

Funkcje własne operatorów pędu i energii

Wykład 7

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

Równanie własne operatora pędu

Rozważmy równanie własne operatora pędu w reprezentacji położeniowej

$$-i\hbar\vec{\nabla}u_{\vec{p}}(\vec{r}) = \vec{p}u_{\vec{p}}(\vec{r}).$$

Zwróćmy uwagę, że $\vec{p} = [p_x, p_y, p_z]$ po prawej stronie równania jest wektorem, którego składowe są liczbami rzeczywistymi, $p_x, p_y, p_z \in \mathbb{R}$.

Rozważmy równanie własne operatora pędu w reprezentacji położeniowej

$$-i\hbar\vec{\nabla}u_{\vec{p}}(\vec{r}) = \vec{p}u_{\vec{p}}(\vec{r}).$$

Zwróćmy uwagę, że $\vec{p} = [p_x, p_y, p_z]$ po prawej stronie równania jest wektorem, którego składowe są liczbami rzeczywistymi, $p_x, p_y, p_z \in \mathbb{R}$.

Równanie własne operatora pędu

Po rozpisaniu na składowe otrzymamy 3 równania skalarne:

$$\begin{aligned}-i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial x} &= p_x u_{\vec{p}}(\vec{r}), \\ -i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial y} &= p_y u_{\vec{p}}(\vec{r}), \\ -i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial z} &= p_z u_{\vec{p}}(\vec{r}).\end{aligned}$$

Ten układ równań możemy scałkować rozseparowując zmienne.

Równanie własne operatora pędu

Po rozpisaniu na składowe otrzymamy 3 równania skalarne:

$$\begin{aligned}-i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial x} &= p_x u_{\vec{p}}(\vec{r}), \\ -i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial y} &= p_y u_{\vec{p}}(\vec{r}), \\ -i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial z} &= p_z u_{\vec{p}}(\vec{r}).\end{aligned}$$

Ten układ równań możemy scałkować rozseparowując zmienne.

Podstawmy

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) = u_1(x)u_2(y)u_3(z)$$

do pierwszego równania, wówczas otrzymamy

Równanie własne operatora pędu

Po rozpisaniu na składowe otrzymamy 3 równania skalarne:

$$\begin{aligned}-i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial x} &= p_x u_{\vec{p}}(\vec{r}), \\ -i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial y} &= p_y u_{\vec{p}}(\vec{r}), \\ -i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial z} &= p_z u_{\vec{p}}(\vec{r}).\end{aligned}$$

Ten układ równań możemy scałkować rozseparowując zmienne.
Podstawmy

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) = u_1(x)u_2(y)u_3(z)$$

do pierwszego równania, wówczas otrzymamy

Równanie własne operatora pędu

$$-i\hbar \frac{du_1(x)}{dx} u_2(y)u_3(z) = p_x u_1(x)u_2(y)u_3(z).$$

Ponieważ funkcje $u_2(y)u_3(z)$ są dowolne, to współczynniki przy nich muszą być równe:

$$-i\hbar \frac{du_1(x)}{dx} = p_x u_1(x).$$

Równanie własne operatora pędu

$$-i\hbar \frac{du_1(x)}{dx} u_2(y)u_3(z) = p_x u_1(x)u_2(y)u_3(z).$$

Ponieważ funkcje $u_2(y)u_3(z)$ są dowolne, to współczynniki przy nich muszą być równe:

$$-i\hbar \frac{du_1(x)}{dx} = p_x u_1(x).$$

Podzielmy obie strony tego równania przez $u_1(x)$ i pomnóżmy przez dx , wówczas otrzymamy równanie o zmiennych rozdzielonych:

$$\frac{du_1}{u_1} = \frac{i}{\hbar} p_x dx.$$

Równanie własne operatora pędu

$$-i\hbar \frac{du_1(x)}{dx} u_2(y)u_3(z) = p_x u_1(x)u_2(y)u_3(z).$$

Ponieważ funkcje $u_2(y)u_3(z)$ są dowolne, to współczynniki przy nich muszą być równe:

$$-i\hbar \frac{du_1(x)}{dx} = p_x u_1(x).$$

Podzielmy obie strony tego równania przez $u_1(x)$ i pomnóżmy przez dx , wówczas otrzymamy równanie o zmiennych rozdzielonych:

$$\frac{du_1}{u_1} = \frac{i}{\hbar} p_x dx.$$

Równanie własne operatora pędu

Całkując obustronnie

$$\int \frac{du_1}{u_1} = \int \frac{i}{\hbar} p_x dx$$

otrzymamy

$$\ln u_1 = \frac{i}{\hbar} p_x \int dx =$$

Równanie własne operatora pędu

Całkując obustronnie

$$\int \frac{du_1}{u_1} = \int \frac{i}{\hbar} p_x dx$$

otrzymamy

$$\ln u_1 = \frac{i}{\hbar} p_x \int dx = \frac{i}{\hbar} p_x x + \ln C_1,$$

Równanie własne operatora pędu

Całkując obustronnie

$$\int \frac{du_1}{u_1} = \int \frac{i}{\hbar} p_x dx$$

otrzymamy

$$\ln u_1 = \frac{i}{\hbar} p_x \int dx = \frac{i}{\hbar} p_x x + \ln C_1,$$

gdzie stałą dowolną oznaczyliśmy $\ln C_1$.

Równanie własne operatora pędu

Całkując obustronnie

$$\int \frac{du_1}{u_1} = \int \frac{i}{\hbar} p_x dx$$

otrzymamy

$$\ln u_1 = \frac{i}{\hbar} p_x \int dx = \frac{i}{\hbar} p_x x + \ln C_1,$$

gdzie stałą dowolną oznaczyliśmy $\ln C_1$. Wykorzystując tę równość możemy napisać

$$e^{\ln u_1} =$$

Równanie własne operatora pędu

Całkując obustronnie

$$\int \frac{du_1}{u_1} = \int \frac{i}{\hbar} p_x dx$$

otrzymamy

$$\ln u_1 = \frac{i}{\hbar} p_x \int dx = \frac{i}{\hbar} p_x x + \ln C_1,$$

gdzie stałą dowolną oznaczyliśmy $\ln C_1$. Wykorzystując tę równość możemy napisać

$$e^{\ln u_1} = e^{\ln C_1 + \frac{i}{\hbar} p_x x} =$$

Równanie własne operatora pędu

Całkując obustronnie

$$\int \frac{du_1}{u_1} = \int \frac{i}{\hbar} p_x dx$$

otrzymamy

$$\ln u_1 = \frac{i}{\hbar} p_x \int dx = \frac{i}{\hbar} p_x x + \ln C_1,$$

gdzie stałą dowolną oznaczyliśmy $\ln C_1$. Wykorzystując tę równość możemy napisać

$$e^{\ln u_1} = e^{\ln C_1 + \frac{i}{\hbar} p_x x} = e^{\ln C_1} e^{\frac{i}{\hbar} p_x x},$$

Równanie własne operatora pędu

Całkując obustronnie

$$\int \frac{du_1}{u_1} = \int \frac{i}{\hbar} p_x dx$$

otrzymamy

$$\ln u_1 = \frac{i}{\hbar} p_x \int dx = \frac{i}{\hbar} p_x x + \ln C_1,$$

gdzie stałą dowolną oznaczyliśmy $\ln C_1$. Wykorzystując tę równość możemy napisać

$$e^{\ln u_1} = e^{\ln C_1 + \frac{i}{\hbar} p_x x} = e^{\ln C_1} e^{\frac{i}{\hbar} p_x x},$$

Równanie własne operatora pędu

co daje

$$u_1(x) = C_1 e^{\frac{i}{\hbar} p_x x}.$$

Podobnie, podstawiając

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) = u_1(x)u_2(y)u_3(z)$$

Równanie własne operatora pędu

co daje

$$u_1(x) = C_1 e^{\frac{i}{\hbar} p_x x}.$$

Podobnie, podstawiając

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) = u_1(x)u_2(y)u_3(z)$$

do równań

$$-i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial y} = p_y u_{\vec{p}}(\vec{r}),$$

$$-i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial z} = p_z u_{\vec{p}}(\vec{r})$$

Równanie własne operatora pędu

co daje

$$u_1(x) = C_1 e^{\frac{i}{\hbar} p_x x}.$$

Podobnie, podstawiając

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) = u_1(x)u_2(y)u_3(z)$$

do równań

$$-i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial y} = p_y u_{\vec{p}}(\vec{r}),$$

$$-i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial z} = p_z u_{\vec{p}}(\vec{r})$$

i postępując analogicznie

Równanie własne operatora pędu

co daje

$$u_1(x) = C_1 e^{\frac{i}{\hbar} p_x x}.$$

Podobnie, podstawiając

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) = u_1(x)u_2(y)u_3(z)$$

do równań

$$-i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial y} = p_y u_{\vec{p}}(\vec{r}),$$

$$-i\hbar \frac{\partial u_{\vec{p}}(\vec{r})}{\partial z} = p_z u_{\vec{p}}(\vec{r})$$

i postępując analogicznie

otrzymamy

$$u_2(y) = C_2 e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} \quad \text{i} \quad u_3(z) = C_3 e^{\frac{i}{\hbar} p_z z},$$

otrzymamy

$$u_2(y) = C_2 e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} \quad \text{ i } \quad u_3(z) = C_3 e^{\frac{i}{\hbar} p_z z},$$

co ostatecznie daje funkcję własną pędu w formie:

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) =$$

otrzymamy

$$u_2(y) = C_2 e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} \quad \text{i} \quad u_3(z) = C_3 e^{\frac{i}{\hbar} p_z z},$$

co ostatecznie daje funkcję własną pędu w formie:

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) = u_1(x) u_2(y) u_3(z) =$$

otrzymamy

$$u_2(y) = C_2 e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} \quad \text{ i } \quad u_3(z) = C_3 e^{\frac{i}{\hbar} p_z z},$$

co ostatecznie daje funkcję własną pędu w formie:

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) = u_1(x)u_2(y)u_3(z) = C_1 e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} C_2 e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} C_3 e^{\frac{i}{\hbar} p_z z}$$

otrzymamy

$$u_2(y) = C_2 e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} \quad \text{ i } \quad u_3(z) = C_3 e^{\frac{i}{\hbar} p_z z},$$

co ostatecznie daje funkcję własną pędu w formie:

$$\begin{aligned} u_{\vec{p}}(\vec{r}) &= u_1(x) u_2(y) u_3(z) = C_1 e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} C_2 e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} C_3 e^{\frac{i}{\hbar} p_z z} \\ &= \end{aligned}$$

otrzymamy

$$u_2(y) = C_2 e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} \quad \text{ i } \quad u_3(z) = C_3 e^{\frac{i}{\hbar} p_z z},$$

co ostatecznie daje funkcję własną pędu w formie:

$$\begin{aligned} u_{\vec{p}}(\vec{r}) &= u_1(x) u_2(y) u_3(z) = C_1 e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} C_2 e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} C_3 e^{\frac{i}{\hbar} p_z z} \\ &= C_1 C_2 C_3 e^{\frac{i}{\hbar} (p_x x + p_y y + p_z z)} = \end{aligned}$$

otrzymamy

$$u_2(y) = C_2 e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} \quad \text{ i } \quad u_3(z) = C_3 e^{\frac{i}{\hbar} p_z z},$$

co ostatecznie daje funkcję własną pędu w formie:

$$\begin{aligned} u_{\vec{p}}(\vec{r}) &= u_1(x)u_2(y)u_3(z) = C_1 e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} C_2 e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} C_3 e^{\frac{i}{\hbar} p_z z} \\ &= C_1 C_2 C_3 e^{\frac{i}{\hbar} (p_x x + p_y y + p_z z)} = C e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}}, \end{aligned}$$

otrzymamy

$$u_2(y) = C_2 e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} \quad \text{ i } \quad u_3(z) = C_3 e^{\frac{i}{\hbar} p_z z},$$

co ostatecznie daje funkcję własną pędu w formie:

$$\begin{aligned} u_{\vec{p}}(\vec{r}) &= u_1(x)u_2(y)u_3(z) = C_1 e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} C_2 e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} C_3 e^{\frac{i}{\hbar} p_z z} \\ &= C_1 C_2 C_3 e^{\frac{i}{\hbar} (p_x x + p_y y + p_z z)} = C e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}}, \end{aligned}$$

gdzie stałe dowolne C_1 , C_2 i C_3 połączyliśmy w jedną stałą C .

Funkcje własne operatora pędu

otrzymamy

$$u_2(y) = C_2 e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} \quad \text{ i } \quad u_3(z) = C_3 e^{\frac{i}{\hbar} p_z z},$$

co ostatecznie daje funkcję własną pędu w formie:

$$\begin{aligned} u_{\vec{p}}(\vec{r}) &= u_1(x)u_2(y)u_3(z) = C_1 e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} C_2 e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} C_3 e^{\frac{i}{\hbar} p_z z} \\ &= C_1 C_2 C_3 e^{\frac{i}{\hbar} (p_x x + p_y y + p_z z)} = C e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}}, \end{aligned}$$

gdzie stałe dowolne C_1 , C_2 i C_3 połączyliśmy w jedną stałą C .

Otrzymaliśmy funkcje własne pędu postaci

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) = C e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}}.$$

Funkcje własne operatora pędu

otrzymamy

$$u_2(y) = C_2 e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} \quad \text{ i } \quad u_3(z) = C_3 e^{\frac{i}{\hbar} p_z z},$$

co ostatecznie daje funkcję własną pędu w formie:

$$\begin{aligned} u_{\vec{p}}(\vec{r}) &= u_1(x)u_2(y)u_3(z) = C_1 e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} C_2 e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} C_3 e^{\frac{i}{\hbar} p_z z} \\ &= C_1 C_2 C_3 e^{\frac{i}{\hbar} (p_x x + p_y y + p_z z)} = C e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}}, \end{aligned}$$

gdzie stałe dowolne C_1 , C_2 i C_3 połączyliśmy w jedną stałą C .
Otrzymaliśmy funkcje własne pędu postaci

$$u_{\vec{p}}(\vec{r}) = C e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}}.$$

Funkcje własne operatora pędu

Po skorzystaniu ze związku de Broglie'go

$$\vec{p} = \hbar \vec{k},$$

funkcje własne pędu przyjmują postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = Ce^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Funkcje własne operatora pędu

Po skorzystaniu ze związku de Broglie'go

$$\vec{p} = \hbar \vec{k},$$

funkcje własne pędu przyjmują postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = Ce^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Stałą dowolną C możemy wyznaczyć z warunku normalizacji

$$\int \left| u_{\vec{k}}(\vec{r}) \right|^2 d^3r = 1,$$

Funkcje własne operatora pędu

Po skorzystaniu ze związku de Broglie'go

$$\vec{p} = \hbar \vec{k},$$

funkcje własne pędu przyjmują postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = Ce^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Stałą dowolną C możemy wyznaczyć z warunku normalizacji

$$\int |u_{\vec{k}}(\vec{r})|^2 d^3r = 1,$$

ale całka normalizacyjna po całej przestrzeni nie istnieje, gdyż

$$\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3r =$$

Funkcje własne operatora pędu

Po skorzystaniu ze związku de Broglie'go

$$\vec{p} = \hbar \vec{k},$$

funkcje własne pędu przyjmują postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = Ce^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Stałą dowolną C możemy wyznaczyć z warunku normalizacji

$$\int |u_{\vec{k}}(\vec{r})|^2 d^3r = 1,$$

ale całka normalizacyjna po całej przestrzeni nie istnieje, gdyż

$$\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3r = \int C^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} C e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r =$$

Funkcje własne operatora pędu

Po skorzystaniu ze związku de Broglie'go

$$\vec{p} = \hbar \vec{k},$$

funkcje własne pędu przyjmują postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = Ce^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Stałą dowolną C możemy wyznaczyć z warunku normalizacji

$$\int |u_{\vec{k}}(\vec{r})|^2 d^3r = 1,$$

ale całka normalizacyjna po całej przestrzeni nie istnieje, gdyż

$$\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3r = \int C^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} C e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r = |C|^2 \underbrace{\int d^3r}_{\infty} =$$

Funkcje własne operatora pędu

Po skorzystaniu ze związku de Broglie'go

$$\vec{p} = \hbar \vec{k},$$

funkcje własne pędu przyjmują postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = Ce^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Stałą dowolną C możemy wyznaczyć z warunku normalizacji

$$\int |u_{\vec{k}}(\vec{r})|^2 d^3r = 1,$$

ale całka normalizacyjna po całej przestrzeni nie istnieje, gdyż

$$\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3r = \int C^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} C e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r = |C|^2 \underbrace{\int d^3r}_{\infty} = \infty.$$

Funkcje własne operatora pędu

Po skorzystaniu ze związku de Broglie'go

$$\vec{p} = \hbar \vec{k},$$

funkcje własne pędu przyjmują postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = Ce^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Stałą dowolną C możemy wyznaczyć z warunku normalizacji

$$\int |u_{\vec{k}}(\vec{r})|^2 d^3r = 1,$$

ale całka normalizacyjna po całej przestrzeni nie istnieje, gdyż

$$\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3r = \int C^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} C e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r = |C|^2 \underbrace{\int d^3r}_{\infty} = \infty.$$

Funkcje własne operatora pędu

Skąd wnioskujemy, że funkcje własne pędu nie należą do przestrzeni Hilberta stanów fizycznych.

