1\,|a\,|n\rangle \equiv c_n \quad \Rightarrow \quad \langle n-1\,|a\,|n\rangle^* =$$

Obliczmy iloczyn nieoznaczoności położenia i pędu w stanie $|n\rangle$. Przypomnijmy, że jedyne nieznikające elementy macierzowe mają postać

$$\langle n-1 \,|a\,| n\rangle \equiv c_n \quad \Rightarrow \quad \langle n-1 \,|a\,| n\rangle^* = \langle n \,|a^\dagger\,| n-1\rangle =$$

Obliczmy iloczyn nieoznaczoności położenia i pędu w stanie $|n\rangle$. Przypomnijmy, że jedyne nieznikające elementy macierzowe mają postać

$$\langle n-1\,|a\,|n\rangle \equiv c_n \quad \Rightarrow \quad \langle n-1\,|a\,|n\rangle^* = \langle n\,|a^\dagger\,|n-1\rangle = c_n^*,$$

Obliczmy iloczyn nieoznaczoności położenia i pędu w stanie $|n\rangle$. Przypomnijmy, że jedyne nieznikające elementy macierzowe mają postać

$$\langle n-1\,|a\,|n\rangle \equiv c_n \quad \Rightarrow \quad \langle n-1\,|a\,|n\rangle^* = \langle n\,|a^\dagger\,|n-1\rangle = c_n^*,$$

a kwadraty nieoznaczoności Δx i Δp dane są wzorami

Obliczmy iloczyn nieoznaczoności położenia i pędu w stanie $|n\rangle$. Przypomnijmy, że jedyne nieznikające elementy macierzowe mają postać

$$\langle n-1\,|a\,|n\rangle \equiv c_n \quad \Rightarrow \quad \langle n-1\,|a\,|n\rangle^* = \langle n\,|a^\dagger\,|n-1\rangle = c_n^*,$$

a kwadraty nieoznaczoności Δx i Δp dane są wzorami

$$(\Delta x)^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x\rangle^2,$$

Obliczmy iloczyn nieoznaczoności położenia i pędu w stanie $|n\rangle$. Przypomnijmy, że jedyne nieznikające elementy macierzowe mają postać

$$\langle n-1\,|a\,|n\rangle \equiv c_n \quad \Rightarrow \quad \langle n-1\,|a\,|n\rangle^* = \langle n\,|a^\dagger\,|n-1\rangle = c_n^*,$$

a kwadraty nieoznaczoności Δx i Δp dane są wzorami

$$(\Delta x)^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x\rangle^2, \quad (\Delta p)^2 = \left\langle p^2 \right\rangle - \langle p\rangle^2.$$

Obliczmy iloczyn nieoznaczoności położenia i pędu w stanie $|n\rangle$. Przypomnijmy, że jedyne nieznikające elementy macierzowe mają postać

$$\langle n-1\,|a\,|n\rangle \equiv c_n \quad \Rightarrow \quad \langle n-1\,|a\,|n\rangle^* = \langle n\,|a^\dagger\,|n-1\rangle = c_n^*,$$

a kwadraty nieoznaczoności Δx i Δp dane są wzorami

$$(\Delta x)^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x\rangle^2\,, \quad (\Delta p)^2 = \left\langle p^2 \right\rangle - \langle p\rangle^2\,.$$

Obliczmy najpierw $\langle x\rangle$ i $\langle x^2\rangle$ w stanie $|n\rangle$.

