

# Matematyczne podstawy mechaniki kwantowej (c.d.) Wykład 5

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki  
Uniwersytet Śląski, Katowice  
<http://kk.us.edu.pl>

Niech  $X$  i  $Y$  będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem  $\mathbb{K}$  liczb rzeczywistych lub zespolonych.

Odwzorowanie  $A : X \rightarrow Y$  nazywamy **operatorem liniowym**, jeśli

Niech  $X$  i  $Y$  będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem  $\mathbb{K}$  liczb rzeczywistych lub zespolonych.

Odwzorowanie  $A : X \rightarrow Y$  nazywamy **operatorem liniowym**, jeśli

$$A(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1A(x_1) + a_2A(x_2),$$

dla dowolnych  $x_1, x_2 \in X$  i  $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ .

Niech  $X$  i  $Y$  będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem  $\mathbb{K}$  liczb rzeczywistych lub zespolonych.

Odwzorowanie  $A : X \rightarrow Y$  nazywamy **operatorem liniowym**, jeśli

$$A(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1A(x_1) + a_2A(x_2),$$

dla dowolnych  $x_1, x_2 \in X$  i  $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ .

Jeżeli  $Y = \mathbb{K}$ , to operator liniowy  $A : X \rightarrow \mathbb{K}$  nazywamy **funkcjonałem liniowym**.

Niech  $X$  i  $Y$  będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem  $\mathbb{K}$  liczb rzeczywistych lub zespolonych.

Odwzorowanie  $A : X \rightarrow Y$  nazywamy **operatorem liniowym**, jeśli

$$A(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1A(x_1) + a_2A(x_2),$$

dla dowolnych  $x_1, x_2 \in X$  i  $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ .

Jeżeli  $Y = \mathbb{K}$ , to operator liniowy  $A : X \rightarrow \mathbb{K}$  nazywamy **funkcjonałem liniowym**.

*Przykłady.* Operator różniczkowy jest operatorem liniowym odwzorowującym przestrzeń wektorową funkcji rzeczywistych różniczkowalnych określonych na przedziale  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  w przestrzeń funkcji rzeczywistych na tym przedziale. Dla  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mamy

*Przykłady.* Operator różniczkowy jest operatorem liniowym odwzorowującym przestrzeń wektorową funkcji rzeczywistych różniczkowalnych określonych na przedziale  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  w przestrzeń funkcji rzeczywistych na tym przedziale. Dla  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mamy

$$\frac{d}{dx} (\alpha f(x) + \beta g(x)) =$$

*Przykłady.* Operator różniczkowy jest operatorem liniowym odwzorowującym przestrzeń wektorową funkcji rzeczywistych różniczkowalnych określonych na przedziale  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  w przestrzeń funkcji rzeczywistych na tym przedziale. Dla  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mamy

$$\frac{d}{dx} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \frac{df(x)}{dx} + \beta \frac{dg(x)}{dx}.$$



# Operatory i funkcjonały liniowe

*Przykłady.* Operator różniczkowy jest operatorem liniowym odwzorowującym przestrzeń wektorową funkcji rzeczywistych różniczkowalnych określonych na przedziale  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  w przestrzeń funkcji rzeczywistych na tym przedziale. Dla  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mamy

$$\frac{d}{dx} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \frac{df(x)}{dx} + \beta \frac{dg(x)}{dx}.$$

Operator całkowy  $\int_a^b f(x)dx$  jest funkcjonałem liniowym

# Operatory i funkcjonały liniowe

*Przykłady.* Operator różniczkowy jest operatorem liniowym odwzorowującym przestrzeń wektorową funkcji rzeczywistych różniczkowalnych określonych na przedziale  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  w przestrzeń funkcji rzeczywistych na tym przedziale. Dla  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mamy

$$\frac{d}{dx} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \frac{df(x)}{dx} + \beta \frac{dg(x)}{dx}.$$

Operator całkowy  $\int_a^b f(x)dx$  jest funkcjonałem liniowym

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx =$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

*Przykłady.* Operator różniczkowy jest operatorem liniowym odwzorowującym przestrzeń wektorową funkcji rzeczywistych różniczkowalnych określonych na przedziale  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  w przestrzeń funkcji rzeczywistych na tym przedziale. Dla  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mamy

$$\frac{d}{dx} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \frac{df(x)}{dx} + \beta \frac{dg(x)}{dx}.$$

Operator całkowy  $\int_a^b f(x)dx$  jest funkcjonałem liniowym

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

*Przykłady.* Operator różniczkowy jest operatorem liniowym odwzorowującym przestrzeń wektorową funkcji rzeczywistych różniczkowalnych określonych na przedziale  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  w przestrzeń funkcji rzeczywistych na tym przedziale. Dla  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mamy

$$\frac{d}{dx} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \frac{df(x)}{dx} + \beta \frac{dg(x)}{dx}.$$

Operator całkowy  $\int_a^b f(x)dx$  jest funkcjonałem liniowym

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Każdy operator liniowy  $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ , gdzie  $\mathbb{K}$  jest ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych, jest postaci  $y = Ax$ , gdzie

$$\begin{aligned}y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n,\end{aligned}$$

przy czym  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{K}$ .

Powyższy układ równań możemy zapisać w formie

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Każdy operator liniowy  $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ , gdzie  $\mathbb{K}$  jest ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych, jest postaci  $y = Ax$ , gdzie

$$\begin{aligned}y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\&\vdots \\y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n,\end{aligned}$$

przy czym  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{K}$ .  
Powyższy układ równań możemy zapisać w formie

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w  $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

i bazę w  $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e'_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e'_m = (0, 0, \dots, 1).$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w  $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

i bazę w  $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e'_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e'_m = (0, 0, \dots, 1).$$

$y =$



# Operatory i funkcjonały liniowe

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w  $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

i bazę w  $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e'_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e'_m = (0, 0, \dots, 1).$$

$$y = \sum_{i=1}^m y_i e'_i =$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w  $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

i bazę w  $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e'_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e'_m = (0, 0, \dots, 1).$$

$$y = \sum_{i=1}^m y_i e'_i = Ax =$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w  $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

i bazę w  $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e'_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e'_m = (0, 0, \dots, 1).$$

$$y = \sum_{i=1}^m y_i e'_i = Ax = A \left( \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) =$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w  $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

i bazę w  $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e'_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e'_m = (0, 0, \dots, 1).$$

$$y = \sum_{i=1}^m y_i e'_i = Ax = A \left( \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j A(e_j)$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w  $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

i bazę w  $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e'_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e'_m = (0, 0, \dots, 1).$$

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^m y_i e'_i = Ax = A \left( \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j A(e_j) \\ &= \end{aligned}$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w  $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

i bazę w  $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e'_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e'_m = (0, 0, \dots, 1).$$

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^m y_i e'_i = Ax = A \left( \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j A(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} e'_i = \end{aligned}$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w  $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

i bazę w  $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e'_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e'_m = (0, 0, \dots, 1).$$

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^m y_i e'_i = Ax = A \left( \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j A(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j e'_i \end{aligned}$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w  $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

i bazę w  $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e'_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e'_m = (0, 0, \dots, 1).$$

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^m y_i e'_i = Ax = A \left( \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j A(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j e'_i \Rightarrow y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \end{aligned}$$



# Operatory i funkcjonały liniowe

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w  $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

i bazę w  $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e'_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e'_m = (0, 0, \dots, 1).$$

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^m y_i e'_i = Ax = A \left( \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j A(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j e'_i \Rightarrow y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \end{aligned}$$

dla  $i = 1, 2, \dots, m$ .

# Operatory i funkcjonały liniowe

Rzeczywiście, wybierzmy bazę w  $\mathbb{K}^n$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

i bazę w  $\mathbb{K}^m$

$$e'_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e'_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad e'_m = (0, 0, \dots, 1).$$

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^m y_i e'_i = Ax = A \left( \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j A(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j e'_i \Rightarrow y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \end{aligned}$$

dla  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Widzimy, że operatory liniowe możemy reprezentować poprzez macierze – skończenie lub nieskończenie wymiarowe.

W rozpatrywanym przykładzie macierz operatora  $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  ma postać

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

gdzie  $a_{ij} \in \mathbb{K}$ .

Widzimy, że operatory liniowe możemy reprezentować poprzez macierze – skończenie lub nieskończenie wymiarowe.

W rozpatrywanym przykładzie macierz operatora  $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  ma postać

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

gdzie  $a_{ij} \in \mathbb{K}$ .

Niech  $A, B$  będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta  $X(\mathbb{K})$ . Dla każdego  $x \in X(\mathbb{K})$  definiujemy:

Niech  $A, B$  będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta  $X(\mathbb{K})$ . Dla każdego  $x \in X(\mathbb{K})$  definiujemy:

iloczyn  $cA$  operatora  $A$  przez liczbę  $c \in \mathbb{K}$

$$(cA)x \equiv c(Ax),$$

# Działania na operatorach

Niech  $A, B$  będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta  $X(\mathbb{K})$ . Dla każdego  $x \in X(\mathbb{K})$  definiujemy:

iloczyn  $cA$  operatora  $A$  przez liczbę  $c \in \mathbb{K}$

$$(cA)x \equiv c(Ax),$$

sumę  $A + B$  operatorów  $A$  i  $B$

$$(A + B)x \equiv Ax + Bx,$$

# Działania na operatorach

Niech  $A, B$  będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta  $X(\mathbb{K})$ . Dla każdego  $x \in X(\mathbb{K})$  definiujemy:

iloczyn  $cA$  operatora  $A$  przez liczbę  $c \in \mathbb{K}$

$$(cA)x \equiv c(Ax),$$

sumę  $A + B$  operatorów  $A$  i  $B$

$$(A + B)x \equiv Ax + Bx,$$

iloczyn  $AB$  operatorów  $A$  i  $B$

$$(AB)x \equiv A(Bx),$$

który rozumiemy jako złożenie operatorów.



Niech  $A, B$  będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta  $X(\mathbb{K})$ . Dla każdego  $x \in X(\mathbb{K})$  definiujemy:

iloczyn  $cA$  operatora  $A$  przez liczbę  $c \in \mathbb{K}$

$$(cA)x \equiv c(Ax),$$

sumę  $A + B$  operatorów  $A$  i  $B$

$$(A + B)x \equiv Ax + Bx,$$

iloczyn  $AB$  operatorów  $A$  i  $B$

$$(AB)x \equiv A(Bx),$$

który rozumiemy jako złożenie operatorów.

Ponieważ złożenie operatorów jest na ogół nieprzemienne, to definiujemy **komutator**  $[A, B]$  operatorów  $A$  i  $B$

$$[A, B] \equiv AB - BA.$$

Ponieważ złożenie operatorów jest na ogół nieprzemienne, to definiujemy **komutator**  $[A, B]$  operatorów  $A$  i  $B$

$$[A, B] \equiv AB - BA.$$

**Zadanie.** Niech  $A, B, C$  będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta  $X(\mathbb{K})$ , a  $a, b, c \in \mathbb{K}$  stałymi współczynnikami.

