

# Zasada nieoznaczoności

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki  
Uniwersytet Śląski, Katowice  
<http://kk.us.edu.pl>

22 kwietnia 2020

# Reguły kwantyzacji

Pokazaliśmy, że operatory położenia  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  i pędu

$$p_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3$$

spełniają następujące relacje komutacji

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

# Reguły kwantyzacji

Pokazaliśmy, że operatory położenia  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  i pędu

$$p_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3$$

spełniają następujące relacje komutacji

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

Dla poszczególnych składowych położenia i pędu z pierwszej relacji otrzymamy

$$\begin{aligned} [x, p_x] &= i\hbar, & [x, p_y] &= [x, p_z] = 0, \\ [y, p_y] &= i\hbar, & [y, p_x] &= [y, p_z] = 0, \\ [z, p_z] &= i\hbar, & [z, p_x] &= [z, p_y] = 0. \end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że operatory położenia  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  i pędu

$$p_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3$$

spełniają następujące relacje komutacji

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

Dla poszczególnych składowych położenia i pędu z pierwszej relacji otrzymamy

$$\begin{aligned} [x, p_x] &= i\hbar, & [x, p_y] &= [x, p_z] = 0, \\ [y, p_y] &= i\hbar, & [y, p_x] &= [y, p_z] = 0, \\ [z, p_z] &= i\hbar, & [z, p_x] &= [z, p_y] = 0. \end{aligned}$$

Przypomnijmy również relacje komutacji z operatorem orbitalnego momentu pędu

$$\begin{aligned}[L_i, x_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}x_k, & [L_i, p_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}p_k, \\ [L_i, L_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}L_k, & [\vec{L}^2, L_i] &= 0.\end{aligned}$$

Zauważmy, że prawe strony w pierwszych trzech relacjach znikają dla  $i = j$ , natomiast w pozostałych przypadkach będą na ogół niezerowe.

Przypomnijmy również relacje komutacji z operatorem orbitalnego momentu pędu

$$\begin{aligned}[L_i, x_j] &= i\hbar\varepsilon_{ijk}x_k, & [L_i, p_j] &= i\hbar\varepsilon_{ijk}p_k, \\ [L_i, L_j] &= i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k, & [\vec{L}^2, L_i] &= 0.\end{aligned}$$

Zauważmy, że prawe strony w pierwszych trzech relacjach znikają dla  $i = j$ , natomiast w pozostałych przypadkach będą na ogół niezerowe.

Np. dla  $i = 1$  i  $j = 2$  mają one postać

$$[L_1, x_2] = i\hbar x_3, \quad [L_1, p_2] = i\hbar p_3, \quad [L_1, L_2] = i\hbar L_3.$$

Przypomnijmy również relacje komutacji z operatorem orbitalnego momentu pędu

$$\begin{aligned}[L_i, x_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}x_k, & [L_i, p_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}p_k, \\ [L_i, L_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}L_k, & [\vec{L}^2, L_i] &= 0.\end{aligned}$$

Zauważmy, że prawe strony w pierwszych trzech relacjach znikają dla  $i = j$ , natomiast w pozostałych przypadkach będą na ogół niezerowe.

Np. dla  $i = 1$  i  $j = 2$  mają one postać

$$[L_1, x_2] = i\hbar x_3, \quad [L_1, p_2] = i\hbar p_3, \quad [L_1, L_2] = i\hbar L_3.$$

Po prawej stronie każdej z nich występuje operator liniowy.

Przypomnijmy również relacje komutacji z operatorem orbitalnego momentu pędu

$$\begin{aligned}[L_i, x_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}x_k, & [L_i, p_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}p_k, \\ [L_i, L_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}L_k, & [\vec{L}^2, L_i] &= 0.\end{aligned}$$

Zauważmy, że prawe strony w pierwszych trzech relacjach znikają dla  $i = j$ , natomiast w pozostałych przypadkach będą na ogół niezerowe.

Np. dla  $i = 1$  i  $j = 2$  mają one postać

$$[L_1, x_2] = i\hbar x_3, \quad [L_1, p_2] = i\hbar p_3, \quad [L_1, L_2] = i\hbar L_3.$$

Po prawej stronie każdej z nich występuje operator liniowy.

Przypomnijmy, że z postulatów interpretacyjnych mechaniki kwantowej wynika, że **jeśli dwie obserwable komutują, to są jednocześnie mierzalne**.

Przeanalizujemy teraz sytuację, w której obserwable nie komutują.

Przypomnijmy, że z postulatów interpretacyjnych mechaniki kwantowej wynika, że **jeśli dwie obserwable komutują, to są jednocześnie mierzalne**.

Przeanalizujemy teraz sytuację, w której obserwable nie komutują.

# Zasada nieoznaczoności

Założmy, że liniowe operatory  $A$  i  $B$  są hermitowskie i spełniają relację komutacji

$$[A, B] = iC,$$

gdzie  $C$  jest operatorem liniowym.

Pokażemy, że relacja ta prowadzi do następującej relacji nieoznaczoności

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{|\langle C \rangle|}{2},$$

# Zasada nieoznaczoności

Założmy, że liniowe operatory  $A$  i  $B$  są hermitowskie i spełniają relację komutacji

$$[A, B] = iC,$$

gdzie  $C$  jest operatorem liniowym.

Pokażemy, że relacja ta prowadzi do następującej relacji nieoznaczoności

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{|\langle C \rangle|}{2},$$

gdzie  $\langle C \rangle$  oznacza wartość oczekiwaną operatora  $C$ ,

# Zasada nieoznaczoności

Założmy, że liniowe operatory  $A$  i  $B$  są hermitowskie i spełniają relację komutacji

$$[A, B] = iC,$$

gdzie  $C$  jest operatorem liniowym.

Pokażemy, że relacja ta prowadzi do następującej relacji nieoznaczoności

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{|\langle C \rangle|}{2},$$

gdzie  $\langle C \rangle$  oznacza wartość oczekiwaną operatora  $C$ ,

# Zasada nieoznaczoności

a  $\Delta A$  oznacza średnie **odchylenie standardowe**, zdefiniowane jako pierwiastek z wariancji

$$\Delta A \equiv \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle^{1/2}.$$

# Zasada nieoznaczoności

a  $\Delta A$  oznacza średnie **odchylenie standardowe**, zdefiniowane jako pierwiastek z wariancji

$$\Delta A \equiv \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle^{1/2}.$$

Np, jeśli liniowe operatory  $A$  i  $B$  są hermitowskie i spełniają relację komutacji

$$[A, B] = i\hbar,$$

# Zasada nieoznaczoności

a  $\Delta A$  oznacza średnie **odchylenie standardowe**, zdefiniowane jako pierwiastek z wariancji

$$\Delta A \equiv \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle^{1/2}.$$

Np, jeśli liniowe operatory  $A$  i  $B$  są hermitowskie i spełniają relację komutacji

$$[A, B] = i\hbar,$$

a więc operator  $C$  jest stałą, równą  $\hbar$ ,

# Zasada nieoznaczoności

a  $\Delta A$  oznacza średnie **odchylenie standardowe**, zdefiniowane jako pierwiastek z wariancji

$$\Delta A \equiv \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle^{1/2}.$$

Np, jeśli liniowe operatory  $A$  i  $B$  są hermitowskie i spełniają relację komutacji

$$[A, B] = i\hbar,$$

a więc operator  $C$  jest stałą, równą  $\hbar$ , to  $\langle C \rangle = \langle \hbar \rangle = \hbar$

# Zasada nieoznaczoności

a  $\Delta A$  oznacza średnie **odchylenie standardowe**, zdefiniowane jako pierwiastek z wariancji

$$\Delta A \equiv \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle^{1/2}.$$

Np, jeśli liniowe operatory  $A$  i  $B$  są hermitowskie i spełniają relację komutacji

$$[A, B] = i\hbar,$$

a więc operator  $C$  jest stałą, równą  $\hbar$ , to  $\langle C \rangle = \langle \hbar \rangle = \hbar$  i jest spełniona następująca relacja nieoznaczoności Heisenberga

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{\hbar}{2}.$$

# Zasada nieoznaczoności

a  $\Delta A$  oznacza średnie odchylenie standardowe, zdefiniowane jako pierwiastek z wariancji

$$\Delta A \equiv \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle^{1/2}.$$

Np, jeśli liniowe operatory  $A$  i  $B$  są hermitowskie i spełniają relację komutacji

$$[A, B] = i\hbar,$$

a więc operator  $C$  jest stałą, równą  $\hbar$ , to  $\langle C \rangle = \langle \hbar \rangle = \hbar$  i jest spełniona następująca relacja nieoznaczoności Heisenberga