Obliczmy iloczyn nieoznaczoności położenia i pędu w stanie $|n\rangle$. Przypomnijmy, że jedyne nieznikające elementy macierzowe mają postać

$$\langle n-1\,|a\,|n\rangle \equiv c_n \quad \Rightarrow \quad \langle n-1\,|a\,|n\rangle^* = \langle n\,|a^\dagger\,|n-1\rangle = c_n^*,$$

a kwadraty nieoznaczoności Δx i Δp dane są wzorami

$$(\Delta x)^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x\rangle^2\,, \quad (\Delta p)^2 = \left\langle p^2 \right\rangle - \langle p\rangle^2\,.$$

Obliczmy najpierw $\langle x\rangle$ i $\left\langle x^2\right\rangle$ w stanie $|n\rangle$.

$$\langle x\rangle \quad \equiv \quad \langle n\,|x|\,n\rangle =$$

Oscylator harmoniczny

Obliczmy iloczyn nieoznaczoności położenia i pędu w stanie $|n\rangle$. Przypomnijmy, że jedyne nieznikające elementy macierzowe mają postać

$$\langle n-1\,|a\,|n\rangle \equiv c_n \quad \Rightarrow \quad \langle n-1\,|a\,|n\rangle^* = \langle n\,|a^\dagger\,|n-1\rangle = c_n^*,$$

a kwadraty nieoznaczoności Δx i Δp dane są wzorami

$$(\Delta x)^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x\rangle^2, \quad (\Delta p)^2 = \left\langle p^2 \right\rangle - \langle p\rangle^2.$$

Obliczmy najpierw $\langle x\rangle$ i $\left\langle x^2\right\rangle$ w stanie $|n\rangle$.

$$\langle x\rangle \quad \equiv \quad \langle n\,|x|\,n\rangle = \langle n\,|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right)|\,n\rangle$$

Obliczmy iloczyn nieoznaczoności położenia i pędu w stanie $|n\rangle$. Przypomnijmy, że jedyne nieznikające elementy macierzowe mają postać

$$\langle n-1\,|a\,|n\rangle \equiv c_n \quad \Rightarrow \quad \langle n-1\,|a\,|n\rangle^* = \langle n\,|a^\dagger\,|n-1\rangle = c_n^*,$$

a kwadraty nieoznaczoności Δx i Δp dane są wzorami

$$(\Delta x)^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x\rangle^2, \quad (\Delta p)^2 = \left\langle p^2 \right\rangle - \langle p\rangle^2.$$

Obliczmy najpierw $\langle x\rangle$ i $\left\langle x^2\right\rangle$ w stanie $|n\rangle$.

$$\langle x\rangle \quad \equiv \quad \langle n\,|x|\,n\rangle = \langle n\,|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right)|\,n\rangle$$

$$=$$

Oscylator harmoniczny

Obliczmy iloczyn nieoznaczoności położenia i pędu w stanie $|n\rangle$. Przypomnijmy, że jedyne nieznikające elementy macierzowe mają postać

$$\langle n-1 \,| a \,| n\rangle \equiv c_n \quad \Rightarrow \quad \langle n-1 \,| a \,| n\rangle^* = \langle n \,| a^\dagger \,| n-1\rangle = c_n^*,$$

a kwadraty nieoznaczoności Δx i Δp dane są wzorami

$$(\Delta x)^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x\rangle^2 , \quad (\Delta p)^2 = \left\langle p^2 \right\rangle - \langle p\rangle^2 .$$

Obliczmy najpierw $\langle x\rangle$ i $\left\langle x^2\right\rangle$ w stanie $|n\rangle$.

$$\begin{aligned} \langle x\rangle \quad &\equiv \quad \langle n \,|x|\, n\rangle = \langle n \,|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right)|\, n\rangle \\ &= \quad \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\langle n \,|a^\dagger|\, n\rangle + \langle n \,|a|\, n\rangle\right) = \end{aligned}$$

Obliczmy iloczyn nieoznaczoności położenia i pędu w stanie $|n\rangle$. Przypomnijmy, że jedyne nieznikające elementy macierzowe mają postać

$$\langle n-1\,|a\,|n\rangle \equiv c_n \quad \Rightarrow \quad \langle n-1\,|a\,|n\rangle^* = \langle n\,|a^\dagger\,|n-1\rangle = c_n^*,$$

a kwadraty nieoznaczoności Δx i Δp dane są wzorami

$$(\Delta x)^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x\rangle^2, \quad (\Delta p)^2 = \left\langle p^2 \right\rangle - \langle p\rangle^2.$$