Funkcję $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ możemy jednak unormować w sześciennym pudełku o dowolnie dużej, ale skończonej objętości L^3 .

$$\int_{L^3} |u_{\vec{k}}(\vec{r})|^2 d^3r = 1$$

Funkcje własne operatora pędu

Skąd wnioskujemy, że funkcje własne pędu nie należą do przestrzeni Hilberta stanów fizycznych.

Funkcję $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ możemy jednak unormować w sześciennym pudełku o dowolnie dużej, ale skończonej objętości L^3 .

$$\int_{L^3} |u_{\vec{k}}(\vec{r})|^2 d^3r = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C|^2 \underbrace{\int_{L^3} d^3r}_{L^3} =$$

Funkcje własne operatora pędu

Skąd wnioskujemy, że funkcje własne pędu nie należą do przestrzeni Hilberta stanów fizycznych.

Funkcję $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ możemy jednak unormować w sześciennym pudełku o dowolnie dużej, ale skończonej objętości L^3 .

$$\int_{L^3} |u_{\vec{k}}(\vec{r})|^2 d^3r = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C|^2 \underbrace{\int_{L^3} d^3r}_{L^3} = |C|^2 L^3 = 1,$$

Funkcje własne operatora pędu

Skąd wnioskujemy, że funkcje własne pędu nie należą do przestrzeni Hilberta stanów fizycznych.

Funkcję $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ możemy jednak unormować w sześciennym pudełku o dowolnie dużej, ale skończonej objętości L^3 .

$$\int_{L^3} |u_{\vec{k}}(\vec{r})|^2 d^3r = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C|^2 \underbrace{\int_{L^3} d^3r}_{L^3} = |C|^2 L^3 = 1,$$

a więc z dokładnością do fazy zespolonej możemy wybrać

$$C = L^{-\frac{3}{2}}$$

Funkcje własne operatora pędu

Skąd wnioskujemy, że funkcje własne pędu nie należą do przestrzeni Hilberta stanów fizycznych.

Funkcję $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ możemy jednak unormować w sześciennym pudełku o dowolnie dużej, ale skończonej objętości L^3 .

$$\int_{L^3} |u_{\vec{k}}(\vec{r})|^2 d^3r = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C|^2 \underbrace{\int_{L^3} d^3r}_{L^3} = |C|^2 L^3 = 1,$$

a więc z dokładnością do fazy zespolonej możemy wybrać

$$C = L^{-\frac{3}{2}}$$

i unormowane funkcje własne pędu przyjmą postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Funkcje własne operatora pędu

Skąd wnioskujemy, że funkcje własne pędu nie należą do przestrzeni Hilberta stanów fizycznych.

Funkcję $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ możemy jednak unormować w sześciennym pudełku o dowolnie dużej, ale skończonej objętości L^3 .

$$\int_{L^3} |u_{\vec{k}}(\vec{r})|^2 d^3r = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C|^2 \underbrace{\int_{L^3} d^3r}_{L^3} = |C|^2 L^3 = 1,$$

a więc z dokładnością do fazy zespolonej możemy wybrać

$$C = L^{-\frac{3}{2}}$$

i unormowane funkcje własne pędu przyjmą postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Jeżeli pudełko jest duże w porównaniu z rozmiarami obszaru fizycznego dla badanego problemu, to wartości własne w obecności pudełka praktycznie nie ulegną zmianie.

Jeżeli ściany pudełka są sztywne,

Jeżeli pudełko jest duże w porównaniu z rozmiarami obszaru fizycznego dla badanego problemu, to wartości własne w obecności pudełka praktycznie nie ulegną zmianie.

Jeżeli ściany pudełka są sztywne, co odpowiada nieskończonemu skokowi energii potencjalnej,

Jeżeli pudełko jest duże w porównaniu z rozmiarami obszaru fizycznego dla badanego problemu, to wartości własne w obecności pudełka praktycznie nie ulegną zmianie.

Jeżeli ściany pudełka są sztywne, co odpowiada nieskończonemu skokowi energii potencjalnej, to funkcja falowa musi zniknąć na ściankach wskutek czego otrzymamy dyskretne wartości własne operatora pędu.

Jeżeli pudełko jest duże w porównaniu z rozmiarami obszaru fizycznego dla badanego problemu, to wartości własne w obecności pudełka praktycznie nie ulegną zmianie.

Jeżeli ściany pudełka są sztywne, co odpowiada nieskończonemu skokowi energii potencjalnej, to funkcja falowa musi zniknąć na ściankach wskutek czego otrzymamy dyskretne wartości własne operatora pędu.

Zamiast zakładać znikanie funkcji falowej na ściankach pudełka, narzucimy periodyczne warunki brzegowe:

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{L}),$$

Jeżeli pudełko jest duże w porównaniu z rozmiarami obszaru fizycznego dla badanego problemu, to wartości własne w obecności pudełka praktycznie nie ulegną zmianie.

Jeżeli ściany pudełka są sztywne, co odpowiada nieskończonemu skokowi energii potencjalnej, to funkcja falowa musi zniknąć na ściankach wskutek czego otrzymamy dyskretne wartości własne operatora pędu.

Zamiast zakładać znikanie funkcji falowej na ściankach pudełka, narzucimy periodyczne warunki brzegowe:

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{L}),$$
$$L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

Jeżeli pudełko jest duże w porównaniu z rozmiarami obszaru fizycznego dla badanego problemu, to wartości własne w obecności pudełka praktycznie nie ulegną zmianie.

Jeżeli ściany pudełka są sztywne, co odpowiada nieskończonemu skokowi energii potencjalnej, to funkcja falowa musi zniknąć na ściankach wskutek czego otrzymamy dyskretne wartości własne operatora pędu.

Zamiast zakładać znikanie funkcji falowej na ściankach pudełka, narzucimy periodyczne warunki brzegowe:

$$\begin{aligned}u_{\vec{k}}(\vec{r}) &= u_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{L}), \\ L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} &= \end{aligned}$$

Jeżeli pudełko jest duże w porównaniu z rozmiarami obszaru fizycznego dla badanego problemu, to wartości własne w obecności pudełka praktycznie nie ulegną zmianie.

Jeżeli ściany pudełka są sztywne, co odpowiada nieskończonemu skokowi energii potencjalnej, to funkcja falowa musi zniknąć na ściankach wskutek czego otrzymamy dyskretne wartości własne operatora pędu.

Zamiast zakładać znikanie funkcji falowej na ściankach pudełka, narzucimy periodyczne warunki brzegowe:

$$\begin{aligned}u_{\vec{k}}(\vec{r}) &= u_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{L}), \\ L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} &= L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} + \vec{L})}.\end{aligned}$$

Jeżeli pudełko jest duże w porównaniu z rozmiarami obszaru fizycznego dla badanego problemu, to wartości własne w obecności pudełka praktycznie nie ulegną zmianie.

Jeżeli ściany pudełka są sztywne, co odpowiada nieskończonemu skokowi energii potencjalnej, to funkcja falowa musi zniknąć na ściankach wskutek czego otrzymamy dyskretne wartości własne operatora pędu.

Zamiast zakładać znikanie funkcji falowej na ściankach pudełka, narzucimy periodyczne warunki brzegowe:

$$\begin{aligned}u_{\vec{k}}(\vec{r}) &= u_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{L}), \\ L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} &= L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} + \vec{L})}.\end{aligned}$$

Równość

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\vec{L})}$$

jest spełniona tylko jeśli

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{L}} = e^{i(k_x L + k_y L + k_z L)} = 1,$$

Równość

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\vec{L})}$$

jest spełniona tylko jeśli

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{L}} = e^{i(k_x L + k_y L + k_z L)} = 1,$$

gdzie krawędzie pudełka w kierunkach osi Ox , Oy i Oz potraktowaliśmy jako niezależne,

Równość

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\vec{L})}$$

jest spełniona tylko jeśli

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{L}} = e^{i(k_x L + k_y L + k_z L)} = 1,$$

gdzie krawędzie pudełka w kierunkach osi Ox , Oy i Oz potraktowaliśmy jako niezależne, zakładając jednocześnie, że $|L_x| = |L_y| = |L_z| = L$.

Równość

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\vec{L})}$$

jest spełniona tylko jeśli

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{L}} = e^{i(k_x L + k_y L + k_z L)} = 1,$$

gdzie krawędzie pudełka w kierunkach osi Ox , Oy i Oz potraktowaliśmy jako niezależne, zakładając jednocześnie, że $|L_x| = |L_y| = |L_z| = L$.

Warunek ten jest spełniony jeśli

Równość

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\vec{L})}$$

jest spełniona tylko jeśli

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{L}} = e^{i(k_x L + k_y L + k_z L)} = 1,$$

gdzie krawędzie pudełka w kierunkach osi Ox , Oy i Oz potraktowaliśmy jako niezależne, zakładając jednocześnie, że $|L_x| = |L_y| = |L_z| = L$.

Warunek ten jest spełniony jeśli

$$k_x L = n_x \cdot 2\pi,$$

Równość

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\vec{L})}$$

jest spełniona tylko jeśli

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{L}} = e^{i(k_x L + k_y L + k_z L)} = 1,$$

gdzie krawędzie pudełka w kierunkach osi Ox , Oy i Oz potraktowaliśmy jako niezależne, zakładając jednocześnie, że $|L_x| = |L_y| = |L_z| = L$.

Warunek ten jest spełniony jeśli

$$k_x L = n_x \cdot 2\pi, \quad k_y L = n_y \cdot 2\pi,$$

Równość

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\vec{L})}$$

jest spełniona tylko jeśli

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{L}} = e^{i(k_x L + k_y L + k_z L)} = 1,$$

gdzie krawędzie pudełka w kierunkach osi Ox , Oy i Oz potraktowaliśmy jako niezależne, zakładając jednocześnie, że $|L_x| = |L_y| = |L_z| = L$.

Warunek ten jest spełniony jeśli

$$k_x L = n_x \cdot 2\pi, \quad k_y L = n_y \cdot 2\pi, \quad k_z L = n_z \cdot 2\pi,$$

Równość

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\vec{L})}$$

jest spełniona tylko jeśli

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{L}} = e^{i(k_x L + k_y L + k_z L)} = 1,$$

gdzie krawędzie pudełka w kierunkach osi Ox , Oy i Oz potraktowaliśmy jako niezależne, zakładając jednocześnie, że $|L_x| = |L_y| = |L_z| = L$.

Warunek ten jest spełniony jeśli

$$k_x L = n_x \cdot 2\pi, \quad k_y L = n_y \cdot 2\pi, \quad k_z L = n_z \cdot 2\pi,$$

gdzie n_x , n_y , n_z są dowolnymi liczbami całkowitymi.

Równość

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\vec{L})}$$

jest spełniona tylko jeśli

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{L}} = e^{i(k_x L + k_y L + k_z L)} = 1,$$

gdzie krawędzie pudełka w kierunkach osi Ox , Oy i Oz potraktowaliśmy jako niezależne, zakładając jednocześnie, że $|L_x| = |L_y| = |L_z| = L$.

Warunek ten jest spełniony jeśli

$$k_x L = n_x \cdot 2\pi, \quad k_y L = n_y \cdot 2\pi, \quad k_z L = n_z \cdot 2\pi,$$

gdzie n_x , n_y , n_z są dowolnymi liczbami całkowitymi.

To oznacza, że składowe wektora falowego, a co za tym idzie również pędu,

To oznacza, że składowe wektora falowego, a co za tym idzie również pędu, mogą przyjmować wartości dyskretne

To oznacza, że składowe wektora falowego, a co za tym idzie również pędu, mogą przyjmować wartości dyskretne

$$k_x = n_x \cdot \frac{2\pi}{L},$$

To oznacza, że składowe wektora falowego, a co za tym idzie również pędu, mogą przyjmować wartości dyskretne

$$k_x = n_x \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_y = n_y \cdot \frac{2\pi}{L},$$

To oznacza, że składowe wektora falowego, a co za tym idzie również pędu, mogą przyjmować wartości dyskretne

$$k_x = n_x \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_y = n_y \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_z = n_z \cdot \frac{2\pi}{L},$$

To oznacza, że składowe wektora falowego, a co za tym idzie również pędu, mogą przyjmować wartości dyskretne

$$k_x = n_x \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_y = n_y \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_z = n_z \cdot \frac{2\pi}{L},$$

gdzie $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$ są dowolnymi liczbami całkowitymi.

To oznacza, że składowe wektora falowego, a co za tym idzie również pędu, mogą przyjmować wartości dyskretne

$$k_x = n_x \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_y = n_y \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_z = n_z \cdot \frac{2\pi}{L},$$

gdzie $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$ są dowolnymi liczbami całkowitymi.

Zauważmy, że

$$L \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{2\pi}{L} \rightarrow 0$$

To oznacza, że składowe wektora falowego, a co za tym idzie również pędu, mogą przyjmować wartości dyskretne

$$k_x = n_x \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_y = n_y \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_z = n_z \cdot \frac{2\pi}{L},$$

gdzie $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$ są dowolnymi liczbami całkowitymi.
Zauważmy, że

$$L \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{L} \rightarrow 0$$

i tym samym dopuszczalne wartości wektora falowego i pędu cząstki stają się ciągłe.