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{\hbar}{2}.$$

# Zasada nieoznaczoności

Przypomnijmy, że wartość oczekiwaną operatora  $A$  reprezentującego pewną zmienną dynamiczną w stanie kwantowomechanicznym  $|\psi\rangle$  definiujemy następująco

$$\langle A \rangle \equiv \langle \psi | A | \psi \rangle = (\psi | A \psi).$$

Korzystając z własności wartości oczekiwanej wariancję operatora  $A$  możemy zapisać w formie

$$\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle =$$

# Zasada nieoznaczoności

Przypomnijmy, że wartość oczekiwaną operatora  $A$  reprezentującego pewną zmienną dynamiczną w stanie kwantowomechanicznym  $|\psi\rangle$  definiujemy następująco

$$\langle A \rangle \equiv \langle \psi | A | \psi \rangle = (\psi | A \psi).$$

Korzystając z własności wartości oczekiwanej wariancję operatora  $A$  możemy zapisać w formie

$$\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 - 2 \langle A \rangle A + \langle A \rangle^2 \rangle$$

# Zasada nieoznaczoności

Przypomnijmy, że wartość oczekiwaną operatora  $A$  reprezentującego pewną zmienną dynamiczną w stanie kwantowomechanicznym  $|\psi\rangle$  definiujemy następująco

$$\langle A \rangle \equiv \langle \psi | A | \psi \rangle = (\psi | A \psi).$$

Korzystając z własności wartości oczekiwanej wariancję operatora  $A$  możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned} \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle &= \langle A^2 - 2 \langle A \rangle A + \langle A \rangle^2 \rangle \\ &= \end{aligned}$$

# Zasada nieoznaczoności

Przypomnijmy, że wartość oczekiwaną operatora  $A$  reprezentującego pewną zmienną dynamiczną w stanie kwantowomechanicznym  $|\psi\rangle$  definiujemy następująco

$$\langle A \rangle \equiv \langle \psi | A | \psi \rangle = (\psi | A \psi).$$

Korzystając z własności wartości oczekiwanej wariancję operatora  $A$  możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned} \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle &= \langle A^2 - 2 \langle A \rangle A + \langle A \rangle^2 \rangle \\ &= \langle A^2 \rangle - 2 \langle A \rangle \langle A \rangle + \langle A \rangle^2 = \end{aligned}$$

# Zasada nieoznaczoności

Przypomnijmy, że wartość oczekiwaną operatora  $A$  reprezentującego pewną zmienną dynamiczną w stanie kwantowomechanicznym  $|\psi\rangle$  definiujemy następująco

$$\langle A \rangle \equiv \langle \psi | A | \psi \rangle = (\psi | A \psi).$$

Korzystając z własności wartości oczekiwanej wariancję operatora  $A$  możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned} \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle &= \langle A^2 - 2 \langle A \rangle A + \langle A \rangle^2 \rangle \\ &= \langle A^2 \rangle - 2 \langle A \rangle \langle A \rangle + \langle A \rangle^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2, \end{aligned}$$

# Zasada nieoznaczoności

Przypomnijmy, że wartość oczekiwaną operatora  $A$  reprezentującego pewną zmienną dynamiczną w stanie kwantowomechanicznym  $|\psi\rangle$  definiujemy następująco

$$\langle A \rangle \equiv \langle \psi | A | \psi \rangle = (\psi | A \psi).$$

Korzystając z własności wartości oczekiwanej wariancję operatora  $A$  możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned} \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle &= \langle A^2 - 2 \langle A \rangle A + \langle A \rangle^2 \rangle \\ &= \langle A^2 \rangle - 2 \langle A \rangle \langle A \rangle + \langle A \rangle^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2, \end{aligned}$$

a zatem

$$(\Delta A)^2 =$$

# Zasada nieoznaczoności

Przypomnijmy, że wartość oczekiwaną operatora  $A$  reprezentującego pewną zmienną dynamiczną w stanie kwantowomechanicznym  $|\psi\rangle$  definiujemy następująco

$$\langle A \rangle \equiv \langle \psi | A | \psi \rangle = (\psi | A \psi).$$

Korzystając z własności wartości oczekiwanej wariancję operatora  $A$  możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned} \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle &= \langle A^2 - 2 \langle A \rangle A + \langle A \rangle^2 \rangle \\ &= \langle A^2 \rangle - 2 \langle A \rangle \langle A \rangle + \langle A \rangle^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2, \end{aligned}$$

a zatem

$$(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle =$$

# Zasada nieoznaczoności

Przypomnijmy, że wartość oczekiwaną operatora  $A$  reprezentującego pewną zmienną dynamiczną w stanie kwantowomechanicznym  $|\psi\rangle$  definiujemy następująco

$$\langle A \rangle \equiv \langle \psi | A | \psi \rangle = (\psi | A \psi).$$

Korzystając z własności wartości oczekiwanej wariancję operatora  $A$  możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned} \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle &= \langle A^2 - 2 \langle A \rangle A + \langle A \rangle^2 \rangle \\ &= \langle A^2 \rangle - 2 \langle A \rangle \langle A \rangle + \langle A \rangle^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2, \end{aligned}$$

a zatem

$$(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2.$$

# Zasada nieoznaczoności

Przypomnijmy, że wartość oczekiwaną operatora  $A$  reprezentującego pewną zmienną dynamiczną w stanie kwantowomechanicznym  $|\psi\rangle$  definiujemy następująco

$$\langle A \rangle \equiv \langle \psi | A | \psi \rangle = (\psi | A \psi).$$

Korzystając z własności wartości oczekiwanej wariancję operatora  $A$  możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned} \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle &= \langle A^2 - 2 \langle A \rangle A + \langle A \rangle^2 \rangle \\ &= \langle A^2 \rangle - 2 \langle A \rangle \langle A \rangle + \langle A \rangle^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2, \end{aligned}$$

a zatem

$$(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2.$$

Zdefiniujmy operatory liniowe

$$\bar{A} \equiv A - \langle A \rangle, \quad \bar{B} \equiv B - \langle B \rangle.$$

Operatory  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$  są hermitowskie i spełniają taką samą relację komutacji co operatory  $A$  i  $B$

$$[\bar{A}, \bar{B}] = iC.$$

Zdefiniujmy operatory liniowe

$$\bar{A} \equiv A - \langle A \rangle, \quad \bar{B} \equiv B - \langle B \rangle.$$

Operatory  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$  są hermitowskie i spełniają taką samą relację komutacji co operatory  $A$  i  $B$

$$[\bar{A}, \bar{B}] = iC.$$

Rzeczywiście

$$\bar{A}^\dagger =$$

Zdefiniujmy operatory liniowe

$$\bar{A} \equiv A - \langle A \rangle, \quad \bar{B} \equiv B - \langle B \rangle.$$

Operatory  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$  są hermitowskie i spełniają taką samą relację komutacji co operatory  $A$  i  $B$

$$[\bar{A}, \bar{B}] = iC.$$

Rzeczywiście

$$\bar{A}^\dagger = (A - \langle A \rangle)^\dagger =$$

# Zasada nieoznaczoności

Zdefiniujmy operatory liniowe

$$\bar{A} \equiv A - \langle A \rangle, \quad \bar{B} \equiv B - \langle B \rangle.$$

Operatory  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$  są hermitowskie i spełniają taką samą relację komutacji co operatory  $A$  i  $B$

$$[\bar{A}, \bar{B}] = iC.$$

Rzeczywiście

$$\bar{A}^\dagger = (A - \langle A \rangle)^\dagger = A^\dagger - \langle A \rangle^* =$$

# Zasada nieoznaczoności

Zdefiniujmy operatory liniowe

$$\bar{A} \equiv A - \langle A \rangle, \quad \bar{B} \equiv B - \langle B \rangle.$$

Operatory  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$  są hermitowskie i spełniają taką samą relację komutacji co operatory  $A$  i  $B$

$$[\bar{A}, \bar{B}] = iC.$$

Rzeczywiście

$$\bar{A}^\dagger = (A - \langle A \rangle)^\dagger = A^\dagger - \langle A \rangle^* = A - \langle A \rangle =$$

Zdefiniujmy operatory liniowe

$$\bar{A} \equiv A - \langle A \rangle, \quad \bar{B} \equiv B - \langle B \rangle.$$

Operatory  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$  są hermitowskie i spełniają taką samą relację komutacji co operatory  $A$  i  $B$

$$[\bar{A}, \bar{B}] = iC.$$

Rzeczywiście

$$\bar{A}^\dagger = (A - \langle A \rangle)^\dagger = A^\dagger - \langle A \rangle^* = A - \langle A \rangle = \bar{A},$$

# Zasada nieoznaczoności

Zdefiniujmy operatory liniowe

$$\bar{A} \equiv A - \langle A \rangle, \quad \bar{B} \equiv B - \langle B \rangle.$$

Operatory  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$  są hermitowskie i spełniają taką samą relację komutacji co operatory  $A$  i  $B$

$$[\bar{A}, \bar{B}] = iC.$$

Rzeczywiście

$$\bar{A}^\dagger = (A - \langle A \rangle)^\dagger = A^\dagger - \langle A \rangle^* = A - \langle A \rangle = \bar{A},$$

gdyż operator  $A$  jest hermitowski i  $\langle A \rangle$  jest liczbą rzeczywistą.

