Postulaty interpretacyjne mechaniki kwantowej

Wykład 6

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

Znajomość funkcji falowej cząstki o masie m znajdującej się w polu siły $\vec{F}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla} V(\vec{r},t)$ powinna nam dać możliwie dokładny, na tyle na ile pozwalają na to relacje nieoznaczoności, Znajomość funkcji falowej cząstki o masie m znajdującej się w polu siły $\vec{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}, t)$ powinna nam dać możliwie dokładny, na tyle na ile pozwalają na to relacje nieoznaczoności, opis jej ruchu.

Znajomość funkcji falowej cząstki o masie m znajdującej się w polu siły $\vec{F}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla} V(\vec{r},t)$ powinna nam dać możliwie dokładny, na tyle na ile pozwalają na to relacje nieoznaczoności, opis jej ruchu.
Funkcja falowa $\psi(\vec{r},t)$ jest rozwiązaniem równania falowego Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t).$$

Znajomość funkcji falowej cząstki o masie m znajdującej się w polu siły $\vec{F}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla} V(\vec{r},t)$ powinna nam dać możliwie dokładny, na tyle na ile pozwalają na to relacje nieoznaczoności, opis jej ruchu. Funkcja falowa $\psi(\vec{r},t)$ jest rozwiązaniem równania falowego Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t).$$

Postulat I. Zmienne dynamiczne opisujące ruch cząstki reprezentujemy przez operatory liniowe działające w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ wszystkich możliwych stanów kwantowych cząstki.

Znajomość funkcji falowej cząstki o masie m znajdującej się w polu siły $\vec{F}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla} V(\vec{r},t)$ powinna nam dać możliwie dokładny, na tyle na ile pozwalają na to relacje nieoznaczoności, opis jej ruchu. Funkcja falowa $\psi(\vec{r},t)$ jest rozwiązaniem równania falowego Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 \psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t).$$

Postulat I. Zmienne dynamiczne opisujące ruch cząstki reprezentujemy przez operatory liniowe działające w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ wszystkich możliwych stanów kwantowych cząstki. Np. operator energii $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, operator pędu $-i\hbar\vec{\nabla}$, albo operator położenia $\vec{r}$.

Znajomość funkcji falowej cząstki o masie m znajdującej się w polu siły $\vec{F}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}V(\vec{r},t)$ powinna nam dać możliwie dokładny, na tyle na ile pozwalają na to relacje nieoznaczoności, opis jej ruchu. Funkcja falowa $\psi(\vec{r},t)$ jest rozwiązaniem równania falowego Schrödingera

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t).$$

Postulat I. Zmienne dynamiczne opisujące ruch cząstki reprezentujemy przez operatory liniowe działające w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ wszystkich możliwych stanów kwantowych cząstki. Np. operator energii $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, operator pędu $-i\hbar\vec{\nabla}$, albo operator położenia $\vec{r}$.

Rozważmy równanie własne operatora liniowego Ω reprezentującego pewną zmienną dynamiczną

$$\Omega \left|\mu\right\rangle = \omega_\mu \left|\mu\right\rangle,$$

gdzie μ jest pewną (jedną lub więcej) liczbą kwantową, od której zależy wartość własna ω_μ.

Postulat II. W wyniku dokładnego pomiaru zmiennej dynamicznej reprezentowanej przez operator Ω możemy otrzymać tylko jedną z jego wartości własnych ω_μ.

Rozważmy równanie własne operatora liniowego Ω reprezentującego pewną zmienną dynamiczną

$$\Omega |\mu\rangle = \omega_\mu |\mu\rangle ,$$

gdzie μ jest pewną (jedną lub więcej) liczbą kwantową, od której zależy wartość własna ω_μ.

Postulat II. W wyniku dokładnego pomiaru zmiennej dynamicznej reprezentowanej przez operator Ω możemy otrzymać tylko jedną z jego wartości własnych ω_μ.

Jeżeli wartość własna ω_μ podlega pomiarowi, to musi być ona liczbą rzeczywistą, co implikuje, że operator Ω reprezentujący zmienną dynamiczną musi być hermitowski.

Rozważmy równanie własne operatora liniowego Ω reprezentującego pewną zmienną dynamiczną

$$\Omega \left|\mu\right\rangle = \omega_\mu \left|\mu\right\rangle,$$

gdzie μ jest pewną (jedną lub więcej) liczbą kwantową, od której zależy wartość własna ω_μ.