Obliczmy najpierw $\langle x\rangle$ i $\left\langle x^2\right\rangle$ w stanie $|n\rangle$.

$$\begin{aligned} \langle x\rangle &\equiv \langle n\,|x|\,n\rangle = \langle n\,|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right)|\,n\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\Big(\langle n\,|a^\dagger|\,n\rangle + \langle n\,|a|\,n\rangle\Big) = 0. \end{aligned}$$

Obliczmy iloczyn nieoznaczoności położenia i pędu w stanie $|n\rangle$. Przypomnijmy, że jedyne nieznikające elementy macierzowe mają postać

$$\langle n-1\,|a\,|n\rangle \equiv c_n \quad \Rightarrow \quad \langle n-1\,|a\,|n\rangle^* = \langle n\,|a^\dagger\,|n-1\rangle = c_n^*,$$

a kwadraty nieoznaczoności Δx i Δp dane są wzorami

$$(\Delta x)^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x\rangle^2\,, \quad (\Delta p)^2 = \left\langle p^2 \right\rangle - \langle p\rangle^2\,.$$

Obliczmy najpierw $\langle x\rangle$ i $\left\langle x^2\right\rangle$ w stanie $|n\rangle$.

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &\equiv \langle n\,|x|\,n\rangle = \langle n\,|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right)|\,n\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\langle n\,|a^\dagger|\,n\rangle + \langle n\,|a|\,n\rangle\right) = 0.\end{aligned}$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle \equiv \langle n \left| x^2 \right| n \rangle = \langle n \left| x \right| n' \rangle \langle n' \left| x \right| n \rangle$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle \equiv \langle n \left| x^2 \right| n \rangle = \langle n \left| x \right| n' \rangle \langle n' \left| x \right| n \rangle$$

$=$

$$\left\langle x^2 \right\rangle \equiv \langle n \left| x^2 \right| n \rangle = \langle n \left| x \right| n' \rangle \langle n' \left| x \right| n \rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n \left| \left(a^\dagger + a \right) \right| n' \rangle \langle n' \left| \left(a^\dagger + a \right) \right| n \rangle$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle \equiv \langle n | x^2 | n \rangle = \langle n | x | n' \rangle \langle n' | x | n \rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n | \left(a^\dagger + a \right) | n' \rangle \langle n' | \left(a^\dagger + a \right) | n \rangle$$

$$=$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle x^2 \right\rangle \equiv \langle n | x^2 | n \rangle &= \langle n | x | n' \rangle \langle n' | x | n \rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n | \left(a^\dagger + a \right) | n' \rangle \langle n' | \left(a^\dagger + a \right) | n \rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\langle n | a^\dagger | n-1 \rangle \langle n-1 | a | n \rangle + \langle n | a | n+1 \rangle \langle n+1 | a^\dagger | n \rangle \right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle x^2 \right\rangle &\equiv \langle n | x^2 | n \rangle = \langle n | x | n' \rangle \langle n' | x | n \rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n | \left(a^\dagger + a \right) | n' \rangle \langle n' | \left(a^\dagger + a \right) | n \rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \Big(\langle n | a^\dagger | n-1 \rangle \langle n-1 | a | n \rangle + \langle n | a | n+1 \rangle \langle n+1 | a^\dagger | n \rangle \Big),
\end{aligned}
$$

gdzie z nieskończonej sumy $| n' \rangle \langle n' |$ wybraliśmy tylko składniki, które wnoszą niezerowy wkład do $\langle x^2 \rangle$.