To oznacza, że składowe wektora falowego, a co za tym idzie również pędu, mogą przyjmować wartości dyskretne

$$k_x = n_x \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_y = n_y \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad k_z = n_z \cdot \frac{2\pi}{L},$$

gdzie $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$ są dowolnymi liczbami całkowitymi.
Zauważmy, że

$$L \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{L} \rightarrow 0$$

i tym samym dopuszczalne wartości wektora falowego i pędu cząstki stają się ciągłe.

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \int_{L^3} u_{\vec{l}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 r =$$

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \int_{L^3} u_{\vec{l}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 r = L^{-3} \int_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l}) \cdot \vec{r}} d^3 r$$

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \int_{L^3} u_{\vec{l}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 r = L^{-3} \int_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l}) \cdot \vec{r}} d^3 r$$
$$=$$

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$\begin{aligned}\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= \int_{L^3} u_{\vec{l}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3r = L^{-3} \int_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l}) \cdot \vec{r}} d^3r \\ &= L^{-3} \int_{L^3} e^{i[(k_x-l_x)x+(k_y-l_y)y+(k_z-l_z)z]} dx dy dz\end{aligned}$$

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$\begin{aligned}\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= \int_{L^3} u_{\vec{l}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3r = L^{-3} \int_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l}) \cdot \vec{r}} d^3r \\ &= L^{-3} \int_{L^3} e^{i[(k_x-l_x)x+(k_y-l_y)y+(k_z-l_z)z]} dx dy dz \\ &= \end{aligned}$$

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$\begin{aligned}\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= \int_{L^3} u_{\vec{l}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 r = L^{-3} \int_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l}) \cdot \vec{r}} d^3 r \\&= L^{-3} \int_{L^3} e^{i[(k_x-l_x)x+(k_y-l_y)y+(k_z-l_z)z]} dx dy dz \\&= L^{-3} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x-l_x)x} dx \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y-l_y)y} dy \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z-l_z)z} dz,\end{aligned}$$

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$\begin{aligned}\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= \int_{L^3} u_{\vec{l}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 r = L^{-3} \int_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l}) \cdot \vec{r}} d^3 r \\&= L^{-3} \int_{L^3} e^{i[(k_x-l_x)x+(k_y-l_y)y+(k_z-l_z)z]} dx dy dz \\&= L^{-3} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x-l_x)x} dx \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y-l_y)y} dy \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z-l_z)z} dz,\end{aligned}$$

gdzie dopuszczalne wartości wektora falowego $\vec{l}$ są następujące

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$\begin{aligned}\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= \int_{L^3} u_{\vec{l}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 r = L^{-3} \int_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l}) \cdot \vec{r}} d^3 r \\&= L^{-3} \int_{L^3} e^{i[(k_x-l_x)x+(k_y-l_y)y+(k_z-l_z)z]} dx dy dz \\&= L^{-3} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x-l_x)x} dx \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y-l_y)y} dy \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z-l_z)z} dz,\end{aligned}$$

gdzie dopuszczalne wartości wektora falowego $\vec{l}$ są następujące

$$l_x = m_x \cdot \frac{2\pi}{L},$$

Funkcje własne operatora pędu

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$\begin{aligned}\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= \int_{L^3} u_{\vec{l}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 r = L^{-3} \int_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l}) \cdot \vec{r}} d^3 r \\&= L^{-3} \int_{L^3} e^{i[(k_x-l_x)x+(k_y-l_y)y+(k_z-l_z)z]} dx dy dz \\&= L^{-3} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x-l_x)x} dx \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y-l_y)y} dy \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z-l_z)z} dz,\end{aligned}$$

gdzie dopuszczalne wartości wektora falowego $\vec{l}$ są następujące

$$l_x = m_x \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad l_y = m_y \cdot \frac{2\pi}{L},$$

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$\begin{aligned}\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= \int_{L^3} u_{\vec{l}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 r = L^{-3} \int_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l}) \cdot \vec{r}} d^3 r \\&= L^{-3} \int_{L^3} e^{i[(k_x-l_x)x+(k_y-l_y)y+(k_z-l_z)z]} dx dy dz \\&= L^{-3} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x-l_x)x} dx \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y-l_y)y} dy \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z-l_z)z} dz,\end{aligned}$$

gdzie dopuszczalne wartości wektora falowego $\vec{l}$ są następujące

$$l_x = m_x \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad l_y = m_y \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad l_z = m_z \cdot \frac{2\pi}{L},$$

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$\begin{aligned}\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= \int_{L^3} u_{\vec{l}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 r = L^{-3} \int_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l}) \cdot \vec{r}} d^3 r \\&= L^{-3} \int_{L^3} e^{i[(k_x-l_x)x+(k_y-l_y)y+(k_z-l_z)z]} dx dy dz \\&= L^{-3} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x-l_x)x} dx \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y-l_y)y} dy \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z-l_z)z} dz,\end{aligned}$$

gdzie dopuszczalne wartości wektora falowego $\vec{l}$ są następujące

$$l_x = m_x \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad l_y = m_y \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad l_z = m_z \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad m_x, m_y, m_z \in \mathbb{Z}.$$

Obliczmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta

$$\begin{aligned}\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= \int_{L^3} u_{\vec{l}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 r = L^{-3} \int_{L^3} e^{i(\vec{k}-\vec{l}) \cdot \vec{r}} d^3 r \\&= L^{-3} \int_{L^3} e^{i[(k_x-l_x)x+(k_y-l_y)y+(k_z-l_z)z]} dx dy dz \\&= L^{-3} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x-l_x)x} dx \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y-l_y)y} dy \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z-l_z)z} dz,\end{aligned}$$

gdzie dopuszczalne wartości wektora falowego $\vec{l}$ są następujące

$$l_x = m_x \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad l_y = m_y \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad l_z = m_z \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad m_x, m_y, m_z \in \mathbb{Z}.$$

Obliczmy jeden z czynników

$$\int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} dx =$$

Obliczmy jeden z czynników

$$\int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} dx = \begin{cases} \int_{-L/2}^{L/2} dx = x \Big|_{-L/2}^{L/2} = L, & \text{dla } k_x = l_x \\ \frac{e^{i(k_x - l_x)x}}{i(k_x - l_x)} \Big|_{-L/2}^{L/2}, & \text{dla } k_x \neq l_x \end{cases}$$

Obliczmy jeden z czynników

$$\int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} dx = \begin{cases} \int_{-L/2}^{L/2} dx = x \Big|_{-L/2}^{L/2} = L, & \text{dla } k_x = l_x \\ \frac{e^{i(k_x - l_x)x}}{i(k_x - l_x)} \Big|_{-L/2}^{L/2}, & \text{dla } k_x \neq l_x \end{cases}$$

=

Obliczmy jeden z czynników

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} dx &= \begin{cases} \int_{-L/2}^{L/2} dx = x \Big|_{-L/2}^{L/2} = L, & \text{dla } k_x = l_x \\ \frac{e^{i(k_x - l_x)x}}{i(k_x - l_x)} \Big|_{-L/2}^{L/2}, & \text{dla } k_x \neq l_x \end{cases} \\ &= \begin{cases} L, & \text{dla } k_x = l_x \\ \frac{e^{i \frac{2\pi}{L}(n_x - m_x) \frac{L}{2}} - e^{-i \frac{2\pi}{L}(n_x - m_x) \frac{L}{2}}}{i \frac{2\pi}{L}(n_x - m_x)}, & \text{dla } k_x \neq l_x \end{cases} \end{aligned}$$

Obliczmy jeden z czynników

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} dx &= \begin{cases} \int_{-L/2}^{L/2} dx = x \Big|_{-L/2}^{L/2} = L, & \text{dla } k_x = l_x \\ \frac{e^{i(k_x - l_x)x}}{i(k_x - l_x)} \Big|_{-L/2}^{L/2}, & \text{dla } k_x \neq l_x \end{cases} \\ &= \begin{cases} L, & \text{dla } k_x = l_x \\ \frac{e^{i \frac{2\pi}{L}(n_x - m_x) \frac{L}{2}} - e^{-i \frac{2\pi}{L}(n_x - m_x) \frac{L}{2}}}{i \frac{2\pi}{L}(n_x - m_x)}, & \text{dla } k_x \neq l_x \end{cases} \\ &= \end{aligned}$$

Obliczmy jeden z czynników

$$\begin{aligned}\int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} dx &= \begin{cases} \int_{-L/2}^{L/2} dx = x \Big|_{-L/2}^{L/2} = L, & \text{dla } k_x = l_x \\ \frac{e^{i(k_x - l_x)x}}{i(k_x - l_x)} \Big|_{-L/2}^{L/2}, & \text{dla } k_x \neq l_x \end{cases} \\ &= \begin{cases} L, & \text{dla } k_x = l_x \\ \frac{e^{i\frac{2\pi}{L}(n_x - m_x)\frac{L}{2}} - e^{-i\frac{2\pi}{L}(n_x - m_x)\frac{L}{2}}}{i\frac{2\pi}{L}(n_x - m_x)}, & \text{dla } k_x \neq l_x \end{cases} \\ &= \begin{cases} L, & \text{dla } k_x = l_x \\ \frac{e^{i\pi(n_x - m_x)} - e^{-i\pi(n_x - m_x)}}{i\frac{2\pi}{L}(n_x - m_x)}, & \text{dla } k_x \neq l_x \end{cases} .\end{aligned}$$

Obliczmy jeden z czynników

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} dx &= \begin{cases} \int_{-L/2}^{L/2} dx = x \Big|_{-L/2}^{L/2} = L, & \text{dla } k_x = l_x \\ \frac{e^{i(k_x - l_x)x}}{i(k_x - l_x)} \Big|_{-L/2}^{L/2}, & \text{dla } k_x \neq l_x \end{cases} \\ &= \begin{cases} L, & \text{dla } k_x = l_x \\ \frac{e^{i\frac{2\pi}{L}(n_x - m_x)\frac{L}{2}} - e^{-i\frac{2\pi}{L}(n_x - m_x)\frac{L}{2}}}{i\frac{2\pi}{L}(n_x - m_x)}, & \text{dla } k_x \neq l_x \end{cases} \\ &= \begin{cases} L, & \text{dla } k_x = l_x \\ \frac{e^{i\pi(n_x - m_x)} - e^{-i\pi(n_x - m_x)}}{i\frac{2\pi}{L}(n_x - m_x)}, & \text{dla } k_x \neq l_x \end{cases}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $n_x - m_x \equiv \bar{n}_x \in \mathbb{Z}$, dlatego

Obliczmy jeden z czynników

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} dx &= \begin{cases} \int_{-L/2}^{L/2} dx = x \Big|_{-L/2}^{L/2} = L, & \text{dla } k_x = l_x \\ \frac{e^{i(k_x - l_x)x}}{i(k_x - l_x)} \Big|_{-L/2}^{L/2}, & \text{dla } k_x \neq l_x \end{cases} \\ &= \begin{cases} L, & \text{dla } k_x = l_x \\ \frac{e^{i\frac{2\pi}{L}(n_x - m_x)\frac{L}{2}} - e^{-i\frac{2\pi}{L}(n_x - m_x)\frac{L}{2}}}{i\frac{2\pi}{L}(n_x - m_x)}, & \text{dla } k_x \neq l_x \end{cases} \\ &= \begin{cases} L, & \text{dla } k_x = l_x \\ \frac{e^{i\pi(n_x - m_x)} - e^{-i\pi(n_x - m_x)}}{i\frac{2\pi}{L}(n_x - m_x)}, & \text{dla } k_x \neq l_x \end{cases}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $n_x - m_x \equiv \bar{n}_x \in \mathbb{Z}$, dlatego

$$e^{i\bar{n}_x\pi} - e^{-i\bar{n}_x\pi} = \cos(\bar{n}_x\pi) + i\sin(\bar{n}_x\pi) - (\cos(\bar{n}_x\pi) - i\sin(\bar{n}_x\pi))$$

$$\begin{aligned} e^{i\bar{n}_x\pi} - e^{-i\bar{n}_x\pi} &= \cos(\bar{n}_x\pi) + i\sin(\bar{n}_x\pi) - (\cos(\bar{n}_x\pi) - i\sin(\bar{n}_x\pi)) \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^{i\bar{n}_x\pi} - e^{-i\bar{n}_x\pi} &= \cos(\bar{n}_x\pi) + i\sin(\bar{n}_x\pi) - (\cos(\bar{n}_x\pi) - i\sin(\bar{n}_x\pi)) \\ &= 2i\sin(\bar{n}_x\pi) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^{i\bar{n}_x\pi} - e^{-i\bar{n}_x\pi} &= \cos(\bar{n}_x\pi) + i\sin(\bar{n}_x\pi) - (\cos(\bar{n}_x\pi) - i\sin(\bar{n}_x\pi)) \\ &= 2i\sin(\bar{n}_x\pi) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\bar{n}_x\pi} - e^{-i\bar{n}_x\pi} &= \cos(\bar{n}_x\pi) + i\sin(\bar{n}_x\pi) - (\cos(\bar{n}_x\pi) - i\sin(\bar{n}_x\pi)) \\ &= 2i\sin(\bar{n}_x\pi) = 0, \end{aligned}$$

dlatego dla rozpatrywanej całki otrzymujemy wzór

$$\int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} dx = \begin{cases} L, & \text{dla } k_x = l_x \\ 0, & \text{dla } k_x \neq l_x \end{cases}.$$

Funkcje własne operatora pędu

$$\begin{aligned}e^{i\bar{n}_x\pi} - e^{-i\bar{n}_x\pi} &= \cos(\bar{n}_x\pi) + i\sin(\bar{n}_x\pi) - (\cos(\bar{n}_x\pi) - i\sin(\bar{n}_x\pi)) \\ &= 2i\sin(\bar{n}_x\pi) = 0,\end{aligned}$$

dlatego dla rozpatrywanej całki otrzymujemy wzór

$$\int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} dx = \begin{cases} L, & \text{dla } k_x = l_x \\ 0, & \text{dla } k_x \neq l_x \end{cases}.$$

Taki sam wzór otrzymamy dla całek

$$\int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y - l_y)y} dy \quad \text{i} \quad \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z - l_z)z} dz.$$

$$\begin{aligned} e^{i\bar{n}_x\pi} - e^{-i\bar{n}_x\pi} &= \cos(\bar{n}_x\pi) + i\sin(\bar{n}_x\pi) - (\cos(\bar{n}_x\pi) - i\sin(\bar{n}_x\pi)) \\ &= 2i\sin(\bar{n}_x\pi) = 0, \end{aligned}$$

dlatego dla rozpatrywanej całki otrzymujemy wzór

$$\int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} dx = \begin{cases} L, & \text{dla } k_x = l_x \\ 0, & \text{dla } k_x \neq l_x \end{cases}.$$

Taki sam wzór otrzymamy dla całek

$$\int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y - l_y)y} dy \quad \text{i} \quad \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z - l_z)z} dz.$$

Dlatego otrzymujemy relację ortogonalności postaci

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = L^{-3} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} dx \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y - l_y)y} dy \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z - l_z)z} dz$$

Dlatego otrzymujemy relację ortogonalności postaci

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = L^{-3} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} dx \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y - l_y)y} dy \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z - l_z)z} dz$$

=

Dlatego otrzymujemy relację ortogonalności postaci

$$\begin{aligned}\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= L^{-3} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} dx \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y - l_y)y} dy \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z - l_z)z} dz \\ &= \begin{cases} 1, & \text{dla } \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \text{dla } \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases},\end{aligned}$$

Dlatego otrzymujemy relację ortogonalności postaci

$$\begin{aligned}\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= L^{-3} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} dx \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y - l_y)y} dy \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z - l_z)z} dz \\ &= \begin{cases} 1, & \text{dla } \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \text{dla } \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases},\end{aligned}$$

gdyż $k_x \neq l_x$ pociąga $\vec{k} \neq \vec{l}$, a to oznacza, że pozostałe dwie składowe tych wektorów mogą być

Dlatego otrzymujemy relację **ortogonalności** postaci

$$\begin{aligned}\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= L^{-3} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} dx \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y - l_y)y} dy \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z - l_z)z} dz \\ &= \begin{cases} 1, & \text{dla } \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \text{dla } \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases},\end{aligned}$$

gdyż $k_x \neq l_x$ pociąga $\vec{k} \neq \vec{l}$, a to oznacza, że pozostałe dwie składowe tych wektorów mogą być

albo równe $\Rightarrow$ odpowiednia całka jest równa L ,

Dlatego otrzymujemy relację **ortogonalności** postaci

$$\begin{aligned}\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= L^{-3} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} dx \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y - l_y)y} dy \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z - l_z)z} dz \\ &= \begin{cases} 1, & \text{dla } \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \text{dla } \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases},\end{aligned}$$

gdyż $k_x \neq l_x$ pociąga $\vec{k} \neq \vec{l}$, a to oznacza, że pozostałe dwie składowe tych wektorów mogą być

albo **równe** $\Rightarrow$ **odpowiednia całka jest równa L ,**

albo **różne** $\Rightarrow$ **odpowiednia całka jest równa 0.**

Dlatego otrzymujemy relację **ortogonalności** postaci

$$\begin{aligned}\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= L^{-3} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_x - l_x)x} dx \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_y - l_y)y} dy \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_z - l_z)z} dz \\ &= \begin{cases} 1, & \text{dla } \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \text{dla } \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases},\end{aligned}$$

gdyż $k_x \neq l_x$ pociąga $\vec{k} \neq \vec{l}$, a to oznacza, że pozostałe dwie składowe tych wektorów mogą być

albo **równe** $\Rightarrow$ odpowiednia całka jest równa L ,

albo **różne** $\Rightarrow$ odpowiednia całka jest równa 0 .