Postulat II. W wyniku dokładnego pomiaru zmiennej dynamicznej reprezentowanej przez operator Ω możemy otrzymać tylko jedną z jego wartości własnych ω_μ.

Jeżeli wartość własna ω_μ podlega pomiarowi, to musi być ona liczbą rzeczywistą, co implikuje, że operator Ω reprezentujący zmienną dynamiczną musi być hermitowski.

Wyobraźmy sobie dużą liczbę kopii identycznych, niezależnych, nie nakładających się obszarów przestrzeni.

Każdy obszar jest dostatecznie duży, aby były w nim widoczne wszystkie fizycznie interesujące własności ruchu cząstki.

Wyobraźmy sobie dużą liczbę kopii identycznych, niezależnych, nie nakładających się obszarów przestrzeni.
Każdy obszar jest dostatecznie duży, aby były w nim widoczne wszystkie fizycznie interesujące własności ruchu cząstki.
W każdym obszarze rozpatrywanego układu funkcja falowa $\psi(\vec{r}, t)$ bedąca rozwiązaniem równania Schrödingera daje pełny kwantowomechaniczny opis cząstki o masie m i energii potencjalnej $V(\vec{r}, t)$.

Wyobraźmy sobie dużą liczbę kopii identycznych, niezależnych, nie nakładających się obszarów przestrzeni.
Każdy obszar jest dostatecznie duży, aby były w nim widoczne wszystkie fizycznie interesujące własności ruchu cząstki.
W każdym obszarze rozpatrywanego układu funkcja falowa $\psi(\vec{r}, t)$ bedąca rozwiązaniem równania Schrödingera daje pełny kwantowomechaniczny opis cząstki o masie m i energii potencjalnej $V(\vec{r}, t)$. Położenie cząstki mierzymy względem umownego środka danego obszaru.

Wyobraźmy sobie dużą liczbę kopii identycznych, niezależnych, nie nakładających się obszarów przestrzeni.
Każdy obszar jest dostatecznie duży, aby były w nim widoczne wszystkie fizycznie interesujące własności ruchu cząstki.
W każdym obszarze rozpatrywanego układu funkcja falowa $\psi(\vec{r}, t)$ bedąca rozwiązaniem równania Schrödingera daje pełny kwantowomechaniczny opis cząstki o masie m i energii potencjalnej $V(\vec{r}, t)$. Położenie cząstki mierzymy względem umownego środka danego obszaru.
Alternatywnie możemy rozpatrywać wiele niezależnych powtórzeń tego samego ruchu w jednym obszarze przestrzeni, mierząc czas zawsze od pewnej konkretnej chwili początkowej.

Wyobraźmy sobie dużą liczbę kopii identycznych, niezależnych, nie nakładających się obszarów przestrzeni.
Każdy obszar jest dostatecznie duży, aby były w nim widoczne wszystkie fizycznie interesujące własności ruchu cząstki.
W każdym obszarze rozpatrywanego układu funkcja falowa $\psi(\vec{r}, t)$ bedąca rozwiązaniem równania Schrödingera daje pełny kwantowomechaniczny opis cząstki o masie m i energii potencjalnej $V(\vec{r}, t)$. Położenie cząstki mierzymy względem umownego środka danego obszaru.
Alternatywnie możemy rozpatrywać wiele niezależnych powtórzeń tego samego ruchu w jednym obszarze przestrzeni, mierząc czas zawsze od pewnej konkretnej chwili początkowej.

Taki ruch będzie opisywany przez funkcję falową $\psi(\vec{r}, t)$.
Zakładamy, że zbiór wszystkich wektorów własnych $\{|\mu\rangle\}$ operatora liniowego Ω tworzy układ ortogonalny zupełny w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$.