$$
\begin{aligned}
\left\langle x^2 \right\rangle \equiv \langle n\, |x^2|\, n\rangle &= \langle n\, |x|\, n'\rangle \langle n'\, |x|\, n\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n \left|\left(a^\dagger + a\right)\right| n'\rangle \langle n' \left|\left(a^\dagger + a\right)\right| n\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\Big(\langle n\, |a^\dagger|\, n-1\rangle \langle n-1\, |a|\, n\rangle + \langle n\, |a|\, n+1\rangle \langle n+1\, |a^\dagger|\, n\rangle\Big),
\end{aligned}
$$

gdzie z nieskończonej sumy $|\, n'\rangle \langle n'\, |$ wybraliśmy tylko składniki, które wnoszą niezerowy wkład do $\left\langle x^2 \right\rangle$. Przypomnijmy, że z dokładnością do fazy zespolonej

$$\langle n-1\, |a\, |n\rangle =$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle \equiv \langle n \, |x^2| \, n \rangle = \langle n \, |x| \, n' \rangle \langle n' \, |x| \, n \rangle$$
$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n \, | \left(a^\dagger + a \right) | \, n' \rangle \langle n' \, | \left(a^\dagger + a \right) | \, n \rangle$$
$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\langle n \, |a^\dagger| \, n-1 \rangle \langle n-1 \, |a| \, n \rangle + \langle n \, |a| \, n+1 \rangle \langle n+1 \, |a^\dagger| \, n \rangle \right),$$

gdzie z nieskończonej sumy $| \, n' \rangle \langle n' \, |$ wybraliśmy tylko składniki, które wnoszą niezerowy wkład do $\left\langle x^2 \right\rangle$. Przypomnijmy, że z dokładnością do fazy zespolonej

$$\langle n-1 \, |a \, |n \rangle = \langle n \, |a^\dagger \, |n-1 \rangle^* =$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle \equiv \langle n | x^2 | n \rangle = \langle n | x | n' \rangle \langle n' | x | n \rangle$$
$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n | \left(a^\dagger + a \right) | n' \rangle \langle n' | \left(a^\dagger + a \right) | n \rangle$$
$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \Big(\langle n | a^\dagger | n-1 \rangle \langle n-1 | a | n \rangle + \langle n | a | n+1 \rangle \langle n+1 | a^\dagger | n \rangle \Big),$$

gdzie z nieskończonej sumy $| n' \rangle \langle n' |$ wybraliśmy tylko składniki, które wnoszą niezerowy wkład do $\langle x^2 \rangle$. Przypomnijmy, że z dokładnością do fazy zespolonej

$$\langle n-1 | a | n \rangle = \langle n | a^\dagger | n-1 \rangle^* = \sqrt{n} \qquad \Rightarrow$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle \equiv \langle n | x^2 | n \rangle = \langle n | x | n' \rangle \langle n' | x | n \rangle$$
$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n | \left(a^\dagger + a \right) | n' \rangle \langle n' | \left(a^\dagger + a \right) | n \rangle$$
$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\langle n | a^\dagger | n-1 \rangle \langle n-1 | a | n \rangle + \langle n | a | n+1 \rangle \langle n+1 | a^\dagger | n \rangle \right),$$

gdzie z nieskończonej sumy $| n' \rangle \langle n' |$ wybraliśmy tylko składniki, które wnoszą niezerowy wkład do $\langle x^2 \rangle$. Przypomnijmy, że z dokładnością do fazy zespolonej

$$\langle n-1 | a | n \rangle = \langle n | a^\dagger | n-1 \rangle^* = \sqrt{n} \qquad \Rightarrow$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle =$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle x^2 \right\rangle \equiv \langle n | x^2 | n \rangle &= \langle n | x | n' \rangle \langle n' | x | n \rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n | \left(a^\dagger + a \right) | n' \rangle \langle n' | \left(a^\dagger + a \right) | n \rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\langle n | a^\dagger | n-1 \rangle \langle n-1 | a | n \rangle + \langle n | a | n+1 \rangle \langle n+1 | a^\dagger | n \rangle \right),
\end{aligned}
$$

gdzie z nieskończonej sumy $| n' \rangle \langle n' |$ wybraliśmy tylko składniki, które wnoszą niezerowy wkład do $\left\langle x^2 \right\rangle$. Przypomnijmy, że z dokładnością do fazy zespolonej

$$
\langle n-1 | a | n \rangle = \langle n | a^\dagger | n-1 \rangle^* = \sqrt{n} \qquad \Rightarrow
$$

$$
\left\langle x^2 \right\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\left(\sqrt{n}\right)^2 + \left(\sqrt{n+1}\right)^2 \right) =
$$