Funkcje własne operatora pędu

Ponieważ wektory falowe $\vec{k}$ i $\vec{l}$ są określone przez podanie trójek liczb całkowitych

$$\begin{aligned}\vec{k} &\leftrightarrow (n_x, n_y, n_z), \\ \vec{l} &\leftrightarrow (m_x, m_y, m_z),\end{aligned}$$

to relację

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{dla } \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \text{dla } \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases}$$

Funkcje własne operatora pędu

Ponieważ wektory falowe $\vec{k}$ i $\vec{l}$ są określone przez podanie trójek liczb całkowitych

$$\begin{aligned}\vec{k} &\leftrightarrow (n_x, n_y, n_z), \\ \vec{l} &\leftrightarrow (m_x, m_y, m_z),\end{aligned}$$

to relację

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{dla } \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \text{dla } \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases}$$

możemy wyrazić następująco

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \delta_{m_x n_x} \delta_{m_y n_y} \delta_{m_z n_z} \equiv \delta_{\vec{l} \vec{k}},$$

Funkcje własne operatora pędu

Ponieważ wektory falowe $\vec{k}$ i $\vec{l}$ są określone przez podanie trójek liczb całkowitych

$$\begin{aligned}\vec{k} &\leftrightarrow (n_x, n_y, n_z), \\ \vec{l} &\leftrightarrow (m_x, m_y, m_z),\end{aligned}$$

to relację

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{dla } \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \text{dla } \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases}$$

możemy wyrazić następująco

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \delta_{m_x n_x} \delta_{m_y n_y} \delta_{m_z n_z} \equiv \delta_{\vec{l} \vec{k}},$$

gdzie symbol $\delta_{\vec{l}\vec{k}}$ jest uogólnieniem delty Kroneckera

$$\delta_{\vec{l}\vec{k}} = \begin{cases} 1, & \text{dla } \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \text{dla } \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases}.$$

Definicja ta ma sens, gdyż składowe wektorów $\vec{k}$ i $\vec{l}$ mogą przyjmować tylko wartości dyskretne

$$\vec{k} = (n_x, n_y, n_z) \frac{2\pi}{L}, \quad \vec{l} = (m_x, m_y, m_z) \frac{2\pi}{L}.$$

gdzie symbol $\delta_{\vec{l}\vec{k}}$ jest uogólnieniem delty Kroneckera

$$\delta_{\vec{l}\vec{k}} = \begin{cases} 1, & \text{dla } \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \text{dla } \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases}.$$

Definicja ta ma sens, gdyż składowe wektorów $\vec{k}$ i $\vec{l}$ mogą przyjmować tylko wartości dyskretne

$$\vec{k} = (n_x, n_y, n_z) \frac{2\pi}{L}, \quad \vec{l} = (m_x, m_y, m_z) \frac{2\pi}{L}.$$

Zwiększając rozmiar pudełka L możemy uczynić odległość $2\pi/L$ pomiędzy sąsiednimi dozwolonymi wartościami $\vec{k}$ i $\vec{l}$ dowolnie małą.

gdzie symbol $\delta_{\vec{l}\vec{k}}$ jest uogólnieniem delty Kroneckera

$$\delta_{\vec{l}\vec{k}} = \begin{cases} 1, & \text{dla } \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \text{dla } \vec{k} \neq \vec{l} \end{cases}.$$

Definicja ta ma sens, gdyż składowe wektorów $\vec{k}$ i $\vec{l}$ mogą przyjmować tylko wartości dyskretne

$$\vec{k} = (n_x, n_y, n_z) \frac{2\pi}{L}, \quad \vec{l} = (m_x, m_y, m_z) \frac{2\pi}{L}.$$

Zwiększając rozmiar pudełka L możemy uczynić odległość $2\pi/L$ pomiędzy sąsiednimi dozwolonymi wartościami $\vec{k}$ i $\vec{l}$ dowolnie małą.

W granicy $L \rightarrow \infty$ wektory $\vec{k}$ i $\vec{l}$ będą przyjmować wartości ciągłe i warunek

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \delta_{\vec{l}\vec{k}} \equiv \delta_{l_x k_x} \delta_{l_y k_y} \delta_{l_z k_z}$$

trzeba zastąpić przez

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}) \equiv \delta(l_x - k_x) \delta(l_y - k_y) \delta(l_z - k_z),$$

W granicy $L \rightarrow \infty$ wektory $\vec{k}$ i $\vec{l}$ będą przyjmować wartości ciągłe i warunek

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \delta_{\vec{l}\vec{k}} \equiv \delta_{l_x k_x} \delta_{l_y k_y} \delta_{l_z k_z}$$

trzeba zastąpić przez

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}) \equiv \delta(l_x - k_x) \delta(l_y - k_y) \delta(l_z - k_z),$$

gdzie wprowadziliśmy nowy obiekt matematyczny, tzw. **delte** Diraca.

W granicy $L \rightarrow \infty$ wektory $\vec{k}$ i $\vec{l}$ będą przyjmować wartości ciągłe i warunek

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \delta_{\vec{l}\vec{k}} \equiv \delta_{l_x k_x} \delta_{l_y k_y} \delta_{l_z k_z}$$

trzeba zastąpić przez

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}) \equiv \delta(l_x - k_x) \delta(l_y - k_y) \delta(l_z - k_z),$$

gdzie wprowadziliśmy nowy obiekt matematyczny, tzw. **delte Diraca**.

Delta Diraca $\delta(x)$ jest zdefiniowana następująco:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \neq 0 \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Korzystając z tej definicji możemy obliczyć całkę z dowolnej funkcji $f(x)$ ciągłej w punkcie $x = 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = f(0).$$

Delta Diraca $\delta(x)$ jest zdefiniowana następująco:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \neq 0 \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Korzystając z tej definicji możemy obliczyć całkę z dowolnej funkcji $f(x)$ ciągłej w punkcie $x = 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = f(0).$$

Równość

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0)$$

Delta Diraca $\delta(x)$ jest zdefiniowana następująco:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \neq 0 \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Korzystając z tej definicji możemy obliczyć całkę z dowolnej funkcji $f(x)$ ciągłej w punkcie $x = 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = f(0).$$

Równość

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0)$$

można przyjąć jako alternatywną definicję delty Diraca.

W praktyce wystarczy całkować po dowolnym skończonym przedziale zawierającym punkt $x = 0$.

można przyjąć jako alternatywną definicję delty Diraca.

W praktyce wystarczy całkować po dowolnym skończonym przedziale zawierającym punkt $x = 0$.

Delta Diraca nie jest funkcją lecz dystrybucją, czyli funkcjonałem liniowym działającym w przestrzeni dostatecznie gładkich funkcji próbnych.

można przyjąć jako alternatywną definicję delty Diraca.

W praktyce wystarczy całkować po dowolnym skończonym przedziale zawierającym punkt $x = 0$.

Delta Diraca nie jest funkcją lecz dystrybucją, czyli funkcjonałem liniowym działającym w przestrzeni dostatecznie gładkich funkcji próbnych. Patrz np. Laurent Schwartz *Metody matematyczne w fizyce*.

można przyjąć jako alternatywną definicję delty Diraca.

W praktyce wystarczy całkować po dowolnym skończonym przedziale zawierającym punkt $x = 0$.

Delta Diraca nie jest funkcją lecz dystrybucją, czyli funkcjonałem liniowym działającym w przestrzeni dostatecznie gładkich funkcji próbnych. Patrz np. Laurent Schwartz *Metody matematyczne w fizyce*.

Deltę Diraca można też określić jako granicę ciągu funkcyjnego, np.

$$\delta(x) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}.$$

można przyjąć jako alternatywną definicję delty Diraca.

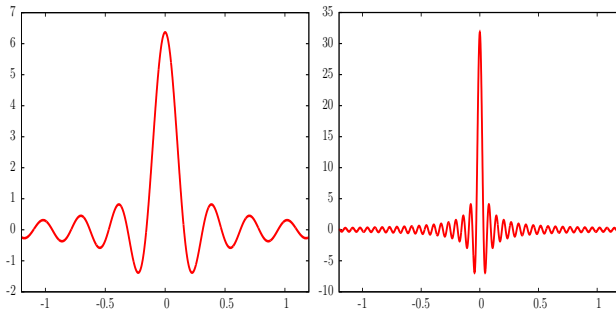
W praktyce wystarczy całkować po dowolnym skończonym przedziale zawierającym punkt $x = 0$.

Delta Diraca nie jest funkcją lecz dystrybucją, czyli funkcjonałem liniowym działającym w przestrzeni dostatecznie gładkich funkcji próbnych. Patrz np. Laurent Schwartz *Metody matematyczne w fizyce*.

Deltę Diraca można też określić jako granicę ciągu funkcyjnego, np.

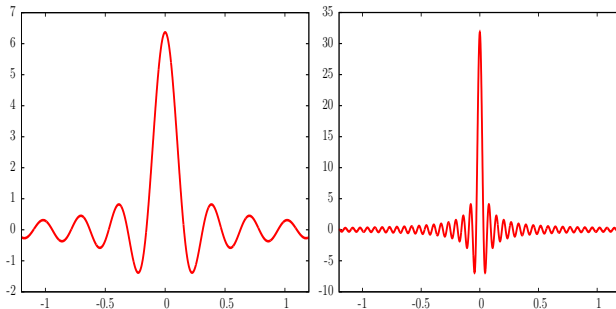
$$\delta(x) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}.$$

Wykresy funkcji $\frac{\sin(gx)}{\pi x}$ dla $g = 20$ i $g = 100$



Wkłady do całki $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx$ pochodzące od oscylacji znikają dla $g \rightarrow \infty$.

Wykresy funkcji $\frac{\sin(gx)}{\pi x}$ dla $g = 20$ i $g = 100$



Wkłady do całki $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx$ pochodzące od oscylacji znikają dla $g \rightarrow \infty$.

Można pokazać, że delta Diraca spełnia następujące związki

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \delta(-x), \\ \delta'(x) &= -\delta'(-x), \\ x\delta'(x) &= -\delta(-x), \\ \delta(f(x)) &= \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad \text{gdzie } f(x_i) = 0.\end{aligned}$$

Zadanie. Udowodnić powyższe własności delty Diraca.

Można pokazać, że delta Diraca spełnia następujące związki

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \delta(-x), \\ \delta'(x) &= -\delta'(-x), \\ x\delta'(x) &= -\delta(-x), \\ \delta(f(x)) &= \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad \text{gdzie } f(x_i) = 0.\end{aligned}$$

Zadanie. Udowodnić powyższe własności delty Diraca.

Kwadrat delty Diraca jest nieokreślony.

Sens matematyczny ma natomiast spłot dwóch delt Diraca:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-x)\delta(x-b)dx = \delta(a-b).$$

Kwadrat delty Diraca jest nieokreślony.

Sens matematyczny ma natomiast spłot dwóch delt Diraca:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-x)\delta(x-b)dx = \delta(a-b).$$

Korzystając z definicji

$$\delta(x) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}$$

możemy *unormować* funkcje własne pędu w nieskończonej przestrzeni. W tym celu założymy, że $k_x \neq l_x$ i obliczmy całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx =$$

Korzystając z definicji

$$\delta(x) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}$$

możemy *unormować* funkcje własne pędu w nieskończonej przestrzeni. W tym celu założymy, że $k_x \neq l_x$ i obliczmy całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx = \lim_{g \rightarrow \infty} \int_{-g}^g e^{i(k_x - l_x)x} dx =$$

Korzystając z definicji

$$\delta(x) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}$$

możemy *unormować* funkcje własne pędu w nieskończonej przestrzeni. W tym celu założmy, że $k_x \neq l_x$ i obliczmy całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx = \lim_{g \rightarrow \infty} \int_{-g}^g e^{i(k_x - l_x)x} dx = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{e^{i(k_x - l_x)g} - e^{-i(k_x - l_x)g}}{i(k_x - l_x)}$$

Korzystając z definicji

$$\delta(x) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}$$

możemy *unormować* funkcje własne pędu w nieskończonej przestrzeni. W tym celu założymy, że $k_x \neq l_x$ i obliczmy całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx = \lim_{g \rightarrow \infty} \int_{-g}^g e^{i(k_x - l_x)x} dx = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{e^{i(k_x - l_x)g} - e^{-i(k_x - l_x)g}}{i(k_x - l_x)}$$

=

Korzystając z definicji

$$\delta(x) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}$$

możemy *unormować* funkcje własne pędu w nieskończonej przestrzeni. W tym celu założymy, że $k_x \neq l_x$ i obliczmy całkę

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx &= \lim_{g \rightarrow \infty} \int_{-g}^g e^{i(k_x - l_x)x} dx = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{e^{i(k_x - l_x)g} - e^{-i(k_x - l_x)g}}{i(k_x - l_x)} \\ &= 2 \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin[(k_x - l_x)g]}{k_x - l_x} = \end{aligned}$$

Korzystając z definicji

$$\delta(x) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}$$

możemy *unormować* funkcje własne pędu w nieskończonej przestrzeni. W tym celu założmy, że $k_x \neq l_x$ i obliczmy całkę

