Matematyczne podstawy mechaniki kwantowej

Wykład 4

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

Przestrzeń wektorowa

Literatura: Julian Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*

Przypomnijmy pojęcie przestrzeni wektorowej lub inaczej liniowej:

Literatura: Julian Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*

Przypomnijmy pojęcie przestrzeni wektorowej lub inaczej liniowej:

$\mathbb{K}$ – zbiór (ciało) liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub zespolonych $\mathbb{C}$,

X – dowolny zbiór niepusty.

Literatura: Julian Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*

Przypomnijmy pojęcie przestrzeni wektorowej lub inaczej liniowej:

$\mathbb{K}$ – zbiór (ciało) liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub zespolonych $\mathbb{C}$,

X – dowolny zbiór niepusty.

Określamy działania dodawania i mnożenia przez liczbę:

$$\begin{array}{lll} + & : & X \times X \to X \\ \cdot & : & \mathbb{K} \times X \to X \end{array}$$

Przestrzeń wektorowa

Literatura: Julian Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*
Przypomnijmy pojęcie przestrzeni wektorowej lub inaczej liniowej:
$\mathbb{K}$ – zbiór (ciało) liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub zespolonych $\mathbb{C}$,
X – dowolny zbiór niepusty.
Określamy działania dodawania i mnożenia przez liczbę:

$$
\begin{array}{ccc}
+ & : & X \times X \to X \\
\cdot & : & \mathbb{K} \times X \to X
\end{array}
$$

spełniające przy dowolnych $x, y, z \in X$ i $a, b \in \mathbb{K}$ następujące warunki:

Przestrzeń wektorowa

Literatura: Julian Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*
Przypomnijmy pojęcie przestrzeni wektorowej lub inaczej liniowej:
$\mathbb{K}$ – zbiór (ciało) liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub zespolonych $\mathbb{C}$,
X – dowolny zbiór niepusty.
Określamy działania dodawania i mnożenia przez liczbę:

$$\begin{array}{lcl} + & : & X \times X \to X \\ \cdot & : & \mathbb{K} \times X \to X \end{array}$$

spełniające przy dowolnych $x, y, z \in X$ i $a, b \in \mathbb{K}$ następujące warunki:

- *przemienność:* $x + y = y + x$,

Przestrzeń wektorowa

Literatura: Julian Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*
Przypomnijmy pojęcie przestrzeni wektorowej lub inaczej liniowej:
$\mathbb{K}$ – zbiór (ciało) liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub zespolonych $\mathbb{C}$,
X – dowolny zbiór niepusty.
Określamy działania dodawania i mnożenia przez liczbę:

$$\begin{aligned} + \quad &: \quad X \times X \to X \\ \cdot \quad &: \quad \mathbb{K} \times X \to X \end{aligned}$$

spełniające przy dowolnych $x, y, z \in X$ i $a, b \in \mathbb{K}$ następujące warunki:

- *przemienność:* $x + y = y + x$,

- *łączność:* $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- Istnieje element zerowy $\theta \in X$ taki, że dla każdego $x \in X$, $x + \theta = x$,
- Dla każdego elementu $x \in X$ istnieje element przeciwny $-x \in X$ taki, że $x + (-x) = \theta$.
- *rozdzielność:* $a(x + y) = ax + ay$,
- *rozdzielność:* $(a + b)x = ax + bx$,
- $a(bx) = (ab)x$,
- $1 \cdot x = x$.

Zbiór X z działaniami $+$ i $\cdot$ nazywamy przestrzenią wektorową rzeczywistą (jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) lub zespoloną (jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Przestrzeń wektorowa

- *łączność:* $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- Istnieje element zerowy $\theta \in X$ taki, że dla każdego $x \in X$, $x + \theta = x$,
- Dla każdego elementu $x \in X$ istnieje element przeciwny $-x \in X$ taki, że $x + (-x) = \theta$.
- *rozdzielność:* $a(x + y) = ax + ay$,
- *rozdzielność:* $(a + b)x = ax + bx$,
- $a(bx) = (ab)x$,
- $1 \cdot x = x$.

Zbiór X z działaniami $+$ i $\cdot$ nazywamy przestrzenią wektorową rzeczywistą (jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) lub zespoloną (jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Przykład 1

$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.

Przykład 1

$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.

Działania określamy następująco:

$$\begin{aligned} x + y &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)\,, \\ ax &\equiv (ax_1, ax_2, ..., ax_n)\,. \end{aligned}$$

Przykład 1

$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.
Działania określamy następująco:

$$\begin{aligned} x + y &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)\,, \\ ax &\equiv (ax_1, ax_2, ..., ax_n)\,. \end{aligned}$$

Czy są spełnione wszystkie warunki przestrzeni wektorowej?

Przykład 1

$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.
Działania określamy następująco:

$$\begin{aligned} x + y &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n), \\ ax &\equiv (ax_1, ax_2, ..., ax_n). \end{aligned}$$

Czy są spełnione wszystkie warunki przestrzeni wektorowej?

przemienność:

$$y + x = (y_1, ..., y_n) + (x_1, ..., x_n)$$

Przykład 1

$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.
Działania określamy następująco:

$$\begin{aligned} x + y &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n), \\ ax &\equiv (ax_1, ax_2, ..., ax_n). \end{aligned}$$

Czy są spełnione wszystkie warunki przestrzeni wektorowej?

przemienność:

$$\begin{aligned} y + x &= (y_1, ..., y_n) + (x_1, ..., x_n) \\ &= \end{aligned}$$

Przykład 1

$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.
Działania określamy następująco:

$$
\begin{aligned}
x + y &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)\,, \\
ax &\equiv (ax_1, ax_2, ..., ax_n)\,.
\end{aligned}
$$

Czy są spełnione wszystkie warunki przestrzeni wektorowej?

przemienność:

$$
\begin{aligned}
y + x &= (y_1, ..., y_n) + (x_1, ..., x_n) \\
&= (y_1 + x_1, ..., y_n + x_n) =
\end{aligned}
$$

Przykład 1

$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.
Działania określamy następująco:

$$\begin{aligned} x + y &\equiv \left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n\right), \\ ax &\equiv \left(ax_1, ax_2, ..., ax_n\right). \end{aligned}$$

Czy są spełnione wszystkie warunki przestrzeni wektorowej?
przemienność:

$$\begin{aligned} y + x &= (y_1, ..., y_n) + (x_1, ..., x_n) \\ &= (y_1 + x_1, ..., y_n + x_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \end{aligned}$$

Przykład 1
$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.
Działania określamy następująco:

$$\begin{aligned} x + y &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)\,, \\ ax &\equiv (ax_1, ax_2, ..., ax_n)\,. \end{aligned}$$

Czy są spełnione wszystkie warunki przestrzeni wektorowej?
przemienność:

$$\begin{aligned} y + x &= (y_1, ..., y_n) + (x_1, ..., x_n) \\ &= (y_1 + x_1, ..., y_n + x_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \\ &= \end{aligned}$$

Przykład 1
$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.
Działania określamy następująco:

$$\begin{aligned} x + y &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n), \\ ax &\equiv (ax_1, ax_2, ..., ax_n). \end{aligned}$$

Czy są spełnione wszystkie warunki przestrzeni wektorowej?
przemienność:

$$\begin{aligned} y + x &= (y_1, ..., y_n) + (x_1, ..., x_n) \\ &= (y_1 + x_1, ..., y_n + x_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \\ &= (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = \end{aligned}$$

Przykład 1

$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.
Działania określamy następująco:

$$\begin{aligned} x + y &\equiv \left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n\right), \\ ax &\equiv \left(ax_1, ax_2, ..., ax_n\right). \end{aligned}$$

Czy są spełnione wszystkie warunki przestrzeni wektorowej?
przemienność:

$$\begin{aligned} y + x &= (y_1, ..., y_n) + (x_1, ..., x_n) \\ &= (y_1 + x_1, ..., y_n + x_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \\ &= (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = x + y, \end{aligned}$$

Przykład 1

$X = \mathbb{K}^n$. Elementy zbioru X mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{K}$.
Działania określamy następująco:

$$\begin{aligned} x + y &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)\,, \\ ax &\equiv (ax_1, ax_2, ..., ax_n)\,. \end{aligned}$$

Czy są spełnione wszystkie warunki przestrzeni wektorowej?
przemienność:

$$\begin{aligned} y + x &= (y_1, ..., y_n) + (x_1, ..., x_n) \\ &= (y_1 + x_1, ..., y_n + x_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \\ &= (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = x + y, \end{aligned}$$

łączność:

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x_1, x_2, ..., x_n) + ((y_1, y_2, ..., y_n) + (z_1, z_2, ..., z_n)) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), ..., x_n + (y_n + z_n)) \end{aligned}$$

łączność:

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x_1, x_2, ..., x_n) + ((y_1, y_2, ..., y_n) + (z_1, z_2, ..., z_n)) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), ..., x_n + (y_n + z_n)) \\ &= \end{aligned}$$

łączność:

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x_1, x_2, ..., x_n) + ((y_1, y_2, ..., y_n) + (z_1, z_2, ..., z_n)) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), ..., x_n + (y_n + z_n)) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, ..., (x_n + y_n) + z_n) \end{aligned}$$

Przestrzeń wektorowa

łączność:

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x_1, x_2, ..., x_n) + ((y_1, y_2, ..., y_n) + (z_1, z_2, ..., z_n)) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), ..., x_n + (y_n + z_n)) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, ..., (x_n + y_n) + z_n) \\ &= \end{aligned}$$

łączność:

$$
\begin{aligned}
x+(y+z) &= (x_1,x_2,...,x_n)+((y_1,y_2,...,y_n)+(z_1,z_2,...,z_n)) \\
&= (x_1+(y_1+z_1), x_2+(y_2+z_2), ..., x_n+(y_n+z_n)) \\
&= ((x_1+y_1)+z_1, (x_2+y_2)+z_2, ..., (x_n+y_n)+z_n) \\
&= ((x_1,x_2,...,x_n)+(y_1,y_2,...,y_n)) \\
&+
\end{aligned}
$$

łączność:

$$
\begin{aligned}
x+(y+z) &= (x_1,x_2,...,x_n)+((y_1,y_2,...,y_n)+(z_1,z_2,...,z_n)) \\
&= (x_1+(y_1+z_1),x_2+(y_2+z_2),...,x_n+(y_n+z_n)) \\
&= ((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2,...,(x_n+y_n)+z_n) \\
&= ((x_1,x_2,...,x_n)+(y_1,y_2,...,y_n)) \\
&+
\end{aligned}
$$

Przestrzeń wektorowa

łączność:

$$
\begin{aligned}
x + (y + z) &= (x_1, x_2, ..., x_n) + ((y_1, y_2, ..., y_n) + (z_1, z_2, ..., z_n)) \\
&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), ..., x_n + (y_n + z_n)) \\
&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, ..., (x_n + y_n) + z_n) \\
&= ((x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n)) \\
&+ (z_1, z_2, ..., z_n) =
\end{aligned}
$$

łączność:

$$
\begin{aligned}
x+(y+z) &= (x_1,x_2,...,x_n)+((y_1,y_2,...,y_n)+(z_1,z_2,...,z_n)) \\
&= (x_1+(y_1+z_1),x_2+(y_2+z_2),...,x_n+(y_n+z_n)) \\
&= ((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2,...,(x_n+y_n)+z_n) \\
&= ((x_1,x_2,...,x_n)+(y_1,y_2,...,y_n)) \\
&+ (z_1,z_2,...,z_n)=(x+y)+z.
\end{aligned}
$$

Przestrzeń wektorowa

łączność:

$$
\begin{aligned}
x + (y + z) &= (x_1, x_2, ..., x_n) + ((y_1, y_2, ..., y_n) + (z_1, z_2, ..., z_n)) \\
&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), ..., x_n + (y_n + z_n)) \\
&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, ..., (x_n + y_n) + z_n) \\
&= ((x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n)) \\
&+ (z_1, z_2, ..., z_n) = (x + y) + z.
\end{aligned}
$$

element zerowy:

Przestrzeń wektorowa

łączność:

$$
\begin{aligned}
x + (y + z) &= (x_1, x_2, ..., x_n) + ((y_1, y_2, ..., y_n) + (z_1, z_2, ..., z_n)) \\
&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), ..., x_n + (y_n + z_n)) \\
&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, ..., (x_n + y_n) + z_n) \\
&= ((x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n)) \\
&+ (z_1, z_2, ..., z_n) = (x + y) + z.
\end{aligned}
$$

element zerowy: Istnieje $\theta \in X$, taki że dla każdego $x \in X$

$\theta \equiv (0, ..., 0) \quad \Rightarrow \quad x + \theta =$

Przestrzeń wektorowa

łączność:

$$
\begin{aligned}
x + (y + z) &= (x_1, x_2, ..., x_n) + ((y_1, y_2, ..., y_n) + (z_1, z_2, ..., z_n)) \\
&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), ..., x_n + (y_n + z_n)) \\
&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, ..., (x_n + y_n) + z_n) \\
&= ((x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n)) \\
&+ (z_1, z_2, ..., z_n) = (x + y) + z.
\end{aligned}
$$

element zerowy: Istnieje $\theta \in X$, taki że dla każdego $x \in X$

$$\theta \equiv (0, ..., 0) \quad \Rightarrow \quad x + \theta = (x_1 + 0, ..., x_n + 0) =$$

łączność:

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x_1, x_2, ..., x_n) + ((y_1, y_2, ..., y_n) + (z_1, z_2, ..., z_n)) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), ..., x_n + (y_n + z_n)) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, ..., (x_n + y_n) + z_n) \\ &= ((x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n)) \\ &+ (z_1, z_2, ..., z_n) = (x + y) + z. \end{aligned}$$

element zerowy: Istnieje $\theta \in X$, taki że dla każdego $x \in X$

$$\theta \equiv (0, ..., 0) \quad \Rightarrow \quad x + \theta = (x_1 + 0, ..., x_n + 0) = (x_1, ..., x_n) =$$