Oscylator harmoniczny

$$\left\langle x^2 \right\rangle \equiv \langle n | x^2 | n \rangle = \langle n | x | n' \rangle \langle n' | x | n \rangle$$
$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n | \left(a^\dagger + a \right) | n' \rangle \langle n' | \left(a^\dagger + a \right) | n \rangle$$
$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \Big(\langle n | a^\dagger | n-1 \rangle \langle n-1 | a | n \rangle + \langle n | a | n+1 \rangle \langle n+1 | a^\dagger | n \rangle \Big),$$

gdzie z nieskończonej sumy $| n' \rangle \langle n' |$ wybraliśmy tylko składniki, które wnoszą niezerowy wkład do $\langle x^2 \rangle$. Przypomnijmy, że z dokładnością do fazy zespolonej

$$\langle n-1 | a | n \rangle = \langle n | a^\dagger | n-1 \rangle^* = \sqrt{n} \qquad \Rightarrow$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\left(\sqrt{n}\right)^2 + \left(\sqrt{n+1}\right)^2 \right) = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Oscylator harmoniczny

$$\left\langle x^2 \right\rangle \equiv \langle n |x^2| n\rangle = \langle n |x| n'\rangle \langle n' |x| n\rangle$$
$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n |\left(a^\dagger + a\right)| n'\rangle \langle n' |\left(a^\dagger + a\right)| n\rangle$$
$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\langle n |a^\dagger| n-1\rangle \langle n-1 |a| n\rangle + \langle n |a| n+1\rangle \langle n+1 |a^\dagger| n\rangle \right),$$

gdzie z nieskończonej sumy $| n'\rangle \langle n' |$ wybraliśmy tylko składniki, które wnoszą niezerowy wkład do $\langle x^2 \rangle$. Przypomnijmy, że z dokładnością do fazy zespolonej

$$\langle n-1 |a |n\rangle = \langle n |a^\dagger |n-1\rangle^* = \sqrt{n} \qquad \Rightarrow$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\left(\sqrt{n}\right)^2 + \left(\sqrt{n+1}\right)^2 \right) = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Obliczmy teraz $\langle p \rangle$ i $\langle p^2 \rangle$ w stanie $|n\rangle$.

$$\langle p \rangle \equiv \langle n | p | n \rangle =$$

Obliczmy teraz $\langle p \rangle$ i $\langle p^2 \rangle$ w stanie $|n\rangle$.

$$\langle p \rangle \equiv \langle n \,|p|\, n \rangle = \langle n \,| i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(a^\dagger - a\right) |\, n \rangle$$

Obliczmy teraz $\langle p \rangle$ i $\langle p^2 \rangle$ w stanie $|n\rangle$.

$$\langle p \rangle \equiv \langle n \,|p|\, n \rangle = \langle n \,| i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(a^\dagger - a\right) |\, n \rangle$$

$$=$$

Obliczmy teraz $\langle p \rangle$ i $\langle p^2 \rangle$ w stanie $|n\rangle$.

$$\langle p \rangle \equiv \langle n |p| n \rangle = \langle n | i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(a^\dagger - a\right) | n \rangle$$

$$= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(\langle n |a^\dagger| n \rangle - \langle n |a| n \rangle \right) = 0.$$

Obliczmy teraz $\langle p \rangle$ i $\left\langle p^2 \right\rangle$ w stanie $|n\rangle$.