# Zasada nieoznaczoności

Zdefiniujmy operatory liniowe

$$\bar{A} \equiv A - \langle A \rangle, \quad \bar{B} \equiv B - \langle B \rangle.$$

Operatory  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$  są hermitowskie i spełniają taką samą relację komutacji co operatory  $A$  i  $B$

$$[\bar{A}, \bar{B}] = iC.$$

Rzeczywiście

$$\bar{A}^\dagger = (A - \langle A \rangle)^\dagger = A^\dagger - \langle A \rangle^* = A - \langle A \rangle = \bar{A},$$

gdyż operator  $A$  jest hermitowski i  $\langle A \rangle$  jest liczbą rzeczywistą.

Obliczmy

$$[\bar{A}, \bar{B}] = [A - \langle A \rangle, B - \langle B \rangle]$$

Skorzystajmy z liniowości komutatora

# Zasada nieoznaczoności

Obliczmy

$$[\bar{A}, \bar{B}] = [A - \langle A \rangle, B - \langle B \rangle]$$

Skorzystajmy z liniowości komutatora

$$= [A, B] - \underbrace{[A, \langle B \rangle]}_0 - \underbrace{[\langle A \rangle, B]}_0 + \underbrace{[\langle A \rangle, \langle B \rangle]}_0 =$$

Obliczmy

$$[\bar{A}, \bar{B}] = [A - \langle A \rangle, B - \langle B \rangle]$$

Skorzystajmy z liniowości komutatora

$$= [A, B] - \underbrace{[A, \langle B \rangle]}_0 - \underbrace{[\langle A \rangle, B]}_0 + \underbrace{[\langle A \rangle, \langle B \rangle]}_0 = [A, B] =$$

Obliczmy

$$[\bar{A}, \bar{B}] = [A - \langle A \rangle, B - \langle B \rangle]$$

Skorzystajmy z liniowości komutatora

$$= [A, B] - \underbrace{[A, \langle B \rangle]}_0 - \underbrace{[\langle A \rangle, B]}_0 + \underbrace{[\langle A \rangle, \langle B \rangle]}_0 = [A, B] = iC,$$

# Zasada nieoznaczoności

Obliczmy

$$[\bar{A}, \bar{B}] = [A - \langle A \rangle, B - \langle B \rangle]$$

Skorzystajmy z liniowości komutatora

$$= [A, B] - \underbrace{[A, \langle B \rangle]}_0 - \underbrace{[\langle A \rangle, B]}_0 + \underbrace{[\langle A \rangle, \langle B \rangle]}_0 = [A, B] = iC,$$

Skorzystajmy z nierówności Schwarza

$$\|\varphi\| \|\chi\| \geq |(\varphi|\chi)|,$$

która jest spełniona dla dowolnych funkcji  $\varphi$  i  $\chi$  z przestrzeni Hilberta.

# Zasada nieoznaczoności

Obliczmy

$$[\bar{A}, \bar{B}] = [A - \langle A \rangle, B - \langle B \rangle]$$

Skorzystajmy z liniowości komutatora

$$= [A, B] - \underbrace{[A, \langle B \rangle]}_0 - \underbrace{[\langle A \rangle, B]}_0 + \underbrace{[\langle A \rangle, \langle B \rangle]}_0 = [A, B] = iC,$$

Skorzystajmy z nierówności Schwarza

$$\|\varphi\| \|\chi\| \geq |(\varphi|\chi)|,$$

która jest spełniona dla dowolnych funkcji  $\varphi$  i  $\chi$  z przestrzeni Hilberta.

# Zasada nieoznaczoności

Wybierzmy  $\varphi = \bar{A}\psi$ ,  $\chi = \bar{B}\psi$  i podnieśmy do kwadratu obie strony nierówności, wówczas otrzymamy

$$\|\bar{A}\psi\|^2 \|\bar{B}\psi\|^2 \geqslant \left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2.$$

Przekształćmy prawą stronę nierówności

$$\left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2 =$$

Wybierzmy  $\varphi = \bar{A}\psi$ ,  $\chi = \bar{B}\psi$  i podnieśmy do kwadratu obie strony nierówności, wówczas otrzymamy

$$\|\bar{A}\psi\|^2 \|\bar{B}\psi\|^2 \geqslant \left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2.$$

Przekształćmy prawą stronę nierówności

$$\left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2 = \left| (\psi | \bar{A}\bar{B}\psi) \right|^2$$

# Zasada nieoznaczoności

Wybierzmy  $\varphi = \bar{A}\psi$ ,  $\chi = \bar{B}\psi$  i podnieśmy do kwadratu obie strony nierówności, wówczas otrzymamy

$$\|\bar{A}\psi\|^2 \|\bar{B}\psi\|^2 \geqslant \left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2.$$

Przekształćmy prawą stronę nierówności

$$\left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2 = \left| (\psi | \bar{A}\bar{B}\psi) \right|^2 \equiv \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 =$$

# Zasada nieoznaczoności

Wybierzmy  $\varphi = \bar{A}\psi$ ,  $\chi = \bar{B}\psi$  i podnieśmy do kwadratu obie strony nierówności, wówczas otrzymamy

$$\|\bar{A}\psi\|^2 \|\bar{B}\psi\|^2 \geqslant \left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2.$$

Przekształćmy prawą stronę nierówności

$$\left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2 = \left| (\psi | \bar{A}\bar{B}\psi) \right|^2 \equiv \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} \rangle.$$

# Zasada nieoznaczoności

Wybierzmy  $\varphi = \bar{A}\psi$ ,  $\chi = \bar{B}\psi$  i podnieśmy do kwadratu obie strony nierówności, wówczas otrzymamy

$$\|\bar{A}\psi\|^2 \|\bar{B}\psi\|^2 \geqslant \left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2.$$

Przekształćmy prawą stronę nierówności

$$\left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2 = \left| (\psi | \bar{A}\bar{B}\psi) \right|^2 \equiv \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} \rangle.$$

# Zasada nieoznaczoności

Zauważmy, że

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = (\psi | \bar{A}\bar{B} \psi)^* =$$

# Zasada nieoznaczoności

Zauważmy, że

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = (\psi | \bar{A}\bar{B} \psi)^* = (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi)^* =$$

# Zasada nieoznaczoności

Zauważmy, że

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = (\psi | \bar{A}\bar{B} \psi)^* = (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi)^* = (\bar{B}\bar{A}\psi | \psi)^* =$$

# Zasada nieoznaczoności

Zauważmy, że

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = (\psi | \bar{A}\bar{B} \psi)^* = (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi)^* = (\bar{B}\bar{A}\psi | \psi)^* = (\psi | \bar{B}\bar{A}\psi) =$$

# Zasada nieoznaczoności

Zauważmy, że

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = (\psi | \bar{A}\bar{B} \psi)^* = (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi)^* = (\bar{B}\bar{A}\psi | \psi)^* = (\psi | \bar{B}\bar{A}\psi) = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle,$$

# Zasada nieoznaczoności

Zauważmy, że

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = (\psi | \bar{A}\bar{B} \psi)^* = (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi)^* = (\bar{B}\bar{A}\psi | \psi)^* = (\psi | \bar{B}\bar{A}\psi) = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle,$$

gdzie skorzystaliśmy kolejno z hermitowskości operatorów  $A$  i  $B$

# Zasada nieoznaczoności

Zauważmy, że

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = (\psi | \bar{A}\bar{B} \psi)^* = (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi)^* = (\bar{B}\bar{A}\psi | \psi)^* = (\psi | \bar{B}\bar{A}\psi) = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle,$$

gdzie skorzystaliśmy kolejno z hermitowskości operatorów  $A$  i  $B$  oraz z definicyjnej własności iloczynu skalarnego (*sprzęgamy przy przestawieniu argumentów*).

# Zasada nieoznaczoności

Zauważmy, że

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = (\psi | \bar{A}\bar{B} \psi)^* = (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi)^* = (\bar{B}\bar{A}\psi | \psi)^* = (\psi | \bar{B}\bar{A}\psi) = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle,$$

gdzie skorzystaliśmy kolejno z hermitowskości operatorów  $A$  i  $B$  oraz z definicyjnej własności iloczynu skalarnego (*sprzęgamy przy przestawieniu argumentów*). Zauważmy, że

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle =$$

# Zasada nieoznaczoności

Zauważmy, że

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = (\psi | \bar{A}\bar{B} \psi)^* = (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi)^* = (\bar{B}\bar{A}\psi | \psi)^* = (\psi | \bar{B}\bar{A}\psi) = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle,$$

gdzie skorzystaliśmy kolejno z hermitowskości operatorów  $A$  i  $B$  oraz z definicyjnej własności iloczynu skalarnego (*sprzęgamy przy przestawieniu argumentów*). Zauważmy, że

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle = \frac{1}{2} \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right),$$

# Zasada nieoznaczoności

Zauważmy, że

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = (\psi | \bar{A}\bar{B} \psi)^* = (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi)^* = (\bar{B}\bar{A}\psi | \psi)^* = (\psi | \bar{B}\bar{A}\psi) = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle,$$

gdzie skorzystaliśmy kolejno z hermitowskości operatorów  $A$  i  $B$  oraz z definicyjnej własności iloczynu skalarnego (*sprzęgamy przy przestawieniu argumentów*). Zauważmy, że