Przestrzeń wektorowa

łączność:

$$\begin{aligned} x + (y+z) &= (x_1, x_2, ..., x_n) + ((y_1, y_2, ..., y_n) + (z_1, z_2, ..., z_n)) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), ..., x_n + (y_n + z_n)) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, ..., (x_n + y_n) + z_n) \\ &= ((x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n)) \\ &+ (z_1, z_2, ..., z_n) = (x + y) + z. \end{aligned}$$

element zerowy: Istnieje $\theta \in X$, taki że dla każdego $x \in X$

$$\theta \equiv (0, ..., 0) \quad \Rightarrow \quad x + \theta = (x_1 + 0, ..., x_n + 0) = (x_1, ..., x_n) = x.$$

Przestrzeń wektorowa

łączność:

$$
\begin{aligned}
x + (y + z) &= (x_1, x_2, ..., x_n) + ((y_1, y_2, ..., y_n) + (z_1, z_2, ..., z_n)) \\
&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), ..., x_n + (y_n + z_n)) \\
&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, ..., (x_n + y_n) + z_n) \\
&= ((x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n)) \\
&+ (z_1, z_2, ..., z_n) = (x + y) + z.
\end{aligned}
$$

element zerowy: Istnieje $\theta \in X$, taki że dla każdego $x \in X$

$$\theta \equiv (0, ..., 0) \quad \Rightarrow \quad x + \theta = (x_1 + 0, ..., x_n + 0) = (x_1, ..., x_n) = x.$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$-x \equiv (-x_1, ..., -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x)$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$-x \equiv (-x_1, ..., -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) \quad =$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$-x \equiv (-x_1, ..., -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) \quad = \quad (x_1 - x_1, ..., x_n - x_n)$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$-x \equiv (-x_1, ..., -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) \quad = \quad (x_1 - x_1, ..., x_n - x_n)$$
$$=$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$-x \equiv (-x_1, ..., -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) = (x_1 - x_1, ..., x_n - x_n)$$
$$= (0, ..., 0) =$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$-x \equiv (-x_1, ..., -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) = (x_1 - x_1, ..., x_n - x_n) = (0, ..., 0) = \theta.$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$-x \equiv (-x_1, ..., -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) \quad = \quad (x_1 - x_1, ..., x_n - x_n)$$
$$= \quad (0, ..., 0) = \theta.$$

rozdzielność:

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$-x \equiv (-x_1, ..., -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) \quad = \quad (x_1 - x_1, ..., x_n - x_n)$$
$$= \quad (0, ..., 0) = \theta.$$

rozdzielność:

$$a(x + y) \quad =$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$-x \equiv (-x_1, ..., -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) = (x_1 - x_1, ..., x_n - x_n) = (0, ..., 0) = \theta.$$

rozdzielność:

$$a(x + y) = a\left((x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n)\right)$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$-x \equiv (-x_1, ..., -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) = (x_1 - x_1, ..., x_n - x_n) = (0, ..., 0) = \theta.$$

rozdzielność:

$$a(x + y) = a\left((x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n)\right) =$$

Przestrzeń wektorowa

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$
\begin{aligned}
-x \equiv (-x_1, ..., -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) &= (x_1 - x_1, ..., x_n - x_n) \\
&= (0, ..., 0) = \theta.
\end{aligned}
$$

rozdzielność:

$$
\begin{aligned}
a(x + y) &= a\left((x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n)\right) \\
&= a(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) =
\end{aligned}
$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$-x \equiv (-x_1, ..., -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) = (x_1 - x_1, ..., x_n - x_n) = (0, ..., 0) = \theta.$$

rozdzielność:

$$a(x+y) = a\left((x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n)\right) = a(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) = (a(x_1 + y_1), ..., a(x_n + y_n))$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$-x \equiv (-x_1, ..., -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) = (x_1 - x_1, ..., x_n - x_n) = (0, ..., 0) = \theta.$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} a(x+y) &= a\left((x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n)\right) \\ &= a(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) = (a(x_1 + y_1), ..., a(x_n + y_n)) \\ &= \end{aligned}$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$-x \equiv (-x_1, ..., -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) = (x_1 - x_1, ..., x_n - x_n) = (0, ..., 0) = \theta.$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} a(x+y) &= a\left((x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n)\right) \\ &= a(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) = (a(x_1 + y_1), ..., a(x_n + y_n)) \\ &= (ax_1 + ay_1, ..., ax_n + ay_n) = \end{aligned}$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$-x \equiv (-x_1, ..., -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) = (x_1 - x_1, ..., x_n - x_n) = (0, ..., 0) = \theta.$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} a(x+y) &= a\left((x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n)\right) \\ &= a(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) = (a(x_1 + y_1), ..., a(x_n + y_n)) \\ &= (ax_1 + ay_1, ..., ax_n + ay_n) = (ax_1, ..., ax_n) + (ay_1, ..., ay_n) \end{aligned}$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$
\begin{aligned}
-x \equiv (-x_1, ..., -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) &= (x_1 - x_1, ..., x_n - x_n) \\
&= (0, ..., 0) = \theta.
\end{aligned}
$$

rozdzielność:

$$
\begin{aligned}
a(x+y) &= a\left((x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n)\right) \\
&= a(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) = \left(a(x_1 + y_1), ..., a(x_n + y_n)\right) \\
&= (ax_1 + ay_1, ..., ax_n + ay_n) = (ax_1, ..., ax_n) + (ay_1, ..., ay_n) \\
&=
\end{aligned}
$$

Przestrzeń wektorowa

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$-x \equiv (-x_1, ..., -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) = (x_1 - x_1, ..., x_n - x_n) = (0, ..., 0) = \theta.$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} a(x+y) &= a\left((x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n)\right) \\ &= a(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) = (a(x_1 + y_1), ..., a(x_n + y_n)) \\ &= (ax_1 + ay_1, ..., ax_n + ay_n) = (ax_1, ..., ax_n) + (ay_1, ..., ay_n) \\ &= a(x_1, ..., x_n) + a(y_1, ..., y_n) = \end{aligned}$$

Przestrzeń wektorowa

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$\begin{aligned} -x \equiv (-x_1, ..., -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) &= (x_1 - x_1, ..., x_n - x_n) \\ &= (0, ..., 0) = \theta. \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} a(x+y) &= a\left((x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n)\right) \\ &= a(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) = (a(x_1 + y_1), ..., a(x_n + y_n)) \\ &= (ax_1 + ay_1, ..., ax_n + ay_n) = (ax_1, ..., ax_n) + (ay_1, ..., ay_n) \\ &= a(x_1, ..., x_n) + a(y_1, ..., y_n) = ax + ay. \end{aligned}$$

element przeciwny: Dla każdego $x \in X$ istnieje $-x \in X$, taki, że

$$-x \equiv (-x_1, ..., -x_n) \quad \Rightarrow \quad x + (-x) = (x_1 - x_1, ..., x_n - x_n) = (0, ..., 0) = \theta.$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} a(x+y) &= a\left((x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n)\right) \\ &= a(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) = \left(a(x_1 + y_1), ..., a(x_n + y_n)\right) \\ &= (ax_1 + ay_1, ..., ax_n + ay_n) = (ax_1, ..., ax_n) + (ay_1, ..., ay_n) \\ &= a(x_1, ..., x_n) + a(y_1, ..., y_n) = ax + ay. \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$(a+b)x \quad =$$

Przestrzeń wektorowa

rozdzielność:

$$(a+b)x \quad = \quad (a+b)(x_1, ..., x_n) =$$

Przestrzeń wektorowa

rozdzielność:

$$(a+b)x \quad = \quad (a+b)(x_1, ..., x_n) = ((a+b)x_1, ..., (a+b)x_n)$$

rozdzielność:

$$
\begin{aligned}
(a+b)x &= (a+b)(x_1, ..., x_n) = ((a+b)x_1, ..., (a+b)x_n) \\
&=
\end{aligned}
$$

Przestrzeń wektorowa

rozdzielność:

$$
\begin{aligned}
(a+b)x &= (a+b)(x_1,...,x_n) = ((a+b)x_1,...,(a+b)x_n) \\
&= (ax_1+bx_1,...,ax_n+bx_n)
\end{aligned}
$$

rozdzielność:

$$
\begin{aligned}
(a+b)x &= (a+b)(x_1,\dots,x_n) = ((a+b)x_1,\dots,(a+b)x_n) \\
&= (ax_1+bx_1,\dots,ax_n+bx_n) \\
&=
\end{aligned}
$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a+b)x &= (a+b)(x_1,...,x_n) = ((a+b)x_1,...,(a+b)x_n) \\ &= (ax_1+bx_1,...,ax_n+bx_n) \\ &= (ax_1,...,ax_n)+(bx_1,...,bx_n) = ax+bx.\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$
\begin{aligned}
(a+b)x &= (a+b)(x_1,\ldots,x_n) = ((a+b)x_1,\ldots,(a+b)x_n) \\
&= (ax_1+bx_1,\ldots,ax_n+bx_n) \\
&= (ax_1,\ldots,ax_n)+(bx_1,\ldots,bx_n) = ax+bx.
\end{aligned}
$$

$$a(bx) =$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a+b)x &= (a+b)(x_1,\ldots,x_n) = ((a+b)x_1,\ldots,(a+b)x_n)\\ &= (ax_1+bx_1,\ldots,ax_n+bx_n)\\ &= (ax_1,\ldots,ax_n)+(bx_1,\ldots,bx_n) = ax+bx.\end{aligned}$$

$$a(bx) = a\left(b(x_1,\ldots,x_n)\right) =$$

Przestrzeń wektorowa

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a+b)x &= (a+b)(x_1,\ldots,x_n) = ((a+b)x_1,\ldots,(a+b)x_n) \\ &= (ax_1+bx_1,\ldots,ax_n+bx_n) \\ &= (ax_1,\ldots,ax_n)+(bx_1,\ldots,bx_n) = ax+bx.\end{aligned}$$

$$a(bx) = a\,(b(x_1,\ldots,x_n)) = a\,(bx_1,\ldots,bx_n)$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a+b)x &= (a+b)(x_1,\ldots,x_n) = ((a+b)x_1,\ldots,(a+b)x_n) \\ &= (ax_1+bx_1,\ldots,ax_n+bx_n) \\ &= (ax_1,\ldots,ax_n)+(bx_1,\ldots,bx_n) = ax+bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a\left(b(x_1,\ldots,x_n)\right) = a\left(bx_1,\ldots,bx_n\right) \\ &= \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$
\begin{aligned}
(a+b)x &= (a+b)(x_1,\dots,x_n) = ((a+b)x_1,\dots,(a+b)x_n) \\
&= (ax_1+bx_1,\dots,ax_n+bx_n) \\
&= (ax_1,\dots,ax_n)+(bx_1,\dots,bx_n) = ax+bx.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a(bx) &= a\left(b(x_1,\dots,x_n)\right) = a\left(bx_1,\dots,bx_n\right) \\
&= \left(a(bx_1),\dots,a(bx_n)\right) =
\end{aligned}
$$

Przestrzeń wektorowa

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a+b)x &= (a+b)(x_1,...,x_n) = ((a+b)x_1,...,(a+b)x_n) \\ &= (ax_1+bx_1,...,ax_n+bx_n) \\ &= (ax_1,...,ax_n)+(bx_1,...,bx_n) = ax+bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a\,(b(x_1,...,x_n)) = a\,(bx_1,...,bx_n) \\ &= (a(bx_1),...,a(bx_n)) = ((ab)x_1,...,(ab)x_n)\end{aligned}$$

Przestrzeń wektorowa

rozdzielność:

$$
\begin{aligned}
(a+b)x &= (a+b)(x_1, \ldots, x_n) = ((a+b)x_1, \ldots, (a+b)x_n) \\
&= (ax_1 + bx_1, \ldots, ax_n + bx_n) \\
&= (ax_1, \ldots, ax_n) + (bx_1, \ldots, bx_n) = ax + bx.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a(bx) &= a\,(b(x_1, \ldots, x_n)) = a\,(bx_1, \ldots, bx_n) \\
&= (a(bx_1), \ldots, a(bx_n)) = ((ab)x_1, \ldots, (ab)x_n) \\
&=
\end{aligned}
$$

rozdzielność:

$$
\begin{aligned}
(a+b)x &= (a+b)(x_1, \dots, x_n) = ((a+b)x_1, \dots, (a+b)x_n) \\
&= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\
&= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n) = ax + bx.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a(bx) &= a\,(b(x_1, \dots, x_n)) = a\,(bx_1, \dots, bx_n) \\
&= (a(bx_1), \dots, a(bx_n)) = ((ab)x_1, \dots, (ab)x_n) \\
&= (ab)\,(x_1, \dots, x_n) =
\end{aligned}
$$