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx &= \lim_{g \rightarrow \infty} \int_{-g}^g e^{i(k_x - l_x)x} dx = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{e^{i(k_x - l_x)g} - e^{-i(k_x - l_x)g}}{i(k_x - l_x)} \\ &= 2 \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin[(k_x - l_x)g]}{k_x - l_x} = 2\pi \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin[(k_x - l_x)g]}{\pi(k_x - l_x)} \end{aligned}$$

Korzystając z definicji

$$\delta(x) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}$$

możemy *unormować* funkcje własne pędu w nieskończonej przestrzeni. W tym celu założmy, że $k_x \neq l_x$ i obliczmy całkę

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx &= \lim_{g \rightarrow \infty} \int_{-g}^g e^{i(k_x - l_x)x} dx = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{e^{i(k_x - l_x)g} - e^{-i(k_x - l_x)g}}{i(k_x - l_x)} \\ &= 2 \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin[(k_x - l_x)g]}{k_x - l_x} = 2\pi \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin[(k_x - l_x)g]}{\pi(k_x - l_x)} \\ &= \end{aligned}$$

Korzystając z definicji

$$\delta(x) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}$$

możemy *unormować* funkcje własne pędu w nieskończonej przestrzeni. W tym celu założmy, że $k_x \neq l_x$ i obliczmy całkę

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx &= \lim_{g \rightarrow \infty} \int_{-g}^g e^{i(k_x - l_x)x} dx = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{e^{i(k_x - l_x)g} - e^{-i(k_x - l_x)g}}{i(k_x - l_x)} \\ &= 2 \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin[(k_x - l_x)g]}{k_x - l_x} = 2\pi \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin[(k_x - l_x)g]}{\pi(k_x - l_x)} \\ &= 2\pi \delta(k_x - l_x). \end{aligned}$$

Korzystając z definicji

$$\delta(x) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}$$

możemy *unormować* funkcje własne pędu w nieskończonej przestrzeni. W tym celu założymy, że $k_x \neq l_x$ i obliczmy całkę

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx &= \lim_{g \rightarrow \infty} \int_{-g}^g e^{i(k_x - l_x)x} dx = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{e^{i(k_x - l_x)g} - e^{-i(k_x - l_x)g}}{i(k_x - l_x)} \\ &= 2 \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin[(k_x - l_x)g]}{k_x - l_x} = 2\pi \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin[(k_x - l_x)g]}{\pi(k_x - l_x)} \\ &= 2\pi \delta(k_x - l_x). \end{aligned}$$

Zauważmy, że wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx = 2\pi \delta(k_x - l_x)$$

ma sens również dla $k_x = l_x$. Warunek ortogonalności dla funkcji własnych pędu możemy teraz wyrazić następująco:

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle =$$

Zauważmy, że wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx = 2\pi \delta(k_x - l_x)$$

ma sens również dla $k_x = l_x$. Warunek ortogonalności dla funkcji własnych pędu możemy teraz wyrazić następująco:

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \int u_{\vec{l}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3r =$$

Zauważmy, że wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx = 2\pi \delta(k_x - l_x)$$

ma sens również dla $k_x = l_x$. Warunek ortogonalności dla funkcji własnych pędu możemy teraz wyrazić następująco:

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \int u_{\vec{l}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3r = \int C^* e^{-i\vec{l} \cdot \vec{r}} C e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r$$

Zauważmy, że wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx = 2\pi \delta(k_x - l_x)$$

ma sens również dla $k_x = l_x$. Warunek ortogonalności dla funkcji własnych pędu możemy teraz wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} \langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= \int u_{\vec{l}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3r = \int C^* e^{-i\vec{l} \cdot \vec{r}} C e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r \\ &= \end{aligned}$$

Zauważmy, że wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx = 2\pi \delta(k_x - l_x)$$

ma sens również dla $k_x = l_x$. Warunek ortogonalności dla funkcji własnych pędu możemy teraz wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} \langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= \int u_{\vec{l}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3r = \int C^* e^{-i\vec{l} \cdot \vec{r}} C e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r \\ &= |C|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_y - l_y)y} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_z - l_z)z} dz \end{aligned}$$

Zauważmy, że wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx = 2\pi \delta(k_x - l_x)$$

ma sens również dla $k_x = l_x$. Warunek ortogonalności dla funkcji własnych pędu możemy teraz wyrazić następująco:

$$\begin{aligned}\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= \int u_{\vec{l}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3r = \int C^* e^{-i\vec{l} \cdot \vec{r}} C e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r \\ &= |C|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_y - l_y)y} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_z - l_z)z} dz \\ &= \end{aligned}$$

Zauważmy, że wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx = 2\pi \delta(k_x - l_x)$$

ma sens również dla $k_x = l_x$. Warunek ortogonalności dla funkcji własnych pędu możemy teraz wyrazić następująco:

$$\begin{aligned}\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= \int u_{\vec{l}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3r = \int C^* e^{-i\vec{l} \cdot \vec{r}} C e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r \\ &= |C|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_y - l_y)y} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_z - l_z)z} dz \\ &= |C|^2 2\pi \delta(k_x - l_x) 2\pi \delta(k_y - l_y) 2\pi \delta(k_z - l_z).\end{aligned}$$

Zauważmy, że wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx = 2\pi \delta(k_x - l_x)$$

ma sens również dla $k_x = l_x$. Warunek ortogonalności dla funkcji własnych pędu możemy teraz wyrazić następująco:

$$\begin{aligned}\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle &= \int u_{\vec{l}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3r = \int C^* e^{-i\vec{l} \cdot \vec{r}} C e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r \\ &= |C|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_y - l_y)y} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_z - l_z)z} dz \\ &= |C|^2 2\pi \delta(k_x - l_x) 2\pi \delta(k_y - l_y) 2\pi \delta(k_z - l_z).\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy wzór

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = |C|^2 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{l}) = |C|^2 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}).$$

W przypadku normalizacji w pudełku przyjęliśmy

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}),$$

Otrzymaliśmy wzór

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = |C|^2 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{l}) = |C|^2 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}).$$

W przypadku normalizacji w pudełku przyjęliśmy

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}),$$

a więc dla konsystencji wybierzemy

$$|C|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3}.$$

Otrzymaliśmy wzór

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = |C|^2 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{l}) = |C|^2 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}).$$

W przypadku normalizacji w pudełku przyjęliśmy

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}),$$

a więc dla konsystencji wybierzemy

$$|C|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3}.$$

Pomijając dowolny czynnik zespolony o module 1 (fazę), możemy wybrać

$$C = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}.$$

Otrzymaliśmy wzór

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = |C|^2 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{l}) = |C|^2 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}).$$

W przypadku normalizacji w pudełku przyjęliśmy

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}),$$

a więc dla konsystencji wybierzemy

$$|C|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3}.$$

Pomijając dowolny czynnik zespolony o module 1 (fazę), możemy wybrać

$$C = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}.$$

Unormowane funkcje własne pędu będą wtedy miały postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Zauważmy, że delta Diraca jest parzysta, tzn.

$$\delta(-x) = \delta(x).$$

Unormowane funkcje własne pędu będą wtedy miały postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Zauważmy, że delta Diraca jest parzysta, tzn.

$$\delta(-x) = \delta(x).$$

Dla dowodu skorzystajmy z przedstawienia delty Diraca jako granicy ciągu funkcyjnego i obliczmy

$$\delta(-x) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin[g(-x)]}{\pi(-x)} =$$

Unormowane funkcje własne pędu będą wtedy miały postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Zauważmy, że delta Diraca jest parzysta, tzn.

$$\delta(-x) = \delta(x).$$

Dla dowodu skorzystajmy z przedstawienia delty Diraca jako granicy ciągu funkcyjnego i obliczmy

$$\delta(-x) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin[g(-x)]}{\pi(-x)} = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{-\sin(gx)}{-\pi x} =$$

Unormowane funkcje własne pędu będą wtedy miały postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Zauważmy, że delta Diraca jest parzysta, tzn.

$$\delta(-x) = \delta(x).$$

Dla dowodu skorzystajmy z przedstawienia delty Diraca jako granicy ciągu funkcyjnego i obliczmy

$$\delta(-x) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin[g(-x)]}{\pi(-x)} = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{-\sin(gx)}{-\pi x} = \delta(x).$$

Unormowane funkcje własne pędu będą wtedy miały postać

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Zauważmy, że delta Diraca jest parzysta, tzn.

$$\delta(-x) = \delta(x).$$

Dla dowodu skorzystajmy z przedstawienia delty Diraca jako granicy ciągu funkcyjnego i obliczmy

$$\delta(-x) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin[g(-x)]}{\pi(-x)} = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{-\sin(gx)}{-\pi x} = \delta(x).$$

W takim razie warunek ortogonalności funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}) = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{l}).$$

Z równości

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx = 2\pi \delta(k_x - l_x) = 2\pi \delta(l_x - k_x)$$

W takim razie warunek ortogonalności funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}) = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{l}).$$

Z równości

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx = 2\pi \delta(k_x - l_x) = 2\pi \delta(l_x - k_x)$$

wynika przedstawienie całkowe delty Diraca

$$\delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i(\vec{l} - \vec{k}) \cdot \vec{r}} d^3r = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\vec{l} - \vec{k}) \cdot \vec{r}} d^3r,$$

gdzie całkowanie przebiega po całej przestrzeni.

W takim razie warunek ortogonalności funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$\langle \vec{l} | \vec{k} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}) = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{l}).$$

Z równości

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - l_x)x} dx = 2\pi \delta(k_x - l_x) = 2\pi \delta(l_x - k_x)$$

wynika przedstawienie całkowe delty Diraca

$$\delta^{(3)}(\vec{l} - \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i(\vec{l} - \vec{k}) \cdot \vec{r}} d^3r = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\vec{l} - \vec{k}) \cdot \vec{r}} d^3r,$$

gdzie całkowanie przebiega po całej przestrzeni.

Zupełność funkcji własnych pędu

Z tego przedstawienia delty Diraca będziemy często korzystać.

Wróćmy do cząstki zamkniętej w sześciennym pudełku i obliczmy

$$\sum_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') u_{\vec{k}}(\vec{r}) =$$

Zupełność funkcji własnych pędu

Z tego przedstawienia delty Diraca będziemy często korzystać.
Wróćmy do cząstki zamkniętej w sześciennym pudełku i obliczmy

$$\sum_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') u_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} L^{-\frac{3}{2}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} =$$

Zupełność funkcji własnych pędu

Z tego przedstawienia delty Diraca będziemy często korzystać.
Wróćmy do cząstki zamkniętej w sześciennym pudełku i obliczmy

$$\sum_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') u_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} L^{-\frac{3}{2}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = L^{-3} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}$$

Zupełność funkcji własnych pędu

Z tego przedstawienia delty Diraca będziemy często korzystać.
Wróćmy do cząstki zamkniętej w sześciennym pudełku i obliczmy

$$\sum_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') u_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} L^{-\frac{3}{2}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = L^{-3} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}.$$

Przypomnijmy, że w pudełku wektor falowy cząstki $\vec{k}$ może przyjmować wartości dyskretne

$$\vec{k} = (n_x, n_y, n_z) \frac{2\pi}{L}, \quad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}.$$

Zupełność funkcji własnych pędu

Z tego przedstawienia delty Diraca będziemy często korzystać.
Wróćmy do cząstki zamkniętej w sześciennym pudełku i obliczmy

$$\sum_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') u_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} L^{-\frac{3}{2}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = L^{-3} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}.$$

Przypomnijmy, że w pudełku wektor falowy cząstki $\vec{k}$ może przyjmować wartości dyskretne

$$\vec{k} = (n_x, n_y, n_z) \frac{2\pi}{L}, \quad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}.$$

Dlatego

$$L^{-3} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} = L^{-3} \sum_{n_x, n_y, n_z = -\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2\pi}{L} [n_x(x-x') + n_y(y-y') + n_z(z-z')]}.$$

Zupełność funkcji własnych pędu

Z tego przedstawienia delty Diraca będziemy często korzystać.
Wróćmy do cząstki zamkniętej w sześciennym pudełku i obliczmy

$$\sum_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') u_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} L^{-\frac{3}{2}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} L^{-\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = L^{-3} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}.$$

Przypomnijmy, że w pudełku wektor falowy cząstki $\vec{k}$ może przyjmować wartości dyskretne

$$\vec{k} = (n_x, n_y, n_z) \frac{2\pi}{L}, \quad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}.$$

Dlatego

$$L^{-3} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} = L^{-3} \sum_{n_x, n_y, n_z = -\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2\pi}{L} [n_x(x-x') + n_y(y-y') + n_z(z-z')]}.$$

Zupełność funkcji własnych pędu

Prawą stronę tego równania możemy zapisać w postaci iloczynu trzech sum

$$\begin{aligned} & L^{-3} \sum_{n_x, n_y, n_z = -\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2\pi}{L} [n_x(x-x') + n_y(y-y') + n_z(z-z')]} \\ &= \left(\frac{1}{L} \sum_{n_x = -\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2\pi}{L} n_x(x-x')} \right) \left(\frac{1}{L} \sum_{n_y = -\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2\pi}{L} n_y(y-y')} \right) \\ &\times \left(\frac{1}{L} \sum_{n_z = -\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2\pi}{L} n_z(z-z')} \right) \end{aligned}$$

Jeżeli będziemy zwiększać rozmiary pudełka, tzn. $L \rightarrow \infty$, to sąsiednie dozwolone wartości k_x, k_y, k_z staną się nieskończenie bliskie.

Zupełność funkcji własnych pędu

Prawą stronę tego równania możemy zapisać w postaci iloczynu trzech sum

$$\begin{aligned} & L^{-3} \sum_{n_x, n_y, n_z = -\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2\pi}{L} [n_x(x-x') + n_y(y-y') + n_z(z-z')]} \\ &= \left(\frac{1}{L} \sum_{n_x = -\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2\pi}{L} n_x(x-x')} \right) \left(\frac{1}{L} \sum_{n_y = -\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2\pi}{L} n_y(y-y')} \right) \\ &\times \left(\frac{1}{L} \sum_{n_z = -\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2\pi}{L} n_z(z-z')} \right) \end{aligned}$$

Jeżeli będziemy zwiększać rozmiary pudełka, tzn. $L \rightarrow \infty$, to sąsiednie dozwolone wartości k_x, k_y, k_z staną się nieskończenie bliskie.