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle = \frac{1}{2} \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right),$$

a zatem

$$|\langle \bar{A}\bar{B} \rangle|^2 =$$

# Zasada nieoznaczoności

Zauważmy, że

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = (\psi | \bar{A}\bar{B} \psi)^* = (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi)^* = (\bar{B}\bar{A}\psi | \psi)^* = (\psi | \bar{B}\bar{A}\psi) = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle,$$

gdzie skorzystaliśmy kolejno z hermitowskości operatorów  $A$  i  $B$  oraz z definicyjnej własności iloczynu skalarnego (*sprzęgamy przy przestawieniu argumentów*). Zauważmy, że

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle = \frac{1}{2} \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right),$$

a zatem

$$|\langle \bar{A}\bar{B} \rangle|^2 = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} \rangle$$

# Zasada nieoznaczoności

Zauważmy, że

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = (\psi|\bar{A}\bar{B}\psi)^* = (\bar{A}\psi|\bar{B}\psi)^* = (\bar{B}\bar{A}\psi|\psi)^* = (\psi|\bar{B}\bar{A}\psi) = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle,$$

gdzie skorzystaliśmy kolejno z hermitowskości operatorów  $A$  i  $B$  oraz z definicyjnej własności iloczynu skalarnego (*sprzęgamy przy przestawieniu argumentów*). Zauważmy, że

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle = \frac{1}{2} (\langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle),$$

a zatem

$$|\langle \bar{A}\bar{B} \rangle|^2 = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} \rangle$$

=

# Zasada nieoznaczoności

Zauważmy, że

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = (\psi | \bar{A}\bar{B} \psi)^* = (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi)^* = (\bar{B}\bar{A}\psi | \psi)^* = (\psi | \bar{B}\bar{A}\psi) = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle,$$

gdzie skorzystaliśmy kolejno z hermitowskości operatorów  $A$  i  $B$  oraz z definicyjnej własności iloczynu skalarnego (*sprzęgamy przy przestawieniu argumentów*). Zauważmy, że

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle = \frac{1}{2} \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right),$$

a zatem

$$\begin{aligned} |\langle \bar{A}\bar{B} \rangle|^2 &= \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right)^* \frac{1}{2} \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right) \end{aligned}$$

# Zasada nieoznaczoności

Zauważmy, że

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = (\psi | \bar{A}\bar{B} \psi)^* = (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi)^* = (\bar{B}\bar{A}\psi | \psi)^* = (\psi | \bar{B}\bar{A}\psi) = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle,$$

gdzie skorzystaliśmy kolejno z hermitowskości operatorów  $A$  i  $B$  oraz z definicyjnej własności iloczynu skalarnego (*sprzęgamy przy przestawieniu argumentów*). Zauważmy, że

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle = \frac{1}{2} \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right),$$

a zatem

$$\begin{aligned} |\langle \bar{A}\bar{B} \rangle|^2 &= \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right)^* \frac{1}{2} \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right) \end{aligned}$$

# Zasada nieoznaczoności

Przekształćmy wyrażenie z prawej strony

$$\begin{aligned} & \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right)^* \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right) \\ = & \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \end{aligned}$$

# Zasada nieoznaczoności

Przekształćmy wyrażenie z prawej strony

$$\begin{aligned} & \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right)^* \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right) \\ = & \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\ & + \end{aligned}$$

# Zasada nieoznaczoności

Przekształćmy wyrażenie z prawej strony

$$\begin{aligned} & \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right)^* \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right) \\ = & \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\ + & \underbrace{\langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle}_{0} \end{aligned}$$

# Zasada nieoznaczoności

Przekształćmy wyrażenie z prawej strony

$$\begin{aligned} & \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right)^* \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right) \\ = & \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\ + & \underbrace{\langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle}_{0} \end{aligned}$$

Rzeczywiście

# Zasada nieoznaczoności

Przekształćmy wyrażenie z prawej strony

$$\begin{aligned} & \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right)^* \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right) \\ = & \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\ + & \underbrace{\langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle}_{0} \end{aligned}$$

Rzeczywiście

$$\langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle$$

# Zasada nieoznaczoności

Przekształćmy wyrażenie z prawej strony

$$\begin{aligned} & \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right)^* \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right) \\ = & \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\ + & \underbrace{\langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle}_0 \end{aligned}$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} & \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \\ = & \end{aligned}$$

# Zasada nieoznaczoności

Przekształćmy wyrażenie z prawej strony

$$\begin{aligned} & \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right)^* \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right) \\ = & \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\ + & \underbrace{\langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle}_{0} \end{aligned}$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} & \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \\ = & 2 \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 - 2 \left| \langle \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* \langle \bar{B}\bar{A} \rangle \\ & - \langle \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} \rangle - \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* \langle \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \end{aligned}$$

# Zasada nieoznaczoności

Przekształćmy wyrażenie z prawej strony

$$\begin{aligned} & \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right)^* \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right) \\ = & \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\ + & \underbrace{\langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle}_{0} \end{aligned}$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} & \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \\ = & 2 \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 - 2 \left| \langle \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* \langle \bar{B}\bar{A} \rangle \\ & - \langle \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} \rangle - \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* \langle \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} \rangle = 0, \end{aligned}$$

# Zasada nieoznaczoności

Przekształćmy wyrażenie z prawej strony

$$\begin{aligned} & \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right)^* \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right) \\ = & \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\ + & \underbrace{\langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle}_{0} \end{aligned}$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} & \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \\ = & 2 \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 - 2 \left| \langle \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* \langle \bar{B}\bar{A} \rangle \\ & - \langle \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} \rangle - \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* \langle \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} \rangle = 0, \end{aligned}$$

gdź  $\langle \bar{B}\bar{A} \rangle^* = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle$ ,

# Zasada nieoznaczoności

Przekształćmy wyrażenie z prawej strony

$$\begin{aligned} & \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right)^* \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right) \\ = & \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\ + & \underbrace{\langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle}_{0} \end{aligned}$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} & \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \\ = & 2 \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 - 2 \left| \langle \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* \langle \bar{B}\bar{A} \rangle \\ & - \langle \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} \rangle - \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* \langle \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} \rangle = 0, \end{aligned}$$

gdź  $\langle \bar{B}\bar{A} \rangle^* = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle$ ,  $\langle \bar{B}\bar{A} \rangle = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^*$

# Zasada nieoznaczoności

Przekształćmy wyrażenie z prawej strony

$$\begin{aligned} & \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right)^* \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right) \\ = & \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\ + & \underbrace{\langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle}_0 \end{aligned}$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} & \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \\ = & 2 \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 - 2 \left| \langle \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* \langle \bar{B}\bar{A} \rangle \\ & - \langle \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} \rangle - \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* \langle \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} \rangle = 0, \end{aligned}$$

$$\text{gdź} \langle \bar{B}\bar{A} \rangle^* = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle, \langle \bar{B}\bar{A} \rangle = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* \Rightarrow \left| \langle \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 = \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2.$$

# Zasada nieoznaczoności

Przekształćmy wyrażenie z prawej strony

$$\begin{aligned} & \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right)^* \left( \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right) \\ = & \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\ + & \underbrace{\langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle}_0 \end{aligned}$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} & \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \\ = & 2 \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 - 2 \left| \langle \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* \langle \bar{B}\bar{A} \rangle \\ & - \langle \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} \rangle - \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* \langle \bar{B}\bar{A} \rangle + \langle \bar{B}\bar{A} \rangle^* \langle \bar{A}\bar{B} \rangle = 0, \end{aligned}$$

$$\text{gdź} \langle \bar{B}\bar{A} \rangle^* = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle, \langle \bar{B}\bar{A} \rangle = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* \Rightarrow \left| \langle \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 = \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2.$$

# Zasada nieoznaczoności

Wróćmy do nierówności Schwarza

$$\|\bar{A}\psi\|^2\|\bar{B}\psi\|^2 \geqslant \left|(\bar{A}\psi|\bar{B}\psi)\right|^2 =$$

# Zasada nieoznaczoności

Wróćmy do nierówności Schwarza

$$\|\bar{A}\psi\|^2\|\bar{B}\psi\|^2 \geqslant \left|(\bar{A}\psi|\bar{B}\psi)\right|^2 = \left|\langle\bar{A}\bar{B}\rangle\right|^2$$

# Zasada nieoznaczoności

Wróćmy do nierówności Schwarza

$$\|\bar{A}\psi\|^2\|\bar{B}\psi\|^2 \geqslant \left|(\bar{A}\psi|\bar{B}\psi)\right|^2 = \left|\langle\bar{A}\bar{B}\rangle\right|^2$$

=

# Zasada nieoznaczoności

Wróćmy do nierówności Schwarza

$$\begin{aligned} \|\bar{A}\psi\|^2 \|\bar{B}\psi\|^2 &\geqslant \left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2 = \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \right) \geqslant \frac{1}{4} \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \end{aligned}$$

Wróćmy do nierówności Schwarza

$$\begin{aligned} \|\bar{A}\psi\|^2 \|\bar{B}\psi\|^2 &\geqslant \left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2 = \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \right) \geqslant \frac{1}{4} \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\ &= \end{aligned}$$

Wróćmy do nierówności Schwarza

$$\begin{aligned} & \|\bar{A}\psi\|^2 \|\bar{B}\psi\|^2 \geqslant \left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2 = \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \right) \geqslant \frac{1}{4} \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left| \langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle \right|^2 = \end{aligned}$$