Przestrzeń wektorowa

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a+b)x &= (a+b)(x_1,\dots,x_n) = ((a+b)x_1,\dots,(a+b)x_n) \\ &= (ax_1+bx_1,\dots,ax_n+bx_n) \\ &= (ax_1,\dots,ax_n)+(bx_1,\dots,bx_n) = ax+bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a\,(b(x_1,\dots,x_n)) = a\,(bx_1,\dots,bx_n) \\ &= (a(bx_1),\dots,a(bx_n)) = ((ab)x_1,\dots,(ab)x_n) \\ &= (ab)\,(x_1,\dots,x_n) = (ab)x.\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a+b)x &= (a+b)(x_1,...,x_n) = ((a+b)x_1,...,(a+b)x_n) \\ &= (ax_1+bx_1,...,ax_n+bx_n) \\ &= (ax_1,...,ax_n)+(bx_1,...,bx_n) = ax+bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a\,(b(x_1,...,x_n)) = a\,(bx_1,...,bx_n) \\ &= (a(bx_1),...,a(bx_n)) = ((ab)x_1,...,(ab)x_n) \\ &= (ab)\,(x_1,...,x_n) = (ab)x.\end{aligned}$$

$$1\cdot x =$$

Przestrzeń wektorowa

rozdzielność:

$$
\begin{aligned}
(a+b)x &= (a+b)(x_1, \ldots, x_n) = ((a+b)x_1, \ldots, (a+b)x_n) \\
&= (ax_1 + bx_1, \ldots, ax_n + bx_n) \\
&= (ax_1, \ldots, ax_n) + (bx_1, \ldots, bx_n) = ax + bx.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a(bx) &= a\,(b(x_1, \ldots, x_n)) = a\,(bx_1, \ldots, bx_n) \\
&= (a(bx_1), \ldots, a(bx_n)) = ((ab)x_1, \ldots, (ab)x_n) \\
&= (ab)\,(x_1, \ldots, x_n) = (ab)x.
\end{aligned}
$$

$$
1 \cdot x = 1\,(x_1, \ldots, x_n)
$$

Przestrzeń wektorowa

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a+b)x &= (a+b)(x_1,\ldots,x_n) = ((a+b)x_1,\ldots,(a+b)x_n) \\ &= (ax_1+bx_1,\ldots,ax_n+bx_n) \\ &= (ax_1,\ldots,ax_n)+(bx_1,\ldots,bx_n) = ax+bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a\left(b(x_1,\ldots,x_n)\right) = a\left(bx_1,\ldots,bx_n\right) \\ &= (a(bx_1),\ldots,a(bx_n)) = ((ab)x_1,\ldots,(ab)x_n) \\ &= (ab)\left(x_1,\ldots,x_n\right) = (ab)x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1\cdot x &= 1\left(x_1,\ldots,x_n\right) \\ &=\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$
\begin{aligned}
(a+b)x &= (a+b)(x_1, \dots, x_n) = ((a+b)x_1, \dots, (a+b)x_n) \\
&= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\
&= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n) = ax + bx.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a(bx) &= a\,(b(x_1, \dots, x_n)) = a\,(bx_1, \dots, bx_n) \\
&= (a(bx_1), \dots, a(bx_n)) = ((ab)x_1, \dots, (ab)x_n) \\
&= (ab)\,(x_1, \dots, x_n) = (ab)x.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 \cdot x &= 1\,(x_1, \dots, x_n) \\
&= (1 \cdot x_1, \dots, 1 \cdot x_n) =
\end{aligned}
$$

Przestrzeń wektorowa

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a+b)x &= (a+b)(x_1,\ldots,x_n) = ((a+b)x_1,\ldots,(a+b)x_n) \\ &= (ax_1+bx_1,\ldots,ax_n+bx_n) \\ &= (ax_1,\ldots,ax_n)+(bx_1,\ldots,bx_n) = ax+bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a\,(b(x_1,\ldots,x_n)) = a\,(bx_1,\ldots,bx_n) \\ &= (a(bx_1),\ldots,a(bx_n)) = ((ab)x_1,\ldots,(ab)x_n) \\ &= (ab)\,(x_1,\ldots,x_n) = (ab)x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1\cdot x &= 1\,(x_1,\ldots,x_n) \\ &= (1\cdot x_1,\ldots,1\cdot x_n) = (x_1,\ldots,x_n) =\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a+b)x &= (a+b)(x_1,\dots,x_n) = ((a+b)x_1,\dots,(a+b)x_n)\\ &= (ax_1+bx_1,\dots,ax_n+bx_n)\\ &= (ax_1,\dots,ax_n)+(bx_1,\dots,bx_n) = ax+bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a\,(b(x_1,\dots,x_n)) = a\,(bx_1,\dots,bx_n)\\ &= (a(bx_1),\dots,a(bx_n)) = ((ab)x_1,\dots,(ab)x_n)\\ &= (ab)\,(x_1,\dots,x_n) = (ab)x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1\cdot x &= 1\,(x_1,\dots,x_n)\\ &= (1\cdot x_1,\dots,1\cdot x_n) = (x_1,\dots,x_n) = x\end{aligned}$$

Przestrzeń wektorowa

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a+b)x &= (a+b)(x_1,\ldots,x_n) = ((a+b)x_1,\ldots,(a+b)x_n)\\ &= (ax_1+bx_1,\ldots,ax_n+bx_n)\\ &= (ax_1,\ldots,ax_n)+(bx_1,\ldots,bx_n) = ax+bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a\,(b(x_1,\ldots,x_n)) = a\,(bx_1,\ldots,bx_n)\\ &= (a(bx_1),\ldots,a(bx_n)) = ((ab)x_1,\ldots,(ab)x_n)\\ &= (ab)\,(x_1,\ldots,x_n) = (ab)x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1\cdot x &= 1\,(x_1,\ldots,x_n)\\ &= (1\cdot x_1,\ldots,1\cdot x_n) = (x_1,\ldots,x_n) = x \quad \text{cnd.}\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a+b)x &= (a+b)(x_1,\dots,x_n) = ((a+b)x_1,\dots,(a+b)x_n)\\ &= (ax_1+bx_1,\dots,ax_n+bx_n)\\ &= (ax_1,\dots,ax_n)+(bx_1,\dots,bx_n) = ax+bx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(bx) &= a\,(b(x_1,\dots,x_n)) = a\,(bx_1,\dots,bx_n)\\ &= (a(bx_1),\dots,a(bx_n)) = ((ab)x_1,\dots,(ab)x_n)\\ &= (ab)\,(x_1,\dots,x_n) = (ab)x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1\cdot x &= 1\,(x_1,\dots,x_n)\\ &= (1\cdot x_1,\dots,1\cdot x_n) = (x_1,\dots,x_n) = x \quad \text{cnd.}\end{aligned}$$

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω, $f : \Omega \to \mathbb{K}$.

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω, $f : \Omega \to \mathbb{K}$.

Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω, $f : \Omega \to \mathbb{K}$.
Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$(f+g)(x) \quad =$$

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω, $f : \Omega \to \mathbb{K}$.
Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

Przykład 2
X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω, $f : \Omega \to \mathbb{K}$.
Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(af)(x)$$

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω, $f : \Omega \to \mathbb{K}$.
Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x), \\ (af)(x) &= \end{aligned}$$

Przykład 2
X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω, $f : \Omega \to \mathbb{K}$.
Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x), \\ (af)(x) &= af(x), \end{aligned}$$

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω, $f : \Omega \to \mathbb{K}$.
Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x), \\ (af)(x) &= af(x), \qquad \text{dla dowolnego} \quad x \in \Omega \end{aligned}$$

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω, $f : \Omega \to \mathbb{K}$.
Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x),\\ (af)(x) &= af(x), \qquad \text{dla dowolnego } x \in \Omega\end{aligned}$$

Sprawdźmy wszystkie warunki przestrzeni wektorowej.

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω, $f : \Omega \to \mathbb{K}$.
Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x), \\ (af)(x) &= af(x), \qquad \text{dla dowolnego } \; x \in \Omega \end{aligned}$$

Sprawdźmy wszystkie warunki przestrzeni wektorowej.

przemienność:

Przykład 2
X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω, $f : \Omega \to \mathbb{K}$.
Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x), \\ (af)(x) &= af(x), \qquad \text{dla dowolnego } \ x \in \Omega \end{aligned}$$

Sprawdźmy wszystkie warunki przestrzeni wektorowej.
przemienność:

$$(g+f)(x) =$$

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω, $f : \Omega \to \mathbb{K}$.
Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (af)(x) &= af(x), \qquad \text{dla dowolnego } \; x \in \Omega \end{aligned}$$

Sprawdźmy wszystkie warunki przestrzeni wektorowej.
przemienność:

$$(g+f)(x) = g(x) + f(x) =$$

Przykład 2
X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω, $f : \Omega \to \mathbb{K}$.
Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x),\\ (af)(x) &= af(x), \qquad \text{dla dowolnego } x \in \Omega\end{aligned}$$

Sprawdźmy wszystkie warunki przestrzeni wektorowej.
przemienność:

$$(g+f)(x) = g(x)+f(x) = f(x)+g(x) =$$

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω, $f : \Omega \to \mathbb{K}$.
Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x), \\ (af)(x) &= af(x), \qquad \text{dla dowolnego } \; x \in \Omega \end{aligned}$$

Sprawdźmy wszystkie warunki przestrzeni wektorowej.
przemienność:

$$(g+f)(x) = g(x)+f(x) = f(x)+g(x) = (f+g)(x).$$

Przykład 2

X – zbiór funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω, $f : \Omega \to \mathbb{K}$.
Działania dla $f, g \in X$ określamy następująco:

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x), \\
(af)(x) &= af(x), \qquad \text{dla dowolnego } \; x \in \Omega
\end{aligned}
$$

Sprawdźmy wszystkie warunki przestrzeni wektorowej.
przemienność:

$$(g+f)(x) = g(x) + f(x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x).$$

łączność:

$$(f + (g + h))(x) \quad =$$

łączność:

$$(f+(g+h))(x) \quad = \quad f(x)+(g+h)(x) =$$

łączność:

$$(f + (g + h))\,(x) \quad = \quad f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$$

łączność:

$$(f+(g+h))(x) \;=\; f(x)+(g+h)(x) = f(x)+(g(x)+h(x))$$
$$=$$

łączność:

$$
\begin{aligned}
(f+(g+h))\,(x) &= f(x)+(g+h)(x) = f(x)+(g(x)+h(x)) \\
&= (f(x)+g(x))+h(x) = (f+g)(x)+h(x)
\end{aligned}
$$

łączność:

$$\begin{aligned}(f+(g+h))(x) &= f(x)+(g+h)(x)=f(x)+(g(x)+h(x))\\ &= (f(x)+g(x))+h(x)=(f+g)(x)+h(x)\\ &=\end{aligned}$$

łączność:

$$\begin{aligned}(f+(g+h))(x) &= f(x)+(g+h)(x) = f(x)+(g(x)+h(x)) \\ &= (f(x)+g(x))+h(x) = (f+g)(x)+h(x) \\ &= ((f+g)+h)(x).\end{aligned}$$

łączność:

$$\begin{aligned}(f+(g+h))(x) &= f(x)+(g+h)(x)=f(x)+(g(x)+h(x))\\ &= (f(x)+g(x))+h(x)=(f+g)(x)+h(x)\\ &= ((f+g)+h)(x).\end{aligned}$$

element zerowy:

łączność:

$$\begin{aligned}(f+(g+h))(x) &= f(x)+(g+h)(x) = f(x)+(g(x)+h(x)) \\ &= (f(x)+g(x))+h(x) = (f+g)(x)+h(x) \\ &= ((f+g)+h)(x).\end{aligned}$$

element zerowy:

$\theta(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow$

Przestrzeń wektorowa

łączność:

$$
\begin{aligned}
(f + (g + h))\,(x) &= f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \\
&= (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) \\
&= ((f + g) + h)\,(x).
\end{aligned}
$$

element zerowy:

$$\theta(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad (f + \theta)(x) =$$

Przestrzeń wektorowa

łączność:

$$
\begin{aligned}
(f + (g + h))\,(x) &= f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \\
&= (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) \\
&= ((f + g) + h)\,(x).
\end{aligned}
$$

element zerowy:

$$\theta(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad (f + \theta)(x) = f(x) + \theta(x) =$$

łączność:

$$\begin{aligned}(f+(g+h))(x) &= f(x)+(g+h)(x) = f(x)+(g(x)+h(x)) \\ &= (f(x)+g(x))+h(x) = (f+g)(x)+h(x) \\ &= ((f+g)+h)(x).\end{aligned}$$

element zerowy:

$$\theta(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad (f+\theta)(x) = f(x)+\theta(x) = f(x)+0 =$$

łączność:

$$
\begin{aligned}
(f + (g + h))\,(x) &= f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \\
&= (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) \\
&= ((f + g) + h)\,(x).
\end{aligned}
$$

element zerowy:

$$\theta(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad (f + \theta)(x) = f(x) + \theta(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

łączność:

$$\begin{aligned}
(f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \\
&= (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) \\
&= ((f + g) + h)(x).
\end{aligned}$$

element zerowy:

$$\theta(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad (f + \theta)(x) = f(x) + \theta(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

Przestrzeń wektorowa

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \qquad \Rightarrow$$

Przestrzeń wektorowa

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \qquad \Rightarrow \quad (f + (-f))\,(x) = f(x) + (-f)(x)$$

Przestrzeń wektorowa

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \qquad \Rightarrow \quad (f + (-f))\,(x) = f(x) + (-f)(x)$$

$$=$$

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \qquad \Rightarrow \quad (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x)$$
$$= \quad f(x) - f(x) = 0 =$$

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \qquad \Rightarrow \quad (f + (-f))\,(x) = f(x) + (-f)(x)$$
$$= \quad f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).$$

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \qquad \Rightarrow \quad (f + (-f))\,(x) = f(x) + (-f)(x)$$
$$= \quad f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).$$

rozdzielność:

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (f + (-f))\,(x) &= f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x). \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$(a(f+g))\,(x) \quad =$$

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \qquad \Rightarrow \quad \left(f + (-f)\right)(x) = f(x) + (-f)(x)$$
$$= \quad f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).$$

rozdzielność:

$$\left(a(f+g)\right)(x) \quad = \quad a\,(f+g)\,(x) =$$

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \qquad \Rightarrow \quad (f + (-f))\,(x) = f(x) + (-f)(x)$$
$$= \quad f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).$$

rozdzielność:

$$(a(f+g))\,(x) \quad = \quad a\,(f+g)\,(x) = a\,(f(x) + g(x))$$

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \qquad \Rightarrow \quad (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x)$$
$$= \quad f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).$$

rozdzielność:

$$(a(f+g))(x) \quad = \quad a(f+g)(x) = a(f(x) + g(x))$$
$$=$$

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \qquad \Rightarrow \quad (f + (-f))\,(x) = f(x) + (-f)(x)$$
$$= \quad f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).$$

rozdzielność:

$$(a(f+g))\,(x) \quad = \quad a\,(f+g)\,(x) = a\,(f(x) + g(x))$$
$$= \quad af(x) + ag(x) =$$

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \qquad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (f + (-f))\,(x) &= f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x). \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} (a(f+g))\,(x) &= a\,(f+g)\,(x) = a\,(f(x) + g(x)) \\ &= af(x) + ag(x) = (af + ag)\,(x). \end{aligned}$$

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \qquad \Rightarrow \quad (f + (-f))\,(x) = f(x) + (-f)(x)$$
$$= \quad f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a(f+g))\,(x) &= a\,(f+g)\,(x) = a\,(f(x) + g(x)) \\ &= af(x) + ag(x) = (af + ag)\,(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