Zupełność funkcji własnych pędu

Dlatego w granicy $L \rightarrow \infty$ sumowanie należy zastąpić przez całkowanie

$$\frac{1}{L} \sum_{n_x=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi}{L} n_x(x-x')} \longrightarrow \frac{1}{L} \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_x(x-x')} dk_x,$$

ale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_x(x-x')} dk_x = \delta(x-x') = \delta(x'-x).$$

Zupełność funkcji własnych pędu

Dlatego w granicy $L \rightarrow \infty$ sumowanie należy zastąpić przez całkowanie

$$\frac{1}{L} \sum_{n_x=-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2\pi}{L} n_x (x-x')} \longrightarrow \frac{1}{L} \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_x(x-x')} dk_x,$$

ale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_x(x-x')} dk_x = \delta(x - x') = \delta(x' - x).$$

W rezultacie w nieskończonej przestrzeni otrzymamy

$$\sum_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') u_{\vec{k}}(\vec{r}) \longrightarrow \int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3k = \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}).$$

Zupełność funkcji własnych pędu

Dlatego w granicy $L \rightarrow \infty$ sumowanie należy zastąpić przez całkowanie

$$\frac{1}{L} \sum_{n_x=-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2\pi}{L} n_x (x-x')} \longrightarrow \frac{1}{L} \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_x(x-x')} dk_x,$$

ale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_x(x-x')} dk_x = \delta(x - x') = \delta(x' - x).$$

W rezultacie w nieskończonej przestrzeni otrzymamy

$$\sum_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') u_{\vec{k}}(\vec{r}) \longrightarrow \int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3k = \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}).$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

Zauważmy, że wykorzystując własności delty Diraca i relację zupełności dla funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$\psi(\vec{r}) = \int \psi(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}) d^3 r'$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

Zauważmy, że wykorzystując własności delty Diraca i relację zupełności dla funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}) &= \int \psi(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}) d^3 r' \\ &= \end{aligned}$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

Zauważmy, że wykorzystując własności delty Diraca i relację zupełności dla funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}) &= \int \psi(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}) d^3 r' \\ &= \int \psi(\vec{r}') \left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 k \right) d^3 r'\end{aligned}$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

Zauważmy, że wykorzystując własności delty Diraca i relację zupełności dla funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}) &= \int \psi(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}) d^3 r' \\ &= \int \psi(\vec{r}') \left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 k \right) d^3 r' \\ &= \end{aligned}$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

Zauważmy, że wykorzystując własności delty Diraca i relację zupełności dla funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}) &= \int \psi(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}) d^3 r' \\ &= \int \psi(\vec{r}') \left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 k \right) d^3 r' \\ &= \int \left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r' \right) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 k =\end{aligned}$$

Zauważmy, że wykorzystując własności delty Diraca i relację zupełności dla funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}) &= \int \psi(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}) d^3 r' \\ &= \int \psi(\vec{r}') \left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 k \right) d^3 r' \\ &= \int \left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r' \right) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 k = \int A_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 k,\end{aligned}$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

Zauważmy, że wykorzystując własności delty Diraca i relację zupełności dla funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}) &= \int \psi(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}) d^3 r' \\ &= \int \psi(\vec{r}') \left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 k \right) d^3 r' \\ &= \int \left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r' \right) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 k = \int A_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 k,\end{aligned}$$

gdzie zmieniliśmy kolejność całkowania i wprowadziliśmy oznaczenie

$$A_{\vec{k}} \equiv \int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r' = \langle \vec{k} | \psi \rangle.$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

Zauważmy, że wykorzystując własności delty Diraca i relację zupełności dla funkcji własnych pędu możemy zapisać

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}) &= \int \psi(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}) d^3 r' \\ &= \int \psi(\vec{r}') \left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 k \right) d^3 r' \\ &= \int \left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r' \right) u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 k = \int A_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3 k,\end{aligned}$$

gdzie zmieniliśmy kolejność całkowania i wprowadziliśmy oznaczenie

$$A_{\vec{k}} \equiv \int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r' = \langle \vec{k} | \psi \rangle.$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

W takim razie dowolną funkcję falową $\psi(\vec{r})$ należącą do przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ stanów fizycznych możemy rozwinąć na funkcje własne pędu $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ - które same nie należą do $\mathcal{H}$ - wg. wzoru

$$\psi(\vec{r}) = \int A_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3k, \quad \text{gdzie} \quad A_{\vec{k}} = \langle \vec{k} | \psi \rangle.$$

W przypadku skończonego pudełka o krawędzi L rozwinięcie to miałoby postać

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\vec{r}).$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

W takim razie dowolną funkcję falową $\psi(\vec{r})$ należącą do przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ stanów fizycznych możemy rozwinąć na funkcje własne pędu $u_{\vec{k}}(r)$ - które same nie należą do $\mathcal{H}$ - wg. wzoru

$$\psi(\vec{r}) = \int A_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\vec{r}) d^3k, \quad \text{gdzie} \quad A_{\vec{k}} = \langle \vec{k} | \psi \rangle.$$

W przypadku skończonego pudełka o krawędzi L rozwinięcie to miałoby postać

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\vec{r}).$$

Zgodnie z postulatem Borna gęstość prawdopodobieństwa $P(\vec{k})$ otrzymania w wyniku pomiaru pędu ($\vec{p} = \hbar\vec{k}$) cząstki znajdującej się w stanie kwantowym opisywanym przez funkcję falową $\psi(\vec{r})$ wartości zawartej w przedziale $[\vec{k}, \vec{k} + d\vec{k}]$ jest proporcjonalna do kwadratu modułu współczynnika $A_{\vec{k}}$ rozwinięcia $\psi(\vec{r})$ na funkcje własne pędu.

Wobec tego możemy zapisać

$$P(\vec{k}) = c|A_{\vec{k}}|^2, \quad \text{gdzie } c = \text{const.}$$

Zgodnie z postulatem Borna gęstość prawdopodobieństwa $P(\vec{k})$ otrzymania w wyniku pomiaru pędu ($\vec{p} = \hbar\vec{k}$) cząstki znajdującej się w stanie kwantowym opisywanym przez funkcję falową $\psi(\vec{r})$ wartości zawartej w przedziale $[\vec{k}, \vec{k} + d\vec{k}]$ jest proporcjonalna do kwadratu modułu współczynnika $A_{\vec{k}}$ rozwinięcia $\psi(\vec{r})$ na funkcje własne pędu.

Wobec tego możemy zapisać

$$P(\vec{k}) = c|A_{\vec{k}}|^2, \quad \text{gdzie } c = \text{const.}$$

Pokażemy, że stała c jest równa 1.

Zgodnie z postulatem Borna gęstość prawdopodobieństwa $P(\vec{k})$ otrzymania w wyniku pomiaru pędu ($\vec{p} = \hbar\vec{k}$) cząstki znajdującej się w stanie kwantowym opisywanym przez funkcję falową $\psi(\vec{r})$ wartości zawartej w przedziale $[\vec{k}, \vec{k} + d\vec{k}]$ jest proporcjonalna do kwadratu modułu współczynnika $A_{\vec{k}}$ rozwinięcia $\psi(\vec{r})$ na funkcje własne pędu.

Wobec tego możemy zapisać

$$P(\vec{k}) = c|A_{\vec{k}}|^2, \quad \text{gdzie } c = \text{const.}$$

Pokażemy, że stała c jest równa 1.

W zależności od tego czy $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, czy dyskretne, $P(\vec{k})$ musi spełniać warunek normalizacyjny:

$$\int P(\vec{k}) d^3k = 1 \quad \text{lub} \quad \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}) = 1.$$

Przyjmijmy, że $\vec{k}$ ma rozkład ciągły.

W zależności od tego czy $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, czy dyskretne, $P(\vec{k})$ musi spełniać warunek normalizacyjny:

$$\int P(\vec{k}) d^3k = 1 \quad \text{lub} \quad \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}) = 1.$$

Przyjmijmy, że $\vec{k}$ ma rozkład ciągły. Wówczas

$$\int P(\vec{k}) d^3k =$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

W zależności od tego czy $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, czy dyskretne, $P(\vec{k})$ musi spełniać warunek normalizacyjny:

$$\int P(\vec{k}) d^3k = 1 \quad \text{lub} \quad \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}) = 1.$$

Przyjmijmy, że $\vec{k}$ ma rozkład ciągły. Wówczas

$$\int P(\vec{k}) d^3k = c \int |A_{\vec{k}}|^2 d^3k =$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

W zależności od tego czy $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, czy dyskretne, $P(\vec{k})$ musi spełniać warunek normalizacyjny:

$$\int P(\vec{k}) d^3k = 1 \quad \text{lub} \quad \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}) = 1.$$

Przyjmijmy, że $\vec{k}$ ma rozkład ciągły. Wówczas

$$\int P(\vec{k}) d^3k = c \int |A_{\vec{k}}|^2 d^3k = c \int A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}} d^3k$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

W zależności od tego czy $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, czy dyskretne, $P(\vec{k})$ musi spełniać warunek normalizacyjny:

$$\int P(\vec{k}) d^3k = 1 \quad \text{lub} \quad \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}) = 1.$$

Przyjmijmy, że $\vec{k}$ ma rozkład ciągły. Wówczas

$$\begin{aligned} \int P(\vec{k}) d^3k &= c \int |A_{\vec{k}}|^2 d^3k = c \int A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}} d^3k \\ &= \end{aligned}$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

W zależności od tego czy $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, czy dyskretne, $P(\vec{k})$ musi spełniać warunek normalizacyjny:

$$\int P(\vec{k}) d^3k = 1 \quad \text{lub} \quad \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}) = 1.$$

Przyjmijmy, że $\vec{k}$ ma rozkład ciągły. Wówczas

$$\begin{aligned} \int P(\vec{k}) d^3k &= c \int |A_{\vec{k}}|^2 d^3k = c \int A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}} d^3k \\ &= c \int \left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3r' \right)^* \left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right) d^3k \end{aligned}$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

W zależności od tego czy $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, czy dyskretne, $P(\vec{k})$ musi spełniać warunek normalizacyjny:

$$\int P(\vec{k}) d^3k = 1 \quad \text{lub} \quad \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}) = 1.$$

Przyjmijmy, że $\vec{k}$ ma rozkład ciągły. Wówczas

$$\begin{aligned} \int P(\vec{k}) d^3k &= c \int |A_{\vec{k}}|^2 d^3k = c \int A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}} d^3k \\ &= c \int \left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3r' \right)^* \left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right) d^3k \\ &= \end{aligned}$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

W zależności od tego czy $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, czy dyskretne, $P(\vec{k})$ musi spełniać warunek normalizacyjny:

$$\int P(\vec{k}) d^3k = 1 \quad \text{lub} \quad \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}) = 1.$$

Przyjmijmy, że $\vec{k}$ ma rozkład ciągły. Wówczas

$$\begin{aligned} \int P(\vec{k}) d^3k &= c \int |A_{\vec{k}}|^2 d^3k = c \int A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}} d^3k \\ &= c \int \left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3r' \right)^* \left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right) d^3k \\ &= c \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') d^3r' \int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r d^3k, \end{aligned}$$

Rozwinięcie na funkcje własne pędu

W zależności od tego czy $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, czy dyskretne, $P(\vec{k})$ musi spełniać warunek normalizacyjny:

$$\int P(\vec{k}) d^3k = 1 \quad \text{lub} \quad \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}) = 1.$$

Przyjmijmy, że $\vec{k}$ ma rozkład ciągły. Wówczas

$$\begin{aligned} \int P(\vec{k}) d^3k &= c \int |A_{\vec{k}}|^2 d^3k = c \int A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}} d^3k \\ &= c \int \left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3r' \right)^* \left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right) d^3k \\ &= c \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') d^3r' \int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r d^3k, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że sprzężenie zespolone całki z pewnej funkcji jest równe całce ze sprzężenia zespolonego tej funkcji.

Zadanie. Dlaczego tak jest?

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że sprzężenie zespolone całki z pewnej funkcji jest równe całce ze sprzężenia zespolonego tej funkcji.

Zadanie. Dlaczego tak jest?

Zamieńmy kolejność całkowania

$$\int P(\vec{k}) d^3k =$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że sprzężenie zespolone całki z pewnej funkcji jest równe całce ze sprzężenia zespolonego tej funkcji.

Zadanie. Dlaczego tak jest?

Zamieńmy kolejność całkowania

$$\int P(\vec{k}) d^3k = c \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') d^3r' \int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r d^3k$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że sprzężenie zespolone całki z pewnej funkcji jest równe całce ze sprzężenia zespolonego tej funkcji.

Zadanie. Dlaczego tak jest?

Zamieńmy kolejność całkowania

$$\begin{aligned} \int P(\vec{k}) d^3k &= c \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') d^3r' \int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r d^3k \\ &= \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że sprzężenie zespolone całki z pewnej funkcji jest równe całce ze sprzężenia zespolonego tej funkcji.

Zadanie. Dlaczego tak jest?

Zamieńmy kolejność całkowania

$$\begin{aligned}\int P(\vec{k}) d^3k &= c \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') d^3r' \int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r d^3k \\ &= c \int \int \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}') d^3k \right)}_{\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')} \psi^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}) d^3r' d^3r\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że sprzężenie zespolone całki z pewnej funkcji jest równe całce ze sprzężenia zespolonego tej funkcji.

Zadanie. Dlaczego tak jest?

Zamieńmy kolejność całkowania

$$\begin{aligned}\int P(\vec{k}) d^3k &= c \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') d^3r' \int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r d^3k \\ &= c \int \int \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}') d^3k \right)}_{\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')} \psi^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}) d^3r' d^3r \\ &= \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że sprzężenie zespolone całki z pewnej funkcji jest równe całce ze sprzężenia zespolonego tej funkcji.

Zadanie. Dlaczego tak jest?

Zamieńmy kolejność całkowania

$$\begin{aligned}\int P(\vec{k}) d^3k &= c \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') d^3r' \int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r d^3k \\ &= c \int \int \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}') d^3k \right)}_{\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')} \psi^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}) d^3r' d^3r \\ &= c \int \int \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}) d^3r' d^3r.\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że sprzężenie zespolone całki z pewnej funkcji jest równe całce ze sprzężenia zespolonego tej funkcji.

Zadanie. Dlaczego tak jest?

Zamieńmy kolejność całkowania

$$\begin{aligned}\int P(\vec{k}) d^3k &= c \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') d^3r' \int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r d^3k \\ &= c \int \int \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}') d^3k \right)}_{\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')} \psi^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}) d^3r' d^3r \\ &= c \int \int \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}) d^3r' d^3r.\end{aligned}$$

Skorzystajmy z parzystości delty Diraca i wykonajmy całkowanie po d^3r'

$$\int P(\vec{k}) d^3k = c \int \int \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}) d^3r' d^3r$$

Skorzystajmy z parzystości delty Diraca i wykonajmy całkowanie po d^3r'

$$\int P(\vec{k}) d^3k = c \int \int \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}) d^3r' d^3r$$
$$=$$

Skorzystajmy z parzystości delty Diraca i wykonajmy całkowanie po d^3r'

$$\begin{aligned}\int P(\vec{k}) d^3k &= c \int \int \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}) d^3r' d^3r \\ &= c \int \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r =\end{aligned}$$

Skorzystajmy z parzystości delty Diraca i wykonajmy całkowanie po d^3r'

$$\begin{aligned}\int P(\vec{k}) d^3k &= c \int \int \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}) d^3r' d^3r \\ &= c \int \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r = c \underbrace{\int |\psi(\vec{r})|^2 d^3r}_1 =\end{aligned}$$

Skorzystajmy z parzystości delty Diraca i wykonajmy całkowanie po d^3r'

$$\begin{aligned}\int P(\vec{k}) d^3k &= c \int \int \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}) d^3r' d^3r \\ &= c \int \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r = c \underbrace{\int |\psi(\vec{r})|^2 d^3r}_1 = c = 1,\end{aligned}$$

Skorzystajmy z parzystości delty Diraca i wykonajmy całkowanie po d^3r'

$$\begin{aligned}\int P(\vec{k}) d^3k &= c \int \int \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}) d^3r' d^3r \\ &= c \int \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r = c \underbrace{\int |\psi(\vec{r})|^2 d^3r}_1 = c = 1,\end{aligned}$$

co kończy dowód.