Taki ruch będzie opisywany przez funkcję falową $\psi(\vec{r}, t)$.
Zakładamy, że zbiór wszystkich wektorów własnych $\{|\mu\rangle\}$ operatora liniowego Ω tworzy układ ortogonalny zupełny w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$.
$\Rightarrow$ Każdy stan $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ można rozwinąć w szereg Fouriera względem $\{|\mu\rangle\}$.

$$|\psi\rangle = \sum_{\mu}\!\!\!\!\int c_{\mu}\,|\mu\rangle\,,$$

Postulaty interpretacyjne mechaniki kwantowej

Taki ruch będzie opisywany przez funkcję falową $\psi(\vec{r}, t)$.
Zakładamy, że zbiór wszystkich wektorów własnych $\{|\mu\rangle\}$ operatora liniowego Ω tworzy układ ortogonalny zupełny w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$.
$\Rightarrow$ Każdy stan $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ można rozwinąć w szereg Fouriera względem $\{|\mu\rangle\}$.

$$|\psi\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_{\mu} c_\mu |\mu\rangle ,$$

gdzie $\sum\!\!\!\!\!\!\int_{\mu}$ oznacza sumowanie po dyskretnym i całkowanie po ciągłym zakresie widma operatora Ω.

Postulaty interpretacyjne mechaniki kwantowej

Taki ruch będzie opisywany przez funkcję falową $\psi(\vec{r}, t)$.
Zakładamy, że zbiór wszystkich wektorów własnych $\{|\mu\rangle\}$ operatora liniowego Ω tworzy układ ortogonalny zupełny w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$.
$\Rightarrow$ Każdy stan $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ można rozwinąć w szereg Fouriera względem $\{|\mu\rangle\}$.

$$|\psi\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_{\mu} c_\mu |\mu\rangle ,$$

gdzie $\sum\!\!\!\!\!\!\int_{\mu}$ oznacza sumowanie po dyskretnym i całkowanie po ciągłym zakresie widma operatora Ω.

Postulat III. Liczba pomiarów zmiennej dynamicznej reprezentowanej przez operator liniowy Ω, które dadzą wynik ω_μ jest proporcjonalna do $|c_\mu|^2$.

Taki ruch będzie opisywany przez funkcję falową $\psi(\vec{r}, t)$.
Zakładamy, że zbiór wszystkich wektorów własnych $\{|\mu\rangle\}$ operatora liniowego Ω tworzy układ ortogonalny zupełny w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$.
$\Rightarrow$ Każdy stan $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ można rozwinąć w szereg Fouriera względem $\{|\mu\rangle\}$.

$$|\psi\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_{\mu} c_\mu \, |\mu\rangle \,,$$

gdzie $\sum\!\!\!\!\!\!\int_{\mu}$ oznacza sumowanie po dyskretnym i całkowanie po ciągłym zakresie widma operatora Ω.
Postulat III. Liczba pomiarów zmiennej dynamicznej reprezentowanej przez operator liniowy Ω, które dadzą wynik ω_μ jest proporcjonalna do $|c_\mu|^2$.

Postulat ten został zaproponowany przez Maxa Borna (1882-1970). Pozwala on powiązać każdą zmienną dynamiczną z pewnym rozkładem prawdopodobieństwa.

Postulat ten został zaproponowany przez Maxa Borna (1882-1970). Pozwala on powiązać każdą zmienną dynamiczną z pewnym rozkładem prawdopodobieństwa.

Wynik pomiaru zmiennej dynamicznej reprezentowanej przez Ω jest pewny tylko wtedy, gdy stan kwantowy cząstki jest stanem własnym.

Postulat ten został zaproponowany przez Maxa Borna (1882-1970). Pozwala on powiązać każdą zmienną dynamiczną z pewnym rozkładem prawdopodobieństwa.

Wynik pomiaru zmiennej dynamicznej reprezentowanej przez Ω jest pewny tylko wtedy, gdy stan kwantowy cząstki jest stanem własnym.

W pozostałych sytuacjach możemy mówić tylko o prawdopodobieństwie, z którym możemy uzyskać jakąś określoną wartość zmiennej dynamicznej.

Postulat ten został zaproponowany przez Maxa Borna (1882-1970). Pozwala on powiązać każdą zmienną dynamiczną z pewnym rozkładem prawdopodobieństwa.

Wynik pomiaru zmiennej dynamicznej reprezentowanej przez Ω jest pewny tylko wtedy, gdy stan kwantowy cząstki jest stanem własnym.

W pozostałych sytuacjach możemy mówić tylko o prawdopodobieństwie, z którym możemy uzyskać jakąś określoną wartość zmiennej dynamicznej.