# Zasada nieoznaczoności

Wróćmy do nierówności Schwarza

$$\begin{aligned} \|\bar{A}\psi\|^2 \|\bar{B}\psi\|^2 &\geqslant \left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2 = \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \right) \geqslant \frac{1}{4} \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left| \langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} |\langle iC \rangle|^2 = \end{aligned}$$

# Zasada nieoznaczoności

Wróćmy do nierówności Schwarza

$$\begin{aligned} \|\bar{A}\psi\|^2 \|\bar{B}\psi\|^2 &\geqslant \left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2 = \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \right) \geqslant \frac{1}{4} \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left| \langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} |\langle iC \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i \langle C \rangle|^2 = \end{aligned}$$

Wróćmy do nierówności Schwarza

$$\begin{aligned} \|\bar{A}\psi\|^2 \|\bar{B}\psi\|^2 &\geqslant \left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2 = \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \right) \geqslant \frac{1}{4} \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left| \langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} |\langle iC \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i \langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i|^2 |\langle C \rangle|^2 = \end{aligned}$$

# Zasada nieoznaczoności

Wróćmy do nierówności Schwarza

$$\begin{aligned} \|\bar{A}\psi\|^2 \|\bar{B}\psi\|^2 &\geqslant \left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2 = \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \right) \geqslant \frac{1}{4} \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left| \langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} |\langle iC \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i \langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i|^2 |\langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4} |\langle C \rangle|^2. \end{aligned}$$

# Zasada nieoznaczoności

Wróćmy do nierówności Schwarza

$$\begin{aligned} \|\bar{A}\psi\|^2 \|\bar{B}\psi\|^2 &\geqslant \left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2 = \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \right) \geqslant \frac{1}{4} \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left| \langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} |\langle iC \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i \langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i|^2 |\langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4} |\langle C \rangle|^2. \end{aligned}$$

Z lewej strony nierówności występują wyrażenia postaci

$$\|\bar{A}\psi\|^2 =$$

# Zasada nieoznaczoności

Wróćmy do nierówności Schwarza

$$\begin{aligned} \|\bar{A}\psi\|^2 \|\bar{B}\psi\|^2 &\geqslant \left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2 = \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \right) \geqslant \frac{1}{4} \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left| \langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} |\langle iC \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i \langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i|^2 |\langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4} |\langle C \rangle|^2. \end{aligned}$$

Z lewej strony nierówności występują wyrażenia postaci

$$\|\bar{A}\psi\|^2 = (\bar{A}\psi | \bar{A}\psi) =$$

# Zasada nieoznaczoności

Wróćmy do nierówności Schwarza

$$\begin{aligned} \|\bar{A}\psi\|^2 \|\bar{B}\psi\|^2 &\geqslant \left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2 = \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \right) \geqslant \frac{1}{4} \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left| \langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} |\langle iC \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i \langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i|^2 |\langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4} |\langle C \rangle|^2. \end{aligned}$$

Z lewej strony nierówności występują wyrażenia postaci

$$\|\bar{A}\psi\|^2 = (\bar{A}\psi | \bar{A}\psi) = (\psi | \bar{A}^2 \psi) =$$

# Zasada nieoznaczoności

Wróćmy do nierówności Schwarza

$$\begin{aligned}\|\bar{A}\psi\|^2\|\bar{B}\psi\|^2 &\geqslant \left|(\bar{A}\psi|\bar{B}\psi)\right|^2 = \left|\langle\bar{A}\bar{B}\rangle\right|^2 \\&= \frac{1}{4}\left(\left|\langle\bar{A}\bar{B}-\bar{B}\bar{A}\rangle\right|^2 + \left|\langle\bar{A}\bar{B}+\bar{B}\bar{A}\rangle\right|^2\right) \geqslant \frac{1}{4}\left|\langle\bar{A}\bar{B}-\bar{B}\bar{A}\rangle\right|^2 \\&= \frac{1}{4}\left|\langle[\bar{A},\bar{B}]\rangle\right|^2 = \frac{1}{4}|\langle iC\rangle|^2 = \frac{1}{4}|i\langle C\rangle|^2 = \frac{1}{4}|i|^2|\langle C\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\langle C\rangle|^2.\end{aligned}$$

Z lewej strony nierówności występują wyrażenia postaci

$$\|\bar{A}\psi\|^2 = (\bar{A}\psi|\bar{A}\psi) = (\psi|\bar{A}^2\psi) = \langle\bar{A}^2\rangle =$$

# Zasada nieoznaczoności

Wróćmy do nierówności Schwarza

$$\begin{aligned}\|\bar{A}\psi\|^2 \|\bar{B}\psi\|^2 &\geqslant \left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2 = \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 \\&= \frac{1}{4} \left( \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \right) \geqslant \frac{1}{4} \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\&= \frac{1}{4} \left| \langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} |\langle iC \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i \langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i|^2 |\langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4} |\langle C \rangle|^2.\end{aligned}$$

Z lewej strony nierówności występują wyrażenia postaci

$$\|\bar{A}\psi\|^2 = (\bar{A}\psi | \bar{A}\psi) = (\psi | \bar{A}^2 \psi) = \langle \bar{A}^2 \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$$

# Zasada nieoznaczoności

Wróćmy do nierówności Schwarza

$$\begin{aligned} \|\bar{A}\psi\|^2 \|\bar{B}\psi\|^2 &\geqslant \left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2 = \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \right) \geqslant \frac{1}{4} \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left| \langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} |\langle iC \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i \langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i|^2 |\langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4} |\langle C \rangle|^2. \end{aligned}$$

Z lewej strony nierówności występują wyrażenia postaci

$$\|\bar{A}\psi\|^2 = (\bar{A}\psi | \bar{A}\psi) = (\psi | \bar{A}^2 \psi) = \langle \bar{A}^2 \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \equiv (\Delta A)^2,$$

# Zasada nieoznaczoności

Wróćmy do nierówności Schwarza

$$\begin{aligned}\|\bar{A}\psi\|^2 \|\bar{B}\psi\|^2 &\geqslant \left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2 = \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 \\&= \frac{1}{4} \left( \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \right) \geqslant \frac{1}{4} \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\&= \frac{1}{4} \left| \langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} |\langle iC \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i \langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i|^2 |\langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4} |\langle C \rangle|^2.\end{aligned}$$

Z lewej strony nierówności występują wyrażenia postaci

$$\|\bar{A}\psi\|^2 = (\bar{A}\psi | \bar{A}\psi) = (\psi | \bar{A}^2 \psi) = \langle \bar{A}^2 \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \equiv (\Delta A)^2,$$

$$\Rightarrow (\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geqslant \frac{|\langle C \rangle|^2}{4}$$

# Zasada nieoznaczoności

Wróćmy do nierówności Schwarza

$$\begin{aligned}\|\bar{A}\psi\|^2 \|\bar{B}\psi\|^2 &\geqslant \left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2 = \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 \\&= \frac{1}{4} \left( \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \right) \geqslant \frac{1}{4} \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\&= \frac{1}{4} \left| \langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} |\langle iC \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i \langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i|^2 |\langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4} |\langle C \rangle|^2.\end{aligned}$$

Z lewej strony nierówności występują wyrażenia postaci

$$\|\bar{A}\psi\|^2 = (\bar{A}\psi | \bar{A}\psi) = (\psi | \bar{A}^2 \psi) = \langle \bar{A}^2 \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \equiv (\Delta A)^2,$$

$$\Rightarrow (\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geqslant \frac{|\langle C \rangle|^2}{4} \Leftrightarrow \Delta A \Delta B \geqslant \frac{|\langle C \rangle|}{2},$$

# Zasada nieoznaczoności

Wróćmy do nierówności Schwarza

$$\begin{aligned}\|\bar{A}\psi\|^2 \|\bar{B}\psi\|^2 &\geqslant \left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2 = \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 \\&= \frac{1}{4} \left( \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \right) \geqslant \frac{1}{4} \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\&= \frac{1}{4} \left| \langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} |\langle iC \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i \langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i|^2 |\langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4} |\langle C \rangle|^2.\end{aligned}$$

Z lewej strony nierówności występują wyrażenia postaci

$$\|\bar{A}\psi\|^2 = (\bar{A}\psi | \bar{A}\psi) = (\psi | \bar{A}^2 \psi) = \langle \bar{A}^2 \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \equiv (\Delta A)^2,$$

$$\Rightarrow (\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geqslant \frac{|\langle C \rangle|^2}{4} \Leftrightarrow \Delta A \Delta B \geqslant \frac{|\langle C \rangle|}{2},$$

gdyż zarówno  $\Delta A$  jak i  $\Delta B$  są nieujemne.