Skorzystajmy z parzystości delty Diraca i wykonajmy całkowanie po d^3r'

$$\begin{aligned}\int P(\vec{k}) d^3k &= c \int \int \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}) d^3r' d^3r \\ &= c \int \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r = c \underbrace{\int |\psi(\vec{r})|^2 d^3r}_1 = c = 1,\end{aligned}$$

co kończy dowód.

Zadanie. Korzystając z bezczasowego równania Schrödingera i z równania doń sprzężonego pokazać, że w przypadku bez degeneracji, funkcje własne energii odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne, tzn.

$$\langle E' | E \rangle = \int u_{E'}^*(\vec{r}) u_E(\vec{r}) d^3r = 0, \quad \text{dla} \quad E' \neq E.$$

Zadanie. Korzystając z bezczasowego równania Schrödingera i z równania doń sprzężonego pokazać, że w przypadku bez degeneracji, funkcje własne energii odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne, tzn.

$$\langle E' | E \rangle = \int u_{E'}^*(\vec{r}) u_E(\vec{r}) d^3r = 0, \quad \text{dla} \quad E' \neq E.$$

W przypadku degeneracji,

Zadanie. Korzystając z bezczasowego równania Schrödingera i z równania doń sprzężonego pokazać, że w przypadku bez degeneracji, funkcje własne energii odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne, tzn.

$$\langle E'|E\rangle = \int u_{E'}^*(\vec{r})u_E(\vec{r})d^3r = 0, \quad \text{dla} \quad E' \neq E.$$

W przypadku degeneracji, kiedy tej samej wartości E odpowiadają dwa lub więcej liniowo niezależnych wektorów własnych $|E1\rangle$, $|E2\rangle, \dots$,

Zadanie. Korzystając z bezczasowego równania Schrödingera i z równania doń sprzężonego pokazać, że w przypadku bez degeneracji, funkcje własne energii odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne, tzn.

$$\langle E'|E\rangle = \int u_{E'}^*(\vec{r})u_E(\vec{r})d^3r = 0, \quad \text{dla } E' \neq E.$$

W przypadku degeneracji, kiedy tej samej wartości E odpowiadają dwa lub więcej liniowo niezależnych wektorów własnych $|E1\rangle$, $|E2\rangle, \dots$, możemy dokonać **ortogonalizacji** tych wektorów.

Zadanie. Korzystając z bezczasowego równania Schrödingera i z równania doń sprzężonego pokazać, że w przypadku bez degeneracji, funkcje własne energii odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne, tzn.

$$\langle E' | E \rangle = \int u_{E'}^*(\vec{r}) u_E(\vec{r}) d^3r = 0, \quad \text{dla} \quad E' \neq E.$$

W przypadku degeneracji, kiedy tej samej wartości E odpowiadają dwa lub więcej liniowo niezależnych wektorów własnych $|E1\rangle$, $|E2\rangle, \dots$, możemy dokonać **ortogonalizacji** tych wektorów.

Np. w przypadku dwukrotnej degeneracji możemy utworzyć kombinację liniową liniowo niezależnych wektorów własnych

$$|E\rangle = a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle$$

i zażądać aby wektor $|E\rangle$ był ortogonalny do wektora $|E1\rangle$,

Np. w przypadku dwukrotnej degeneracji możemy utworzyć kombinację liniową liniowo niezależnych wektorów własnych

$$|E\rangle = a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle$$

i zażądać aby wektor $|E\rangle$ był ortogonalny do wektora $|E1\rangle$, tzn. aby $\langle E1|E\rangle = 0$.

Np. w przypadku dwukrotnej degeneracji możemy utworzyć kombinację liniową liniowo niezależnych wektorów własnych

$$|E\rangle = a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle$$

i zażądać aby wektor $|E\rangle$ był ortogonalny do wektora $|E1\rangle$, tzn. aby $\langle E1|E\rangle = 0$. Wówczas

$$\langle E1|E\rangle =$$

Np. w przypadku dwukrotnej degeneracji możemy utworzyć kombinację liniową liniowo niezależnych wektorów własnych

$$|E\rangle = a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle$$

i zażądać aby wektor $|E\rangle$ był ortogonalny do wektora $|E1\rangle$, tzn. aby $\langle E1|E\rangle = 0$. Wówczas

$$\langle E1|E\rangle = \langle E1| (a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle) =$$

Np. w przypadku dwukrotnej degeneracji możemy utworzyć kombinację liniową liniowo niezależnych wektorów własnych

$$|E\rangle = a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle$$

i zażądać aby wektor $|E\rangle$ był ortogonalny do wektora $|E1\rangle$, tzn. aby $\langle E1|E\rangle = 0$. Wówczas

$$\langle E1|E\rangle = \langle E1|(a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle) = a_1 \langle E1|E1\rangle + a_2 \langle E1|E2\rangle = 0$$

Np. w przypadku dwukrotnej degeneracji możemy utworzyć kombinację liniową liniowo niezależnych wektorów własnych

$$|E\rangle = a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle$$

i zażądać aby wektor $|E\rangle$ był ortogonalny do wektora $|E1\rangle$, tzn. aby $\langle E1|E\rangle = 0$. Wówczas

$$\begin{aligned}\langle E1|E\rangle &= \langle E1|(a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle) = a_1 \langle E1|E1\rangle + a_2 \langle E1|E2\rangle = 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} &= -\frac{\langle E1|E2\rangle}{\langle E1|E1\rangle}.\end{aligned}$$

Np. w przypadku dwukrotnej degeneracji możemy utworzyć kombinację liniową liniowo niezależnych wektorów własnych

$$|E\rangle = a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle$$

i zażądać aby wektor $|E\rangle$ był ortogonalny do wektora $|E1\rangle$, tzn. aby $\langle E1|E\rangle = 0$. Wówczas

$$\begin{aligned}\langle E1|E\rangle &= \langle E1|(a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle) = a_1 \langle E1|E1\rangle + a_2 \langle E1|E2\rangle = 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} &= -\frac{\langle E1|E2\rangle}{\langle E1|E1\rangle}.\end{aligned}$$

Jeśli wybierzemy współczynniki a_1 , a_2 tak, aby spełniały ten związek,

Np. w przypadku dwukrotnej degeneracji możemy utworzyć kombinację liniową liniowo niezależnych wektorów własnych

$$|E\rangle = a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle$$

i zażądać aby wektor $|E\rangle$ był ortogonalny do wektora $|E1\rangle$, tzn. aby $\langle E1|E\rangle = 0$. Wówczas

$$\begin{aligned}\langle E1|E\rangle &= \langle E1|(a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle) = a_1 \langle E1|E1\rangle + a_2 \langle E1|E2\rangle = 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} &= -\frac{\langle E1|E2\rangle}{\langle E1|E1\rangle}.\end{aligned}$$

Jeśli wybierzemy współczynniki a_1 , a_2 tak, aby spełniały ten związek, to wektor $|E\rangle$ będzie ortogonalny do wektora $|E1\rangle$.

Np. w przypadku dwukrotnej degeneracji możemy utworzyć kombinację liniową liniowo niezależnych wektorów własnych

$$|E\rangle = a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle$$

i zażądać aby wektor $|E\rangle$ był ortogonalny do wektora $|E1\rangle$, tzn. aby $\langle E1|E\rangle = 0$. Wówczas

$$\begin{aligned}\langle E1|E\rangle &= \langle E1|(a_1 |E1\rangle + a_2 |E2\rangle) = a_1 \langle E1|E1\rangle + a_2 \langle E1|E2\rangle = 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} &= -\frac{\langle E1|E2\rangle}{\langle E1|E1\rangle}.\end{aligned}$$

Jeśli wybierzemy współczynniki a_1 , a_2 tak, aby spełniały ten związek, to wektor $|E\rangle$ będzie ortogonalny do wektora $|E1\rangle$.

Taką procedurę ortogonalizacyjną można łatwo uogólnić na dowolną liczbę wektorów (funkcji) liniowo niezależnych.

W przypadku z degeneracją wektory (funkcje) własne energii będą spełniać następującą relację ortogonalności

$$\langle E' s' | E s \rangle = \int u_{E' s'}^*(\vec{r}) u_{E s}(\vec{r}) d^3 r = \delta_{E' E} \delta_{s' s},$$

Taką procedurę ortogonalizacyjną można łatwo uogólnić na dowolną liczbę wektorów (funkcji) liniowo niezależnych. W przypadku z degeneracją wektory (funkcje) własne energii będą spełniać następującą relację ortogonalności

$$\langle E's'|Es\rangle = \int u_{E's'}^*(\vec{r})u_{Es}(\vec{r})d^3r = \delta_{E'E}\delta_{s's},$$

gdzie $\delta_{E'E}$ jest deltą Kroneckera lub Diraca,

Taką procedurę ortogonalizacyjną można łatwo uogólnić na dowolną liczbę wektorów (funkcji) liniowo niezależnych. W przypadku z degeneracją wektory (funkcje) własne energii będą spełniać następującą relację ortogonalności

$$\langle E's'|Es\rangle = \int u_{E's'}^*(\vec{r})u_{Es}(\vec{r})d^3r = \delta_{E'E}\delta_{s's},$$

gdzie $\delta_{E'E}$ jest deltą Kroneckera lub Diraca, zależnie od tego czy mamy do czynienia z widmem energii dyskretnym lub ciągłym,

Taką procedurę ortogonalizacyjną można łatwo uogólnić na dowolną liczbę wektorów (funkcji) liniowo niezależnych. W przypadku z degeneracją wektory (funkcje) własne energii będą spełniać następującą relację ortogonalności

$$\langle E' s' | E s \rangle = \int u_{E' s'}^*(\vec{r}) u_{E s}(\vec{r}) d^3 r = \delta_{E' E} \delta_{s' s},$$

gdzie $\delta_{E' E}$ jest deltą Kroneckera lub Diraca, zależnie od tego czy mamy do czynienia z widmem energii dyskretnym lub ciągłym, wskaźniki s' i s numerują unormowane wektory (funkcje) własne odpowiadające zdegenerowanym wartościom własnym E' i E .

Taką procedurę ortogonalizacyjną można łatwo uogólnić na dowolną liczbę wektorów (funkcji) liniowo niezależnych. W przypadku z degeneracją wektory (funkcje) własne energii będą spełniać następującą relację ortogonalności

$$\langle E's' | Es \rangle = \int u_{E's'}^*(\vec{r}) u_{Es}(\vec{r}) d^3r = \delta_{E'E} \delta_{s's},$$

gdzie $\delta_{E'E}$ jest deltą Kroneckera lub Diraca, zależnie od tego czy mamy do czynienia z widmem energii dyskretnym lub ciągłym, wskaźniki s' i s numerują unormowane wektory (funkcje) własne odpowiadające zdegenerowanym wartościom własnym E' i E .

Funkcje własne energii tworzą układ ortogonalny i zupełny w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ stanów kwantowomechanicznych, dlatego również mogą służyć jako baza rozwinięć ortogonalnych.

Funkcje własne energii tworzą układ ortogonalny i zupełny w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ stanów kwantowomechanicznych, dlatego również mogą służyć jako baza rozwinięć ortogonalnych.

Wartość oczekiwana operatora pędu

Wartość oczekiwaną operatora pędu obliczamy z definicji wg. wzoru

$$\langle \vec{p} \rangle = \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} P(\vec{k}),$$

jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości dyskretne, lub

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \hbar \vec{k} P(\vec{k}) d^3k,$$

jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe.

Wartość oczekiwana operatora pędu

Wartość oczekiwaną operatora pędu obliczamy z definicji wg. wzoru

$$\langle \vec{p} \rangle = \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} P(\vec{k}),$$

jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości dyskretne, lub

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \hbar \vec{k} P(\vec{k}) d^3k,$$

jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe.

Wartość oczekiwana operatora pędu

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \hbar \vec{k} P(\vec{k}) d^3k =$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \hbar \vec{k} P(\vec{k}) d^3k = \hbar \int \vec{k} A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}} d^3k$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$\begin{aligned}\langle \vec{p} \rangle &= \int \hbar \vec{k} P(\vec{k}) d^3 k = \hbar \int \vec{k} A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}} d^3 k \\ &= \end{aligned}$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$\begin{aligned}\langle \vec{p} \rangle &= \int \hbar \vec{k} P(\vec{k}) d^3k = \hbar \int \vec{k} A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}} d^3k \\ &= \hbar \int \vec{k} \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') d^3r' \right)}_{A_{\vec{k}}^*} \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right)}_{A_{\vec{k}}} d^3k\end{aligned}$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$\begin{aligned}\langle \vec{p} \rangle &= \int \hbar \vec{k} P(\vec{k}) d^3k = \hbar \int \vec{k} A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}} d^3k \\ &= \hbar \int \vec{k} \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') d^3r' \right)}_{A_{\vec{k}}^*} \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right)}_{A_{\vec{k}}} d^3k \\ &= \end{aligned}$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$\begin{aligned}\langle \vec{p} \rangle &= \int \hbar \vec{k} P(\vec{k}) d^3k = \hbar \int \vec{k} A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}} d^3k \\&= \hbar \int \vec{k} \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') d^3r' \right)}_{A_{\vec{k}}^*} \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right)}_{A_{\vec{k}}} d^3k \\&= \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \hbar \vec{k} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r d^3r' d^3k.\end{aligned}$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$\begin{aligned}\langle \vec{p} \rangle &= \int \hbar \vec{k} P(\vec{k}) d^3k = \hbar \int \vec{k} A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}} d^3k \\&= \hbar \int \vec{k} \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') d^3r' \right)}_{A_{\vec{k}}^*} \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right)}_{A_{\vec{k}}} d^3k \\&= \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \hbar \vec{k} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r d^3r' d^3k.\end{aligned}$$

Dokonajmy zespolonego sprzężenia równania własnego operatora pędu

$$-i\hbar \vec{\nabla} u_{\vec{k}}(\vec{r}) =$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$\begin{aligned}\langle \vec{p} \rangle &= \int \hbar \vec{k} P(\vec{k}) d^3k = \hbar \int \vec{k} A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}} d^3k \\&= \hbar \int \vec{k} \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') d^3r' \right)}_{A_{\vec{k}}^*} \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right)}_{A_{\vec{k}}} d^3k \\&= \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \hbar \vec{k} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r d^3r' d^3k.\end{aligned}$$

Dokonajmy zespolonego sprzężenia równania własnego operatora pędu

$$-i\hbar \vec{\nabla} u_{\vec{k}}(\vec{r}) = \hbar \vec{k} u_{\vec{k}}(\vec{r})$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$\begin{aligned}\langle \vec{p} \rangle &= \int \hbar \vec{k} P(\vec{k}) d^3k = \hbar \int \vec{k} A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}} d^3k \\&= \hbar \int \vec{k} \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') d^3r' \right)}_{A_{\vec{k}}^*} \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right)}_{A_{\vec{k}}} d^3k \\&= \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \hbar \vec{k} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r d^3r' d^3k.\end{aligned}$$

Dokonajmy zespolonego sprzężenia równania własnego operatora pędu

$$\begin{aligned}-i\hbar \vec{\nabla} u_{\vec{k}}(\vec{r}) &= \hbar \vec{k} u_{\vec{k}}(\vec{r}) \\i\hbar \vec{\nabla} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) &= -\hbar \vec{k} u_{\vec{k}}^*(\vec{r})\end{aligned}$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$\begin{aligned}\langle \vec{p} \rangle &= \int \hbar \vec{k} P(\vec{k}) d^3k = \hbar \int \vec{k} A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}} d^3k \\&= \hbar \int \vec{k} \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') d^3r' \right)}_{A_{\vec{k}}^*} \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right)}_{A_{\vec{k}}} d^3k \\&= \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \hbar \vec{k} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r d^3r' d^3k.\end{aligned}$$