Przestrzeń wektorowa

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \qquad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (f + (-f))\,(x) &= f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x). \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} (a(f+g))\,(x) &= a\,(f+g)\,(x) = a\,(f(x) + g(x)) \\ &= af(x) + ag(x) = (af + ag)\,(x). \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$((a+b)f)\,(x) \quad =$$

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \qquad \Rightarrow \quad \begin{aligned}(f + (-f))\,(x) &= f(x) + (-f)(x)\\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned}(a(f+g))\,(x) &= a\,(f+g)\,(x) = a\,(f(x) + g(x))\\ &= af(x) + ag(x) = (af + ag)\,(x).\end{aligned}$$

rozdzielność:

$$((a+b)f)\,(x) = (a+b)f(x) =$$

Przestrzeń wektorowa

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \qquad \Rightarrow \quad (f + (-f))\,(x) = f(x) + (-f)(x)$$
$$= \quad f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).$$

rozdzielność:

$$(a(f+g))\,(x) \quad = \quad a\,(f+g)\,(x) = a\,(f(x) + g(x))$$
$$= \quad af(x) + ag(x) = (af + ag)\,(x).$$

rozdzielność:

$$((a+b)f)\,(x) \quad = \quad (a+b)f(x) = af(x) + bf(x) =$$

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \qquad \Rightarrow \quad (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x)$$
$$= \quad f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).$$

rozdzielność:

$$(a(f+g))(x) \quad = \quad a(f+g)(x) = a(f(x) + g(x))$$
$$= \quad af(x) + ag(x) = (af + ag)(x).$$

rozdzielność:

$$((a+b)f)(x) \quad = \quad (a+b)f(x) = af(x) + bf(x) = (af)(x) + (bf)(x)$$

Przestrzeń wektorowa

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \qquad \Rightarrow \quad (f + (-f))\,(x) = f(x) + (-f)(x)$$
$$= \quad f(x) - f(x) = 0 = \theta(x).$$

rozdzielność:

$$(a(f+g))\,(x) \quad = \quad a\,(f+g)\,(x) = a\,(f(x) + g(x))$$
$$= \quad af(x) + ag(x) = (af + ag)\,(x).$$

rozdzielność:

$$((a+b)f)\,(x) \quad = \quad (a+b)f(x) = af(x) + bf(x) = (af)(x) + (bf)(x)$$
$$=$$

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (f + (-f))(x) &= f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x). \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} (a(f+g))(x) &= a(f+g)(x) = a(f(x) + g(x)) \\ &= af(x) + ag(x) = (af + ag)(x). \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} ((a+b)f)(x) &= (a+b)f(x) = af(x) + bf(x) = (af)(x) + (bf)(x) \\ &= (af + bf)(x). \end{aligned}$$

Przestrzeń wektorowa

element przeciwny:

$$(-f)(x) \equiv -f(x) \qquad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (f + (-f))(x) &= f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x). \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} (a(f+g))(x) &= a(f+g)(x) = a(f(x) + g(x)) \\ &= af(x) + ag(x) = (af + ag)(x). \end{aligned}$$

rozdzielność:

$$\begin{aligned} ((a+b)f)(x) &= (a+b)f(x) = af(x) + bf(x) = (af)(x) + (bf)(x) \\ &= (af + bf)(x). \end{aligned}$$

Przestrzeń wektorowa

$$(a(bf))(x) \quad = \quad a\,(bf)\,(x) =$$

Przestrzeń wektorowa

$$(a(bf))(x) \quad = \quad a\,(bf)\,(x) = a\,(bf(x))$$

$$(a(bf))(x) = a(bf)(x) = a(bf(x))$$
$$=$$

$$
\begin{aligned}
(a(bf))(x) &= a\,(bf)\,(x) = a\,(bf(x)) \\
&= (ab)\,f\,(x) =
\end{aligned}
$$

Przestrzeń wektorowa

$$
\begin{aligned}
(a(bf))(x) &= a\,(bf)\,(x) = a\,(bf(x)) \\
&= (ab)\,f(x) = ((ab)f)\,(x).
\end{aligned}
$$

Przestrzeń wektorowa

$$
\begin{aligned}
(a(bf))(x) &= a(bf)(x) = a(bf(x)) \\
&= (ab)f(x) = ((ab)f)(x).
\end{aligned}
$$

$$(1 \cdot f)(x) =$$

$$\begin{aligned}(a(bf))(x) &= a\,(bf)\,(x) = a\,(bf(x)) \\ &= (ab)\,f(x) = ((ab)f)\,(x).\end{aligned}$$

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) =$$

Przestrzeń wektorowa

$$\begin{aligned}(a(bf))(x) &= a(bf)(x) = a(bf(x)) \\ &= (ab)f(x) = ((ab)f)(x).\end{aligned}$$

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \quad \text{cnd.}$$

$$\begin{aligned}(a(bf))(x) &= a(bf)(x) = a(bf(x)) \\ &= (ab)f(x) = ((ab)f)(x).\end{aligned}$$

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \quad \text{cnd.}$$

Niech $(X, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową.

$$\begin{aligned}(a(bf))(x) &= a(bf)(x) = a(bf(x)) \\ &= (ab)f(x) = ((ab)f)(x).\end{aligned}$$

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \quad \text{cnd.}$$

Niech $(X, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Niepusty podzbiór $X_0 \subset X$ nazywamy podprzestrzenią wektorową,

$$\begin{aligned}(a(bf))(x) &= a(bf)(x) = a(bf(x)) \\ &= (ab)f(x) = ((ab)f)(x).\end{aligned}$$

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \quad \text{cnd.}$$

Niech $(X, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Niepusty podzbiór $X_0 \subset X$ nazywamy podprzestrzenią wektorową, jeśli $(X_0, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową.

$$
\begin{aligned}
(a(bf))(x) &= a(bf)(x) = a(bf(x)) \\
&= (ab)f(x) = ((ab)f)(x).
\end{aligned}
$$

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \quad \text{cnd.}$$

Niech $(X, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Niepusty podzbiór $X_0 \subset X$ nazywamy podprzestrzenią wektorową, jeśli $(X_0, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową.

Niepusty podzbiór $X_0 \subset X$ jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$x, y \in X_0 \ \text{ i } \ a \in \mathbb{K} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}(a(bf))(x) &= a(bf)(x) = a(bf(x)) \\ &= (ab)f(x) = ((ab)f)(x).\end{aligned}$$

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \quad \text{cnd.}$$

Niech $(X, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Niepusty podzbiór $X_0 \subset X$ nazywamy podprzestrzenią wektorową, jeśli $(X_0, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową.
Niepusty podzbiór $X_0 \subset X$ jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$x, y \in X_0 \ \text{i} \ a \in \mathbb{K} \quad \Rightarrow \quad x + y \in X_0 \ \text{i} \ ax \in X_0.$$

$$\begin{aligned}(a(bf))(x) &= a(bf)(x) = a(bf(x)) \\ &= (ab)f(x) = ((ab)f)(x).\end{aligned}$$

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \quad \text{cnd.}$$

Niech $(X, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Niepusty podzbiór $X_0 \subset X$ nazywamy podprzestrzenią wektorową, jeśli $(X_0, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową.
Niepusty podzbiór $X_0 \subset X$ jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$x, y \in X_0 \text{ i } a \in \mathbb{K} \quad \Rightarrow \quad x + y \in X_0 \text{ i } ax \in X_0.$$

Elementy $x_1, x_2, ..., x_n$ przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ nazywamy **liniowo niezależnymi,** jeśli dla $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = \theta \quad \Rightarrow$$

Przestrzeń wektorowa

Elementy $x_1, x_2, ..., x_n$ przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ nazywamy liniowo niezależnymi, jeśli dla $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = \theta \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = ... = a_n = 0.$$

Elementy $x_1, x_2, ..., x_n$ przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ nazywamy liniowo niezależnymi, jeśli dla $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = \theta \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = ... = a_n = 0.$$

Największą liczbę n o tej własności, że w przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ istnieje n elementów liniowo niezależnych nazywamy wymiarem przestrzeni wektorowej i oznaczamy $\dim X$.

Przestrzeń wektorowa

Elementy $x_1, x_2, ..., x_n$ przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ nazywamy liniowo niezależnymi, jeśli dla $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = \theta \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = ... = a_n = 0.$$

Największą liczbę n o tej własności, że w przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ istnieje n elementów liniowo niezależnych nazywamy wymiarem przestrzeni wektorowej i oznaczamy $\dim X$.
Jeżeli taka liczba n istnieje, to przestrzeń jest skończenie wymiarowa, $\dim X = n$,

Przestrzeń wektorowa

Elementy $x_1, x_2, ..., x_n$ przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ nazywamy liniowo niezależnymi, jeśli dla $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = \theta \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = ... = a_n = 0.$$

Największą liczbę n o tej własności, że w przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ istnieje n elementów liniowo niezależnych nazywamy wymiarem przestrzeni wektorowej i oznaczamy $\dim X$.
Jeżeli taka liczba n istnieje, to przestrzeń jest skończenie wymiarowa, $\dim X = n$, a jeśli takie n nie istnieje, to przestrzeń jest nieskończenie wymiarowa, $\dim X = \infty$.

Przestrzeń wektorowa

Elementy $x_1, x_2, ..., x_n$ przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ nazywamy liniowo niezależnymi, jeśli dla $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = \theta \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = ... = a_n = 0.$$

Największą liczbę n o tej własności, że w przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ istnieje n elementów liniowo niezależnych nazywamy wymiarem przestrzeni wektorowej i oznaczamy $\dim X$.
Jeżeli taka liczba n istnieje, to przestrzeń jest skończenie wymiarowa, $\dim X = n$, a jeśli takie n nie istnieje, to przestrzeń jest nieskończenie wymiarowa, $\dim X = \infty$.

Jeżeli $\dim X = n$, to każdy liniowo niezależny zbiór n wektorów $e_1, e_2, ..., e_n \in X$ nazywamy bazą przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$.
Przestrzeń $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ z *przykładu 1* jest skończenie wymiarowa.

Jeżeli $\dim X = n$, to każdy liniowo niezależny zbiór n wektorów $e_1, e_2, ..., e_n \in X$ nazywamy bazą przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$. Przestrzeń $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ z *przykładu 1* jest skończenie wymiarowa. Jej bazę stanowią, np. wektory $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, ..., 0)$,..., $e_n = (0, 0, ..., 1)$.

Przestrzeń wektorowa

Jeżeli $\dim X = n$, to każdy liniowo niezależny zbiór n wektorów $e_1, e_2, ..., e_n \in X$ nazywamy bazą przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$. Przestrzeń $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ z *przykładu 1* jest skończenie wymiarowa. Jej bazę stanowią, np. wektory $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, ..., 0)$,..., $e_n = (0, 0, ..., 1)$. Rzeczywiście, dla dowolnego $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ zachodzi

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n.$$

Przestrzeń wektorowa

Jeżeli $\dim X = n$, to każdy liniowo niezależny zbiór n wektorów $e_1, e_2, ..., e_n \in X$ nazywamy bazą przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$. Przestrzeń $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ z *przykładu 1* jest skończenie wymiarowa. Jej bazę stanowią, np. wektory $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, ..., 0)$,..., $e_n = (0, 0, ..., 1)$. Rzeczywiście, dla dowolnego $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ zachodzi

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n.$$

Przestrzeń funkcyjna z *przykładu 2*

Jeżeli $\dim X = n$, to każdy liniowo niezależny zbiór n wektorów $e_1, e_2, ..., e_n \in X$ nazywamy bazą przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$. Przestrzeń $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ z *przykładu 1* jest skończenie wymiarowa. Jej bazę stanowią, np. wektory $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, ..., 0)$,..., $e_n = (0, 0, ..., 1)$. Rzeczywiście, dla dowolnego $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ zachodzi

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n.$$

Przestrzeń funkcyjna z *przykładu 2* jest nieskończenie wymiarowa.

Przestrzeń wektorowa

Jeżeli $\dim X = n$, to każdy liniowo niezależny zbiór n wektorów $e_1, e_2, ..., e_n \in X$ nazywamy bazą przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$. Przestrzeń $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ z *przykładu 1* jest skończenie wymiarowa. Jej bazę stanowią, np. wektory $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, ..., 0)$,..., $e_n = (0, 0, ..., 1)$. Rzeczywiście, dla dowolnego $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ zachodzi

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n.$$

Przestrzeń funkcyjna z *przykładu 2* jest nieskończenie wymiarowa.

Przestrzeń metryczna

Niech X będzie zbiorem niepustym. Funkcję d określoną w zbiorze $X \times X$ o wartościach nieujemnych spełniającą warunki

1. $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y,$

Przestrzeń metryczna

Niech X będzie zbiorem niepustym. Funkcję d określoną w zbiorze $X \times X$ o wartościach nieujemnych spełniającą warunki

1. $d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y,$
2. $d(y,x) = d(x,y), \qquad (symetria)$

Przestrzeń metryczna

Niech X będzie zbiorem niepustym. Funkcję d określoną w zbiorze $X \times X$ o wartościach nieujemnych spełniającą warunki

1. $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y,$
2. $d(y, x) = d(x, y), \quad$ *(symetria)*
3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) \quad$ *(warunek trójkąta)*

Przestrzeń metryczna

Niech X będzie zbiorem niepustym. Funkcję d określoną w zbiorze $X \times X$ o wartościach nieujemnych spełniającą warunki

1. $d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,
2. $d(y,x) = d(x,y)$, *(symetria)*
3. $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ *(warunek trójkąta)*

nazywamy metryką albo odległością w X,

Przestrzeń metryczna

Niech X będzie zbiorem niepustym. Funkcję d określoną w zbiorze $X \times X$ o wartościach nieujemnych spełniającą warunki

1. $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,
2. $d(y, x) = d(x, y)$, *(symetria)*
3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *(warunek trójkąta)*

nazywamy metryką albo odległością w X, a parę (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną.

Przestrzeń metryczna

Niech X będzie zbiorem niepustym. Funkcję d określoną w zbiorze $X \times X$ o wartościach nieujemnych spełniającą warunki

1. $d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,
2. $d(y,x) = d(x,y)$, *(symetria)*
3. $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ *(warunek trójkąta)*

nazywamy metryką albo odległością w X, a parę (X,d) nazywamy przestrzenią metryczną.