$$\langle p \rangle \equiv \langle n | p | n \rangle = \left\langle n \left| i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(a^\dagger - a\right) \right| n \right\rangle$$

$$= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(\langle n | a^\dagger | n \rangle - \langle n | a | n \rangle \right) = 0.$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle \equiv \langle n | p^2 | n \rangle =$$

Obliczmy teraz $\langle p \rangle$ i $\langle p^2 \rangle$ w stanie $|n\rangle$.

$$\langle p \rangle \equiv \langle n |p| n\rangle = \langle n | i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(a^\dagger - a\right) | n\rangle$$

$$= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(\langle n |a^\dagger| n\rangle - \langle n |a| n\rangle\right) = 0.$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle \equiv \langle n |p^2| n\rangle = \langle n |p| n'\rangle \langle n' |p| n\rangle$$

Obliczmy teraz $\langle p \rangle$ i $\left\langle p^2 \right\rangle$ w stanie $|n\rangle$.

$$\langle p \rangle \equiv \langle n \, |p| \, n \rangle = \, \langle n \, | i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(a^\dagger - a\right) | \, n \rangle$$

$$= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(\langle n \, |a^\dagger| \, n \rangle - \langle n \, |a| \, n \rangle \right) = 0.$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle \equiv \langle n \, |p^2| \, n \rangle = \, \langle n \, |p| \, n' \rangle \, \langle n' \, |p| \, n \rangle$$

$$=$$

Obliczmy teraz $\langle p \rangle$ i $\left\langle p^2 \right\rangle$ w stanie $|n\rangle$.

$$\langle p \rangle \equiv \langle n | p | n \rangle = \left\langle n \left| i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(a^\dagger - a\right) \right| n \right\rangle$$

$$= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(\langle n | a^\dagger | n \rangle - \langle n | a | n \rangle \right) = 0.$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle \equiv \langle n | p^2 | n \rangle = \langle n | p | n' \rangle \langle n' | p | n \rangle$$

$$= -\frac{m\hbar\omega}{2} \left(\left\langle n \left| \left(a^\dagger - a\right) \right| n' \right\rangle \left\langle n' \left| \left(a^\dagger - a\right) \right| n \right\rangle \right)$$

Obliczmy teraz $\langle p \rangle$ i $\langle p^2 \rangle$ w stanie $|n\rangle$.

$$\langle p \rangle \equiv \langle n | p | n \rangle = \langle n | i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(a^\dagger - a \right) | n \rangle$$

$$= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(\langle n | a^\dagger | n \rangle - \langle n | a | n \rangle \right) = 0.$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle \equiv \langle n | p^2 | n \rangle = \langle n | p | n' \rangle \langle n' | p | n \rangle$$

$$= -\frac{m\hbar\omega}{2} \left(\langle n | \left(a^\dagger - a \right) | n' \rangle \langle n' | \left(a^\dagger - a \right) | n \rangle \right)$$

$$=$$

Obliczmy teraz $\langle p \rangle$ i $\langle p^2 \rangle$ w stanie $|n\rangle$.

$$\langle p \rangle \equiv \langle n | p | n \rangle = \langle n | i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(a^\dagger - a \right) | n \rangle$$

$$= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(\langle n | a^\dagger | n \rangle - \langle n | a | n \rangle \right) = 0.$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle \equiv \langle n | p^2 | n \rangle = \langle n | p | n' \rangle \langle n' | p | n \rangle$$

$$= -\frac{m\hbar\omega}{2} \left(\langle n | \left(a^\dagger - a \right) | n' \rangle \langle n' | \left(a^\dagger - a \right) | n \rangle \right)$$

$$= -\frac{m\hbar\omega}{2} \left(- \langle n | a^\dagger | n-1 \rangle \langle n-1 | a | n \rangle - \langle n | a | n+1 \rangle \langle n+1 | a^\dagger | n \rangle \right)$$

Obliczmy teraz $\langle p \rangle$ i $\langle p^2 \rangle$ w stanie $|n\rangle$.