Ponieważ złożenie operatorów jest na ogół nieprzemienne, to definiujemy **komutator**  $[A, B]$  operatorów  $A$  i  $B$

$$[A, B] \equiv AB - BA.$$

**Zadanie.** Niech  $A, B, C$  będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta  $X(\mathbb{K})$ , a  $a, b, c \in \mathbb{K}$  stałymi współczynnikami. Pokazać że komutator spełnia następujące własności:

Ponieważ złożenie operatorów jest na ogół nieprzemienne, to definiujemy **komutator**  $[A, B]$  operatorów  $A$  i  $B$

$$[A, B] \equiv AB - BA.$$

**Zadanie.** Niech  $A, B, C$  będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta  $X(\mathbb{K})$ , a  $a, b, c \in \mathbb{K}$  stałymi współczynnikami. Pokazać że komutator spełnia następujące własności:

i) Liniowość ze względu na pierwszy argument:

$$[aA + bB, C] = a[A, C] + b[B, C]$$

Ponieważ złożenie operatorów jest na ogół nieprzemienne, to definiujemy **komutator**  $[A, B]$  operatorów  $A$  i  $B$

$$[A, B] \equiv AB - BA.$$

**Zadanie.** Niech  $A, B, C$  będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta  $X(\mathbb{K})$ , a  $a, b, c \in \mathbb{K}$  stałymi współczynnikami. Pokazać że komutator spełnia następujące własności:

i) Liniowość ze względu na pierwszy argument:

$$[aA + bB, C] = a[A, C] + b[B, C]$$

ii) Antysymetria:

$$[A, B] = -[B, A]$$

Ponieważ złożenie operatorów jest na ogół nieprzemienne, to definiujemy **komutator**  $[A, B]$  operatorów  $A$  i  $B$

$$[A, B] \equiv AB - BA.$$

**Zadanie.** Niech  $A, B, C$  będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta  $X(\mathbb{K})$ , a  $a, b, c \in \mathbb{K}$  stałymi współczynnikami. Pokazać że komutator spełnia następujące własności:

- i) Liniowość ze względu na pierwszy argument:  
 $[aA + bB, C] = a[A, C] + b[B, C]$
- ii) Antysymetria:  
 $[A, B] = -[B, A]$
- iii)  $[c, A] = [A, c] = 0.$

Ponieważ złożenie operatorów jest na ogół nieprzemienne, to definiujemy **komutator**  $[A, B]$  operatorów  $A$  i  $B$

$$[A, B] \equiv AB - BA.$$

**Zadanie.** Niech  $A, B, C$  będą operatorami liniowymi w przestrzeni Hilberta  $X(\mathbb{K})$ , a  $a, b, c \in \mathbb{K}$  stałymi współczynnikami. Pokazać że komutator spełnia następujące własności:

- i) Liniowość ze względu na pierwszy argument:  
 $[aA + bB, C] = a[A, C] + b[B, C]$
- ii) Antysymetria:  
 $[A, B] = -[B, A]$
- iii)  $[c, A] = [A, c] = 0.$



iv)  $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

v) Tożsamość Jacobiego:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

iv)  $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

v) Tożsamość Jacobiego:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

i') Liniowość ze względu na drugi argument:

$$[A, bB + cC] = b[A, B] + c[A, C].$$

iv)  $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

v) Tożsamość Jacobiego:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

i') Liniowość ze względu na drugi argument:

$$[A, bB + cC] = b[A, B] + c[A, C].$$

iv')  $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C.$

iv)  $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

v) Tożsamość Jacobiego:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

i') Liniowość ze względu na drugi argument:

$$[A, bB + cC] = b[A, B] + c[A, C].$$

iv')  $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C.$

Jako przykład rozważmy komutatory operatorów położenia  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  i pędu cząstki

$$p_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3$$

iv)  $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

v) Tożsamość Jacobiego:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

i') Liniowość ze względu na drugi argument:

$$[A, bB + cC] = b[A, B] + c[A, C].$$

iv')  $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C.$

Jako przykład rozważmy komutatory operatorów położenia  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  i pędu cząstki

$$p_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3$$

w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkownych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkownych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

$$[x_i, p_j]\psi$$

w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkownych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

$$[x_i, p_j]\psi =$$



w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkownych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

$$[x_i, p_j]\psi = \left[ x_i, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi =$$

w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkownych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

$$[x_i, p_j]\psi = \left[ x_i, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -i\hbar \left[ x_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi$$

w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkownych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

$$\begin{aligned} [x_i, p_j]\psi &= \left[ x_i, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -i\hbar \left[ x_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi \\ &= \end{aligned}$$

w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkowlanych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

$$\begin{aligned}[x_i, p_j]\psi &= \left[ x_i, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -i\hbar \left[ x_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi \\ &= -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial (x_i \psi)}{\partial x_j} \right)\end{aligned}$$

w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkowlanych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

$$\begin{aligned} [x_i, p_j]\psi &= \left[ x_i, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -i\hbar \left[ x_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi \\ &= -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial (x_i \psi)}{\partial x_j} \right) = -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \psi - x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkowlanych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

$$\begin{aligned} [x_i, p_j]\psi &= \left[ x_i, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -i\hbar \left[ x_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi \\ &= -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial (x_i \psi)}{\partial x_j} \right) = -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \psi - x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \\ &= \end{aligned}$$

w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkownalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

$$\begin{aligned} [x_i, p_j]\psi &= \left[ x_i, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -i\hbar \left[ x_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi \\ &= -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial (x_i \psi)}{\partial x_j} \right) = -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \psi - x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \\ &= i\hbar \delta_{ij} \psi; \end{aligned}$$

w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkowlanych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

$$\begin{aligned} [x_i, p_j]\psi &= \left[ x_i, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -i\hbar \left[ x_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi \\ &= -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial (x_i \psi)}{\partial x_j} \right) = -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \psi - x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \\ &= i\hbar \delta_{ij} \psi; \end{aligned}$$

$$[x_i, x_j]\psi$$



# Komutator

w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkownalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

$$\begin{aligned} [x_i, p_j]\psi &= \left[ x_i, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -i\hbar \left[ x_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi \\ &= -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial (x_i \psi)}{\partial x_j} \right) = -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \psi - x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \\ &= i\hbar \delta_{ij} \psi; \\ [x_i, x_j]\psi &= \end{aligned}$$

# Komutator

w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkownalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

$$\begin{aligned} [x_i, p_j]\psi &= \left[ x_i, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -i\hbar \left[ x_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi \\ &= -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial (x_i \psi)}{\partial x_j} \right) = -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \psi - x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \\ &= i\hbar \delta_{ij} \psi; \\ [x_i, x_j]\psi &= (x_i x_j - x_j x_i) \psi = \end{aligned}$$

# Komutator

w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkownalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

$$\begin{aligned} [x_i, p_j]\psi &= \left[ x_i, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -i\hbar \left[ x_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi \\ &= -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial (x_i \psi)}{\partial x_j} \right) = -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \psi - x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \\ &= i\hbar \delta_{ij} \psi; \\ [x_i, x_j]\psi &= (x_i x_j - x_j x_i) \psi = 0; \end{aligned}$$

# Komutator

w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkowlanych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

$$\begin{aligned} [x_i, p_j]\psi &= \left[ x_i, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -i\hbar \left[ x_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi \\ &= -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial (x_i \psi)}{\partial x_j} \right) = -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \psi - x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \\ &= i\hbar \delta_{ij} \psi; \end{aligned}$$

$$[x_i, x_j]\psi = (x_i x_j - x_j x_i) \psi = 0;$$

$$[p_i, p_j]\psi$$

# Komutator

w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkownalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

$$\begin{aligned} [x_i, p_j]\psi &= \left[ x_i, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -i\hbar \left[ x_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi \\ &= -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial (x_i \psi)}{\partial x_j} \right) = -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \psi - x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \\ &= i\hbar \delta_{ij} \psi; \\ [x_i, x_j]\psi &= (x_i x_j - x_j x_i) \psi = 0; \\ [p_i, p_j]\psi &= \end{aligned}$$

# Komutator

w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkowlanych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

$$\begin{aligned} [x_i, p_j]\psi &= \left[ x_i, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -i\hbar \left[ x_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi \\ &= -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial (x_i \psi)}{\partial x_j} \right) = -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \psi - x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \\ &= i\hbar \delta_{ij} \psi; \\ [x_i, x_j]\psi &= (x_i x_j - x_j x_i) \psi = 0; \\ [p_i, p_j]\psi &= \left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = \end{aligned}$$

w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkowlanych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

$$\begin{aligned} [x_i, p_j]\psi &= \left[ x_i, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -i\hbar \left[ x_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi \\ &= -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial (x_i \psi)}{\partial x_j} \right) = -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \psi - x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \\ &= i\hbar \delta_{ij} \psi; \end{aligned}$$

$$[x_i, x_j]\psi = (x_i x_j - x_j x_i) \psi = 0;$$

$$[p_i, p_j]\psi = \left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -\hbar^2 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)$$

# Komutator

w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkowlanych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

$$\begin{aligned} [x_i, p_j]\psi &= \left[ x_i, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -i\hbar \left[ x_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi \\ &= -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial (x_i \psi)}{\partial x_j} \right) = -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \psi - x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \\ &= i\hbar \delta_{ij} \psi; \end{aligned}$$

$$[x_i, x_j]\psi = (x_i x_j - x_j x_i) \psi = 0;$$

$$\begin{aligned} [p_i, p_j]\psi &= \left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -\hbar^2 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \\ &= \end{aligned}$$



w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkowlanych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

$$\begin{aligned} [x_i, p_j]\psi &= \left[ x_i, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -i\hbar \left[ x_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi \\ &= -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial (x_i \psi)}{\partial x_j} \right) = -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \psi - x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \\ &= i\hbar \delta_{ij} \psi; \end{aligned}$$

$$[x_i, x_j]\psi = (x_i x_j - x_j x_i) \psi = 0;$$

$$\begin{aligned} [p_i, p_j]\psi &= \left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -\hbar^2 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \\ &= -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i} \right) = \end{aligned}$$

w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkowlanych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

$$\begin{aligned} [x_i, p_j]\psi &= \left[ x_i, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -i\hbar \left[ x_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi \\ &= -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial (x_i \psi)}{\partial x_j} \right) = -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \psi - x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \\ &= i\hbar \delta_{ij} \psi; \end{aligned}$$

$$[x_i, x_j]\psi = (x_i x_j - x_j x_i) \psi = 0;$$

$$\begin{aligned} [p_i, p_j]\psi &= \left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -\hbar^2 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \\ &= -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i} \right) = 0, \end{aligned}$$

w przestrzeni Hilberta  $X$  funkcji całkownalnych z kwadratem modułu. Dla dowolnej funkcji  $\psi \in X$  zachodzi

$$\begin{aligned} [x_i, p_j]\psi &= \left[ x_i, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -i\hbar \left[ x_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi \\ &= -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial (x_i \psi)}{\partial x_j} \right) = -i\hbar \left( x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \psi - x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \\ &= i\hbar \delta_{ij} \psi; \end{aligned}$$

$$[x_i, x_j]\psi = (x_i x_j - x_j x_i) \psi = 0;$$

$$\begin{aligned} [p_i, p_j]\psi &= \left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi = -\hbar^2 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \\ &= -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i} \right) = 0, \end{aligned}$$

gdzie założyliśmy równość drugich pochodnych mieszanych. Skąd wnioskujemy, że operatory położenia i pędu spełniają następujące relacje komutacji:

gdzie założyliśmy równość drugich pochodnych mieszanych. Skąd wnioskujemy, że operatory położenia i pędu spełniają następujące relacje komutacji:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

gdzie założyliśmy równość drugich pochodnych mieszanych. Skąd wnioskujemy, że operatory położenia i pędu spełniają następujące relacje komutacji:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Relacje te nazywa się zwykle regułami kwantyzacji.

gdzie założyliśmy równość drugich pochodnych mieszanych. Skąd wnioskujemy, że operatory położenia i pędu spełniają następujące relacje komutacji:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Relacje te nazywa się zwykle **regułami kwantyzacji**.

Zauważmy, że są one analogiem **fundamentalnych nawiasów Poissona** w mechanice klasycznej.

gdzie założyliśmy równość drugich pochodnych mieszanych. Skąd wnioskujemy, że operatory położenia i pędu spełniają następujące relacje komutacji:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Relacje te nazywa się zwykle **regułami kwantyzacji**.

Zauważmy, że są one analogiem **fundamentalnych nawiasów Poissona** w mechanice klasycznej.

Wykorzystując operatory  $x_i$  i  $p_j$  możemy znaleźć kwantowomechaniczne odpowiedniki zmiennych dynamicznych znanych z mechaniki klasycznej, a w oparciu o reguły kwantyzacji możemy znaleźć dla nich relacje komutacji.



gdzie założyliśmy równość drugich pochodnych mieszanych. Skąd wnioskujemy, że operatory położenia i pędu spełniają następujące relacje komutacji:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Relacje te nazywa się zwykle **regułami kwantyzacji**.

Zauważmy, że są one analogiem **fundamentalnych nawiasów Poissona** w mechanice klasycznej.

Wykorzystując operatory  $x_i$  i  $p_j$  możemy znaleźć kwantowomechaniczne odpowiedniki zmiennych dynamicznych znanych z mechaniki klasycznej, a w oparciu o reguły kwantyzacji możemy znaleźć dla nich relacje komutacji.