Jeśli operatory Ω i Γ reprezentujące zmienne dynamiczne komutują, to jak pokazaliśmy wcześniej, mają wspólne wektory własne, a więc reprezentowane przez nie zmienne są jednocześnie mierzalne.

Postulat ten został zaproponowany przez Maxa Borna (1882-1970). Pozwala on powiązać każdą zmienną dynamiczną z pewnym rozkładem prawdopodobieństwa.

Wynik pomiaru zmiennej dynamicznej reprezentowanej przez Ω jest pewny tylko wtedy, gdy stan kwantowy cząstki jest stanem własnym.

W pozostałych sytuacjach możemy mówić tylko o prawdopodobieństwie, z którym możemy uzyskać jakąś określoną wartość zmiennej dynamicznej.

Jeśli operatory Ω i Γ reprezentujące zmienne dynamiczne komutują, to jak pokazaliśmy wcześniej, mają wspólne wektory własne, a więc reprezentowane przez nie zmienne są jednocześnie mierzalne.

Operator całkowitej energii

Przeanalizujmy znaczenie postulatów interpretacyjnych mechaniki kwantowej na przykładzie operatora całkowitej energii cząstki.

Załóżmy że energia potencjalna nie zależy jawnie od czasu, $V(\vec{r}, t) \equiv V(\vec{r})$,

Operator całkowitej energii

Przeanalizujmy znaczenie postulatów interpretacyjnych mechaniki kwantowej na przykładzie operatora całkowitej energii cząstki. Załóżmy że energia potencjalna nie zależy jawnie od czasu, $V(\vec{r}, t) \equiv V(\vec{r})$, tzn., że operator Hamiltona ma postać

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}).$$

Operator całkowitej energii

Przeanalizujmy znaczenie postulatów interpretacyjnych mechaniki kwantowej na przykładzie operatora całkowitej energii cząstki. Załóżmy że energia potencjalna nie zależy jawnie od czasu, $V(\vec{r}, t) \equiv V(\vec{r})$, tzn., że operator Hamiltona ma postać

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}).$$

Wtedy równanie Schrödingera możemy sprowadzić do równania własnego operatora Hamiltona

$$Hu_E(\vec{r}) = Eu_E(\vec{r}),$$

Operator całkowitej energii

Przeanalizujmy znaczenie postulatów interpretacyjnych mechaniki kwantowej na przykładzie operatora całkowitej energii cząstki. Załóżmy że energia potencjalna nie zależy jawnie od czasu, $V(\vec{r}, t) \equiv V(\vec{r})$, tzn., że operator Hamiltona ma postać

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}).$$

Wtedy równanie Schrödingera możemy sprowadzić do równania własnego operatora Hamiltona

$$Hu_E(\vec{r}) = Eu_E(\vec{r}),$$

które w notacji Diraca można zapisać w postaci

$$H|E\rangle = E|E\rangle.$$

Operator całkowitej energii

Przeanalizujmy znaczenie postulatów interpretacyjnych mechaniki kwantowej na przykładzie operatora całkowitej energii cząstki. Załóżmy że energia potencjalna nie zależy jawnie od czasu, $V(\vec{r}, t) \equiv V(\vec{r})$, tzn., że operator Hamiltona ma postać

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}).$$

Wtedy równanie Schrödingera możemy sprowadzić do równania własnego operatora Hamiltona

$$Hu_E(\vec{r}) = Eu_E(\vec{r}),$$

które w notacji Diraca można zapisać w postaci

$$H|E\rangle = E|E\rangle.$$

Funkcje własne energii

Funkcje własne energii można podzielić na dwie klasy:

- funkcje dobrze zlokalizowane – odpowiadające dyskretnym wartościom własnym energii
- funkcje niezlokalizowane – odpowiadające ciągłym wartościom własnym energii.

Połączmy oba przypadki w jeden.

Funkcje własne energii

Funkcje własne energii można podzielić na dwie klasy:

- funkcje dobrze zlokalizowane – odpowiadające dyskretnym wartościom własnym energii
- funkcje niezlokalizowane – odpowiadające ciągłym wartościom własnym energii.

Połączmy oba przypadki w jeden. Zamknijmy cząstkę w sześciennym pudełku o dużym, ale skończonym rozmiarze L i sztywnych ścianach.