$$\langle p \rangle \equiv \langle n | p | n \rangle = \langle n | i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(a^\dagger - a\right) | n \rangle$$

$$= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(\langle n | a^\dagger | n \rangle - \langle n | a | n \rangle\right) = 0.$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle \equiv \langle n | p^2 | n \rangle = \langle n | p | n' \rangle \langle n' | p | n \rangle$$

$$= -\frac{m\hbar\omega}{2} \left(\langle n | \left(a^\dagger - a\right) | n' \rangle \langle n' | \left(a^\dagger - a\right) | n \rangle\right)$$

$$= -\frac{m\hbar\omega}{2} \left(- \langle n | a^\dagger | n-1 \rangle \langle n-1 | a | n \rangle - \langle n | a | n+1 \rangle \langle n+1 | a^\dagger | n \rangle\right)$$

$$=$$

Obliczmy teraz $\langle p \rangle$ i $\left\langle p^2 \right\rangle$ w stanie $|n\rangle$.

$$\langle p \rangle \equiv \langle n \left| p \right| n \rangle = \left\langle n \left| i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(a^\dagger - a\right) \right| n \right\rangle$$

$$= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(\langle n \left| a^\dagger \right| n \rangle - \langle n \left| a \right| n \rangle \right) = 0.$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle \equiv \langle n \left| p^2 \right| n \rangle = \langle n \left| p \right| n' \rangle \langle n' \left| p \right| n \rangle$$

$$= -\frac{m\hbar\omega}{2} \left(\left\langle n \left| \left(a^\dagger - a\right) \right| n' \right\rangle \left\langle n' \left| \left(a^\dagger - a\right) \right| n \right\rangle \right)$$

$$= -\frac{m\hbar\omega}{2} \left(- \langle n \left| a^\dagger \right| n-1 \rangle \langle n-1 \left| a \right| n \rangle - \langle n \left| a \right| n+1 \rangle \langle n+1 \left| a^\dagger \right| n \rangle \right)$$

$$= \frac{m\hbar\omega}{2} \left(\left(\sqrt{n}\right)^2 + \left(\sqrt{n+1}\right)^2 \right) =$$

Obliczmy teraz $\langle p \rangle$ i $\left\langle p^2 \right\rangle$ w stanie $|n\rangle$.

$$\langle p \rangle \equiv \langle n | p | n \rangle = \langle n | i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(a^\dagger - a\right) | n \rangle$$

$$= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(\langle n | a^\dagger | n \rangle - \langle n | a | n \rangle \right) = 0.$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle \equiv \langle n | p^2 | n \rangle = \langle n | p | n' \rangle \langle n' | p | n \rangle$$

$$= -\frac{m\hbar\omega}{2} \left(\langle n | \left(a^\dagger - a\right) | n' \rangle \langle n' | \left(a^\dagger - a\right) | n \rangle \right)$$

$$= -\frac{m\hbar\omega}{2} \left(-\langle n | a^\dagger | n-1 \rangle \langle n-1 | a | n \rangle - \langle n | a | n+1 \rangle \langle n+1 | a^\dagger | n \rangle \right)$$

$$= \frac{m\hbar\omega}{2} \left(\left(\sqrt{n}\right)^2 + \left(\sqrt{n+1}\right)^2 \right) = m\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Obliczmy teraz $\langle p \rangle$ i $\langle p^2 \rangle$ w stanie $|n\rangle$.

$$\langle p \rangle \equiv \langle n\,|p|\,n\rangle = \langle n\,|i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(a^\dagger - a\right)|\,n\rangle$$

$$= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\langle n\,|a^\dagger|\,n\rangle - \langle n\,|a|\,n\rangle\right) = 0.$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle \equiv \langle n\,|p^2|\,n\rangle = \langle n\,|p|\,n'\rangle \langle n'\,|p|\,n\rangle$$

$$= -\frac{m\hbar\omega}{2}\left(\langle n\,|\left(a^\dagger - a\right)|\,n'\rangle \langle n'\,|\left(a^\dagger - a\right)|\,n\rangle\right)$$

$$= -\frac{m\hbar\omega}{2}\left(-\langle n\,|a^\dagger|\,n-1\rangle \langle n-1\,|a|\,n\rangle - \langle n\,|a|\,n+1\rangle \langle n+1\,|a^\dagger|\,n\rangle\right)$$

$$= \frac{m\hbar\omega}{2}\left(\left(\sqrt{n}\right)^2 + \left(\sqrt{n+1}\right)^2\right) = m\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Obliczmy iloczyn kwadratów nieoznaczoności