# Zasada nieoznaczoności

Wróćmy do nierówności Schwarza

$$\begin{aligned}\|\bar{A}\psi\|^2 \|\bar{B}\psi\|^2 &\geqslant \left| (\bar{A}\psi | \bar{B}\psi) \right|^2 = \left| \langle \bar{A}\bar{B} \rangle \right|^2 \\&= \frac{1}{4} \left( \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 + \left| \langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \right) \geqslant \frac{1}{4} \left| \langle \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A} \rangle \right|^2 \\&= \frac{1}{4} \left| \langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} |\langle iC \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i \langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4} |i|^2 |\langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4} |\langle C \rangle|^2.\end{aligned}$$

Z lewej strony nierówności występują wyrażenia postaci

$$\|\bar{A}\psi\|^2 = (\bar{A}\psi | \bar{A}\psi) = (\psi | \bar{A}^2 \psi) = \langle \bar{A}^2 \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \equiv (\Delta A)^2,$$

$$\Rightarrow (\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geqslant \frac{|\langle C \rangle|^2}{4} \Leftrightarrow \Delta A \Delta B \geqslant \frac{|\langle C \rangle|}{2},$$

gdyż zarówno  $\Delta A$  jak i  $\Delta B$  są nieujemne.

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Iloczyn nieoznaczoności  $\Delta A \Delta B$  osiągnie minimum równe  $|\langle C \rangle|/2$  wtedy i tylko wtedy, gdy w nierówności Schwarza wystąpi równość i  $\langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{B}\bar{A} \rangle = 0$ . Wcześniej pokazaliśmy, że  $\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle$ , a więc

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Iloczyn nieoznaczoności  $\Delta A \Delta B$  osiągnie minimum równe  $|\langle C \rangle|/2$  wtedy i tylko wtedy, gdy w nierówności Schwarza wystąpi równość i  $\langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{B}\bar{A} \rangle = 0$ . Wcześniej pokazaliśmy, że  $\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle$ , a więc

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = 0.$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Iloczyn nieoznaczoności  $\Delta A \Delta B$  osiągnie minimum równe  $|\langle C \rangle|/2$  wtedy i tylko wtedy, gdy w nierówności Schwarza wystąpi równość i  $\langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{B}\bar{A} \rangle = 0$ . Wcześniej pokazaliśmy, że  $\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle$ , a więc

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = 0.$$

W nierówności Schwarza występuje równość tylko gdy  $\bar{A}|\psi\rangle$  i  $\bar{B}|\psi\rangle$  są liniowo zależne.

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Iloczyn nieoznaczoności  $\Delta A \Delta B$  osiągnie minimum równe  $|\langle C \rangle|/2$  wtedy i tylko wtedy, gdy w nierówności Schwarza wystąpi równość i  $\langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{B}\bar{A} \rangle = 0$ . Wcześniej pokazaliśmy, że  $\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle$ , a więc

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = 0.$$

W nierówności Schwarza występuje równość tylko gdy  $\bar{A}|\psi\rangle$  i  $\bar{B}|\psi\rangle$  są liniowo zależne.  $\Rightarrow$  Przyjmijmy  $\bar{B}|\psi\rangle = \gamma \bar{A}|\psi\rangle$ ,  
 $\gamma \in \mathbb{C}$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Iloczyn nieoznaczoności  $\Delta A \Delta B$  osiągnie minimum równe  $|\langle C \rangle|/2$  wtedy i tylko wtedy, gdy w nierówności Schwarza wystąpi równość i  $\langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{B}\bar{A} \rangle = 0$ . Wcześniej pokazaliśmy, że  $\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle$ , a więc

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = 0.$$

W nierówności Schwarza występuje równość tylko gdy  $\bar{A}|\psi\rangle$  i  $\bar{B}|\psi\rangle$  są liniowo zależne.  $\Rightarrow$  Przyjmijmy  $\bar{B}|\psi\rangle = \gamma \bar{A}|\psi\rangle$ ,  $\gamma \in \mathbb{C}$  i obliczmy

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle =$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Iloczyn nieoznaczoności  $\Delta A \Delta B$  osiągnie minimum równe  $|\langle C \rangle|/2$  wtedy i tylko wtedy, gdy w nierówności Schwarza wystąpi równość i  $\langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{B}\bar{A} \rangle = 0$ . Wcześniej pokazaliśmy, że  $\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle$ , a więc

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = 0.$$

W nierówności Schwarza występuje równość tylko gdy  $\bar{A}|\psi\rangle$  i  $\bar{B}|\psi\rangle$  są liniowo zależne.  $\Rightarrow$  Przyjmijmy  $\bar{B}|\psi\rangle = \gamma \bar{A}|\psi\rangle$ ,  $\gamma \in \mathbb{C}$  i obliczmy

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle = \langle \psi | \bar{A}\bar{B} | \psi \rangle =$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Iloczyn nieoznaczoności  $\Delta A \Delta B$  osiągnie minimum równe  $|\langle C \rangle|/2$  wtedy i tylko wtedy, gdy w nierówności Schwarza wystąpi równość i  $\langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{B}\bar{A} \rangle = 0$ . Wcześniej pokazaliśmy, że  $\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle$ , a więc

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = 0.$$

W nierówności Schwarza występuje równość tylko gdy  $\bar{A}|\psi\rangle$  i  $\bar{B}|\psi\rangle$  są liniowo zależne.  $\Rightarrow$  Przyjmijmy  $\bar{B}|\psi\rangle = \gamma \bar{A}|\psi\rangle$ ,  $\gamma \in \mathbb{C}$  i obliczmy

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle = \langle \psi | \bar{A}\bar{B} | \psi \rangle = \langle \psi | \bar{A}\gamma\bar{A} | \psi \rangle =$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Iloczyn nieoznaczoności  $\Delta A \Delta B$  osiągnie minimum równe  $|\langle C \rangle|/2$  wtedy i tylko wtedy, gdy w nierówności Schwarza wystąpi równość i  $\langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{B}\bar{A} \rangle = 0$ . Wcześniej pokazaliśmy, że  $\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle$ , a więc

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = 0.$$

W nierówności Schwarza występuje równość tylko gdy  $\bar{A}|\psi\rangle$  i  $\bar{B}|\psi\rangle$  są liniowo zależne.  $\Rightarrow$  Przyjmijmy  $\bar{B}|\psi\rangle = \gamma \bar{A}|\psi\rangle$ ,  $\gamma \in \mathbb{C}$  i obliczmy

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle = \langle \psi | \bar{A}\bar{B} | \psi \rangle = \langle \psi | \bar{A}\gamma\bar{A} | \psi \rangle = \gamma \langle \psi | \bar{A}\bar{A} | \psi \rangle =$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Iloczyn nieoznaczoności  $\Delta A \Delta B$  osiągnie minimum równe  $|\langle C \rangle|/2$  wtedy i tylko wtedy, gdy w nierówności Schwarza wystąpi równość i  $\langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{B}\bar{A} \rangle = 0$ . Wcześniej pokazaliśmy, że  $\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle$ , a więc

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = 0.$$

W nierówności Schwarza występuje równość tylko gdy  $\bar{A}|\psi\rangle$  i  $\bar{B}|\psi\rangle$  są liniowo zależne.  $\Rightarrow$  Przyjmijmy  $\bar{B}|\psi\rangle = \gamma \bar{A}|\psi\rangle$ ,  $\gamma \in \mathbb{C}$  i obliczmy

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle = \langle \psi | \bar{A}\bar{B} | \psi \rangle = \langle \psi | \bar{A}\gamma\bar{A} | \psi \rangle = \gamma \langle \psi | \bar{A}\bar{A} | \psi \rangle = \gamma \|\bar{A}\psi\|^2.$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Iloczyn nieoznaczoności  $\Delta A \Delta B$  osiągnie minimum równe  $|\langle C \rangle|/2$  wtedy i tylko wtedy, gdy w nierówności Schwarza wystąpi równość i  $\langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{B}\bar{A} \rangle = 0$ . Wcześniej pokazaliśmy, że  $\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle$ , a więc

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = 0.$$

W nierówności Schwarza występuje równość tylko gdy  $\bar{A}|\psi\rangle$  i  $\bar{B}|\psi\rangle$  są liniowo zależne.  $\Rightarrow$  Przyjmijmy  $\bar{B}|\psi\rangle = \gamma \bar{A}|\psi\rangle$ ,  $\gamma \in \mathbb{C}$  i obliczmy

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle = \langle \psi | \bar{A}\bar{B} | \psi \rangle = \langle \psi | \bar{A}\gamma\bar{A} | \psi \rangle = \gamma \langle \psi | \bar{A}\bar{A} | \psi \rangle = \gamma \|\bar{A}\psi\|^2.$$

$\Rightarrow$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Iloczyn nieoznaczoności  $\Delta A \Delta B$  osiągnie minimum równe  $|\langle C \rangle|/2$  wtedy i tylko wtedy, gdy w nierówności Schwarza wystąpi równość i  $\langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{B}\bar{A} \rangle = 0$ . Wcześniej pokazaliśmy, że  $\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle$ , a więc