Funkcje własne energii

Funkcje własne energii można podzielić na dwie klasy:

- funkcje dobrze zlokalizowane – odpowiadające dyskretnym wartościom własnym energii
- funkcje niezlokalizowane – odpowiadające ciągłym wartościom własnym energii.

Połączmy oba przypadki w jeden. Zamknijmy cząstkę w sześciennym pudełku o dużym, ale skończonym rozmiarze L i sztywnych ścianach. Takie ściany odpowiadają nieskończonemu skokowi energii potencjalnej.

Funkcje własne energii

Funkcje własne energii można podzielić na dwie klasy:

- funkcje dobrze zlokalizowane – odpowiadające dyskretnym wartościom własnym energii
- funkcje niezlokalizowane – odpowiadające ciągłym wartościom własnym energii.

Połączmy oba przypadki w jeden. Zamknijmy cząstkę w sześciennym pudełku o dużym, ale skończonym rozmiarze L i sztywnych ścianach. Takie ściany odpowiadają nieskończonemu skokowi energii potencjalnej. $\Rightarrow$ Wewnątrz pudełka energia może przyjmować wartości dyskretne, a na granicach funkcja falowa musi znikać.

Funkcje własne energii

Funkcje własne energii można podzielić na dwie klasy:

- funkcje dobrze zlokalizowane – odpowiadające dyskretnym wartościom własnym energii
- funkcje niezlokalizowane – odpowiadające ciągłym wartościom własnym energii.

Połączmy oba przypadki w jeden. Zamknijmy cząstkę w sześciennym pudełku o dużym, ale skończonym rozmiarze L i sztywnych ścianach. Takie ściany odpowiadają nieskończonemu skokowi energii potencjalnej. $\Rightarrow$ Wewnątrz pudełka energia może przyjmować wartości dyskretne, a na granicach funkcja falowa musi znikać.

Periodyczne warunki brzegowe

Alternatywnie można założyć, że funkcja falowa i (dla wygody) składowa normalna jej gradientu przyjmują dokładnie takie same wartości na przeciwległych ścianach pudełka.

Są to tzw. periodyczne warunki brzegowe, które na skutek znoszenia się wkładów do obserwabli fizycznych pochodzących od przeciwległych ścian mają taki sam skutek co założenie sztywnych ścian.

Periodyczne warunki brzegowe

Alternatywnie można założyć, że funkcja falowa i (dla wygody) składowa normalna jej gradientu przyjmują dokładnie takie same wartości na przeciwległych ścianach pudełka.
Są to tzw. periodyczne warunki brzegowe, które na skutek znoszenia się wkładów do obserwabli fizycznych pochodzących od przeciwległych ścian mają taki sam skutek co założenie sztywnych ścian.
Wkłady do obserwabli fizycznych pochodzące od przeciwległych ścian znoszą się, gdyż wektory powierzchni przeciwległych ścian są skierowane w przeciwnych kierunkach, co przy jednakowych wartościach funkcji falowej i jej gradientu powoduje kasowanie się odpowiednich wkładów do całki powierzchniowej.

Alternatywnie można założyć, że funkcja falowa i (dla wygody) składowa normalna jej gradientu przyjmują dokładnie takie same wartości na przeciwległych ścianach pudełka.
Są to tzw. periodyczne warunki brzegowe, które na skutek znoszenia się wkładów do obserwabli fizycznych pochodzących od przeciwległych ścian mają taki sam skutek co założenie sztywnych ścian.
Wkłady do obserwabli fizycznych pochodzące od przeciwległych ścian znoszą się, gdyż wektory powierzchni przeciwległych ścian są skierowane w przeciwnych kierunkach, co przy jednakowych wartościach funkcji falowej i jej gradientu powoduje kasowanie się odpowiednich wkładów do całki powierzchniowej.

Hermitowskość operatora całkowitej energii

Operator Hamiltona

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

jest operatorem hermitowskim, gdyż operator pędu

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

jest operatorem hermitowskim, a energia potencjalna jest rzeczywista.