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 \quad =$$

Obliczmy iloczyn kwadratów nieoznaczoności

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 = \left\langle x^2 \right\rangle \left\langle p^2 \right\rangle =$$

Obliczmy iloczyn kwadratów nieoznaczoności

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 \quad = \quad \left\langle x^2 \right\rangle \left\langle p^2 \right\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right) m\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Obliczmy iloczyn kwadratów nieoznaczoności

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 = \left\langle x^2 \right\rangle \left\langle p^2 \right\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right) m\hbar\omega \left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$=$$

Obliczmy iloczyn kwadratów nieoznaczoności

$$
\begin{aligned}
(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 &= \left\langle x^2 \right\rangle \left\langle p^2 \right\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right) m\hbar\omega \left(n+\frac{1}{2}\right) \\
&= \hbar^2 \left(n+\frac{1}{2}\right)^2,
\end{aligned}
$$

Oscylator harmoniczny

Obliczmy iloczyn kwadratów nieoznaczoności

$$
\begin{aligned}
(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 &= \left\langle x^2 \right\rangle \left\langle p^2 \right\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right) m\hbar\omega \left(n+\frac{1}{2}\right) \\
&= \hbar^2 \left(n+\frac{1}{2}\right)^2,
\end{aligned}
$$

a zatem iloczyn nieoznaczoności w stanie $|n\rangle$ wynosi

$$\Delta x \, \Delta p = \hbar \left(n+\frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Obliczmy iloczyn kwadratów nieoznaczoności

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 = \left\langle x^2 \right\rangle \left\langle p^2 \right\rangle = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) m\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) = \hbar^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 ,$$

a zatem iloczyn nieoznaczoności w stanie $|n\rangle$ wynosi

$$\Delta x \, \Delta p = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

i przyjmuje minimalną wartość

$$\Delta x \, \Delta p = \frac{\hbar}{2}$$

Oscylator harmoniczny

Obliczmy iloczyn kwadratów nieoznaczoności

$$
\begin{aligned}
(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 &= \left\langle x^2 \right\rangle \left\langle p^2 \right\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right) m\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \\
&= \hbar^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2,
\end{aligned}
$$

a zatem iloczyn nieoznaczoności w stanie $|n\rangle$ wynosi

$$\Delta x \, \Delta p = \hbar \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

i przyjmuje minimalną wartość

$$\Delta x \, \Delta p = \frac{\hbar}{2}$$

dla stanu podstawowego o $n = 0$,

Oscylator harmoniczny

Obliczmy iloczyn kwadratów nieoznaczoności

$$\begin{aligned}(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 &= \left\langle x^2 \right\rangle \left\langle p^2 \right\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right) m\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \\ &= \hbar^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

a zatem iloczyn nieoznaczoności w stanie $|n\rangle$ wynosi

$$\Delta x \, \Delta p = \hbar \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

i przyjmuje minimalną wartość

$$\Delta x \, \Delta p = \frac{\hbar}{2}$$

dla stanu podstawowego o $n = 0$,

któremu odpowiada gaussowska funkcja falowa

$$u_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

To tłumaczy dlaczego energia stanu podstawowego oscylatora jest niezerowa, lecz wynosi

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

któremu odpowiada gaussowska funkcja falowa

$$u_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

To tłumaczy dlaczego energia stanu podstawowego oscylatora jest niezerowa, lecz wynosi

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega.$$