Np. operator orbitalnego momentu pędu  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ , którego składowe dane są wzorem

$$L_i = (\vec{r} \times \vec{p})_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k,$$

spełnia następujące relacje komutacji

$$[L_i, x_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} x_k, \quad [L_i, p_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} p_k,$$

Np. operator orbitalnego momentu pędu  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ , którego składowe dane są wzorem

$$L_i = (\vec{r} \times \vec{p})_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k,$$

spełnia następujące relacje komutacji

$$\begin{aligned} [L_i, x_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} x_k, & [L_i, p_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} p_k, \\ [L_i, L_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k, \end{aligned}$$

# Orbitalny moment pędu

Np. operator orbitalnego momentu pędu  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ , którego składowe dane są wzorem

$$L_i = (\vec{r} \times \vec{p})_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k,$$

spełnia następujące relacje komutacji

$$\begin{aligned} [L_i, x_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} x_k, & [L_i, p_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} p_k, \\ [L_i, L_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k, & [\vec{L}^2, L_i] &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

# Orbitalny moment pędu

Np. operator orbitalnego momentu pędu  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ , którego składowe dane są wzorem

$$L_i = (\vec{r} \times \vec{p})_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k,$$

spełnia następujące relacje komutacji

$$\begin{aligned} [L_i, x_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} x_k, & [L_i, p_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} p_k, \\ [L_i, L_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k, & [\vec{L}^2, L_i] &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

**Zadanie.** Wyprowadzić powyższe relacje komutacji.

Np. operator orbitalnego momentu pędu  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ , którego składowe dane są wzorem

$$L_i = (\vec{r} \times \vec{p})_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k,$$

spełnia następujące relacje komutacji

$$\begin{aligned} [L_i, x_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} x_k, & [L_i, p_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} p_k, \\ [L_i, L_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k, & [\vec{L}^2, L_i] &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

**Zadanie.** Wyprowadzić powyższe relacje komutacji.

# Sprężenie hermitowskie operatora

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta, a  $A : X \rightarrow X$  operatorem liniowym. Operator  $A^\dagger : X \rightarrow X$  nazywamy hermitowsko sprzężonym do operatora  $A$  jeśli

$$(A^\dagger \varphi | \psi) = (\varphi | A \psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X.$$

Jeśli  $X = \mathbb{C}^n$ , to macierze operatorów  $A$  i  $A^\dagger$  mają postać

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A^\dagger = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & \cdots & a_{n1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{n2}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{pmatrix}.$$

# Sprężenie hermitowskie operatora

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta, a  $A : X \rightarrow X$  operatorem liniowym. Operator  $A^\dagger : X \rightarrow X$  nazywamy hermitowsko sprzężonym do operatora  $A$  jeśli

$$(A^\dagger \varphi | \psi) = (\varphi | A \psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X.$$

Jeśli  $X = \mathbb{C}^n$ , to macierze operatorów  $A$  i  $A^\dagger$  mają postać

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A^\dagger = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & \cdots & a_{n1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{n2}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{pmatrix}.$$



# Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\left( (A + B)^\dagger \varphi | \psi \right) =$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\left( (A + B)^\dagger \varphi | \psi \right) = \left( \varphi | (A + B) \psi \right) =$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\left( (A + B)^\dagger \varphi | \psi \right) = (\varphi | (A + B) \psi) = (\varphi | A\psi + B\psi)$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned} ((A + B)^\dagger \varphi | \psi) &= (\varphi | (A + B) \psi) = (\varphi | A\psi + B\psi) \\ &= \end{aligned}$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned} ((A + B)^\dagger \varphi | \psi) &= (\varphi | (A + B)\psi) = (\varphi | A\psi + B\psi) \\ &= (\varphi | A\psi) + (\varphi | B\psi) \end{aligned}$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned} ((A + B)^\dagger \varphi | \psi) &= (\varphi | (A + B)\psi) = (\varphi | A\psi + B\psi) \\ &= (\varphi | A\psi) + (\varphi | B\psi) = \end{aligned}$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned} \left( (A + B)^\dagger \varphi | \psi \right) &= (\varphi | (A + B) \psi) = (\varphi | A\psi + B\psi) \\ &= (\varphi | A\psi) + (\varphi | B\psi) = (A^\dagger \varphi | \psi) + (B^\dagger \varphi | \psi) \end{aligned}$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned} ((A + B)^\dagger \varphi | \psi) &= (\varphi | (A + B)\psi) = (\varphi | A\psi + B\psi) \\ &= (\varphi | A\psi) + (\varphi | B\psi) = (A^\dagger \varphi | \psi) + (B^\dagger \varphi | \psi) \\ &= \end{aligned}$$



$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned} \left( (A + B)^\dagger \varphi | \psi \right) &= (\varphi | (A + B) \psi) = (\varphi | A \psi + B \psi) \\ &= (\varphi | A \psi) + (\varphi | B \psi) = (A^\dagger \varphi | \psi) + (B^\dagger \varphi | \psi) \\ &= (A^\dagger \varphi + B^\dagger \varphi | \psi) = \end{aligned}$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned} ((A + B)^\dagger \varphi | \psi) &= (\varphi | (A + B)\psi) = (\varphi | A\psi + B\psi) \\ &= (\varphi | A\psi) + (\varphi | B\psi) = (A^\dagger \varphi | \psi) + (B^\dagger \varphi | \psi) \\ &= (A^\dagger \varphi + B^\dagger \varphi | \psi) = ((A^\dagger + B^\dagger) \varphi | \psi) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned} ((A + B)^\dagger \varphi | \psi) &= (\varphi | (A + B)\psi) = (\varphi | A\psi + B\psi) \\ &= (\varphi | A\psi) + (\varphi | B\psi) = (A^\dagger \varphi | \psi) + (B^\dagger \varphi | \psi) \\ &= (A^\dagger \varphi + B^\dagger \varphi | \psi) = ((A^\dagger + B^\dagger) \varphi | \psi) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned} \left( (A + B)^\dagger \varphi | \psi \right) &= (\varphi | (A + B) \psi) = (\varphi | A \psi + B \psi) \\ &= (\varphi | A \psi) + (\varphi | B \psi) = (A^\dagger \varphi | \psi) + (B^\dagger \varphi | \psi) \\ &= (A^\dagger \varphi + B^\dagger \varphi | \psi) = \left( (A^\dagger + B^\dagger) \varphi | \psi \right) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$\left( (AB)^\dagger \varphi | \psi \right) =$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned} \left( (A + B)^\dagger \varphi | \psi \right) &= (\varphi | (A + B) \psi) = (\varphi | A\psi + B\psi) \\ &= (\varphi | A\psi) + (\varphi | B\psi) = (A^\dagger \varphi | \psi) + (B^\dagger \varphi | \psi) \\ &= (A^\dagger \varphi + B^\dagger \varphi | \psi) = \left( (A^\dagger + B^\dagger) \varphi | \psi \right) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$\left( (AB)^\dagger \varphi | \psi \right) = (\varphi | (AB) \psi)$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned} \left( (A + B)^\dagger \varphi | \psi \right) &= (\varphi | (A + B) \psi) = (\varphi | A \psi + B \psi) \\ &= (\varphi | A \psi) + (\varphi | B \psi) = (A^\dagger \varphi | \psi) + (B^\dagger \varphi | \psi) \\ &= (A^\dagger \varphi + B^\dagger \varphi | \psi) = \left( (A^\dagger + B^\dagger) \varphi | \psi \right) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$\left( (AB)^\dagger \varphi | \psi \right) = (\varphi | (AB) \psi) =$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned} \left( (A + B)^\dagger \varphi | \psi \right) &= (\varphi | (A + B) \psi) = (\varphi | A\psi + B\psi) \\ &= (\varphi | A\psi) + (\varphi | B\psi) = (A^\dagger \varphi | \psi) + (B^\dagger \varphi | \psi) \\ &= (A^\dagger \varphi + B^\dagger \varphi | \psi) = \left( (A^\dagger + B^\dagger) \varphi | \psi \right) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$\left( (AB)^\dagger \varphi | \psi \right) = (\varphi | (AB) \psi) = (\varphi | A(B\psi)) =$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned} \left( (A + B)^\dagger \varphi | \psi \right) &= (\varphi | (A + B) \psi) = (\varphi | A\psi + B\psi) \\ &= (\varphi | A\psi) + (\varphi | B\psi) = (A^\dagger \varphi | \psi) + (B^\dagger \varphi | \psi) \\ &= (A^\dagger \varphi + B^\dagger \varphi | \psi) = \left( (A^\dagger + B^\dagger) \varphi | \psi \right) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$\left( (AB)^\dagger \varphi | \psi \right) = (\varphi | (AB) \psi) = (\varphi | A(B\psi)) = (A^\dagger \varphi | B\psi)$$



$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned} \left( (A + B)^\dagger \varphi | \psi \right) &= (\varphi | (A + B) \psi) = (\varphi | A\psi + B\psi) \\ &= (\varphi | A\psi) + (\varphi | B\psi) = (A^\dagger \varphi | \psi) + (B^\dagger \varphi | \psi) \\ &= (A^\dagger \varphi + B^\dagger \varphi | \psi) = \left( (A^\dagger + B^\dagger) \varphi | \psi \right) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$\begin{aligned} \left( (AB)^\dagger \varphi | \psi \right) &= (\varphi | (AB) \psi) = (\varphi | A(B\psi)) = (A^\dagger \varphi | B\psi) \\ &= \end{aligned}$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned} \left( (A + B)^\dagger \varphi | \psi \right) &= (\varphi | (A + B) \psi) = (\varphi | A\psi + B\psi) \\ &= (\varphi | A\psi) + (\varphi | B\psi) = (A^\dagger \varphi | \psi) + (B^\dagger \varphi | \psi) \\ &= (A^\dagger \varphi + B^\dagger \varphi | \psi) = \left( (A^\dagger + B^\dagger) \varphi | \psi \right) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$\begin{aligned} \left( (AB)^\dagger \varphi | \psi \right) &= (\varphi | (AB) \psi) = (\varphi | A(B\psi)) = (A^\dagger \varphi | B\psi) \\ &= (B^\dagger A^\dagger \varphi | \psi) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$\begin{aligned} \left( (A + B)^\dagger \varphi | \psi \right) &= (\varphi | (A + B) \psi) = (\varphi | A \psi + B \psi) \\ &= (\varphi | A \psi) + (\varphi | B \psi) = (A^\dagger \varphi | \psi) + (B^\dagger \varphi | \psi) \\ &= (A^\dagger \varphi + B^\dagger \varphi | \psi) = \left( (A^\dagger + B^\dagger) \varphi | \psi \right) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$\begin{aligned} \left( (AB)^\dagger \varphi | \psi \right) &= (\varphi | (AB) \psi) = (\varphi | A (B \psi)) = (A^\dagger \varphi | B \psi) \\ &= (B^\dagger A^\dagger \varphi | \psi) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

# Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\left( (\alpha A)^\dagger \varphi | \psi \right) =$$

# Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\left( (\alpha A)^\dagger \varphi | \psi \right) = \left( \varphi | (\alpha A) \psi \right) =$$

# Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\left( (\alpha A)^\dagger \varphi | \psi \right) = \left( \varphi | (\alpha A) \psi \right) = \left( \varphi | \alpha (A \psi) \right) =$$

# Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\left( (\alpha A)^\dagger \varphi | \psi \right) = \left( \varphi | (\alpha A) \psi \right) = \left( \varphi | \alpha (A \psi) \right) = \alpha \left( \varphi | A \psi \right)$$

# Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} ((\alpha A)^\dagger \varphi | \psi) &= (\varphi | (\alpha A) \psi) = (\varphi | \alpha (A \psi)) = \alpha (\varphi | A \psi) \\ &= \end{aligned}$$



# Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} ((\alpha A)^\dagger \varphi | \psi) &= (\varphi | (\alpha A) \psi) = (\varphi | \alpha (A \psi)) = \alpha (\varphi | A \psi) \\ &= \alpha (A^\dagger \varphi | \psi) = \end{aligned}$$

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} ((\alpha A)^\dagger \varphi | \psi) &= (\varphi | (\alpha A) \psi) = (\varphi | \alpha (A \psi)) = \alpha (\varphi | A \psi) \\ &= \alpha (A^\dagger \varphi | \psi) = (\alpha^* A^\dagger \varphi | \psi) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} ((\alpha A)^\dagger \varphi | \psi) &= (\varphi | (\alpha A) \psi) = (\varphi | \alpha (A \psi)) = \alpha (\varphi | A \psi) \\ &= \alpha (A^\dagger \varphi | \psi) = (\alpha^* A^\dagger \varphi | \psi) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A$$

# Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} ((\alpha A)^\dagger \varphi | \psi) &= (\varphi | (\alpha A) \psi) = (\varphi | \alpha (A \psi)) = \alpha (\varphi | A \psi) \\ &= \alpha (A^\dagger \varphi | \psi) = (\alpha^* A^\dagger \varphi | \psi) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A$$

$$((A^\dagger)^\dagger \varphi | \psi) =$$

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} ((\alpha A)^\dagger \varphi | \psi) &= (\varphi | (\alpha A) \psi) = (\varphi | \alpha (A \psi)) = \alpha (\varphi | A \psi) \\ &= \alpha (A^\dagger \varphi | \psi) = (\alpha^* A^\dagger \varphi | \psi) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A$$

$$\left( (A^\dagger)^\dagger \varphi | \psi \right) = (\varphi | A^\dagger \psi) =$$

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} ((\alpha A)^\dagger \varphi | \psi) &= (\varphi | (\alpha A) \psi) = (\varphi | \alpha (A \psi)) = \alpha (\varphi | A \psi) \\ &= \alpha (A^\dagger \varphi | \psi) = (\alpha^* A^\dagger \varphi | \psi) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A$$

$$\left( (A^\dagger)^\dagger \varphi | \psi \right) = (\varphi | A^\dagger \psi) = (A^\dagger \psi | \varphi)^*$$