Przykład. $X = \mathbb{R}^n$, a odległość $d(x,y)$ pomiędzy elementami $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ i $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ definiujemy wzorem

Przestrzeń metryczna

Niech X będzie zbiorem niepustym. Funkcję d określoną w zbiorze $X \times X$ o wartościach nieujemnych spełniającą warunki

1. $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y,$
2. $d(y, x) = d(x, y),$ *(symetria)*
3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *(warunek trójkąta)*

nazywamy metryką albo odległością w X, a parę (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną.

Przykład. $X = \mathbb{R}^n$, a odległość $d(x, y)$ pomiędzy elementami $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ i $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ definiujemy wzorem

$$d(x, y) \equiv \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}.$$

Przestrzeń metryczna

Niech X będzie zbiorem niepustym. Funkcję d określoną w zbiorze $X \times X$ o wartościach nieujemnych spełniającą warunki

1. $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,
2. $d(y, x) = d(x, y)$, *(symetria)*
3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *(warunek trójkąta)*

nazywamy metryką albo odległością w X, a parę (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną.

Przykład. $X = \mathbb{R}^n$, a odległość $d(x, y)$ pomiędzy elementami $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ i $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ definiujemy wzorem

$$d(x, y) \equiv \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}.$$

Przestrzeń metryczna

Zadanie. Pokazać, że tak określona funkcja $d(x, y)$ jest metryką.

Ciąg elementów przestrzeni metrycznej $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego

Zadanie. Pokazać, że tak określona funkcja $d(x, y)$ jest metryką. Ciąg elementów przestrzeni metrycznej $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba N, że dla każdych $m, n > N$ zachodzi $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Zadanie. Pokazać, że tak określona funkcja $d(x, y)$ jest metryką.
Ciąg elementów przestrzeni metrycznej $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba N, że dla każdych $m, n > N$ zachodzi $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.
Każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego.

Zadanie. Pokazać, że tak określona funkcja $d(x, y)$ jest metryką.
Ciąg elementów przestrzeni metrycznej $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba N, że dla każdych $m, n > N$ zachodzi $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.
Każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego.
Przestrzeń metryczna (X, d) jest zupełna,

Zadanie. Pokazać, że tak określona funkcja $d(x, y)$ jest metryką.

Ciąg elementów przestrzeni metrycznej $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba N, że dla każdych $m, n > N$ zachodzi $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego.

Przestrzeń metryczna (X, d) jest zupełna, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego elementów tej przestrzeni jest zbieżny do elementu $x_0 \in X$.

Zadanie. Pokazać, że tak określona funkcja $d(x, y)$ jest metryką.
Ciąg elementów przestrzeni metrycznej $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba N, że dla każdych $m, n > N$ zachodzi $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.
Każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego.
Przestrzeń metryczna (X, d) jest zupełna, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego elementów tej przestrzeni jest zbieżny do elementu $x_0 \in X$.

Przestrzeń unormowana

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję $x \to \|x\|$ odwzorowującą zbiór X w zbiór liczb nieujemnych nazywamy normą,

Przestrzeń unormowana

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję $x \to \|x\|$ odwzorowującą zbiór X w zbiór liczb nieujemnych nazywamy normą, gdy dla każdych $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ spełnia następujące warunki

Przestrzeń unormowana

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję $x \to \|x\|$ odwzorowującą zbiór X w zbiór liczb nieujemnych nazywamy normą, gdy dla każdych $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ spełnia następujące warunki

1. $\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,$

Przestrzeń unormowana

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję $x \to \|x\|$ odwzorowującą zbiór X w zbiór liczb nieujemnych nazywamy normą, gdy dla każdych $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ spełnia następujące warunki

1. $\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,$
2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|,$ *(warunek trójkąta)*

Przestrzeń unormowana

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję $x \to \|x\|$ odwzorowującą zbiór X w zbiór liczb nieujemnych nazywamy normą, gdy dla każdych $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ spełnia następujące warunki

1. $\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,$
2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|,$ *(warunek trójkąta)*
3. $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|,$ *(jednorodność).*

Przestrzeń unormowana

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję $x \to \|x\|$ odwzorowującą zbiór X w zbiór liczb nieujemnych nazywamy normą, gdy dla każdych $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ spełnia następujące warunki

1. $\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$,
2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, *(warunek trójkąta)*
3. $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$, *(jednorodność)*.

Przestrzeń wektorową X wraz z określoną normą nazywamy

Przestrzeń unormowana

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję $x \to \|x\|$ odwzorowującą zbiór X w zbiór liczb nieujemnych nazywamy normą, gdy dla każdych $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ spełnia następujące warunki

1. $\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,$
2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, *(warunek trójkąta)*
3. $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$, *(jednorodność)*.

Przestrzeń wektorową X wraz z określoną normą nazywamy przestrzenią unormowaną.

Przestrzeń unormowana

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję $x \to \|x\|$ odwzorowującą zbiór X w zbiór liczb nieujemnych nazywamy normą, gdy dla każdych $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ spełnia następujące warunki

1. $\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,$
2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, *(warunek trójkąta)*
3. $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$, *(jednorodność)*.

Przestrzeń wektorową X wraz z określoną normą nazywamy przestrzenią unormowaną.

Przestrzeń unormowaną zupełną nazywamy

Przestrzeń unormowana

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję $x \to \|x\|$ odwzorowującą zbiór X w zbiór liczb nieujemnych nazywamy normą, gdy dla każdych $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ spełnia następujące warunki

1. $\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,$
2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, *(warunek trójkąta)*
3. $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$, *(jednorodność)*.

Przestrzeń wektorową X wraz z określoną normą nazywamy przestrzenią unormowaną.

Przestrzeń unormowaną zupełną nazywamy przestrzenią Banacha.

Przestrzeń unormowana

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję $x \to \|x\|$ odwzorowującą zbiór X w zbiór liczb nieujemnych nazywamy normą, gdy dla każdych $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ spełnia następujące warunki

1. $\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$,
2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, *(warunek trójkąta)*
3. $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$, *(jednorodność)*.

Przestrzeń wektorową X wraz z określoną normą nazywamy przestrzenią unormowaną.
Przestrzeń unormowaną zupełną nazywamy przestrzenią Banacha.

Przestrzeń unormowana jest przestrzenią metryczną.

Rzeczywiście, mając normę, odległość możemy określić następująco

Przestrzeń unormowana jest przestrzenią metryczną.
Rzeczywiście, mając normę, odległość możemy określić następująco

$$d(x, y) \equiv \|x - y\|.$$

Przestrzeń unormowana

Przestrzeń unormowana jest przestrzenią metryczną.
Rzeczywiście, mając normę, odległość możemy określić następująco

$$d(x, y) \equiv \|x - y\|.$$

Zadanie. Pokazać, że powyższy wzór poprawnie określa odległość.

Przestrzeń unormowana jest przestrzenią metryczną.
Rzeczywiście, mając normę, odległość możemy określić następująco

$$d(x, y) \equiv \|x - y\|.$$

Zadanie. Pokazać, że powyższy wzór poprawnie określa odległość.

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję

$$(\ | \ ) : \quad X \times X \to \mathbb{K}$$

spełniającą dla wszystkich $x, y, z \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ następujące warunki

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję

$$(\ | \ ) : \quad X \times X \to \mathbb{K}$$

spełniającą dla wszystkich $x, y, z \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ następujące warunki

1. $(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$, *(addytywność)*,

Przestrzeń unitarna

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję

$$(\ |\ ) : \quad X \times X \to \mathbb{K}$$

spełniającą dla wszystkich $x, y, z \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ następujące warunki

1. $(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$, *(addytywność)*,
2. $(x|ay) = a(x|y)$, *(jednorodność)*,

Przestrzeń unitarna

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję

$$(\ |\ ) : \quad X \times X \to \mathbb{K}$$

spełniającą dla wszystkich $x, y, z \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ następujące warunki

1. $(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$, *(addytywność)*,
2. $(x|ay) = a(x|y)$, *(jednorodność)*,
3. $(y|x) = (x|y)^*$,

Przestrzeń unitarna

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję

$$(\ |\ ) : \quad X \times X \to \mathbb{K}$$

spełniającą dla wszystkich $x, y, z \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ następujące warunki

1. $(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$, *(addytywność)*,
2. $(x|ay) = a(x|y)$, *(jednorodność)*,
3. $(y|x) = (x|y)^*$,
4. $(x|x) > 0$, dla $x \neq \theta$

Przestrzeń unitarna

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję

$$(\ | \ ) : \quad X \times X \to \mathbb{K}$$

spełniającą dla wszystkich $x, y, z \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ następujące warunki

1. $(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$, *(addytywność)*,
2. $(x|ay) = a(x|y)$, *(jednorodność)*,
3. $(y|x) = (x|y)^*$,
4. $(x|x) > 0$, dla $x \neq \theta$

nazywamy iloczynem skalarnym lub iloczynem wewnętrznym.

Przestrzeń unitarna

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję

$$(\;|\;) \; : \quad X \times X \to \mathbb{K}$$

spełniającą dla wszystkich $x, y, z \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ następujące warunki

1. $(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$, *(addytywność)*,
2. $(x|ay) = a(x|y)$, *(jednorodność)*,
3. $(y|x) = (x|y)^*$,
4. $(x|x) > 0$, dla $x \neq \theta$

nazywamy iloczynem skalarnym lub iloczynem wewnętrznym.

Przestrzeń wektorową X wraz z określonym iloczynem wewnętrznym nazywamy

Przestrzeń unitarna

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję

$$(\ | \ ) : \quad X \times X \to \mathbb{K}$$

spełniającą dla wszystkich $x, y, z \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ następujące warunki

1. $(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$, *(addytywność)*,
2. $(x|ay) = a(x|y)$, *(jednorodność)*,
3. $(y|x) = (x|y)^*$,
4. $(x|x) > 0$, dla $x \neq \theta$

nazywamy iloczynem skalarnym lub iloczynem wewnętrznym. Przestrzeń wektorową X wraz z określonym iloczynem wewnętrznym nazywamy przestrzenią unitarną.

Przestrzeń unitarna

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. Funkcję

$$(\ |\ ) : \quad X \times X \to \mathbb{K}$$

spełniającą dla wszystkich $x, y, z \in X$ i $a \in \mathbb{K}$ następujące warunki

1. $(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$, *(addytywność)*,
2. $(x|ay) = a(x|y)$, *(jednorodność)*,
3. $(y|x) = (x|y)^*$,
4. $(x|x) > 0$, dla $x \neq \theta$

nazywamy iloczynem skalarnym lub iloczynem wewnętrznym. Przestrzeń wektorową X wraz z określonym iloczynem wewnętrznym nazywamy przestrzenią unitarną.

Przestrzeń unitarna

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \ \|)$. Elementy zbioru $\mathbb{C}^n$ mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad \text{(konwencja sumacyjna)}.$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \ \|)$. Elementy zbioru $\mathbb{C}^n$ mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.
Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad \text{(konwencja sumacyjna)}.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(x|y+z) \quad =$$

Przestrzeń unitarna

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \|\ \|)$. Elementy zbioru $\mathbb{C}^n$ mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.
Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad \text{(konwencja sumacyjna)}.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(x|y + z) \quad = \quad x_i^* (y_i + z_i) =$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \ \|)$. Elementy zbioru $\mathbb{C}^n$ mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.
Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad \text{(konwencja sumacyjna)}.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(x|y+z) \quad = \quad x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i =$$

Przestrzeń unitarna

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \ \|)$. Elementy zbioru $\mathbb{C}^n$ mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.
Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad \text{(konwencja sumacyjna)}.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(x|y+z) \quad = \quad x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z),$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \ \|)$. Elementy zbioru $\mathbb{C}^n$ mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.
Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad \text{(konwencja sumacyjna)}.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned} (x|y+z) &= x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z), \\ (x|ay) & \end{aligned}$$

Przestrzeń unitarna

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \|\ \ \|)$. Elementy zbioru $\mathbb{C}^n$ mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.
Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad \text{(konwencja sumacyjna)}.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned} (x|y+z) &= x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z), \\ (x|ay) &= \end{aligned}$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \ \|)$. Elementy zbioru $\mathbb{C}^n$ mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.
Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad \text{(konwencja sumacyjna)}.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}(x|y+z) &= x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z), \\ (x|ay) &= x_i^* (ay_i) = a x_i^* y_i = a(x|y),\end{aligned}$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \|\ \|)$. Elementy zbioru $\mathbb{C}^n$ mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.
Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad \text{(konwencja sumacyjna)}.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}(x|y+z) &= x_i^*(y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z),\\ (x|ay) &= x_i^*(ay_i) = ax_i^* y_i = a(x|y),\\ (y|x) & \end{aligned}$$

Przestrzeń unitarna

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \|\ \|)$. Elementy zbioru $\mathbb{C}^n$ mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.
Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad \text{(konwencja sumacyjna)}.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned} (x|y+z) &= x_i^*(y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z), \\ (x|ay) &= x_i^*(ay_i) = a x_i^* y_i = a(x|y), \\ (y|x) &= \end{aligned}$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \|\ \|)$. Elementy zbioru $\mathbb{C}^n$ mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.
Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad \text{(konwencja sumacyjna)}.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}
(x|y+z) &= x_i^*(y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z), \\
(x|ay) &= x_i^*(ay_i) = a x_i^* y_i = a(x|y), \\
(y|x) &= y_i^* x_i =
\end{aligned}$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \ \|)$. Elementy zbioru $\mathbb{C}^n$ mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.
Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad \text{(konwencja sumacyjna)}.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}
(x|y+z) &= x_i^*(y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z), \\
(x|ay) &= x_i^*(ay_i) = ax_i^* y_i = a(x|y), \\
(y|x) &= y_i^* x_i = (y_i x_i^*)^* =
\end{aligned}$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \ \|)$. Elementy zbioru $\mathbb{C}^n$ mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.
Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad \text{(konwencja sumacyjna)}.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}
(x|y+z) &= x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z), \\
(x|ay) &= x_i^* (ay_i) = a x_i^* y_i = a(x|y), \\
(y|x) &= y_i^* x_i = (y_i x_i^*)^* = (x_i^* y_i)^* =
\end{aligned}$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \|\ \|)$. Elementy zbioru $\mathbb{C}^n$ mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.
Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad \text{(konwencja sumacyjna)}.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}
(x|y+z) &= x_i^*(y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z), \\
(x|ay) &= x_i^*(ay_i) = a x_i^* y_i = a(x|y), \\
(y|x) &= y_i^* x_i = (y_i x_i^*)^* = (x_i^* y_i)^* = (x|y)^*,
\end{aligned}$$