Hermitowskość operatora całkowitej energii

Operator Hamiltona

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

jest operatorem hermitowskim, gdyż operator pędu

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

jest operatorem hermitowskim, a energia potencjalna jest rzeczywista. Istotnie

$$H^\dagger =$$

Hermitowskość operatora całkowitej energii

Operator Hamiltona

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

jest operatorem hermitowskim, gdyż operator pędu

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

jest operatorem hermitowskim, a energia potencjalna jest rzeczywista. Istotnie

$$H^\dagger = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})\right)^\dagger =$$

Hermitowskość operatora całkowitej energii

Operator Hamiltona

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

jest operatorem hermitowskim, gdyż operator pędu

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

jest operatorem hermitowskim, a energia potencjalna jest rzeczywista. Istotnie

$$H^\dagger = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})\right)^\dagger = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m}\right)^\dagger + (V(\vec{r}))^\dagger$$

Hermitowskość operatora całkowitej energii

Operator Hamiltona

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

jest operatorem hermitowskim, gdyż operator pędu

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

jest operatorem hermitowskim, a energia potencjalna jest rzeczywista. Istotnie

$$H^\dagger = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})\right)^\dagger = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m}\right)^\dagger + (V(\vec{r}))^\dagger$$

$$=$$

Operator Hamiltona

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

jest operatorem hermitowskim, gdyż operator pędu

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

jest operatorem hermitowskim, a energia potencjalna jest rzeczywista. Istotnie

$$\begin{aligned} H^\dagger &= \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})\right)^\dagger = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m}\right)^\dagger + (V(\vec{r}))^\dagger \\ &= \frac{1}{2m}\left(\vec{p}^\dagger\right)^2 + V(\vec{r})^* = \end{aligned}$$

Hermitowskość operatora całkowitej energii

Operator Hamiltona

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

jest operatorem hermitowskim, gdyż operator pędu

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

jest operatorem hermitowskim, a energia potencjalna jest rzeczywista. Istotnie

$$\begin{aligned} H^\dagger &= \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})\right)^\dagger = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m}\right)^\dagger + (V(\vec{r}))^\dagger \\ &= \frac{1}{2m}\left(\vec{p}^\dagger\right)^2 + V(\vec{r})^* = H \end{aligned}$$

Hermitowskość operatora całkowitej energii

Operator Hamiltona

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

jest operatorem hermitowskim, gdyż operator pędu

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

jest operatorem hermitowskim, a energia potencjalna jest rzeczywista. Istotnie

$$\begin{aligned} H^\dagger &= \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})\right)^\dagger = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m}\right)^\dagger + (V(\vec{r}))^\dagger \\ &= \frac{1}{2m}\left(\vec{p}^\dagger\right)^2 + V(\vec{r})^* = H \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p}^\dagger = \vec{p} \quad \text{i} \quad V(\vec{r})^* = V(\vec{r}). \end{aligned}$$

Hermitowskość operatora całkowitej energii

Operator Hamiltona

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

jest operatorem hermitowskim, gdyż operator pędu

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

jest operatorem hermitowskim, a energia potencjalna jest rzeczywista. Istotnie

$$\begin{aligned} H^\dagger &= \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})\right)^\dagger = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m}\right)^\dagger + (V(\vec{r}))^\dagger \\ &= \frac{1}{2m}\left(\vec{p}^\dagger\right)^2 + V(\vec{r})^* = H \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p}^\dagger = \vec{p} \quad \mathrm{i} \quad V(\vec{r})^* = V(\vec{r}). \end{aligned}$$

Hermitowskość operatora pędu

Udowodnimy hermitowskość składowej p_x operatora pędu.

$(\varphi|p_x\psi)$

Udowodnimy hermitowskość składowej p_x operatora pędu.

$$(\varphi|p_x\psi) \quad =$$

Udowodnimy hermitowskość składowej p_x operatora pędu.

$$(\varphi|p_x\psi) \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi(x)\mathrm{d}x =$$

Hermitowskość operatora pędu

Udowodnimy hermitowskość składowej p_x operatora pędu.

$$(\varphi|p_x\psi) \quad = \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi(x)\mathrm{d}x = -i\hbar\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi^*(x)\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

Udowodnimy hermitowskość składowej p_x operatora pędu.

$$(\varphi|p_x\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi(x)\mathrm{d}x = -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x)\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$=$$

Udowodnimy hermitowskość składowej p_x operatora pędu.

$$
\begin{aligned}
(\varphi|p_x\psi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi(x)\mathrm{d}x = -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^*(x)\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&= -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\varphi^*(x)\psi(x)\right)\mathrm{d}x + i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\varphi^*(x)}{\mathrm{d}x}\psi(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Udowodnimy hermitowskość składowej p_x operatora pędu.