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} ((\alpha A)^\dagger \varphi | \psi) &= (\varphi | (\alpha A) \psi) = (\varphi | \alpha (A \psi)) = \alpha (\varphi | A \psi) \\ &= \alpha (A^\dagger \varphi | \psi) = (\alpha^* A^\dagger \varphi | \psi) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A$$

$$\begin{aligned} ((A^\dagger)^\dagger \varphi | \psi) &= (\varphi | A^\dagger \psi) = (A^\dagger \psi | \varphi)^* \\ &= \end{aligned}$$

# Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} ((\alpha A)^\dagger \varphi | \psi) &= (\varphi | (\alpha A) \psi) = (\varphi | \alpha (A \psi)) = \alpha (\varphi | A \psi) \\ &= \alpha (A^\dagger \varphi | \psi) = (\alpha^* A^\dagger \varphi | \psi) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A$$

$$\begin{aligned} ((A^\dagger)^\dagger \varphi | \psi) &= (\varphi | A^\dagger \psi) = (A^\dagger \psi | \varphi)^* \\ &= (\psi | A \varphi)^* = \end{aligned}$$



# Własności operacji sprzężenia hermitowskiego

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} ((\alpha A)^\dagger \varphi | \psi) &= (\varphi | (\alpha A) \psi) = (\varphi | \alpha (A \psi)) = \alpha (\varphi | A \psi) \\ &= \alpha (A^\dagger \varphi | \psi) = (\alpha^* A^\dagger \varphi | \psi) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A$$

$$\begin{aligned} ((A^\dagger)^\dagger \varphi | \psi) &= (\varphi | A^\dagger \psi) = (A^\dagger \psi | \varphi)^* \\ &= (\psi | A \varphi)^* = (A \varphi | \psi) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} ((\alpha A)^\dagger \varphi | \psi) &= (\varphi | (\alpha A) \psi) = (\varphi | \alpha (A \psi)) = \alpha (\varphi | A \psi) \\ &= \alpha (A^\dagger \varphi | \psi) = (\alpha^* A^\dagger \varphi | \psi) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A$$

$$\begin{aligned} ((A^\dagger)^\dagger \varphi | \psi) &= (\varphi | A^\dagger \psi) = (A^\dagger \psi | \varphi)^* \\ &= (\psi | A \varphi)^* = (A \varphi | \psi) \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy  $A : X \rightarrow X$  nazywamy **hermitowskim** jeśli

$$(A\varphi|\psi) = (\varphi|A\psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X,$$

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy  $A : X \rightarrow X$  nazywamy **hermitowskim** jeśli

$$(A\varphi|\psi) = (\varphi|A\psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$A^\dagger = A.$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy  $A : X \rightarrow X$  nazywamy **hermitowskim** jeśli

$$(A\varphi|\psi) = (\varphi|A\psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$A^\dagger = A.$$

Jeśli operator  $A$  jest hermitowski, to liczba  $(\psi|A\psi)$  jest rzeczywista dla każdego  $\psi \in X$ .

# Operatory i funkcjonały liniowe

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy  $A : X \rightarrow X$  nazywamy **hermitowskim** jeśli

$$(A\varphi|\psi) = (\varphi|A\psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$A^\dagger = A.$$

Jeśli operator  $A$  jest hermitowski, to liczba  $(\psi|A\psi)$  jest rzeczywista dla każdego  $\psi \in X$ . W istocie

$$(\psi|A\psi) =$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy  $A : X \rightarrow X$  nazywamy **hermitowskim** jeśli

$$(A\varphi|\psi) = (\varphi|A\psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$A^\dagger = A.$$

Jeśli operator  $A$  jest hermitowski, to liczba  $(\psi|A\psi)$  jest rzeczywista dla każdego  $\psi \in X$ . W istocie

$$(\psi|A\psi) = (A\psi|\psi) =$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy  $A : X \rightarrow X$  nazywamy **hermitowskim** jeśli

$$(A\varphi|\psi) = (\varphi|A\psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$A^\dagger = A.$$

Jeśli operator  $A$  jest hermitowski, to liczba  $(\psi|A\psi)$  jest rzeczywista dla każdego  $\psi \in X$ . W istocie

$$(\psi|A\psi) = (A\psi|\psi) = (\psi|A\psi)^*$$



# Operatory i funkcjonały liniowe

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy  $A : X \rightarrow X$  nazywamy **hermitowskim** jeśli

$$(A\varphi|\psi) = (\varphi|A\psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$A^\dagger = A.$$

Jeśli operator  $A$  jest hermitowski, to liczba  $(\psi|A\psi)$  jest rzeczywista dla każdego  $\psi \in X$ . W istocie

$$(\psi|A\psi) = (A\psi|\psi) = (\psi|A\psi)^* \quad \Rightarrow \quad (\psi|A\psi) \in \mathbb{R}.$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy  $A : X \rightarrow X$  nazywamy **hermitowskim** jeśli

$$(A\varphi|\psi) = (\varphi|A\psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$A^\dagger = A.$$

Jeśli operator  $A$  jest hermitowski, to liczba  $(\psi|A\psi)$  jest rzeczywista dla każdego  $\psi \in X$ . W istocie

$$(\psi|A\psi) = (A\psi|\psi) = (\psi|A\psi)^* \quad \Rightarrow \quad (\psi|A\psi) \in \mathbb{R}.$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy  $U : X \rightarrow X$  nazywamy **unitarnym** jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X,$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy  $U : X \rightarrow X$  nazywamy **unitarnym** jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^\dagger = U^{-1},$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy  $U : X \rightarrow X$  nazywamy **unitarnym** jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^\dagger = U^{-1},$$

gdź z definicji operatora sprzężonego hermitowsko wynikają następujące równości dla wszystkich  $\varphi, \psi \in X$

$$(U\varphi|U\psi) =$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy  $U : X \rightarrow X$  nazywamy **unitarnym** jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^\dagger = U^{-1},$$

gdyż z definicji operatora sprzężonego hermitowsko wynikają następujące równości dla wszystkich  $\varphi, \psi \in X$

$$(U\varphi|U\psi) = (U^\dagger U\varphi|\psi) =$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy  $U : X \rightarrow X$  nazywamy **unitarnym** jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^\dagger = U^{-1},$$

gdyż z definicji operatora sprzężonego hermitowsko wynikają następujące równości dla wszystkich  $\varphi, \psi \in X$

$$(U\varphi|U\psi) = (U^\dagger U\varphi|\psi) = (\varphi|\psi)$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy  $U : X \rightarrow X$  nazywamy **unitarnym** jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^\dagger = U^{-1},$$

gdyż z definicji operatora sprzężonego hermitowsko wynikają następujące równości dla wszystkich  $\varphi, \psi \in X$

$$(U\varphi|U\psi) = (U^\dagger U\varphi|\psi) = (\varphi|\psi) \Leftrightarrow U^\dagger U = \mathbb{I}.$$



# Operatory i funkcjonały liniowe

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy  $U : X \rightarrow X$  nazywamy **unitarnym** jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^\dagger = U^{-1},$$

gdyż z definicji operatora sprzężonego hermitowsko wynikają następujące równości dla wszystkich  $\varphi, \psi \in X$

$$\begin{aligned} (U\varphi|U\psi) &= (U^\dagger U\varphi|\psi) = (\varphi|\psi) \Leftrightarrow U^\dagger U = \mathbb{I}. \\ (U^\dagger\varphi|\psi) & \end{aligned}$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy  $U : X \rightarrow X$  nazywamy **unitarnym** jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^\dagger = U^{-1},$$

gdyż z definicji operatora sprzężonego hermitowsko wynikają następujące równości dla wszystkich  $\varphi, \psi \in X$

$$\begin{aligned} (U\varphi|U\psi) &= (U^\dagger U\varphi|\psi) = (\varphi|\psi) \Leftrightarrow U^\dagger U = \mathbb{I}. \\ (U^\dagger\varphi|\psi) &= \end{aligned}$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy  $U : X \rightarrow X$  nazywamy **unitarnym** jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^\dagger = U^{-1},$$

gdyż z definicji operatora sprzężonego hermitowsko wynikają następujące równości dla wszystkich  $\varphi, \psi \in X$

$$\begin{aligned} (U\varphi|U\psi) &= (U^\dagger U\varphi|\psi) = (\varphi|\psi) \quad \Leftrightarrow \quad U^\dagger U = \mathbb{I}. \\ (U^\dagger\varphi|\psi) &= (UU^\dagger\varphi|U\psi) = \end{aligned}$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy  $U : X \rightarrow X$  nazywamy **unitarnym** jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^\dagger = U^{-1},$$

gdyż z definicji operatora sprzężonego hermitowsko wynikają następujące równości dla wszystkich  $\varphi, \psi \in X$

$$\begin{aligned}(U\varphi|U\psi) &= (U^\dagger U\varphi|\psi) = (\varphi|\psi) \iff U^\dagger U = \mathbb{I}. \\ (U^\dagger\varphi|\psi) &= (UU^\dagger\varphi|U\psi) = (\varphi|U\psi)\end{aligned}$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy  $U : X \rightarrow X$  nazywamy **unitarnym** jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^\dagger = U^{-1},$$

gdyż z definicji operatora sprzężonego hermitowsko wynikają następujące równości dla wszystkich  $\varphi, \psi \in X$

$$(U\varphi|U\psi) = (U^\dagger U\varphi|\psi) = (\varphi|\psi) \Leftrightarrow U^\dagger U = \mathbb{I}.$$

$$(U^\dagger\varphi|\psi) = (UU^\dagger\varphi|U\psi) = (\varphi|U\psi) \Leftrightarrow UU^\dagger = \mathbb{I}.$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Niech  $X$  będzie przestrzenią Hilberta. Operator liniowy  $U : X \rightarrow X$  nazywamy **unitarnym** jeśli

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi) \quad \text{dla wszystkich } \varphi, \psi \in X,$$

co często zapisujemy w formie

$$U^\dagger = U^{-1},$$

gdyż z definicji operatora sprzężonego hermitowsko wynikają następujące równości dla wszystkich  $\varphi, \psi \in X$

$$(U\varphi|U\psi) = (U^\dagger U\varphi|\psi) = (\varphi|\psi) \Leftrightarrow U^\dagger U = \mathbb{I}.$$

$$(U^\dagger\varphi|\psi) = (UU^\dagger\varphi|U\psi) = (\varphi|U\psi) \Leftrightarrow UU^\dagger = \mathbb{I}.$$

Operator unitarny nie zmienia normy wektora w przestrzeni Hilberta, tzn.  $\|U\psi\| = \|\psi\|$ , dla dowolnego  $\psi \in X$ .

Rzeczywiście

$$\|U\psi\|^2 =$$

Operator unitarny nie zmienia normy wektora w przestrzeni Hilberta, tzn.  $\|U\psi\| = \|\psi\|$ , dla dowolnego  $\psi \in X$ .

Rzeczywiście

$$\|U\psi\|^2 = (U\psi|U\psi) =$$



Operator unitarny nie zmienia normy wektora w przestrzeni Hilberta, tzn.  $\|U\psi\| = \|\psi\|$ , dla dowolnego  $\psi \in X$ .

Rzeczywiście

$$\|U\psi\|^2 = (U\psi|U\psi) = (\psi|\psi) =$$

Operator unitarny nie zmienia normy wektora w przestrzeni Hilberta, tzn.  $\|U\psi\| = \|\psi\|$ , dla dowolnego  $\psi \in X$ .

Rzeczywiście

$$\|U\psi\|^2 = (U\psi|U\psi) = (\psi|\psi) = \|\psi\|^2.$$

Operator unitarny nie zmienia normy wektora w przestrzeni Hilberta, tzn.  $\|U\psi\| = \|\psi\|$ , dla dowolnego  $\psi \in X$ .

Rzeczywiście

$$\|U\psi\|^2 = (U\psi|U\psi) = (\psi|\psi) = \|\psi\|^2.$$

Niech  $A$  będzie operatorem liniowym w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych.

Rozważmy **równanie własne** operatora  $A$

$$A\psi = \lambda\psi.$$

Niech  $A$  będzie operatorem liniowym w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych.

Rozważmy **równanie własne** operatora  $A$

$$A\psi = \lambda\psi.$$

Jeżeli równanie to ma rozwiązanie dla niezerowego wektora  $\psi \in X$ ,

Niech  $A$  będzie operatorem liniowym w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych.

Rozważmy **równanie własne** operatora  $A$

$$A\psi = \lambda\psi.$$

Jeżeli równanie to ma rozwiązanie dla niezerowego wektora  $\psi \in X$ , to liczbę  $\lambda \in \mathbb{C}$  nazywamy **wartością własną**,

Niech  $A$  będzie operatorem liniowym w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych.