Przestrzeń unitarna

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \|\ \|)$. Elementy zbioru $\mathbb{C}^n$ mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.
Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad \text{(konwencja sumacyjna)}.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}
(x|y+z) &= x_i^*(y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z), \\
(x|ay) &= x_i^*(ay_i) = a x_i^* y_i = a(x|y), \\
(y|x) &= y_i^* x_i = (y_i x_i^*)^* = (x_i^* y_i)^* = (x|y)^*,
\end{aligned}$$

$$(x|x)$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \ \|)$. Elementy zbioru $\mathbb{C}^n$ mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.
Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad \text{(konwencja sumacyjna)}.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}
(x|y+z) &= x_i^*(y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z), \\
(x|ay) &= x_i^*(ay_i) = ax_i^* y_i = a(x|y), \\
(y|x) &= y_i^* x_i = (y_i x_i^*)^* = (x_i^* y_i)^* = (x|y)^*, \\
(x|x) &=
\end{aligned}$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \|\ \|)$. Elementy zbioru $\mathbb{C}^n$ mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.
Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad \text{(konwencja sumacyjna)}.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}
(x|y+z) &= x_i^*(y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z), \\
(x|ay) &= x_i^*(ay_i) = a x_i^* y_i = a(x|y), \\
(y|x) &= y_i^* x_i = (y_i x_i^*)^* = (x_i^* y_i)^* = (x|y)^*, \\
(x|x) &= x_i^* x_i =
\end{aligned}$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \ \|)$. Elementy zbioru $\mathbb{C}^n$ mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.
Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad \text{(konwencja sumacyjna)}.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}
(x|y+z) &= x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z), \\
(x|ay) &= x_i^* (a y_i) = a x_i^* y_i = a(x|y), \\
(y|x) &= y_i^* x_i = (y_i x_i^*)^* = (x_i^* y_i)^* = (x|y)^*, \\
(x|x) &= x_i^* x_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0,
\end{aligned}$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \ \|)$. Elementy zbioru $\mathbb{C}^n$ mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.
Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad \text{(konwencja sumacyjna)}.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}
(x|y+z) &= x_i^*(y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z), \\
(x|ay) &= x_i^*(ay_i) = a x_i^* y_i = a(x|y), \\
(y|x) &= y_i^* x_i = (y_i x_i^*)^* = (x_i^* y_i)^* = (x|y)^*, \\
(x|x) &= x_i^* x_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0, \quad \text{dla} \quad x \neq \theta.
\end{aligned}$$

Przykład 1. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^n, \| \ \|)$. Elementy zbioru $\mathbb{C}^n$ mają postać $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, gdzie $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C}$.
Iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$(x|y) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \equiv x_i^* y_i \quad \text{(konwencja sumacyjna)}.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}
(x|y+z) &= x_i^* (y_i + z_i) = x_i^* y_i + x_i^* z_i = (x|y) + (x|z), \\
(x|ay) &= x_i^* (a y_i) = a x_i^* y_i = a(x|y), \\
(y|x) &= y_i^* x_i = (y_i x_i^*)^* = (x_i^* y_i)^* = (x|y)^*, \\
(x|x) &= x_i^* x_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0, \quad \text{dla} \quad x \neq \theta.
\end{aligned}$$

Przestrzeń unitarna

Przykład 2. Rozważmy przestrzeń funkcji zespolonych całkowalnych z kwadratem modułu w obszarze Ω.
Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ definiujemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3r.$$

Przykład 2. Rozważmy przestrzeń funkcji zespolonych całkowalnych z kwadratem modułu w obszarze Ω.
Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ definiujemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \int\limits_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

Przestrzeń unitarna

Przykład 2. Rozważmy przestrzeń funkcji zespolonych całkowalnych z kwadratem modułu w obszarze Ω.
Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ definiujemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$(\phi|\psi + \chi)$

Przykład 2. Rozważmy przestrzeń funkcji zespolonych całkowalnych z kwadratem modułu w obszarze Ω.
Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ definiujemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(\phi|\psi + \chi) \quad =$$

Przykład 2. Rozważmy przestrzeń funkcji zespolonych całkowalnych z kwadratem modułu w obszarze Ω.
Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ definiujemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$(\phi|\psi + \chi) \quad = \quad \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \left[\psi(\vec{r}) + \chi(\vec{r})\right] \mathrm{d}^3 r$$

Przykład 2. Rozważmy przestrzeń funkcji zespolonych całkowalnych z kwadratem modułu w obszarze Ω.
Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ definiujemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}(\phi|\psi + \chi) &= \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}) \left[\psi(\vec{r}) + \chi(\vec{r})\right] \mathrm{d}^3 r \\ &= \end{aligned}$$

Przykład 2. Rozważmy przestrzeń funkcji zespolonych całkowalnych z kwadratem modułu w obszarze Ω.
Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ definiujemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}(\phi|\psi+\chi) &= \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\left[\psi(\vec{r})+\chi(\vec{r})\right]\mathrm{d}^3 r \\ &= \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r + \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\chi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r =\end{aligned}$$

Przykład 2. Rozważmy przestrzeń funkcji zespolonych całkowalnych z kwadratem modułu w obszarze Ω.
Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ definiujemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}(\phi|\psi+\chi) &= \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\left[\psi(\vec{r})+\chi(\vec{r})\right]\mathrm{d}^3 r \\ &= \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r + \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\chi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = (\phi|\psi)+(\phi|\chi),\end{aligned}$$

Przykład 2. Rozważmy przestrzeń funkcji zespolonych całkowalnych z kwadratem modułu w obszarze Ω.
Iloczyn skalarny funkcji $\phi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$ definiujemy następująco

$$(\phi|\psi) \equiv \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r.$$

Pokażmy spełnienie warunków 1 – 4.

$$\begin{aligned}(\phi|\psi+\chi) &= \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\left[\psi(\vec{r})+\chi(\vec{r})\right]\mathrm{d}^3 r \\ &= \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r + \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\chi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = (\phi|\psi) + (\phi|\chi),\end{aligned}$$

Przestrzeń unitarna

$$(\phi|a\psi) \quad = \quad \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\,[a\psi(\vec{r})]\,\mathrm{d}^3 r =$$

Przestrzeń unitarna

$$(\phi|a\psi) \quad = \quad \int_\Omega \phi^*(\vec{r})\,[a\psi(\vec{r})]\,\mathrm{d}^3 r = a\int_\Omega \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r =$$

$$(\phi|a\psi) \quad = \quad \int\limits_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\,[a\psi(\vec{r})]\,\mathrm{d}^3 r = a\int\limits_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = a(\phi|\psi),$$

$$(\phi|a\psi) = \int_\Omega \phi^*(\vec{r})\,[a\psi(\vec{r})]\,\mathrm{d}^3r = a\int_\Omega \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3r = a(\phi|\psi),$$

$$(\psi|\phi)$$

$$
\begin{aligned}
(\phi|a\psi) &= \int\limits_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\left[a\psi(\vec{r})\right]\mathrm{d}^3 r = a\int\limits_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = a(\phi|\psi), \\
(\psi|\phi) &=
\end{aligned}
$$

Przestrzeń unitarna

$$
\begin{aligned}
(\phi|a\psi) &= \int\limits_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\,[a\psi(\vec{r})]\,\mathrm{d}^3 r = a\int\limits_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = a(\phi|\psi),\\
(\psi|\phi) &= \int\limits_{\Omega} \psi^*(\vec{r})\phi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r =
\end{aligned}
$$

Przestrzeń unitarna

$$
\begin{aligned}
(\phi|a\psi) &= \int\limits_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\,[a\psi(\vec{r})]\,\mathrm{d}^3 r = a \int\limits_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = a(\phi|\psi), \\
(\psi|\phi) &= \int\limits_{\Omega} \psi^*(\vec{r})\phi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = \int\limits_{\Omega} [\phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})]^*\,\mathrm{d}^3 r \\
&=
\end{aligned}
$$

Przestrzeń unitarna

$$(\phi|a\psi) = \int_\Omega \phi^*(\vec{r})\,[a\psi(\vec{r})]\,\mathrm{d}^3r = a\int_\Omega \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3r = a(\phi|\psi),$$

$$(\psi|\phi) = \int_\Omega \psi^*(\vec{r})\phi(\vec{r})\mathrm{d}^3r = \int_\Omega [\phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})]^*\,\mathrm{d}^3r$$

$$= \left[\int_\Omega \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3r\right]^* =$$

Przestrzeń unitarna

$$
\begin{aligned}
(\phi|a\psi) &= \int\limits_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\,[a\psi(\vec{r})]\,\mathrm{d}^3 r = a\int\limits_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = a(\phi|\psi), \\
(\psi|\phi) &= \int\limits_{\Omega} \psi^*(\vec{r})\phi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = \int\limits_{\Omega} [\phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})]^*\,\mathrm{d}^3 r \\
&= \left[\int\limits_{\Omega} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r\right]^* = (\phi|\psi)^*,
\end{aligned}
$$

Przestrzeń unitarna

$$
\begin{aligned}
(\phi|a\psi) &= \int_\Omega \phi^*(\vec{r})\,[a\psi(\vec{r})]\,\mathrm{d}^3 r = a\int_\Omega \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = a(\phi|\psi),\\
(\psi|\phi) &= \int_\Omega \psi^*(\vec{r})\phi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = \int_\Omega [\phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})]^*\,\mathrm{d}^3 r\\
&= \left[\int_\Omega \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r\right]^* = (\phi|\psi)^*,
\end{aligned}
$$

$(\phi|\phi)$

Przestrzeń unitarna

$$
\begin{aligned}
(\phi|a\psi) &= \int_\Omega \phi^*(\vec{r})\,[a\psi(\vec{r})]\,\mathrm{d}^3r = a\int_\Omega \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3r = a(\phi|\psi), \\
(\psi|\phi) &= \int_\Omega \psi^*(\vec{r})\phi(\vec{r})\mathrm{d}^3r = \int_\Omega [\phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})]^*\,\mathrm{d}^3r \\
&= \left[\int_\Omega \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3r\right]^* = (\phi|\psi)^*, \\
(\phi|\phi) &=
\end{aligned}
$$

Przestrzeń unitarna

$$
\begin{aligned}
(\phi|a\psi) &= \int_\Omega \phi^*(\vec{r})\,[a\psi(\vec{r})]\,\mathrm{d}^3 r = a\int_\Omega \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = a(\phi|\psi), \\
(\psi|\phi) &= \int_\Omega \psi^*(\vec{r})\phi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = \int_\Omega [\phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})]^*\,\mathrm{d}^3 r \\
&= \left[\int_\Omega \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r\right]^* = (\phi|\psi)^*, \\
(\phi|\phi) &= \int_\Omega \phi^*(\vec{r})\phi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r =
\end{aligned}
$$

Przestrzeń unitarna

$$
\begin{aligned}
(\phi|a\psi) &= \int_\Omega \phi^*(\vec{r})\,[a\psi(\vec{r})]\,\mathrm{d}^3 r = a\int_\Omega \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = a(\phi|\psi),\\
(\psi|\phi) &= \int_\Omega \psi^*(\vec{r})\phi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = \int_\Omega [\phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})]^*\,\mathrm{d}^3 r\\
&= \left[\int_\Omega \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r\right]^* = (\phi|\psi)^*,\\
(\phi|\phi) &= \int_\Omega \phi^*(\vec{r})\phi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = \int_\Omega |\phi(\vec{r})|^2\,\mathrm{d}^3 r \quad > 0,
\end{aligned}
$$

Przestrzeń unitarna

$$
\begin{aligned}
(\phi|a\psi) &= \int_\Omega \phi^*(\vec{r})\left[a\psi(\vec{r})\right] \mathrm{d}^3 r = a\int_\Omega \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = a(\phi|\psi), \\
(\psi|\phi) &= \int_\Omega \psi^*(\vec{r})\phi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = \int_\Omega \left[\phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\right]^* \mathrm{d}^3 r \\
&= \left[\int_\Omega \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r\right]^* = (\phi|\psi)^*, \\
(\phi|\phi) &= \int_\Omega \phi^*(\vec{r})\phi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = \int_\Omega |\phi(\vec{r})|^2 \,\mathrm{d}^3 r \quad > 0,
\end{aligned}
$$

$$\text{dla} \quad \phi(\vec{r}) \neq 0$$

Przestrzeń unitarna

$$
\begin{aligned}
(\phi|a\psi) &= \int_\Omega \phi^*(\vec{r})\,[a\psi(\vec{r})]\,\mathrm{d}^3 r = a\int_\Omega \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = a(\phi|\psi),\\
(\psi|\phi) &= \int_\Omega \psi^*(\vec{r})\phi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = \int_\Omega [\phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})]^*\,\mathrm{d}^3 r\\
&= \left[\int_\Omega \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r\right]^* = (\phi|\psi)^*,\\
(\phi|\phi) &= \int_\Omega \phi^*(\vec{r})\phi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = \int_\Omega |\phi(\vec{r})|^2\,\mathrm{d}^3 r \quad > 0,\\
&\qquad \text{dla } \phi(\vec{r}) \neq 0 \text{ na podzbiorze niezerowej miary, cnd.}
\end{aligned}
$$

Przestrzeń unitarna

$$
\begin{aligned}
(\phi|a\psi) &= \int_\Omega \phi^*(\vec{r})\,[a\psi(\vec{r})]\,\mathrm{d}^3 r = a\int_\Omega \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = a(\phi|\psi), \\
(\psi|\phi) &= \int_\Omega \psi^*(\vec{r})\phi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = \int_\Omega [\phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})]^*\,\mathrm{d}^3 r \\
&= \left[\int_\Omega \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r\right]^* = (\phi|\psi)^*, \\
(\phi|\phi) &= \int_\Omega \phi^*(\vec{r})\phi(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = \int_\Omega |\phi(\vec{r})|^2\,\mathrm{d}^3 r \quad > 0,
\end{aligned}
$$

dla $\phi(\vec{r}) \neq 0$ na podzbiorze niezerowej miary, cnd.