Dokonajmy zespolonego sprzężenia równania własnego operatora pędu

$$\begin{aligned}-i\hbar \vec{\nabla} u_{\vec{k}}(\vec{r}) &= \hbar \vec{k} u_{\vec{k}}(\vec{r}) \\i\hbar \vec{\nabla} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) &= \end{aligned}$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$\begin{aligned}\langle \vec{p} \rangle &= \int \hbar \vec{k} P(\vec{k}) d^3k = \hbar \int \vec{k} A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}} d^3k \\&= \hbar \int \vec{k} \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') d^3r' \right)}_{A_{\vec{k}}^*} \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right)}_{A_{\vec{k}}} d^3k \\&= \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \hbar \vec{k} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r d^3r' d^3k.\end{aligned}$$

Dokonajmy zespolonego sprzężenia równania własnego operatora pędu

$$\begin{aligned}-i\hbar \vec{\nabla} u_{\vec{k}}(\vec{r}) &= \hbar \vec{k} u_{\vec{k}}(\vec{r}) \\i\hbar \vec{\nabla} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) &= \hbar \vec{k} u_{\vec{k}}^*(\vec{r})\end{aligned}$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

Jeśli $\vec{k}$ przyjmuje wartości ciągłe, to

$$\begin{aligned}\langle \vec{p} \rangle &= \int \hbar \vec{k} P(\vec{k}) d^3k = \hbar \int \vec{k} A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}} d^3k \\&= \hbar \int \vec{k} \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') d^3r' \right)}_{A_{\vec{k}}^*} \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \right)}_{A_{\vec{k}}} d^3k \\&= \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \hbar \vec{k} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r d^3r' d^3k.\end{aligned}$$

Dokonajmy zespolonego sprzężenia równania własnego operatora pędu

$$\begin{aligned}-i\hbar \vec{\nabla} u_{\vec{k}}(\vec{r}) &= \hbar \vec{k} u_{\vec{k}}(\vec{r}) \\i\hbar \vec{\nabla} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) &= \hbar \vec{k} u_{\vec{k}}^*(\vec{r})\end{aligned}$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

i skorzystajmy z niego we wzorze na $\langle \vec{p} \rangle$

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') i\hbar \vec{\nabla} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r d^3r' d^3k.$$

Wykonajmy całkowanie przez części w całce

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r =$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

i skorzystajmy z niego we wzorze na $\langle \vec{p} \rangle$

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') i\hbar \vec{\nabla} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r d^3r' d^3k.$$

Wykonajmy całkowanie przez części w całce

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r = \int_{\Omega} \vec{\nabla} (u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r})) d^3r - \int_{\Omega} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) d^3r$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

i skorzystajmy z niego we wzorze na $\langle \vec{p} \rangle$

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') i\hbar \vec{\nabla} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r d^3r' d^3k.$$

Wykonajmy całkowanie przez części w całce

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{\nabla} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r &= \int_{\Omega} \vec{\nabla} (u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r})) d^3r - \int_{\Omega} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) d^3r \\ &= \end{aligned}$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

i skorzystajmy z niego we wzorze na $\langle \vec{p} \rangle$

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \int \int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') i\hbar \vec{\nabla} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r d^3r' d^3k.$$

Wykonajmy całkowanie przez części w całce

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{\nabla} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r &= \int_{\Omega} \vec{\nabla} (u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r})) d^3r - \int_{\Omega} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) d^3r \\ &= \underbrace{\int_{\Gamma(\Omega)} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d\Gamma}_0 - \int_{\Omega} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) d^3r, \end{aligned}$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

i skorzystajmy z niego we wzorze na $\langle \vec{p} \rangle$

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \int \int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') i\hbar \vec{\nabla} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r d^3r' d^3k.$$

Wykonajmy całkowanie przez części w całce

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{\nabla} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r &= \int_{\Omega} \vec{\nabla} (u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r})) d^3r - \int_{\Omega} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) d^3r \\ &= \underbrace{\int_{\Gamma(\Omega)} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d\Gamma}_0 - \int_{\Omega} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) d^3r, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z twierdzenia Stokesa oraz z faktu, że funkcja falowa musi znikać na brzegu $\Gamma(\Omega)$

Wartość oczekiwana operatora pędu

i skorzystajmy z niego we wzorze na $\langle \vec{p} \rangle$

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') i \hbar \vec{\nabla} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r d^3r' d^3k.$$

Wykonajmy całkowanie przez części w całce

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{\nabla} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r &= \int_{\Omega} \vec{\nabla} (u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r})) d^3r - \int_{\Omega} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) d^3r \\ &= \underbrace{\int_{\Gamma(\Omega)} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d\Gamma}_0 - \int_{\Omega} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) d^3r, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z twierdzenia Stokesa oraz z faktu, że funkcja falowa musi zniknąć na brzegu $\Gamma(\Omega)$

Wartość oczekiwana operatora pędu

dowolnie dużego (nieskończonego) obszaru całkowania Ω .

Wobec tego

$$\langle \vec{p} \rangle =$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

dowolnie dużego (nieskończonego) obszaru całkowania Ω .

Wobec tego

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \left(-i\hbar u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) \right) d^3r d^3r' d^3k$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

dowolnie dużego (nieskończonego) obszaru całkowania Ω .

Wobec tego

$$\begin{aligned}\langle \vec{p} \rangle &= \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \left(-i\hbar u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) \right) d^3r d^3r' d^3k \\ &= \end{aligned}$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

dowolnie dużego (nieskończonego) obszaru całkowania Ω .

Wobec tego

$$\begin{aligned}\langle \vec{p} \rangle &= \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \left(-i\hbar u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) \right) d^3r d^3r' d^3k \\ &= \int \int \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}') d^3k \right)}_{\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')} \psi^*(\vec{r}') \left(-i\hbar \vec{\nabla} \right) \psi(\vec{r}) d^3r d^3r' .\end{aligned}$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

dowolnie dużego (nieskończonego) obszaru całkowania Ω .

Wobec tego

$$\begin{aligned}\langle \vec{p} \rangle &= \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \left(-i\hbar u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) \right) d^3r d^3r' d^3k \\ &= \int \int \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}') d^3k \right)}_{\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')} \psi^*(\vec{r}') \left(-i\hbar \vec{\nabla} \right) \psi(\vec{r}) d^3r d^3r' .\end{aligned}$$

Skorzystajmy z parzystości delty Diraca i wykonajmy całkowanie po d^3r'

$$\langle \vec{p} \rangle =$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

dowolnie dużego (nieskończonego) obszaru całkowania Ω .

Wobec tego

$$\begin{aligned}\langle \vec{p} \rangle &= \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \left(-i\hbar u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) \right) d^3r d^3r' d^3k \\ &= \int \int \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}') d^3k \right)}_{\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')} \psi^*(\vec{r}') \left(-i\hbar \vec{\nabla} \right) \psi(\vec{r}) d^3r d^3r'.\end{aligned}$$

Skorzystajmy z parzystości delty Diraca i wykonajmy całkowanie po d^3r'

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \left(\int \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}) \psi^*(\vec{r}') d^3r' \right) \left(-i\hbar \vec{\nabla} \right) \psi(\vec{r}) d^3r,$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

dowolnie dużego (nieskończonego) obszaru całkowania Ω .

Wobec tego

$$\begin{aligned}\langle \vec{p} \rangle &= \int \int \int u_{\vec{k}}(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}') \left(-i\hbar u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) \right) d^3r d^3r' d^3k \\ &= \int \int \underbrace{\left(\int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}}(\vec{r}') d^3k \right)}_{\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')} \psi^*(\vec{r}') \left(-i\hbar \vec{\nabla} \right) \psi(\vec{r}) d^3r d^3r'.\end{aligned}$$

Skorzystajmy z parzystości delty Diraca i wykonajmy całkowanie po d^3r'

$$\langle \vec{p} \rangle = \int \left(\int \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}) \psi^*(\vec{r}') d^3r' \right) \left(-i\hbar \vec{\nabla} \right) \psi(\vec{r}) d^3r,$$

Wartość oczekiwana operatora pędu

wówczas otrzymamy ostateczny wzór na wartość oczekiwaną operatora pędu w stanie kwantowym opisywanym funkcją falową $\psi(\vec{r})$

$$\langle \vec{p} \rangle \equiv \langle \psi | \vec{p} | \psi \rangle = \int \psi^*(\vec{r}) (-i\hbar \vec{\nabla}) \psi(\vec{r}) d^3r.$$

Widzimy, że operator pędu działa tylko na funkcję $\psi(\vec{r})$ a nie na jej sprzężenie zespolone $\psi^*(\vec{r})$.

Wartość oczekiwana operatora pędu

wówczas otrzymamy ostateczny wzór na wartość oczekiwaną operatora pędu w stanie kwantowym opisywanym funkcją falową $\psi(\vec{r})$

$$\langle \vec{p} \rangle \equiv \langle \psi | \vec{p} | \psi \rangle = \int \psi^*(\vec{r}) (-i\hbar \vec{\nabla}) \psi(\vec{r}) d^3r.$$

Widzimy, że operator pędu działa tylko na funkcję $\psi(\vec{r})$ a nie na jej sprzężenie zespolone $\psi^*(\vec{r})$.

Jest to uniwersalna reguła.

Wartość oczekiwana operatora pędu

wówczas otrzymamy ostateczny wzór na wartość oczekiwaną operatora pędu w stanie kwantowym opisywanym funkcją falową $\psi(\vec{r})$

$$\langle \vec{p} \rangle \equiv \langle \psi | \vec{p} | \psi \rangle = \int \psi^*(\vec{r}) (-i\hbar \vec{\nabla}) \psi(\vec{r}) d^3r.$$

Widzimy, że operator pędu działa tylko na funkcję $\psi(\vec{r})$ a nie na jej sprzężenie zespolone $\psi^*(\vec{r})$.

Jest to uniwersalna reguła. Wartość oczekiwaną operatora A w stanie kwantowym opisywanym przez $|\psi\rangle$ obliczamy według wzoru

$$\langle A \rangle \equiv \langle \psi | A | \psi \rangle ,$$

tnz. działając operatorem A na prawo na stan $|\psi\rangle$.

Wartość oczekiwana operatora pędu

wówczas otrzymamy ostateczny wzór na wartość oczekiwaną operatora pędu w stanie kwantowym opisywanym funkcją falową $\psi(\vec{r})$

$$\langle \vec{p} \rangle \equiv \langle \psi | \vec{p} | \psi \rangle = \int \psi^*(\vec{r}) (-i\hbar \vec{\nabla}) \psi(\vec{r}) d^3r.$$

Widzimy, że operator pędu działa tylko na funkcję $\psi(\vec{r})$ a nie na jej sprzężenie zespolone $\psi^*(\vec{r})$.

Jest to uniwersalna reguła. Wartość oczekiwaną operatora A w stanie kwantowym opisywanym przez $|\psi\rangle$ obliczamy według wzoru

$$\langle A \rangle \equiv \langle \psi | A | \psi \rangle ,$$

tzn. działając operatorem A na prawo na stan $|\psi\rangle$.

Podobną konwencję przyjmujemy dla elementu macierzowego operatora A

$$\langle \phi | A | \psi \rangle ,$$

który określa amplitudę prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy stanami kwantowymi $|\psi\rangle$ i $|\phi\rangle$, co oznacza, że gęstość prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy stanami kwantowymi $|\psi\rangle$ i $|\phi\rangle$ wyraża się wzorem

$$|\langle \phi | A | \psi \rangle|^2 .$$

Wartość oczekiwana operatora

Podobną konwencję przyjmujemy dla elementu macierzowego operatora A

$$\langle \phi | A | \psi \rangle ,$$

który określa **amplitudę prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy stanami kwantowymi $|\psi\rangle$ i $|\phi\rangle$** , co oznacza, że **gęstość prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy stanami kwantowymi $|\psi\rangle$ i $|\phi\rangle$** wyraża się wzorem

$$|\langle \phi | A | \psi \rangle|^2 .$$

Gdybyśmy jednak chcieli podzielać operatorem A na lewo, to musimy dokonać jego sprzężenia hermitowskiego,

Wartość oczekiwana operatora

Podobną konwencję przyjmujemy dla elementu macierzowego operatora A

$$\langle \phi | A | \psi \rangle ,$$

który określa **amplitudę prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy stanami kwantowymi $|\psi\rangle$ i $|\phi\rangle$** , co oznacza, że **gęstość prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy stanami kwantowymi $|\psi\rangle$ i $|\phi\rangle$** wyraża się wzorem

$$|\langle \phi | A | \psi \rangle|^2 .$$

Gdybyśmy jednak chcieli podzielać operatorem A na lewo, to musimy dokonać jego sprzężenia hermitowskiego,

Wartość oczekiwana operatora

zgodnie ze wprowadzonym uprzednio wzorem definicyjnym:

$$(\varphi|A\psi) = (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^*$$

który w notacji Diraca przyjmuje postać

$$\langle\varphi|A|\psi\rangle = \left(\langle\varphi|A^\dagger\right)|\psi\rangle = \langle\psi|A^\dagger|\varphi\rangle^*.$$

Wartość oczekiwana operatora

zgodnie ze wprowadzonym uprzednio wzorem definicyjnym:

$$(\varphi|A\psi) = (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^*$$

który w notacji Diraca przyjmuje postać

$$\langle\varphi|A|\psi\rangle = \left(\langle\varphi|A^\dagger\right)|\psi\rangle = \langle\psi|A^\dagger|\varphi\rangle^*.$$

W reprezentacji położeniowej

$$\langle\vec{r}|\psi\rangle \equiv \psi(\vec{r})$$

Wartość oczekiwana operatora

zgodnie ze wprowadzonym uprzednio wzorem definicyjnym:

$$(\varphi|A\psi) = (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^*$$

który w notacji Diraca przyjmuje postać

$$\langle\varphi|A|\psi\rangle = \left(\langle\varphi|A^\dagger\right)|\psi\rangle = \langle\psi|A^\dagger|\varphi\rangle^*.$$

W reprezentacji położeniowej

$$\langle\vec{r}|\psi\rangle \equiv \psi(\vec{r})$$

wartość oczekiwaną operatora A znajdujemy obliczając całkę

$$\langle A \rangle \equiv \langle\psi|A|\psi\rangle = \int \psi^*(\vec{r})A\psi(\vec{r}) d^3r.$$

Wartość oczekiwana operatora

zgodnie ze wprowadzonym uprzednio wzorem definicyjnym:

$$(\varphi|A\psi) = (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^*$$

który w notacji Diraca przyjmuje postać

$$\langle\varphi|A|\psi\rangle = \left(\langle\varphi|A^\dagger\right)|\psi\rangle = \langle\psi|A^\dagger|\varphi\rangle^*.$$

W reprezentacji położeniowej

$$\langle\vec{r}|\psi\rangle \equiv \psi(\vec{r})$$

wartość oczekiwaną operatora A znajdujemy obliczając całkę

$$\langle A \rangle \equiv \langle\psi|A|\psi\rangle = \int \psi^*(\vec{r})A\psi(\vec{r}) d^3r.$$