Rozważmy **równanie własne** operatora  $A$

$$A\psi = \lambda\psi.$$

Jeżeli równanie to ma rozwiązanie dla niezerowego wektora  $\psi \in X$ , to liczbę  $\lambda \in \mathbb{C}$  **nazywamy wartością własną**, a  $\psi$  **wektorem własnym** odpowiadającym wartości własnej  $\lambda$ .

Niech  $A$  będzie operatorem liniowym w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych.

Rozważmy **równanie własne** operatora  $A$

$$A\psi = \lambda\psi.$$

Jeżeli równanie to ma rozwiązanie dla niezerowego wektora  $\psi \in X$ , to liczbę  $\lambda \in \mathbb{C}$  **nazywamy wartością własną**, a  $\psi$  **wektorem własnym** odpowiadającym wartości własnej  $\lambda$ .

**Zadanie.** Pokazać, że zbiór  $X_\lambda$  wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartości własnej  $\lambda$  jest podprzestrzenią przestrzeni Hilberta  $X$ .



Niech  $A$  będzie operatorem liniowym w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych.

Rozważmy **równanie własne** operatora  $A$

$$A\psi = \lambda\psi.$$

Jeżeli równanie to ma rozwiązanie dla niezerowego wektora  $\psi \in X$ , to liczbę  $\lambda \in \mathbb{C}$  **nazywamy wartością własną**, a  $\psi$  **wektorem własnym** odpowiadającym wartości własnej  $\lambda$ .

**Zadanie.** Pokazać, że zbiór  $X_\lambda$  wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartości własnej  $\lambda$  jest podprzestrzenią przestrzeni Hilberta  $X$ . **Wymiar podprzestrzeni  $X_\lambda$  nazywamy krotnością wartości własnej  $\lambda$ .**

Niech  $A$  będzie operatorem liniowym w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych.

Rozważmy **równanie własne** operatora  $A$

$$A\psi = \lambda\psi.$$

Jeżeli równanie to ma rozwiązanie dla niezerowego wektora  $\psi \in X$ , to liczbę  $\lambda \in \mathbb{C}$  **nazywamy wartością własną**, a  $\psi$  **wektorem własnym** odpowiadającym wartości własnej  $\lambda$ .

**Zadanie.** Pokazać, że zbiór  $X_\lambda$  wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartości własnej  $\lambda$  jest podprzestrzenią przestrzeni Hilberta  $X$ . **Wymiar podprzestrzeni  $X_\lambda$  nazywamy krotnością wartości własnej  $\lambda$ .**

Wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi.

W istocie, niech  $A\psi = \lambda\psi$ ,

Wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi.

W istocie, niech  $A\psi = \lambda\psi$ , wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) =$$

Wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi.

W istocie, niech  $A\psi = \lambda\psi$ , wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) =$$

Wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi.

W istocie, niech  $A\psi = \lambda\psi$ , wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) =$$

Wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi.

W istocie, niech  $A\psi = \lambda\psi$ , wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2$$

Wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi.

W istocie, niech  $A\psi = \lambda\psi$ , wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$



Wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi. W istocie, niech  $A\psi = \lambda\psi$ , wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  są ortogonalne.

Wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi. W istocie, niech  $A\psi = \lambda\psi$ , wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  są ortogonalne.

*Dowód.* Załóżmy, że  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są wartościami własnymi operatora  $A$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , a  $\psi_1$  i  $\psi_2$  odpowiadającymi im wektorami własnymi.

Wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi. W istocie, niech  $A\psi = \lambda\psi$ , wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  są ortogonalne.

*Dowód.* Załóżmy, że  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są wartościami własnymi operatora  $A$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , a  $\psi_1$  i  $\psi_2$  odpowiadającymi im wektorami własnymi. Dla operatora hermitowskiego mamy

$$(A\psi_1|\psi_2) =$$

Wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi. W istocie, niech  $A\psi = \lambda\psi$ , wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  są ortogonalne.

*Dowód.* Załóżmy, że  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są wartościami własnymi operatora  $A$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , a  $\psi_1$  i  $\psi_2$  odpowiadającymi im wektorami własnymi. Dla operatora hermitowskiego mamy

$$(A\psi_1|\psi_2) = (\psi_1|A\psi_2)$$

Wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi. W istocie, niech  $A\psi = \lambda\psi$ , wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  są ortogonalne.

*Dowód.* Załóżmy, że  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są wartościami własnymi operatora  $A$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , a  $\psi_1$  i  $\psi_2$  odpowiadającymi im wektorami własnymi. Dla operatora hermitowskiego mamy

$$(A\psi_1|\psi_2) = (\psi_1|A\psi_2) \Rightarrow (\lambda_1\psi_1|\psi_2)$$

Wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi. W istocie, niech  $A\psi = \lambda\psi$ , wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  są ortogonalne.

*Dowód.* Załóżmy, że  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są wartościami własnymi operatora  $A$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , a  $\psi_1$  i  $\psi_2$  odpowiadającymi im wektorami własnymi. Dla operatora hermitowskiego mamy

$$(A\psi_1|\psi_2) = (\psi_1|A\psi_2) \Rightarrow (\lambda_1\psi_1|\psi_2) =$$

Wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi. W istocie, niech  $A\psi = \lambda\psi$ , wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  są ortogonalne.

*Dowód.* Załóżmy, że  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są wartościami własnymi operatora  $A$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , a  $\psi_1$  i  $\psi_2$  odpowiadającymi im wektorami własnymi. Dla operatora hermitowskiego mamy

$$(A\psi_1|\psi_2) = (\psi_1|A\psi_2) \Rightarrow (\lambda_1\psi_1|\psi_2) = (\psi_1|\lambda_2\psi_2)$$

# Operatory i funkcjonały liniowe

Wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi. W istocie, niech  $A\psi = \lambda\psi$ , wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  są ortogonalne.

*Dowód.* Załóżmy, że  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są wartościami własnymi operatora  $A$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , a  $\psi_1$  i  $\psi_2$  odpowiadającymi im wektorami własnymi. Dla operatora hermitowskiego mamy

$$(A\psi_1|\psi_2) = (\psi_1|A\psi_2) \Rightarrow (\lambda_1\psi_1|\psi_2) = (\psi_1|\lambda_2\psi_2)$$
$$\lambda_1^*(\psi_1|\psi_2)$$



Wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi. W istocie, niech  $A\psi = \lambda\psi$ , wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  są ortogonalne.

*Dowód.* Załóżmy, że  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są wartościami własnymi operatora  $A$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , a  $\psi_1$  i  $\psi_2$  odpowiadającymi im wektorami własnymi. Dla operatora hermitowskiego mamy

$$\begin{aligned} (A\psi_1|\psi_2) &= (\psi_1|A\psi_2) \Rightarrow (\lambda_1\psi_1|\psi_2) = (\psi_1|\lambda_2\psi_2) \\ & \lambda_1^*(\psi_1|\psi_2) = \end{aligned}$$

Wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi. W istocie, niech  $A\psi = \lambda\psi$ , wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  są ortogonalne.

*Dowód.* Załóżmy, że  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są wartościami własnymi operatora  $A$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , a  $\psi_1$  i  $\psi_2$  odpowiadającymi im wektorami własnymi. Dla operatora hermitowskiego mamy

$$\begin{aligned} (A\psi_1|\psi_2) &= (\psi_1|A\psi_2) \Rightarrow (\lambda_1\psi_1|\psi_2) = (\psi_1|\lambda_2\psi_2) \\ & \lambda_1^*(\psi_1|\psi_2) = \lambda_2(\psi_1|\psi_2), \end{aligned}$$

Wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi. W istocie, niech  $A\psi = \lambda\psi$ , wtedy

$$\mathbb{R} \ni (\psi|A\psi) = (\psi|\lambda\psi) = \lambda(\psi|\psi) = \lambda\|\psi\|^2 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wektory odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  są ortogonalne.

*Dowód.* Załóżmy, że  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są wartościami własnymi operatora  $A$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , a  $\psi_1$  i  $\psi_2$  odpowiadającymi im wektorami własnymi. Dla operatora hermitowskiego mamy

$$\begin{aligned} (A\psi_1|\psi_2) &= (\psi_1|A\psi_2) \Rightarrow (\lambda_1\psi_1|\psi_2) = (\psi_1|\lambda_2\psi_2) \\ & \lambda_1^*(\psi_1|\psi_2) = \lambda_2(\psi_1|\psi_2), \end{aligned}$$

ale wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2)$$

ale wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2) =$$

ale wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2) = \lambda_2(\psi_1|\psi_2)$$

ale wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2) = \lambda_2(\psi_1|\psi_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(\psi_1|\psi_2) = 0$$

ale wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2) = \lambda_2(\psi_1|\psi_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(\psi_1|\psi_2) = 0$$

więc albo  $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ , co jest sprzeczne z założeniem, że  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,



ale wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2) = \lambda_2(\psi_1|\psi_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(\psi_1|\psi_2) = 0$$

więc albo  $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ , co jest sprzeczne z założeniem, że  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , albo  $(\psi_1|\psi_2) = 0$ , cnd.

ale wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2) = \lambda_2(\psi_1|\psi_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(\psi_1|\psi_2) = 0$$

więc albo  $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ , co jest sprzeczne z założeniem, że  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , albo  $(\psi_1|\psi_2) = 0$ , **end**.

Jeżeli wektory własne operatora hermitowskiego  $A$  tworzą **układ zupełny** w przestrzeni Hilberta  $X$ ,

ale wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2) = \lambda_2(\psi_1|\psi_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(\psi_1|\psi_2) = 0$$

więc albo  $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ , co jest sprzeczne z założeniem, że  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , albo  $(\psi_1|\psi_2) = 0$ , **cnd**.

Jeżeli wektory własne operatora hermitowskiego  $A$  tworzą **układ zupełny** w przestrzeni Hilberta  $X$ , tzn. każdy wektor z  $X$  można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów własnych operatora  $A$ ,

ale wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2) = \lambda_2(\psi_1|\psi_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(\psi_1|\psi_2) = 0$$

więc albo  $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ , co jest sprzeczne z założeniem, że  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , albo  $(\psi_1|\psi_2) = 0$ , **end**.

Jeżeli wektory własne operatora hermitowskiego  $A$  tworzą **układ zupełny** w przestrzeni Hilberta  $X$ , tzn. każdy wektor z  $X$  można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów własnych operatora  $A$ , to taki operator będziemy nazywać **obserwabłą**.

ale wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2) = \lambda_2(\psi_1|\psi_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(\psi_1|\psi_2) = 0$$

więc albo  $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ , co jest sprzeczne z założeniem, że  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , albo  $(\psi_1|\psi_2) = 0$ , **end**.

Jeżeli wektory własne operatora hermitowskiego  $A$  tworzą **układ zupełny** w przestrzeni Hilberta  $X$ , tzn. każdy wektor z  $X$  można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów własnych operatora  $A$ , to taki operator będziemy nazywać **obserwabłą**.

Wektory własne operatora hermitowskiego będącego obserwabłą można zatem wykorzystać jako bazę rozwinięć ortogonalnych.

ale wartości własne operatora hermitowskiego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $X$  nad ciałem liczb zespolonych są liczbami rzeczywistymi, więc

$$\lambda_1(\psi_1|\psi_2) = \lambda_2(\psi_1|\psi_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(\psi_1|\psi_2) = 0$$

więc albo  $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ , co jest sprzeczne z założeniem, że  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , albo  $(\psi_1|\psi_2) = 0$ , **cnd**.

Jeżeli wektory własne operatora hermitowskiego  $A$  tworzą **układ zupełny** w przestrzeni Hilberta  $X$ , tzn. każdy wektor z  $X$  można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów własnych operatora  $A$ , to taki operator będziemy nazywać **obserwabłą**.  
**Wektory własne operatora hermitowskiego będącego obserwabłą można zatem wykorzystać jako bazę rozwinięć ortogonalnych.**

Funkcje falowe, które rozpatrywaliśmy do tej pory tworzą nieskończenie wymiarową przestrzeń Hilberta  $\mathcal{H}$  stanów kwantowomechanicznych, dlatego możemy traktować je jako wektory.

Przypomnijmy równanie własne operatora  $A$

$$A\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha,$$

gdzie funkcję własną odpowiadającą wartości własnej  $\alpha$  oznaczyliśmy  $\psi_\alpha$ .

Funkcje falowe, które rozpatrywaliśmy do tej pory tworzą nieskończenie wymiarową przestrzeń Hilberta  $\mathcal{H}$  stanów kwantowomechanicznych, dlatego możemy traktować je jako wektory.