Przestrzeń unitarna

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$(x + y|z) \quad =$$

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$(x + y|z) \quad = \quad (z|x + y)^* =$$

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$(x + y|z) \quad = \quad (z|x + y)^* = [(z|x) + (z|y)]^*$$

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$(x + y|z) = (z|x + y)^* = [(z|x) + (z|y)]^*$$
$$=$$

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$
\begin{aligned}
(x+y|z) &= (z|x+y)^* = [(z|x)+(z|y)]^* \\
&= (z|x)^* + (z|y)^* =
\end{aligned}
$$

Przestrzeń unitarna

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$\begin{aligned}(x+y|z) &= (z|x+y)^* = [(z|x)+(z|y)]^* \\ &= (z|x)^* + (z|y)^* = (x|z)+(y|z).\end{aligned}$$

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$\begin{aligned} (x+y|z) &= (z|x+y)^* = [(z|x)+(z|y)]^* \\ &= (z|x)^* + (z|y)^* = (x|z)+(y|z). \end{aligned}$$

Addytywność zachodzi również ze względu na pierwszy argument.

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$
\begin{aligned}
(x+y|z) &= (z|x+y)^* = [(z|x)+(z|y)]^* \\
&= (z|x)^* + (z|y)^* = (x|z)+(y|z).
\end{aligned}
$$

Addytywność zachodzi również ze względu na pierwszy argument.

$$(ax|y) =$$

Przestrzeń unitarna

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$
\begin{aligned}
(x+y|z) &= (z|x+y)^* = [(z|x)+(z|y)]^* \\
&= (z|x)^* + (z|y)^* = (x|z) + (y|z).
\end{aligned}
$$

Addytywność zachodzi również ze względu na pierwszy argument.

$$(ax|y) = (y|ax)^* =$$

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$\begin{aligned}(x+y|z) &= (z|x+y)^* = [(z|x)+(z|y)]^* \\ &= (z|x)^* + (z|y)^* = (x|z)+(y|z).\end{aligned}$$

Addytywność zachodzi również ze względu na pierwszy argument.

$$(ax|y) = (y|ax)^* = [a(y|x)]^* =$$

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$\begin{aligned}(x+y|z) &= (z|x+y)^* = [(z|x)+(z|y)]^* \\ &= (z|x)^* + (z|y)^* = (x|z)+(y|z).\end{aligned}$$

Addytywność zachodzi również ze względu na pierwszy argument.

$$(ax|y) = (y|ax)^* = [a(y|x)]^* = a^*(y|x)^* =$$

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$\begin{aligned}(x+y|z) &= (z|x+y)^* = [(z|x)+(z|y)]^* \\ &= (z|x)^* + (z|y)^* = (x|z)+(y|z).\end{aligned}$$

Addytywność zachodzi również ze względu na pierwszy argument.

$$(ax|y) = (y|ax)^* = [a(y|x)]^* = a^*(y|x)^* = a^*(x|y).$$

Przestrzeń unitarna

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$\begin{aligned} (x+y|z) &= (z|x+y)^* = [(z|x)+(z|y)]^* \\ &= (z|x)^* + (z|y)^* = (x|z)+(y|z). \end{aligned}$$

Addytywność zachodzi również ze względu na pierwszy argument.

$$(ax|y) = (y|ax)^* = [a(y|x)]^* = a^*(y|x)^* = a^*(x|y).$$

Wyciągając czynnik liczbowy z pierwszego argumentu trzeba dokonać jego sprzężenia zespolonego.

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego można udowodnić następujące własności.

$$\begin{aligned}(x+y|z) &= (z|x+y)^* = [(z|x)+(z|y)]^* \\ &= (z|x)^* + (z|y)^* = (x|z)+(y|z).\end{aligned}$$

Addytywność zachodzi również ze względu na pierwszy argument.

$$(ax|y) = (y|ax)^* = [a(y|x)]^* = a^*(y|x)^* = a^*(x|y).$$

Wyciągając czynnik liczbowy z pierwszego argumentu trzeba dokonać jego sprzężenia zespolonego.

Zauważmy, że

$$(x|\theta) \quad = \quad (x|y - y) =$$

Zauważmy, że

$$(x|\theta) \quad = \quad (x|y-y) = (x|y) - (x|y) =$$

Przestrzeń unitarna

Zauważmy, że

$$(x|\theta) \quad = \quad (x|y-y) = (x|y) - (x|y) = 0,$$

Zauważmy, że

$$(x|\theta) \quad = \quad (x|y-y) = (x|y) - (x|y) = 0,$$
$$(\theta|x)$$

Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
(x|\theta) &= (x|y-y) = (x|y) - (x|y) = 0, \\
(\theta|x) &=
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
(x|\theta) &= (x|y-y) = (x|y) - (x|y) = 0, \\
(\theta|x) &= (x|\theta)^* =
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
(x|\theta) &= (x|y-y) = (x|y) - (x|y) = 0, \\
(\theta|x) &= (x|\theta)^* = 0^* =
\end{aligned}
$$

Przestrzeń unitarna

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}(x|\theta) &= (x|y-y) = (x|y) - (x|y) = 0, \\ (\theta|x) &= (x|\theta)^* = 0^* = 0.\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
(x|\theta) &= (x|y-y) = (x|y) - (x|y) = 0, \\
(\theta|x) &= (x|\theta)^* = 0^* = 0.
\end{aligned}
$$

Widzimy, że jeżeli jeden z argumentów jest wektorem zerowym, to iloczyn skalarny jest równy 0.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}(x|\theta) &= (x|y-y) = (x|y)-(x|y) = 0,\\ (\theta|x) &= (x|\theta)^* = 0^* = 0.\end{aligned}$$

Widzimy, że jeżeli jeden z argumentów jest wektorem zerowym, to iloczyn skalarny jest równy 0.
Zdefinujmy funkcję

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} \quad \mathrm{dla} \quad x \in X.$$

Później pokażemy, że spełnia ona aksjomaty definicyjne normy, ale w poniższym dowodzie nierówności Schwartza nie będziemy z tego faktu korzystać.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}(x|\theta) &= (x|y-y) = (x|y) - (x|y) = 0,\\ (\theta|x) &= (x|\theta)^* = 0^* = 0.\end{aligned}$$

Widzimy, że jeżeli jeden z argumentów jest wektorem zerowym, to iloczyn skalarny jest równy 0.
Zdefinujmy funkcję

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} \quad \text{dla} \quad x \in X.$$

Później pokażemy, że spełnia ona aksjomaty definicyjne normy, ale w poniższym dowodzie nierówności Schwartza nie będziemy z tego faktu korzystać.

Nierówność Schwarza. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Nierówność Schwarza. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$

Nierówność Schwarza. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0.

Nierówność Schwarza. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0.
Niech $x \neq \theta$ i $y \neq \theta$, wówczas dla dowolnego $a \in \mathbb{K}$

Nierówność Schwarza. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0. Niech $x \neq \theta$ i $y \neq \theta$, wówczas dla dowolnego $a \in \mathbb{K}$

$$0 \leqslant (x - ay|x - ay)$$

Nierówność Schwarza. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0. Niech $x \neq \theta$ i $y \neq \theta$, wówczas dla dowolnego $a \in \mathbb{K}$

$$0 \leqslant (x - ay|x - ay) = (x|x) - a(x|y) - a^*(y|x) + a^*a(y|y).$$

Nierówność Schwarza. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0. Niech $x \neq \theta$ i $y \neq \theta$, wówczas dla dowolnego $a \in \mathbb{K}$

$$0 \leqslant (x - ay|x - ay) = (x|x) - a(x|y) - a^*(y|x) + a^*a(y|y).$$

Przyjmijmy $a = (x|y)^*/(y|y)$

Nierówność Schwarza. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0. Niech $x \neq \theta$ i $y \neq \theta$, wówczas dla dowolnego $a \in \mathbb{K}$

$$0 \leqslant (x - ay|x - ay) = (x|x) - a(x|y) - a^*(y|x) + a^*a(y|y).$$

Przyjmijmy $a = (x|y)^*/(y|y) \quad \Rightarrow \quad a^* = (x|y)/(y|y)$

Przestrzeń unitarna

Nierówność Schwarza. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0. Niech $x \neq \theta$ i $y \neq \theta$, wówczas dla dowolnego $a \in \mathbb{K}$

$$0 \leqslant (x - ay|x - ay) = (x|x) - a(x|y) - a^*(y|x) + a^*a(y|y).$$

Przyjmijmy $a = (x|y)^*/(y|y) \quad \Rightarrow \quad a^* = (x|y)/(y|y)$

$$0 \quad \leqslant \quad (x|x) - \frac{(x|y)^*(x|y)}{(y|y)} - \frac{(x|y)(y|x)}{(y|y)} + \frac{(x|y)(x|y)^*(y|y)}{(y|y)^2}$$

Nierówność Schwarza. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0.
Niech $x \neq \theta$ i $y \neq \theta$, wówczas dla dowolnego $a \in \mathbb{K}$

$$0 \leqslant (x - ay|x - ay) = (x|x) - a(x|y) - a^*(y|x) + a^*a(y|y).$$

Przyjmijmy $a = (x|y)^*/(y|y) \quad \Rightarrow \quad a^* = (x|y)/(y|y)$

$$0 \quad \leqslant \quad (x|x) - \frac{(x|y)^*(x|y)}{(y|y)} - \frac{(x|y)(y|x)}{(y|y)} + \frac{(x|y)(x|y)^*(y|y)}{(y|y)^2}$$

$$=$$

Przestrzeń unitarna

Nierówność Schwarza. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0.
Niech $x \neq \theta$ i $y \neq \theta$, wówczas dla dowolnego $a \in \mathbb{K}$

$$0 \leqslant (x - ay|x - ay) = (x|x) - a(x|y) - a^*(y|x) + a^* a(y|y).$$

Przyjmijmy $a = (x|y)^*/(y|y) \quad \Rightarrow \quad a^* = (x|y)/(y|y)$

$$0 \leqslant (x|x) - \frac{(x|y)^*(x|y)}{(y|y)} - \frac{(x|y)(y|x)}{(y|y)} + \frac{(x|y)(x|y)^*(y|y)}{(y|y)^2}$$

$$= \|x\|^2 - \frac{|(x|y)|^2}{\|y\|^2}$$

Nierówność Schwarza. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0. Niech $x \neq \theta$ i $y \neq \theta$, wówczas dla dowolnego $a \in \mathbb{K}$

$$0 \leqslant (x - ay|x - ay) = (x|x) - a(x|y) - a^*(y|x) + a^*a(y|y).$$

Przyjmijmy $a = (x|y)^*/(y|y) \quad \Rightarrow \quad a^* = (x|y)/(y|y)$

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leqslant \quad (x|x) - \frac{(x|y)^*(x|y)}{(y|y)} - \frac{(x|y)(y|x)}{(y|y)} + \frac{(x|y)(x|y)^*(y|y)}{(y|y)^2} \\ &= \quad \|x\|^2 - \frac{|(x|y)|^2}{\|y\|^2} \quad \Rightarrow \quad |(x|y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|. \end{aligned}$$

Nierówność Schwarza. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$|(x|y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Dowód. Dla $x = \theta$ lub $y = \theta$ lewa i prawa strona są równe 0. Niech $x \neq \theta$ i $y \neq \theta$, wówczas dla dowolnego $a \in \mathbb{K}$

$$0 \leqslant (x - ay|x - ay) = (x|x) - a(x|y) - a^*(y|x) + a^*a(y|y).$$

Przyjmijmy $a = (x|y)^*/(y|y) \quad \Rightarrow \quad a^* = (x|y)/(y|y)$

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leqslant \quad (x|x) - \frac{(x|y)^*(x|y)}{(y|y)} - \frac{(x|y)(y|x)}{(y|y)} + \frac{(x|y)(x|y)^*(y|y)}{(y|y)^2} \\ &= \quad \|x\|^2 - \frac{|(x|y)|^2}{\|y\|^2} \quad \Rightarrow \quad |(x|y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|. \end{aligned}$$

Z powyższego dowodu wynika, że w nierówności Schwarza zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy wektory x i y są liniowo zależne, gdyż równość $(x - ay|x - ay) = 0$ zachodzi tylko jeśli $x - ay = \theta$, a więc $x = ay$.

Zadanie. Pokazać, że funkcja określona wzorem

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} \quad \text{dla} \quad x \in X$$

spełnia warunki normy.

Z powyższego dowodu wynika, że w nierówności Schwarza zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy wektory x i y są liniowo zależne, gdyż równość $(x - ay|x - ay) = 0$ zachodzi tylko jeśli $x - ay = \theta$, a więc $x = ay$.

Zadanie. Pokazać, że funkcja określona wzorem

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} \quad \mathrm{dla} \quad x \in X$$

spełnia warunki normy.

Iloczyn skalarny w przestrzeni unitarnej X jest odwzorowaniem ciągłym.

Z powyższego dowodu wynika, że w nierówności Schwarza zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy wektory x i y są liniowo zależne, gdyż równość $(x - ay|x - ay) = 0$ zachodzi tylko jeśli $x - ay = \theta$, a więc $x = ay$.

Zadanie. Pokazać, że funkcja określona wzorem

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} \quad \mathrm{dla} \quad x \in X$$

spełnia warunki normy.

Iloczyn skalarny w przestrzeni unitarnej X jest odwzorowaniem ciągłym.

Dowód. $(\ |\ ) : \quad X \times X \to \mathbb{K}$ jest odwzorowaniem ciąglym jeśli z $x_n \to x \in X$ i $y_n \to y \in X$ wynika $(x_n|y_n) \to (x|y)$.

Przestrzeń unitarna

Z powyższego dowodu wynika, że w nierówności Schwarza zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy wektory x i y są liniowo zależne, gdyż równość $(x - ay|x - ay) = 0$ zachodzi tylko jeśli $x - ay = \theta$, a więc $x = ay$.