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = 0.$$

W nierówności Schwarza występuje równość tylko gdy  $\bar{A}|\psi\rangle$  i  $\bar{B}|\psi\rangle$  są liniowo zależne.  $\Rightarrow$  Przyjmijmy  $\bar{B}|\psi\rangle = \gamma \bar{A}|\psi\rangle$ ,  $\gamma \in \mathbb{C}$  i obliczmy

$$\begin{aligned} \langle \bar{A}\bar{B} \rangle &= \langle \psi | \bar{A}\bar{B} | \psi \rangle = \langle \psi | \bar{A}\gamma\bar{A} | \psi \rangle = \gamma \langle \psi | \bar{A}\bar{A} | \psi \rangle = \gamma \|\bar{A}\psi\|^2. \\ \Rightarrow (\gamma + \gamma^*) \|\bar{A}\psi\|^2 &= 0 \end{aligned}$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Iloczyn nieoznaczoności  $\Delta A \Delta B$  osiągnie minimum równe  $|\langle C \rangle|/2$  wtedy i tylko wtedy, gdy w nierówności Schwarza wystąpi równość i  $\langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{B}\bar{A} \rangle = 0$ . Wcześniej pokazaliśmy, że  $\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle$ , a więc

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = 0.$$

W nierówności Schwarza występuje równość tylko gdy  $\bar{A}|\psi\rangle$  i  $\bar{B}|\psi\rangle$  są liniowo zależne.  $\Rightarrow$  Przyjmijmy  $\bar{B}|\psi\rangle = \gamma \bar{A}|\psi\rangle$ ,  $\gamma \in \mathbb{C}$  i obliczmy

$$\begin{aligned} \langle \bar{A}\bar{B} \rangle &= \langle \psi | \bar{A}\bar{B} | \psi \rangle = \langle \psi | \bar{A}\gamma\bar{A} | \psi \rangle = \gamma \langle \psi | \bar{A}\bar{A} | \psi \rangle = \gamma \|\bar{A}\psi\|^2. \\ \Rightarrow (\gamma + \gamma^*) \|\bar{A}\psi\|^2 &= 0 \Leftrightarrow \gamma^* = -\gamma. \end{aligned}$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Iloczyn nieoznaczoności  $\Delta A \Delta B$  osiągnie minimum równe  $|\langle C \rangle|/2$  wtedy i tylko wtedy, gdy w nierówności Schwarza wystąpi równość i  $\langle \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A} \rangle = \langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{B}\bar{A} \rangle = 0$ . Wcześniej pokazaliśmy, że  $\langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = \langle \bar{B}\bar{A} \rangle$ , a więc

$$\langle \bar{A}\bar{B} \rangle + \langle \bar{A}\bar{B} \rangle^* = 0.$$

W nierówności Schwarza występuje równość tylko gdy  $\bar{A}|\psi\rangle$  i  $\bar{B}|\psi\rangle$  są liniowo zależne.  $\Rightarrow$  Przyjmijmy  $\bar{B}|\psi\rangle = \gamma \bar{A}|\psi\rangle$ ,  $\gamma \in \mathbb{C}$  i obliczmy

$$\begin{aligned} \langle \bar{A}\bar{B} \rangle &= \langle \psi | \bar{A}\bar{B} | \psi \rangle = \langle \psi | \bar{A}\gamma\bar{A} | \psi \rangle = \gamma \langle \psi | \bar{A}\bar{A} | \psi \rangle = \gamma \|\bar{A}\psi\|^2. \\ \Rightarrow (\gamma + \gamma^*) \|\bar{A}\psi\|^2 &= 0 \Leftrightarrow \gamma^* = -\gamma. \end{aligned}$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Widzimy, że gamma musi być czysto urojone

$$\gamma = i\bar{\gamma}, \quad \bar{\gamma} \in \mathbb{R}.$$

Przeanalizujmy co to oznacza na przykładzie relacji nieoznaczoności pomiędzy pędem i położeniem

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Widzimy, że gamma musi być czysto urojone

$$\gamma = i\bar{\gamma}, \quad \bar{\gamma} \in \mathbb{R}.$$

Przeanalizujmy co to oznacza na przykładzie relacji nieoznaczoności pomiędzy pędem i położeniem

$$[x, p_x] = i\hbar$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Widzimy, że  $\gamma$  musi być czysto urojone

$$\gamma = i\bar{\gamma}, \quad \bar{\gamma} \in \mathbb{R}.$$

Przeanalizujmy co to oznacza na przykładzie relacji nieoznaczoności pomiędzy pędem i położeniem

$$[x, p_x] = i\hbar \Rightarrow \Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Widzimy, że gamma musi być czysto urojone

$$\gamma = i\bar{\gamma}, \quad \bar{\gamma} \in \mathbb{R}.$$

Przeanalizujmy co to oznacza na przykładzie relacji nieoznaczoności pomiędzy pędem i położeniem

$$[x, p_x] = i\hbar \Rightarrow \Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Przyjmijmy

$$\bar{A} \equiv x - \langle x \rangle \quad \text{i} \quad \bar{B} \equiv p_x - \langle p_x \rangle$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Widzimy, że gamma musi być czysto urojone

$$\gamma = i\bar{\gamma}, \quad \bar{\gamma} \in \mathbb{R}.$$

Przeanalizujmy co to oznacza na przykładzie relacji nieoznaczoności pomiędzy pędem i położeniem

$$[x, p_x] = i\hbar \Rightarrow \Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Przyjmijmy

$$\bar{A} \equiv x - \langle x \rangle \quad \text{ i } \quad \bar{B} \equiv p_x - \langle p_x \rangle$$

i rozważmy związek  $\bar{A}|\psi\rangle = i\beta\bar{B}|\psi\rangle$ , gdzie  $\beta \in \mathbb{R}$  jest dowolną liczbą rzeczywistą.

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Widzimy, że gamma musi być czysto urojone

$$\gamma = i\bar{\gamma}, \quad \bar{\gamma} \in \mathbb{R}.$$

Przeanalizujmy co to oznacza na przykładzie relacji nieoznaczoności pomiędzy pędem i położeniem

$$[x, p_x] = i\hbar \Rightarrow \Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Przyjmijmy

$$\bar{A} \equiv x - \langle x \rangle \quad \text{ i } \quad \bar{B} \equiv p_x - \langle p_x \rangle$$

i rozważmy związek  $\bar{A}|\psi\rangle = i\beta\bar{B}|\psi\rangle$ , gdzie  $\beta \in \mathbb{R}$  jest dowolną liczbą rzeczywistą.

$$(x - \langle x \rangle) \psi(x) = i\beta \left( -i\hbar \frac{d}{dx} - \langle p_x \rangle \right) \psi(x).$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Widzimy, że gamma musi być czysto urojone

$$\gamma = i\bar{\gamma}, \quad \bar{\gamma} \in \mathbb{R}.$$

Przeanalizujmy co to oznacza na przykładzie relacji nieoznaczoności pomiędzy pędem i położeniem

$$[x, p_x] = i\hbar \Rightarrow \Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Przyjmijmy

$$\bar{A} \equiv x - \langle x \rangle \quad \text{ i } \quad \bar{B} \equiv p_x - \langle p_x \rangle$$

i rozważmy związek  $\bar{A}|\psi\rangle = i\beta\bar{B}|\psi\rangle$ , gdzie  $\beta \in \mathbb{R}$  jest dowolną liczbą rzeczywistą.

$$(x - \langle x \rangle) \psi(x) = i\beta \left( -i\hbar \frac{d}{dx} - \langle p_x \rangle \right) \psi(x).$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Postarajmy się rozdzielić zmienne

$$\beta \hbar \frac{d\psi}{dx} = (x - \langle x \rangle + i\beta \langle p_x \rangle) \psi,$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Postarajmy się rozdzielić zmienne

$$\beta \hbar \frac{d\psi}{dx} = (x - \langle x \rangle + i\beta \langle p_x \rangle) \psi,$$
$$\frac{d\psi}{\psi}$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Postarajmy się rozdzielić zmienne

$$\beta \hbar \frac{d\psi}{dx} = (x - \langle x \rangle + i\beta \langle p_x \rangle) \psi,$$
$$\frac{d\psi}{\psi} =$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Postarajmy się rozdzielić zmienne

$$\begin{aligned}\beta\hbar\frac{d\psi}{dx} &= (x - \langle x \rangle + i\beta\langle p_x \rangle)\psi, \\ \frac{d\psi}{\psi} &= \left[ \frac{1}{\beta\hbar}(x - \langle x \rangle) + \frac{i}{\hbar}\langle p_x \rangle \right] dx.\end{aligned}$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Postarajmy się rozdzielić zmienne

$$\begin{aligned}\beta\hbar\frac{d\psi}{dx} &= (x - \langle x \rangle + i\beta \langle p_x \rangle) \psi, \\ \frac{d\psi}{\psi} &= \left[ \frac{1}{\beta\hbar} (x - \langle x \rangle) + \frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle \right] dx.\end{aligned}$$

Wykonajmy całkowanie

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Postarajmy się rozdzielić zmienne

$$\begin{aligned}\beta\hbar\frac{d\psi}{dx} &= (x - \langle x \rangle + i\beta \langle p_x \rangle) \psi, \\ \frac{d\psi}{\psi} &= \left[ \frac{1}{\beta\hbar} (x - \langle x \rangle) + \frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle \right] dx.\end{aligned}$$