Przypomnijmy równanie własne operatora  $A$

$$A\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha,$$

gdzie funkcję własną odpowiadającą wartości własnej  $\alpha$  oznaczyliśmy  $\psi_\alpha$ . Oznaczmy

$$\psi_\alpha \equiv |\psi_\alpha\rangle \quad \text{lub} \quad \psi_\alpha \equiv |\alpha\rangle,$$



Funkcje falowe, które rozpatrywaliśmy do tej pory tworzą nieskończenie wymiarową przestrzeń Hilberta  $\mathcal{H}$  stanów kwantowomechanicznych, dlatego możemy traktować je jako wektory.

Przypomnijmy równanie własne operatora  $A$

$$A\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha,$$

gdzie funkcję własną odpowiadającą wartości własnej  $\alpha$  oznaczyliśmy  $\psi_\alpha$ . Oznaczmy

$$\psi_\alpha \equiv |\psi_\alpha\rangle \quad \text{lub} \quad \psi_\alpha \equiv |\alpha\rangle,$$

wówczas równanie własne możemy zapisać w formie

$$A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

Funkcje falowe, które rozpatrywaliśmy do tej pory tworzą nieskończenie wymiarową przestrzeń Hilberta  $\mathcal{H}$  stanów kwantowomechanicznych, dlatego możemy traktować je jako wektory.

Przypomnijmy równanie własne operatora  $A$

$$A\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha,$$

gdzie funkcję własną odpowiadającą wartości własnej  $\alpha$  oznaczyliśmy  $\psi_\alpha$ . Oznaczmy

$$\psi_\alpha \equiv |\psi_\alpha\rangle \quad \text{lub} \quad \psi_\alpha \equiv |\alpha\rangle,$$

wówczas równanie własne możemy zapisać w formie

$$A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

Iloczyn skalarny wektorów  $\phi, \psi \in \mathcal{H}$  zapiszemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \langle \phi|\psi \rangle,$$

$\langle \phi|$  i  $|\psi\rangle$  nazywamy odpowiednio symbolami *bra* i *ket* Diraca; od angielskiego terminu *bracket* czyli nawias.

Iloczyn skalarny wektorów  $\phi, \psi \in \mathcal{H}$  zapiszemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \langle \phi|\psi \rangle,$$

$\langle \phi|$  i  $|\psi\rangle$  nazywamy odpowiednio symbolami *bra* i *ket* Diraca; od angielskiego terminu *bracket* czyli nawias.

O ile wektor ket należy do przestrzeni Hilberta stanów  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ ,

Iloczyn skalarny wektorów  $\phi, \psi \in \mathcal{H}$  zapiszemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \langle \phi|\psi \rangle,$$

$\langle \phi|$  i  $|\psi\rangle$  nazywamy odpowiednio symbolami *bra* i *ket* Diraca; od angielskiego terminu *bracket* czyli nawias.

O ile wektor ket należy do przestrzeni Hilberta stanów  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , to wektor bra jest *funkcjonałem* działającym w przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ , a więc należy do *przestrzeni dualnej* do  $\mathcal{H}$ ,  $\langle \psi| \in \mathcal{H}^*$ .

Iloczyn skalarny wektorów  $\phi, \psi \in \mathcal{H}$  zapiszemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \langle \phi|\psi \rangle,$$

$\langle \phi|$  i  $|\psi\rangle$  nazywamy odpowiednio symbolami *bra* i *ket* Diraca; od angielskiego terminu *bracket* czyli nawias.

O ile wektor ket należy do przestrzeni Hilberta stanów  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , to wektor bra jest **funkcjonałem** działającym w przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ , a więc należy do **przestrzeni dualnej do  $\mathcal{H}$** ,  $\langle \psi| \in \mathcal{H}^*$ .

Jeżeli operator  $A$  jest obserwabłą to jego wektory własne  $|\alpha\rangle$  tworzą zupełny układ ortogonalny w przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ , czyli bazę.

Założmy, że widmo operatora  $A$

Jeżeli operator  $A$  jest obserwabłą to jego wektory własne  $|\alpha\rangle$  tworzą zupełny układ ortogonalny w przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ , czyli bazę.

Założmy, że widmo operatora  $A$  – czyli zbiór jego wszystkich wartości własnych



Jeżeli operator  $A$  jest obserwabłą to jego wektory własne  $|\alpha\rangle$  tworzą zupełny układ ortogonalny w przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ , czyli bazę.

Założmy, że widmo operatora  $A$  – czyli zbiór jego wszystkich wartości własnych – jest dyskretne i niezdegenerowane,

Jeżeli operator  $A$  jest obserwabłą to jego wektory własne  $|\alpha\rangle$  tworzą zupełny układ ortogonalny w przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ , czyli bazę.

Założmy, że widmo operatora  $A$  – czyli zbiór jego wszystkich wartości własnych – jest dyskretne i niezdegenerowane, tzn. każdej wartości własnej  $\alpha$  odpowiada dokładnie jeden wektor własny

$$A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

Jeżeli operator  $A$  jest obserwabłą to jego wektory własne  $|\alpha\rangle$  tworzą zupełny układ ortogonalny w przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ , czyli bazę.

Założmy, że widmo operatora  $A$  – czyli zbiór jego wszystkich wartości własnych – jest dyskretne i niezdegenerowane, tzn. każdej wartości własnej  $\alpha$  odpowiada dokładnie jeden wektor własny

$$A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

Zbiór wektorów własnych operatora  $A$  możemy unormować, tak aby dowolne dwa wektory  $|\alpha\rangle$  i  $|\beta\rangle$  spełniały równość

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}.$$

Jeżeli operator  $A$  jest obserwabłą to jego wektory własne  $|\alpha\rangle$  tworzą zupełny układ ortogonalny w przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ , czyli bazę.

Założmy, że widmo operatora  $A$  – czyli zbiór jego wszystkich wartości własnych – jest dyskretne i niezdegenerowane, tzn. każdej wartości własnej  $\alpha$  odpowiada dokładnie jeden wektor własny

$$A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

Zbiór wektorów własnych operatora  $A$  możemy unormować, tak aby dowolne dwa wektory  $|\alpha\rangle$  i  $|\beta\rangle$  spełniały równość

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}.$$

Dowolny wektor  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych  $\{|\alpha\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle .$$

# Baza w przestrzeni Hilberta

Dowolny wektor  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych  $\{|\alpha\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle.$$

Współczynniki rozwinięcia znajdziemy mnożąc obie strony tego równania przez  $\langle\beta|$

# Baza w przestrzeni Hilberta

Dowolny wektor  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych  $\{|\alpha\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle.$$

Współczynniki rozwinięcia znajdziemy mnożąc obie strony tego równania przez  $\langle\beta|$

$$\langle\beta|\psi\rangle$$

# Baza w przestrzeni Hilberta

Dowolny wektor  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych  $\{|\alpha\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle.$$

Współczynniki rozwinięcia znajdziemy mnożąc obie strony tego równania przez  $\langle\beta|$

$$\langle\beta|\psi\rangle =$$



# Baza w przestrzeni Hilberta

Dowolny wektor  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych  $\{|\alpha\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle.$$

Współczynniki rozwinięcia znajdziemy mnożąc obie strony tego równania przez  $\langle\beta|$

$$\langle\beta|\psi\rangle = \langle\beta| \left( \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle \right) =$$

# Baza w przestrzeni Hilberta

Dowolny wektor  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych  $\{|\alpha\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle.$$

Współczynniki rozwinięcia znajdziemy mnożąc obie strony tego równania przez  $\langle\beta|$

$$\langle\beta|\psi\rangle = \langle\beta| \left( \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle \right) = \sum_{\alpha} \langle\beta|c_{\alpha}|\alpha\rangle$$

# Baza w przestrzeni Hilberta

Dowolny wektor  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych  $\{|\alpha\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle.$$

Współczynniki rozwinięcia znajdziemy mnożąc obie strony tego równania przez  $\langle\beta|$

$$\begin{aligned} \langle\beta|\psi\rangle &= \langle\beta| \left( \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle \right) = \sum_{\alpha} \langle\beta|c_{\alpha}|\alpha\rangle \\ &= \end{aligned}$$

# Baza w przestrzeni Hilberta

Dowolny wektor  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych  $\{|\alpha\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle.$$

Współczynniki rozwinięcia znajdziemy mnożąc obie strony tego równania przez  $\langle\beta|$

$$\begin{aligned} \langle\beta|\psi\rangle &= \langle\beta| \left( \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle \right) = \sum_{\alpha} \langle\beta|c_{\alpha}|\alpha\rangle \\ &= \sum_{\alpha} c_{\alpha} \langle\beta|\alpha\rangle = \end{aligned}$$

# Baza w przestrzeni Hilberta

Dowolny wektor  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych  $\{|\alpha\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle.$$

Współczynniki rozwinięcia znajdziemy mnożąc obie strony tego równania przez  $\langle\beta|$

$$\begin{aligned} \langle\beta|\psi\rangle &= \langle\beta| \left( \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle \right) = \sum_{\alpha} \langle\beta|c_{\alpha}|\alpha\rangle \\ &= \sum_{\alpha} c_{\alpha} \langle\beta|\alpha\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \delta_{\alpha\beta} = c_{\beta}. \end{aligned}$$

# Baza w przestrzeni Hilberta

Dowolny wektor  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych  $\{|\alpha\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle.$$

Współczynniki rozwinięcia znajdziemy mnożąc obie strony tego równania przez  $\langle\beta|$

$$\begin{aligned} \langle\beta|\psi\rangle &= \langle\beta| \left( \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle \right) = \sum_{\alpha} \langle\beta|c_{\alpha}|\alpha\rangle \\ &= \sum_{\alpha} c_{\alpha} \langle\beta|\alpha\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \delta_{\alpha\beta} = c_{\beta}. \end{aligned}$$

W takim razie możemy zapisać

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} \langle\alpha|\psi\rangle |\alpha\rangle,$$

# Baza w przestrzeni Hilberta

Dowolny wektor  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  możemy rozwinąć w bazie wektorów własnych  $\{|\alpha\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle.$$

Współczynniki rozwinięcia znajdziemy mnożąc obie strony tego równania przez  $\langle\beta|$

$$\begin{aligned} \langle\beta|\psi\rangle &= \langle\beta| \left( \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle \right) = \sum_{\alpha} \langle\beta|c_{\alpha}|\alpha\rangle \\ &= \sum_{\alpha} c_{\alpha} \langle\beta|\alpha\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \delta_{\alpha\beta} = c_{\beta}. \end{aligned}$$

W takim razie możemy zapisać

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} \langle\alpha|\psi\rangle |\alpha\rangle,$$

albo inaczej

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle\alpha|\psi\rangle.$$

W takim razie widzimy, że

$$P_{\alpha} \equiv |\alpha\rangle \langle\alpha|$$

jest operatorem rzutowym na wektor  $|\alpha\rangle$ ,



albo inaczej

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle\alpha|\psi\rangle.$$

W takim razie widzimy, że

$$P_{\alpha} \equiv |\alpha\rangle \langle\alpha|$$

jest operatorem rzutowym na wektor  $|\alpha\rangle$ , a

$$\sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle\alpha| = \sum_{\alpha} P_{\alpha} = \mathbb{I}$$

jest operatorem identycznościowym.

albo inaczej

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle\alpha|\psi\rangle.$$

W takim razie widzimy, że

$$P_{\alpha} \equiv |\alpha\rangle \langle\alpha|$$

jest operatorem rzutowym na wektor  $|\alpha\rangle$ , a

$$\sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle\alpha| = \sum_{\alpha} P_{\alpha} = \mathbb{I}$$

jest operatorem identycznościowym.

Niech  $|\beta\rangle \neq |\alpha\rangle$  będzie innym wektorem własnym operatora  $A$ ,  
wówczas

$$P_\alpha P_\beta = |\alpha\rangle \underbrace{\langle\alpha|\beta\rangle}_0 \langle\beta| = 0,$$

co odzwierciedla **ortogonalność** wektorów własnych do różnych wartości własnych,

Niech  $|\beta\rangle \neq |\alpha\rangle$  będzie innym wektorem własnym operatora  $A$ , wówczas

$$P_\alpha P_\beta = |\alpha\rangle \underbrace{\langle\alpha|\beta\rangle}_0 \langle\beta| = 0,$$

co odzwierciedla **ortogonalność** wektorów własnych do różnych wartości własnych, natomiast

$$P_\alpha^2 = P_\alpha P_\alpha = |\alpha\rangle \underbrace{\langle\alpha|\alpha\rangle}_1 \langle\alpha| = P_\alpha.$$

Niech  $|\beta\rangle \neq |\alpha\rangle$  będzie innym wektorem własnym operatora  $A$ , wówczas

$$P_\alpha P_\beta = |\alpha\rangle \underbrace{\langle\alpha|\beta\rangle}_0 \langle\beta| = 0,$$

co odzwierciedla **ortogonalność** wektorów własnych do różnych wartości własnych, natomiast

$$P_\alpha^2 = P_\alpha P_\alpha = |\alpha\rangle \underbrace{\langle\alpha|\alpha\rangle}_1 \langle\alpha| = P_\alpha.$$

Jest to własność **idempotentności**, zachodząca dla każdego operatora rzutowego.