$$\begin{aligned}
(\varphi|p_x\psi) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi(x)\mathrm{d}x = -i\hbar\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi^*(x)\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&= -i\hbar\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\varphi^*(x)\psi(x)\right)\mathrm{d}x + i\hbar\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\varphi^*(x)}{\mathrm{d}x}\psi(x)\mathrm{d}x \\
&=
\end{aligned}$$

Hermitowskość operatora pędu

Udowodnimy hermitowskość składowej p_x operatora pędu.

$$
\begin{aligned}
(\varphi|p_x\psi) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi(x)\mathrm{d}x = -\,i\hbar\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi^*(x)\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&= -\,i\hbar\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\varphi^*(x)\psi(x)\right)\mathrm{d}x + i\hbar\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\varphi^*(x)}{\mathrm{d}x}\psi(x)\mathrm{d}x \\
&= -\,i\hbar\;\varphi^*(x)\psi(x)\big|_{-\infty}^{+\infty} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right)^*\psi(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Udowodnimy hermitowskość składowej p_x operatora pędu.

$$\begin{aligned}
(\varphi|p_x\psi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi(x)\mathrm{d}x = -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^*(x)\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&= -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\varphi^*(x)\psi(x)\right)\mathrm{d}x + i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\varphi^*(x)}{\mathrm{d}x}\psi(x)\mathrm{d}x \\
&= -i\hbar\,\varphi^*(x)\psi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right)^*\psi(x)\mathrm{d}x \\
&=
\end{aligned}$$

Hermitowskość operatora pędu

Udowodnimy hermitowskość składowej p_x operatora pędu.

$$
\begin{aligned}
(\varphi|p_x\psi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi(x)\mathrm{d}x = -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^*(x)\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&= -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\varphi^*(x)\psi(x)\right)\mathrm{d}x + i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\varphi^*(x)}{\mathrm{d}x}\psi(x)\mathrm{d}x \\
&= -i\hbar\,\varphi^*(x)\psi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right)^*\psi(x)\mathrm{d}x \\
&= 0 + (p_x\varphi|\psi),
\end{aligned}
$$

Udowodnimy hermitowskość składowej p_x operatora pędu.

$$
\begin{aligned}
(\varphi|p_x\psi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi(x)\mathrm{d}x = -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^*(x)\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&= -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\varphi^*(x)\psi(x)\right)\mathrm{d}x + i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\varphi^*(x)}{\mathrm{d}x}\psi(x)\mathrm{d}x \\
&= -i\hbar\,\varphi^*(x)\psi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right)^*\psi(x)\mathrm{d}x \\
&= 0 + (p_x\varphi|\psi),
\end{aligned}
$$

dla dowolnych funkcji $\varphi(x)$ i $\psi(x)$, cnd.

Udowodnimy hermitowskość składowej p_x operatora pędu.

$$
\begin{aligned}
(\varphi|p_x\psi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi(x)\mathrm{d}x = -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^*(x)\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&= -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\varphi^*(x)\psi(x)\right)\mathrm{d}x + i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\varphi^*(x)}{\mathrm{d}x}\psi(x)\mathrm{d}x \\
&= -i\hbar\,\varphi^*(x)\psi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right)^*\psi(x)\mathrm{d}x \\
&= 0 + (p_x\varphi|\psi),
\end{aligned}
$$

dla dowolnych funkcji $\varphi(x)$ i $\psi(x)$, cnd.

Zadanie. Udowodnić hermitowskość operatora pędu $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ w trzech wymiarach.

Hermitowskość operatora pędu i energii oznacza, że ich wartości własne są liczbami rzeczywistymi,

Zadanie. Udowodnić hermitowskość operatora pędu $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ w trzech wymiarach.
Hermitowskość operatora pędu i energii oznacza, że ich wartości własne są liczbami rzeczywistymi, a więc operatory te reprezentują mierzalne wielkości fizyczne.

Zadanie. Udowodnić hermitowskość operatora pędu $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ w trzech wymiarach.
Hermitowskość operatora pędu i energii oznacza, że ich wartości własne są liczbami rzeczywistymi, a więc operatory te reprezentują mierzalne wielkości fizyczne.