Wykonajmy całkowanie

$$\ln \psi = \frac{1}{\hbar\beta} \left( \frac{1}{2}x^2 - \langle x \rangle x \right) + \frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle x + \underbrace{\ln C + \frac{1}{2\hbar\beta} \langle x \rangle^2}_{\text{dowolna stała}}$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Postarajmy się rozdzielić zmienne

$$\begin{aligned}\beta\hbar\frac{d\psi}{dx} &= (x - \langle x \rangle + i\beta \langle p_x \rangle) \psi, \\ \frac{d\psi}{\psi} &= \left[ \frac{1}{\beta\hbar} (x - \langle x \rangle) + \frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle \right] dx.\end{aligned}$$

Wykonajmy całkowanie

$$\ln \psi = \frac{1}{\hbar\beta} \left( \frac{1}{2}x^2 - \langle x \rangle x \right) + \frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle x + \underbrace{\ln C + \frac{1}{2\hbar\beta} \langle x \rangle^2}_{\text{dowolna stała}}$$

$$\psi(x)$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Postarajmy się rozdzielić zmienne

$$\begin{aligned}\beta\hbar \frac{d\psi}{dx} &= (x - \langle x \rangle + i\beta \langle p_x \rangle) \psi, \\ \frac{d\psi}{\psi} &= \left[ \frac{1}{\beta\hbar} (x - \langle x \rangle) + \frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle \right] dx.\end{aligned}$$

Wykonajmy całkowanie

$$\ln \psi = \frac{1}{\hbar\beta} \left( \frac{1}{2}x^2 - \langle x \rangle x \right) + \frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle x + \underbrace{\ln C + \frac{1}{2\hbar\beta} \langle x \rangle^2}_{\text{dowolna stała}}$$

$$\psi(x) =$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Postaramy się rozdzielić zmienne

$$\begin{aligned}\beta\hbar \frac{d\psi}{dx} &= (x - \langle x \rangle + i\beta \langle p_x \rangle) \psi, \\ \frac{d\psi}{\psi} &= \left[ \frac{1}{\beta\hbar} (x - \langle x \rangle) + \frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle \right] dx.\end{aligned}$$

Wykonajmy całkowanie

$$\ln \psi = \frac{1}{\hbar\beta} \left( \frac{1}{2}x^2 - \langle x \rangle x \right) + \frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle x + \underbrace{\ln C + \frac{1}{2\hbar\beta} \langle x \rangle^2}_{\text{dowolna stała}}$$

$$\psi(x) = C \exp \left[ \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\hbar\beta} + \frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle x \right]$$

# Minimum iloczynu nieoznaczoności

Postarajmy się rozdzielić zmienne

$$\begin{aligned}\beta\hbar \frac{d\psi}{dx} &= (x - \langle x \rangle + i\beta \langle p_x \rangle) \psi, \\ \frac{d\psi}{\psi} &= \left[ \frac{1}{\beta\hbar} (x - \langle x \rangle) + \frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle \right] dx.\end{aligned}$$

Wykonajmy całkowanie

$$\ln \psi = \frac{1}{\hbar\beta} \left( \frac{1}{2}x^2 - \langle x \rangle x \right) + \frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle x + \underbrace{\ln C + \frac{1}{2\hbar\beta} \langle x \rangle^2}_{\text{dowolna stała}}$$

$$\psi(x) = C \exp \left[ \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\hbar\beta} + \frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle x \right]$$

**Zadanie.** Korzystając z warunku normalizacji funkcji falowej

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

wyznaczyć stałą  $C$ , a korzystając z definicji nieoznaczoności położenia

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 |\psi(x)|^2 dx$$

wyznaczyć stałą  $\beta$ .

**Zadanie.** Korzystając z warunku normalizacji funkcji falowej

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

wyznaczyć stałą  $C$ , a korzystając z definicji nieoznaczoności położenia

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 |\psi(x)|^2 dx$$

wyznaczyć stałą  $\beta$ .

*Wskazówka.* Jaki musi być znak stałej  $\beta$  aby istniała całka normalizacyjna?

**Zadanie.** Korzystając z warunku normalizacji funkcji falowej

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

wyznaczyć stałą  $C$ , a korzystając z definicji nieoznaczoności położenia

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 |\psi(x)|^2 dx$$

wyznaczyć stałą  $\beta$ .

*Wskazówka.* Jaki musi być znak stałej  $\beta$  aby istniała całka normalizacyjna?

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left[2\pi (\Delta x)^2\right]^{-\frac{1}{4}} \exp \left[ -\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{4 (\Delta x)^2} + \frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle x \right] \\ &= \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left[2\pi (\Delta x)^2\right]^{-\frac{1}{4}} \exp \left[ -\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{4 (\Delta x)^2} + \frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle x \right] \\ &= \left[2\pi (\Delta x)^2\right]^{-\frac{1}{4}} \exp \left[ -\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{4 (\Delta x)^2} \right] \exp (ik_x x),\end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left[2\pi (\Delta x)^2\right]^{-\frac{1}{4}} \exp \left[ -\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{4 (\Delta x)^2} + \frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle x \right] \\ &= \left[2\pi (\Delta x)^2\right]^{-\frac{1}{4}} \exp \left[ -\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{4 (\Delta x)^2} \right] \exp (ik_x x),\end{aligned}$$

gdzie przyjęliśmy  $\langle p_x \rangle = \hbar k_x$ .

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left[2\pi (\Delta x)^2\right]^{-\frac{1}{4}} \exp \left[ -\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{4 (\Delta x)^2} + \frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle x \right] \\ &= \left[2\pi (\Delta x)^2\right]^{-\frac{1}{4}} \exp \left[ -\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{4 (\Delta x)^2} \right] \exp (ik_x x),\end{aligned}$$

gdzie przyjęliśmy  $\langle p_x \rangle = \hbar k_x$ .

Funkcja falowa, dla której iloczyn nieoznaczoności pędu i położenia osiąga minimum ma postać pakietu gaussowskiego.

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left[2\pi (\Delta x)^2\right]^{-\frac{1}{4}} \exp \left[ -\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{4 (\Delta x)^2} + \frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle x \right] \\ &= \left[2\pi (\Delta x)^2\right]^{-\frac{1}{4}} \exp \left[ -\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{4 (\Delta x)^2} \right] \exp (ik_x x),\end{aligned}$$

gdzie przyjęliśmy  $\langle p_x \rangle = \hbar k_x$ .

Funkcja falowa, dla której iloczyn nieoznaczoności pędu i położenia osiąga minimum ma postać pakietu gaussowskiego.

# Zasada nieoznaczoności – podsumowanie

Pokazaliśmy, że jeżeli dwie zmienne dynamiczne są reprezentowane przez liniowe operatory hermitowskie  $A$  i  $B$  spełniające relację komutacji

$$[A, B] = i\hbar,$$

to **nie są one jednocześnie mierzalne**, a ich nieoznaczoności spełniają relację Heisenberga

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{\hbar}{2}.$$

To oznacza, że jeśli chcielibyśmy zmierzyć dokładnie zmienną reprezentowaną przez operator  $A$  ( $\Delta A = 0$ ), to zmienna reprezentowana przez operator  $B$  pozostanie

# Zasada nieoznaczoności – podsumowanie

Pokazaliśmy, że jeżeli dwie zmienne dynamiczne są reprezentowane przez liniowe operatory hermitowskie  $A$  i  $B$  spełniające relację komutacji

$$[A, B] = i\hbar,$$

to **nie są one jednocześnie mierzalne**, a ich nieoznaczoności spełniają relację Heisenberga

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{\hbar}{2}.$$

To oznacza, że jeśli chcielibyśmy zmierzyć dokładnie zmienną reprezentowaną przez operator  $A$  ( $\Delta A = 0$ ), to zmienna reprezentowana przez operator  $B$  pozostanie

# Zasada nieoznaczoności – podsumowanie

zupełnie nieokreślona ( $\Delta B = \infty$ ).

Zauważmy, że zasada nieoznaczoności nie nakłada żadnych ograniczeń na jednoczesny pomiar zmiennych dynamicznych reprezentowanych przez liniowe operatory hermitowskie  $A$  i  $B$  spełniające relację komutacji

$$[A, B] = 0 \quad \Rightarrow \quad AB = BA,$$

zupełnie nieokreślona ( $\Delta B = \infty$ ).

Zauważmy, że zasada nieoznaczoności nie nakłada żadnych ograniczeń na jednoczesny pomiar zmiennych dynamicznych reprezentowanych przez liniowe operatory hermitowskie  $A$  i  $B$  spełniające relację komutacji

$$[A, B] = 0 \quad \Rightarrow \quad AB = BA,$$

które zgodnie z postulatami interpretacyjnymi są jednocześnie mierzalne.

zupełnie nieokreślona ( $\Delta B = \infty$ ).

Zauważmy, że zasada nieoznaczoności nie nakłada żadnych ograniczeń na jednoczesny pomiar zmiennych dynamicznych reprezentowanych przez liniowe operatory hermitowskie  $A$  i  $B$  spełniające relację komutacji

$$[A, B] = 0 \quad \Rightarrow \quad AB = BA,$$

które zgodnie z postulatami interpretacyjnymi są jednocześnie mierzalne.