Niech  $|\beta\rangle \neq |\alpha\rangle$  będzie innym wektorem własnym operatora  $A$ , wówczas

$$P_\alpha P_\beta = |\alpha\rangle \underbrace{\langle\alpha|\beta\rangle}_0 \langle\beta| = 0,$$

co odzwierciedla **ortogonalność** wektorów własnych do różnych wartości własnych, natomiast

$$P_\alpha^2 = P_\alpha P_\alpha = |\alpha\rangle \underbrace{\langle\alpha|\alpha\rangle}_1 \langle\alpha| = P_\alpha.$$

Jest to własność **idempotentności**, zachodząca dla każdego operatora rzutowego.

Dowolny operator  $\Omega$  możemy przedstawić w postaci macierzy w bazie wektorów własnych obserwabli  $A$

$$\Omega_{\alpha\beta} \equiv \langle \alpha | \Omega | \beta \rangle .$$

Zauważmy, że macierz operatora  $A$  jest diagonalna w bazie jego wektorów własnych

$$A_{\alpha\beta} = \langle \alpha | A | \beta \rangle =$$

Dowolny operator  $\Omega$  możemy przedstawić w postaci macierzy w bazie wektorów własnych obserwabli  $A$

$$\Omega_{\alpha\beta} \equiv \langle \alpha | \Omega | \beta \rangle .$$

Zauważmy, że macierz operatora  $A$  jest diagonalna w bazie jego wektorów własnych

$$A_{\alpha\beta} = \langle \alpha | A | \beta \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle \langle \beta | \beta \rangle =$$



Dowolny operator  $\Omega$  możemy przedstawić w postaci macierzy w bazie wektorów własnych obserwabli  $A$

$$\Omega_{\alpha\beta} \equiv \langle \alpha | \Omega | \beta \rangle .$$

Zauważmy, że macierz operatora  $A$  jest diagonalna w bazie jego wektorów własnych

$$A_{\alpha\beta} = \langle \alpha | A | \beta \rangle = \langle \alpha | \beta | \beta \rangle = \beta \langle \alpha | \beta \rangle =$$

Dowolny operator  $\Omega$  możemy przedstawić w postaci macierzy w bazie wektorów własnych obserwabli  $A$

$$\Omega_{\alpha\beta} \equiv \langle \alpha | \Omega | \beta \rangle .$$

Zauważmy, że macierz operatora  $A$  jest diagonalna w bazie jego wektorów własnych

$$A_{\alpha\beta} = \langle \alpha | A | \beta \rangle = \langle \alpha | \beta | \beta \rangle = \beta \langle \alpha | \beta \rangle = \beta \delta_{\alpha\beta} =$$

Dowolny operator  $\Omega$  możemy przedstawić w postaci macierzy w bazie wektorów własnych obserwabli  $A$

$$\Omega_{\alpha\beta} \equiv \langle \alpha | \Omega | \beta \rangle .$$

Zauważmy, że macierz operatora  $A$  jest diagonalna w bazie jego wektorów własnych

$$A_{\alpha\beta} = \langle \alpha | A | \beta \rangle = \langle \alpha | \beta | \beta \rangle = \beta \langle \alpha | \beta \rangle = \beta \delta_{\alpha\beta} = \alpha \delta_{\alpha\beta} .$$

Dowolny operator  $\Omega$  możemy przedstawić w postaci macierzy w bazie wektorów własnych obserwabli  $A$

$$\Omega_{\alpha\beta} \equiv \langle \alpha | \Omega | \beta \rangle .$$

Zauważmy, że macierz operatora  $A$  jest diagonalna w bazie jego wektorów własnych

$$A_{\alpha\beta} = \langle \alpha | A | \beta \rangle = \langle \alpha | \beta | \beta \rangle = \beta \langle \alpha | \beta \rangle = \beta \delta_{\alpha\beta} = \alpha \delta_{\alpha\beta} .$$

Jeżeli operator liniowy  $B$  komutuje z  $A$ , tzn.

$$[A, B] = 0$$

Dowolny operator  $\Omega$  możemy przedstawić w postaci macierzy w bazie wektorów własnych obserwabli  $A$

$$\Omega_{\alpha\beta} \equiv \langle \alpha | \Omega | \beta \rangle .$$

Zauważmy, że macierz operatora  $A$  jest diagonalna w bazie jego wektorów własnych

$$A_{\alpha\beta} = \langle \alpha | A | \beta \rangle = \langle \alpha | \beta | \beta \rangle = \beta \langle \alpha | \beta \rangle = \beta \delta_{\alpha\beta} = \alpha \delta_{\alpha\beta} .$$

Jeżeli operator liniowy  $B$  komutuje z  $A$ , tzn.

$$[A, B] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad AB = BA,$$

Dowolny operator  $\Omega$  możemy przedstawić w postaci macierzy w bazie wektorów własnych obserwabli  $A$

$$\Omega_{\alpha\beta} \equiv \langle \alpha | \Omega | \beta \rangle .$$

Zauważmy, że macierz operatora  $A$  jest diagonalna w bazie jego wektorów własnych

$$A_{\alpha\beta} = \langle \alpha | A | \beta \rangle = \langle \alpha | \beta | \beta \rangle = \beta \langle \alpha | \beta \rangle = \beta \delta_{\alpha\beta} = \alpha \delta_{\alpha\beta} .$$

Jeżeli operator liniowy  $B$  komutuje z  $A$ , tzn.

$$[A, B] = 0 \iff AB = BA,$$

to operatory  $A$  i  $B$  mają wspólny zbiór wektorów własnych,

Dowolny operator  $\Omega$  możemy przedstawić w postaci macierzy w bazie wektorów własnych obserwabli  $A$

$$\Omega_{\alpha\beta} \equiv \langle \alpha | \Omega | \beta \rangle .$$

Zauważmy, że macierz operatora  $A$  jest diagonalna w bazie jego wektorów własnych

$$A_{\alpha\beta} = \langle \alpha | A | \beta \rangle = \langle \alpha | \beta | \beta \rangle = \beta \langle \alpha | \beta \rangle = \beta \delta_{\alpha\beta} = \alpha \delta_{\alpha\beta} .$$

Jeżeli operator liniowy  $B$  komutuje z  $A$ , tzn.

$$[A, B] = 0 \iff AB = BA,$$

to operatory  $A$  i  $B$  mają wspólny zbiór wektorów własnych,

a więc możemy je jednocześnie zdiagonalizować.

Jak się przekonamy w dalszym ciągu kursu, fakt ten ma istotne znaczenie dla obserwabli kwantowomechanicznych.



a więc możemy je jednocześnie zdiagonalizować.

Jak się przekonamy w dalszym ciągu kursu, fakt ten ma istotne znaczenie dla obserwabli kwantowomechanicznych.

Rzeczywiście, jeśli  $A |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$ , to wektor  $B |\alpha\rangle$  jest wektorem własnym operatora  $A$  do tej samej wartości własnej  $\alpha$ , gdyż

a więc możemy je jednocześnie zdiagonalizować.

Jak się przekonamy w dalszym ciągu kursu, fakt ten ma istotne znaczenie dla obserwabli kwantowomechanicznych.

Rzeczywiście, jeśli  $A |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$ , to wektor  $B |\alpha\rangle$  jest wektorem własnym operatora  $A$  do tej samej wartości własnej  $\alpha$ , gdyż

$$A(B |\alpha\rangle) =$$

a więc możemy je jednocześnie zdiagonalizować.

Jak się przekonamy w dalszym ciągu kursu, fakt ten ma istotne znaczenie dla obserwabli kwantowomechanicznych.

Rzeczywiście, jeśli  $A |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$ , to wektor  $B |\alpha\rangle$  jest wektorem własnym operatora  $A$  do tej samej wartości własnej  $\alpha$ , gdyż

$$A(B |\alpha\rangle) = B(A |\alpha\rangle) =$$

a więc możemy je jednocześnie zdiagonalizować.

Jak się przekonamy w dalszym ciągu kursu, fakt ten ma istotne znaczenie dla obserwabli kwantowomechanicznych.

Rzeczywiście, jeśli  $A |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$ , to wektor  $B |\alpha\rangle$  jest wektorem własnym operatora  $A$  do tej samej wartości własnej  $\alpha$ , gdyż

$$A(B |\alpha\rangle) = B(A |\alpha\rangle) = B(\alpha |\alpha\rangle) =$$

a więc możemy je jednocześnie zdiagonalizować.

Jak się przekonamy w dalszym ciągu kursu, fakt ten ma istotne znaczenie dla obserwabli kwantowomechanicznych.

Rzeczywiście, jeśli  $A |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$ , to wektor  $B |\alpha\rangle$  jest wektorem własnym operatora  $A$  do tej samej wartości własnej  $\alpha$ , gdyż

$$A(B |\alpha\rangle) = B(A |\alpha\rangle) = B(\alpha |\alpha\rangle) = \alpha(B |\alpha\rangle).$$

a więc możemy je jednocześnie zdiagnozować.

Jak się przekonamy w dalszym ciągu kursu, fakt ten ma istotne znaczenie dla obserwabli kwantowomechanicznych.

Rzeczywiście, jeśli  $A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ , to wektor  $B|\alpha\rangle$  jest wektorem własnym operatora  $A$  do tej samej wartości własnej  $\alpha$ , gdyż

$$A(B|\alpha\rangle) = B(A|\alpha\rangle) = B(\alpha|\alpha\rangle) = \alpha(B|\alpha\rangle).$$

W takim razie, jeżeli wartość własna  $\alpha$  jest niezdegenerowana, to musi zachodzić

$$B|\alpha\rangle = c|\alpha\rangle.$$

a więc możemy je jednocześnie zdiagonalizować.

Jak się przekonamy w dalszym ciągu kursu, fakt ten ma istotne znaczenie dla obserwabli kwantowomechanicznych.

Rzeczywiście, jeśli  $A |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$ , to wektor  $B |\alpha\rangle$  jest wektorem własnym operatora  $A$  do tej samej wartości własnej  $\alpha$ , gdyż

$$A(B |\alpha\rangle) = B(A |\alpha\rangle) = B(\alpha |\alpha\rangle) = \alpha(B |\alpha\rangle).$$

W takim razie, jeżeli wartość własna  $\alpha$  jest niezdegenerowana, to musi zachodzić

$$B |\alpha\rangle = c |\alpha\rangle.$$

Jeśli natomiast wartość własna  $\alpha$  jest  $n$ -krotnie zdegenerowana, tzn. odpowiada jej  $n$  wektorów własnych  $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \dots, |\alpha_n\rangle$ , to

$$B |\alpha\rangle = c_1 |\alpha_1\rangle + c_2 |\alpha_2\rangle + \dots + c_n |\alpha_n\rangle,$$

więc wektor  $B |\alpha\rangle$  należy do  $n$ -wymiarowej podprzestrzeni przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$  rozpiętej przez wektory własne  $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \dots, |\alpha_n\rangle$ .



Jeśli natomiast wartość własna  $\alpha$  jest  $n$ -krotnie zdegenerowana, tzn. odpowiada jej  $n$  wektorów własnych  $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \dots, |\alpha_n\rangle$ , to

$$B |\alpha\rangle = c_1 |\alpha_1\rangle + c_2 |\alpha_2\rangle + \dots + c_n |\alpha_n\rangle,$$

więc wektor  $B |\alpha\rangle$  należy do  $n$ -wymiarowej podprzestrzeni przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$  rozpiętej przez wektory własne  $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \dots, |\alpha_n\rangle$ .

Iloczyn skalarny funkcji  $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ , które są wektorami stanu w reprezentacji położeniowej, zapiszemy

$$\langle \phi | \psi \rangle \equiv (\phi | \psi) \equiv \int \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3 r = \int \langle \phi | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \psi \rangle d^3 r$$

Iloczyn skalarny funkcji  $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ , które są wektorami stanu w reprezentacji położeniowej, zapiszemy

$$\langle \phi | \psi \rangle \equiv (\phi | \psi) \equiv \int \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3 r = \int \langle \phi | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \psi \rangle d^3 r$$

przy czym utożsamiamy

Iloczyn skalarny funkcji  $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ , które są wektorami stanu w reprezentacji położeniowej, zapiszemy

$$\langle \phi | \psi \rangle \equiv (\phi | \psi) \equiv \int \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3 r = \int \langle \phi | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \psi \rangle d^3 r$$

przy czym utożsamiamy

$$\psi(\vec{r}) \equiv \langle \vec{r} | \psi \rangle,$$

Iloczyn skalarny funkcji  $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ , które są wektorami stanu w reprezentacji położeniowej, zapiszemy

$$\langle \phi | \psi \rangle \equiv (\phi | \psi) \equiv \int \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3 r = \int \langle \phi | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \psi \rangle d^3 r$$

przy czym utożsamiamy

$$\psi(\vec{r}) \equiv \langle \vec{r} | \psi \rangle, \quad \phi^*(\vec{r}) \equiv \langle \phi | \vec{r} \rangle = \langle \vec{r} | \phi \rangle^*,$$

Iloczyn skalarny funkcji  $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ , które są wektorami stanu w reprezentacji położeniowej, zapiszemy

$$\langle \phi | \psi \rangle \equiv (\phi | \psi) \equiv \int \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3 r = \int \langle \phi | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \psi \rangle d^3 r$$

przy czym utożsamiamy

$$\psi(\vec{r}) \equiv \langle \vec{r} | \psi \rangle, \quad \phi^*(\vec{r}) \equiv \langle \phi | \vec{r} \rangle = \langle \vec{r} | \phi \rangle^*, \quad \int d^3 r |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}| \equiv \mathbb{I},$$

Iloczyn skalarny funkcji  $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ , które są wektorami stanu w reprezentacji położeniowej, zapiszemy

$$\langle \phi | \psi \rangle \equiv (\phi | \psi) \equiv \int \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3 r = \int \langle \phi | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \psi \rangle d^3 r$$

przy czym utożsamiamy

$$\psi(\vec{r}) \equiv \langle \vec{r} | \psi \rangle, \quad \phi^*(\vec{r}) \equiv \langle \phi | \vec{r} \rangle = \langle \vec{r} | \phi \rangle^*, \quad \int d^3 r |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}| \equiv \mathbb{I},$$

gdzie całkowanie przebiega po wszystkich możliwych ciągłych wartościach  $\vec{r}$ .

Iloczyn skalarny funkcji  $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ , które są wektorami stanu w reprezentacji położeniowej, zapiszemy

$$\langle \phi | \psi \rangle \equiv (\phi | \psi) \equiv \int \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3 r = \int \langle \phi | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \psi \rangle d^3 r$$

przy czym utożsamiamy

$$\psi(\vec{r}) \equiv \langle \vec{r} | \psi \rangle, \quad \phi^*(\vec{r}) \equiv \langle \phi | \vec{r} \rangle = \langle \vec{r} | \phi \rangle^*, \quad \int d^3 r |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}| \equiv \mathbb{I},$$

gdzie całkowanie przebiega po wszystkich możliwych ciągłych wartościach  $\vec{r}$ .

Operator  $|\vec{r}\rangle \langle \vec{r}|$  jest operatorem rzutowania na stan  $|\vec{r}\rangle$ , który jest stanem własnym operatora położenia cząstki.



Iloczyn skalarny funkcji  $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ , które są wektorami stanu w reprezentacji położeniowej, zapiszemy

$$\langle \phi | \psi \rangle \equiv (\phi | \psi) \equiv \int \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3 r = \int \langle \phi | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \psi \rangle d^3 r$$

przy czym utożsamiamy

$$\psi(\vec{r}) \equiv \langle \vec{r} | \psi \rangle, \quad \phi^*(\vec{r}) \equiv \langle \phi | \vec{r} \rangle = \langle \vec{r} | \phi \rangle^*, \quad \int d^3 r |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}| \equiv \mathbb{I},$$

gdzie całkowanie przebiega po wszystkich możliwych ciągłych wartościach  $\vec{r}$ .

Operator  $|\vec{r}\rangle \langle \vec{r}|$  jest operatorem rzutowania na stan  $|\vec{r}\rangle$ , który jest stanem własnym operatora położenia cząstki.

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora  $A$  zapiszemy

$$(\varphi|A\psi) = (A^\dagger\varphi|\psi)$$

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora  $A$  zapiszemy

$$(\varphi|A\psi) = (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^*$$

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora  $A$  zapiszemy

$$\langle \varphi | A \psi \rangle = \langle A^\dagger \varphi | \psi \rangle = (\langle \psi | A^\dagger \varphi \rangle)^*$$

$$\langle \varphi | A | \psi \rangle$$

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora  $A$  zapiszemy

$$\begin{aligned}(\varphi|A\psi) &= (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^* \\ \langle\varphi|A|\psi\rangle &= \end{aligned}$$

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora  $A$  zapiszemy

$$\begin{aligned}(\varphi|A\psi) &= (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^* \\ \langle\varphi|A|\psi\rangle &= (\langle\varphi|A^\dagger)|\psi\rangle\end{aligned}$$

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora  $A$  zapiszemy

$$\begin{aligned}(\varphi|A\psi) &= (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^* \\ \langle\varphi|A|\psi\rangle &= \left(\langle\varphi|A^\dagger\right)|\psi\rangle = \langle\psi|A^\dagger|\varphi\rangle^*,\end{aligned}$$

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora  $A$  zapiszemy

$$\begin{aligned}(\varphi|A\psi) &= (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^* \\ \langle\varphi|A|\psi\rangle &= \left(\langle\varphi|A^\dagger\right)|\psi\rangle = \langle\psi|A^\dagger|\varphi\rangle^*,\end{aligned}$$

przy czym zakładamy, że operator działa zawsze na stan ket, chyba że dodatkowe nawiasy zmienią tą regułę.



Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora  $A$  zapiszemy

$$\begin{aligned}(\varphi|A\psi) &= (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^* \\ \langle\varphi|A|\psi\rangle &= \left(\langle\varphi|A^\dagger\right)|\psi\rangle = \langle\psi|A^\dagger|\varphi\rangle^*,\end{aligned}$$

przy czym zakładamy, że operator działa zawsze na stan ket, chyba że dodatkowe nawiasy zmienią tą regułę.

Zauważmy, że dla operatora hermitowskiego zachodzi

$$(\varphi|A\psi) = (A\varphi|\psi)$$

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora  $A$  zapiszemy

$$\begin{aligned}(\varphi|A\psi) &= (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^* \\ \langle\varphi|A|\psi\rangle &= \left(\langle\varphi|A^\dagger\right)|\psi\rangle = \langle\psi|A^\dagger|\varphi\rangle^*,\end{aligned}$$

przy czym zakładamy, że operator działa zawsze na stan ket, chyba że dodatkowe nawiasy zmienią tą regułę.

Zauważmy, że dla operatora hermitowskiego zachodzi

$$(\varphi|A\psi) = (A\varphi|\psi) = (\psi|A\varphi)^*$$

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora  $A$  zapiszemy

$$\begin{aligned}(\varphi|A\psi) &= (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^* \\ \langle\varphi|A|\psi\rangle &= \left(\langle\varphi|A^\dagger\right)|\psi\rangle = \langle\psi|A^\dagger|\varphi\rangle^*,\end{aligned}$$

przy czym zakładamy, że operator działa zawsze na stan ket, chyba że dodatkowe nawiasy zmienią tą regułę.

Zauważmy, że dla operatora hermitowskiego zachodzi

$$\begin{aligned}(\varphi|A\psi) &= (A\varphi|\psi) = (\psi|A\varphi)^* \\ \langle\varphi|A|\psi\rangle &\end{aligned}$$

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora  $A$  zapiszemy

$$\begin{aligned}(\varphi|A\psi) &= (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^* \\ \langle\varphi|A|\psi\rangle &= \left(\langle\varphi|A^\dagger\right)|\psi\rangle = \langle\psi|A^\dagger|\varphi\rangle^*,\end{aligned}$$

przy czym zakładamy, że operator działa zawsze na stan ket, chyba że dodatkowe nawiasy zmienią tą regułę.

Zauważmy, że dla operatora hermitowskiego zachodzi

$$\begin{aligned}(\varphi|A\psi) &= (A\varphi|\psi) = (\psi|A\varphi)^* \\ \langle\varphi|A|\psi\rangle &= \end{aligned}$$

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora  $A$  zapiszemy

$$\begin{aligned}(\varphi|A\psi) &= (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^* \\ \langle\varphi|A|\psi\rangle &= \left(\langle\varphi|A^\dagger\right)|\psi\rangle = \langle\psi|A^\dagger|\varphi\rangle^*,\end{aligned}$$

przy czym zakładamy, że operator działa zawsze na stan ket, chyba że dodatkowe nawiasy zmienią tą regułę.

Zauważmy, że dla operatora hermitowskiego zachodzi

$$\begin{aligned}(\varphi|A\psi) &= (A\varphi|\psi) = (\psi|A\varphi)^* \\ \langle\varphi|A|\psi\rangle &= \langle\psi|A|\varphi\rangle^*.\end{aligned}$$

Definicję operatora hermitowsko sprzężonego do operatora  $A$  zapiszemy

$$\begin{aligned}(\varphi|A\psi) &= (A^\dagger\varphi|\psi) = (\psi|A^\dagger\varphi)^* \\ \langle\varphi|A|\psi\rangle &= \left(\langle\varphi|A^\dagger\right)|\psi\rangle = \langle\psi|A^\dagger|\varphi\rangle^*,\end{aligned}$$

przy czym zakładamy, że operator działa zawsze na stan ket, chyba że dodatkowe nawiasy zmienią tą regułę.

Zauważmy, że dla operatora hermitowskiego zachodzi

$$\begin{aligned}(\varphi|A\psi) &= (A\varphi|\psi) = (\psi|A\varphi)^* \\ \langle\varphi|A|\psi\rangle &= \langle\psi|A|\varphi\rangle^*.\end{aligned}$$

Sprężenie hermitowskie równania własnego operatora liniowego

$$A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

ma postać

$$\langle\alpha|A^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|,$$

Sprzężenie hermitowskie równania własnego operatora liniowego

$$A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

ma postać

$$\langle\alpha|A^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|,$$

a sprzężenie hermitowskie wektora  $|\alpha\rangle$  ma postać

$$|\alpha\rangle^\dagger = \langle\alpha|.$$



Sprężenie hermitowskie równania własnego operatora liniowego

$$A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

ma postać

$$\langle\alpha|A^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|,$$

a sprzężenie hermitowskie wektora  $|\alpha\rangle$  ma postać

$$|\alpha\rangle^\dagger = \langle\alpha|.$$

W takim razie widzimy, że operator rzutowy  $P_\alpha$  jest hermitowski

Sprężenie hermitowskie równania własnego operatora liniowego

$$A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

ma postać

$$\langle\alpha|A^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|,$$

a sprzężenie hermitowskie wektora  $|\alpha\rangle$  ma postać

$$|\alpha\rangle^\dagger = \langle\alpha|.$$

W takim razie widzimy, że operator rzutowy  $P_\alpha$  jest hermitowski

$$P_\alpha^\dagger =$$

Sprężenie hermitowskie równania własnego operatora liniowego

$$A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

ma postać

$$\langle\alpha|A^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|,$$

a sprzężenie hermitowskie wektora  $|\alpha\rangle$  ma postać

$$|\alpha\rangle^\dagger = \langle\alpha|.$$

W takim razie widzimy, że operator rzutowy  $P_\alpha$  jest hermitowski

$$P_\alpha^\dagger = (|\alpha\rangle\langle\alpha|)^\dagger =$$

Sprężenie hermitowskie równania własnego operatora liniowego

$$A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

ma postać

$$\langle\alpha|A^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|,$$

a sprzężenie hermitowskie wektora  $|\alpha\rangle$  ma postać

$$|\alpha\rangle^\dagger = \langle\alpha|.$$

W takim razie widzimy, że operator rzutowy  $P_\alpha$  jest hermitowski

$$P_\alpha^\dagger = (|\alpha\rangle\langle\alpha|)^\dagger = |\alpha\rangle\langle\alpha| =$$

Sprężenie hermitowskie równania własnego operatora liniowego

$$A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

ma postać

$$\langle\alpha|A^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|,$$

a sprężenie hermitowskie wektora  $|\alpha\rangle$  ma postać

$$|\alpha\rangle^\dagger = \langle\alpha|.$$

W takim razie widzimy, że operator rzutowy  $P_\alpha$  jest hermitowski

$$P_\alpha^\dagger = (|\alpha\rangle\langle\alpha|)^\dagger = |\alpha\rangle\langle\alpha| = P_\alpha.$$

Sprężenie hermitowskie równania własnego operatora liniowego

$$A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

ma postać

$$\langle\alpha|A^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|,$$

a sprzężenie hermitowskie wektora  $|\alpha\rangle$  ma postać

$$|\alpha\rangle^\dagger = \langle\alpha|.$$

W takim razie widzimy, że operator rzutowy  $P_\alpha$  jest hermitowski

$$P_\alpha^\dagger = (|\alpha\rangle\langle\alpha|)^\dagger = |\alpha\rangle\langle\alpha| = P_\alpha.$$