Zadanie. Pokazać, że funkcja określona wzorem

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} \quad \mathrm{dla} \quad x \in X$$

spełnia warunki normy.

Iloczyn skalarny w przestrzeni unitarnej X jest odwzorowaniem ciągłym.

Dowód. $(\ |\ ) : \quad X \times X \to \mathbb{K}$ jest odwzorowaniem ciąglym jeśli z $x_n \to x \in X$ i $y_n \to y \in X$ wynika $(x_n|y_n) \to (x|y)$.

Przestrzeń unitarna

$$|(x_n|y_n) - (x|y)| = |(x_n|y_n) - (x|y_n) + (x|y_n) - (x|y)|$$
$$= |(x_n - x|y_n) + (x|y_n - y)| \leqslant |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n - y)|$$

Przestrzeń unitarna

$$
\begin{aligned}
|(x_n|y_n) - (x|y)| &= |(x_n|y_n) - (x|y_n) + (x|y_n) - (x|y)| \\
&= |(x_n - x|y_n) + (x|y_n - y)| \leqslant |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n - y)| \\
&\leqslant
\end{aligned}
$$

Przestrzeń unitarna

$$\begin{aligned} |(x_n|y_n) - (x|y)| &= |(x_n|y_n) - (x|y_n) + (x|y_n) - (x|y)| \\ &= |(x_n - x|y_n) + (x|y_n - y)| \leqslant |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n - y)| \\ &\leqslant \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \to 0, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|(x_n|y_n)-(x|y)| &= |(x_n|y_n)-(x|y_n)+(x|y_n)-(x|y)| \\
&= |(x_n-x|y_n)+(x|y_n-y)| \leqslant |(x_n-x|y_n)|+|(x|y_n-y)| \\
&\leqslant \|x_n-x\|\cdot\|y_n\|+\|x\|\cdot\|y_n-y\| \to 0,
\end{aligned}
$$

gdzie skorzystaliśmy z nierówności Schwartza

Przestrzeń unitarna

$$\begin{aligned} |(x_n|y_n) - (x|y)| &= |(x_n|y_n) - (x|y_n) + (x|y_n) - (x|y)| \\ &= |(x_n - x|y_n) + (x|y_n - y)| \leqslant |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n - y)| \\ &\leqslant \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \to 0, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z nierówności Schwartza i z tego, że ciąg $\{y_n\}$ jako ciąg zbieżny jest ograniczony, w przeciwnym razie bowiem iloczyn $\|x_n - x\| \cdot \|y_n\|$ nie musiałby dążyć do 0.

Przestrzeń unitarna

$$
\begin{aligned}
|(x_n|y_n)-(x|y)| &= |(x_n|y_n)-(x|y_n)+(x|y_n)-(x|y)| \\
&= |(x_n-x|y_n)+(x|y_n-y)| \leqslant |(x_n-x|y_n)|+|(x|y_n-y)| \\
&\leqslant \|x_n-x\|\cdot\|y_n\|+\|x\|\cdot\|y_n-y\| \to 0,
\end{aligned}
$$

gdzie skorzystaliśmy z nierówności Schwartza i z tego, że ciąg $\{y_n\}$ jako ciąg zbieżny jest ograniczony, w przeciwnym razie bowiem iloczyn $\|x_n-x\|\cdot\|y_n\|$ nie musiałby dążyć do 0.

Wektory $x, y \in X$ są ortogonalne jeśli $(x|y)=0$.

$$
\begin{aligned}
|(x_n|y_n)-(x|y)| &= |(x_n|y_n)-(x|y_n)+(x|y_n)-(x|y)| \\
&= |(x_n-x|y_n)+(x|y_n-y)| \leqslant |(x_n-x|y_n)|+|(x|y_n-y)| \\
&\leqslant \|x_n-x\|\cdot\|y_n\|+\|x\|\cdot\|y_n-y\| \to 0,
\end{aligned}
$$

gdzie skorzystaliśmy z nierówności Schwartza i z tego, że ciąg $\{y_n\}$ jako ciąg zbieżny jest ograniczony, w przeciwnym razie bowiem iloczyn $\|x_n-x\|\cdot\|y_n\|$ nie musiałby dążyć do 0.

Wektory $x, y \in X$ są ortogonalne jeśli $(x|y)=0$.

Niepusty podzbiór $A \subset X$ nie zawierający wektora zerowego, którego dowolne dwa elementy są ortogonalne nazywamy

$$
\begin{aligned}
|(x_n|y_n) - (x|y)| &= |(x_n|y_n) - (x|y_n) + (x|y_n) - (x|y)| \\
&= |(x_n - x|y_n) + (x|y_n - y)| \leqslant |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n - y)| \\
&\leqslant \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \to 0,
\end{aligned}
$$

gdzie skorzystaliśmy z nierówności Schwartza i z tego, że ciąg $\{y_n\}$ jako ciąg zbieżny jest ograniczony, w przeciwnym razie bowiem iloczyn $\|x_n - x\| \cdot \|y_n\|$ nie musiałby dążyć do 0.

Wektory $x, y \in X$ są ortogonalne jeśli $(x|y) = 0$.

Niepusty podzbiór $A \subset X$ nie zawierający wektora zerowego, którego dowolne dwa elementy są ortogonalne nazywamy układem ortogonalnym wektorów.

Przestrzeń unitarna

$$
\begin{aligned}
|(x_n|y_n)-(x|y)| &= |(x_n|y_n)-(x|y_n)+(x|y_n)-(x|y)| \\
&= |(x_n-x|y_n)+(x|y_n-y)| \leqslant |(x_n-x|y_n)|+|(x|y_n-y)| \\
&\leqslant \|x_n-x\|\cdot\|y_n\|+\|x\|\cdot\|y_n-y\| \to 0,
\end{aligned}
$$

gdzie skorzystaliśmy z nierówności Schwartza i z tego, że ciąg $\{y_n\}$ jako ciąg zbieżny jest ograniczony, w przeciwnym razie bowiem iloczyn $\|x_n-x\|\cdot\|y_n\|$ nie musiałby dążyć do 0.

Wektory $x, y \in X$ są ortogonalne jeśli $(x|y)=0$.

Niepusty podzbiór $A \subset X$ nie zawierający wektora zerowego, którego dowolne dwa elementy są ortogonalne nazywamy układem ortogonalnym wektorów. Jeżeli prócz tego $\|x\|=1$ dla wszystkich $x \in A$,

$$
\begin{aligned}
|(x_n|y_n)-(x|y)| &= |(x_n|y_n)-(x|y_n)+(x|y_n)-(x|y)| \\
&= |(x_n-x|y_n)+(x|y_n-y)| \leqslant |(x_n-x|y_n)|+|(x|y_n-y)| \\
&\leqslant \|x_n-x\|\cdot\|y_n\|+\|x\|\cdot\|y_n-y\| \to 0,
\end{aligned}
$$

gdzie skorzystaliśmy z nierówności Schwartza i z tego, że ciąg $\{y_n\}$ jako ciąg zbieżny jest ograniczony, w przeciwnym razie bowiem iloczyn $\|x_n-x\|\cdot\|y_n\|$ nie musiałby dążyć do 0.

Wektory $x, y \in X$ są ortogonalne jeśli $(x|y)=0$.

Niepusty podzbiór $A \subset X$ nie zawierający wektora zerowego, którego dowolne dwa elementy są ortogonalne nazywamy układem ortogonalnym wektorów. Jeżeli prócz tego $\|x\|=1$ dla wszystkich $x \in A$, to A nazywamy układem ortonormalnym.

$$\begin{aligned} |(x_n|y_n) - (x|y)| &= |(x_n|y_n) - (x|y_n) + (x|y_n) - (x|y)| \\ &= |(x_n - x|y_n) + (x|y_n - y)| \leqslant |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n - y)| \\ &\leqslant \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \to 0, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z nierówności Schwartza i z tego, że ciąg $\{y_n\}$ jako ciąg zbieżny jest ograniczony, w przeciwnym razie bowiem iloczyn $\|x_n - x\| \cdot \|y_n\|$ nie musiałby dążyć do 0.

Wektory $x, y \in X$ są ortogonalne jeśli $(x|y) = 0$.

Niepusty podzbiór $A \subset X$ nie zawierający wektora zerowego, którego dowolne dwa elementy są ortogonalne nazywamy układem ortogonalnym wektorów. Jeżeli prócz tego $\|x\| = 1$ dla wszystkich $x \in A$, to A nazywamy układem ortonormalnym.

Przestrzeń unitarna

Przykłady.

- Wektory

$$e_1 = (1, 0, ..., 0)\,, \quad e_2 = (0, 1, ..., 0)\,, ..., \quad e_n = (0, 0, ..., 1)$$

  tworzą układ ortonormalny w $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$.

- Funkcje

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\cos 3t}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin 3t}{\sqrt{\pi}}, ...$$

  tworzą układ ortonormalny w przestrzeni $L^2(-\pi, \pi)$ funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a z kwadratem w przedziale $(-\pi, \pi)$.

Zadanie. Pokazać, że tak w istocie jest.

Przykłady.

- Wektory

$$e_1 = (1, 0, ..., 0)\,, \quad e_2 = (0, 1, ..., 0)\,, ..., \quad e_n = (0, 0, ..., 1)$$

  tworzą układ ortonormalny w $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$.

- Funkcje

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \; \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \; \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \; \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \; \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \; \frac{\cos 3t}{\sqrt{\pi}}, \; \frac{\sin 3t}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

  tworzą układ ortonormalny w przestrzeni $L^2(-\pi, \pi)$ funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a z kwadratem w przedziale $(-\pi, \pi)$.

Zadanie. Pokazać, że tak w istocie jest.

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X. Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w szereg Fouriera

Przestrzeń unitarna

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X. Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w szereg Fouriera

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n,$$

Przestrzeń unitarna

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X. Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w szereg Fouriera

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \qquad \text{gdzie} \quad c_n = \frac{(\varphi_n|\varphi)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X. Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w szereg Fouriera

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \qquad \text{gdzie} \quad c_n = \frac{(\varphi_n|\varphi)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Rzeczywiście, obliczmy

$(\varphi_i|\varphi) =$

Przestrzeń unitarna

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X. Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w szereg Fouriera

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \qquad \text{gdzie} \quad c_n = \frac{(\varphi_n|\varphi)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$(\varphi_i|\varphi) = (\varphi_i| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n) =$$

Przestrzeń unitarna

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X. Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w szereg Fouriera

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \qquad \text{gdzie} \quad c_n = \frac{(\varphi_n|\varphi)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$(\varphi_i|\varphi) = (\varphi_i|\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\varphi_i|\varphi_n) =$$

Przestrzeń unitarna

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X. Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w szereg Fouriera

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \qquad \text{gdzie} \quad c_n = \frac{(\varphi_n|\varphi)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$(\varphi_i|\varphi) = (\varphi_i|\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\varphi_i|\varphi_n) = c_i (\varphi_i|\varphi_i) =$$

Przestrzeń unitarna

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X. Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w szereg Fouriera

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \qquad \text{gdzie} \quad c_n = \frac{(\varphi_n|\varphi)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$(\varphi_i|\varphi) = (\varphi_i| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\varphi_i|\varphi_n) = c_i (\varphi_i|\varphi_i) = c_i \|\varphi_i\|^2.$$

Przestrzeń unitarna

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X. Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w szereg Fouriera

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \qquad \text{gdzie} \quad c_n = \frac{(\varphi_n|\varphi)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$(\varphi_i|\varphi) = (\varphi_i| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\varphi_i|\varphi_n\right) = c_i \left(\varphi_i|\varphi_i\right) = c_i \|\varphi_i\|^2.$$

Dla $\{\varphi_n\}$ będącego układem ortonormalnym

$$\|\varphi_n\| = 1$$

Przestrzeń unitarna

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X. Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w szereg Fouriera

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \qquad \text{gdzie} \quad c_n = \frac{(\varphi_n|\varphi)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$(\varphi_i|\varphi) = (\varphi_i| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\varphi_i|\varphi_n) = c_i (\varphi_i|\varphi_i) = c_i \|\varphi_i\|^2.$$

Dla $\{\varphi_n\}$ będącego układem ortonormalnym

$$\|\varphi_n\| = 1 \quad \Rightarrow \quad c_n = (\varphi_n|\varphi).$$

Przestrzeń unitarna

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X. Dowolny element $\varphi \in X$ możemy rozwinąć w szereg Fouriera

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \qquad \text{gdzie} \quad c_n = \frac{(\varphi_n|\varphi)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$(\varphi_i|\varphi) = (\varphi_i| \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\varphi_i|\varphi_n\right) = c_i \left(\varphi_i|\varphi_i\right) = c_i\|\varphi_i\|^2.$$

Dla $\{\varphi_n\}$ będącego układem ortonormalnym

$$\|\varphi_n\| = 1 \quad \Rightarrow \quad c_n = (\varphi_n|\varphi).$$

Przestrzeń unitarna

Rozwinięcie w szereg Fouriera jest analogiem rozwinięcia wektora w bazie ortonormalnej w przestrzeni skończenie wymiarowej.
Weźmy np. $x \in \mathbb{R}^n$, albo $x \in \mathbb{C}^n$.

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n,$$

gdzie

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1).$$

Przestrzeń unitarna

Rozwinięcie w szereg Fouriera jest analogiem rozwinięcia wektora w bazie ortonormalnej w przestrzeni skończenie wymiarowej. Weźmy np. $x \in \mathbb{R}^n$, albo $x \in \mathbb{C}^n$.

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n,$$

gdzie

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1).$$

Przestrzeń unitarną z iloczynem skalarnym $(\ |\ )$ nazywamy przestrzenią Hilberta, gdy jest ona zupełna przy odległości $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y|x - y)}$.

Przestrzeń unitarna

Rozwinięcie w szereg Fouriera jest analogiem rozwinięcia wektora w bazie ortonormalnej w przestrzeni skończenie wymiarowej. Weźmy np. $x \in \mathbb{R}^n$, albo $x \in \mathbb{C}^n$.

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n,$$

gdzie

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1).$$

Przestrzeń unitarną z iloczynem skalarnym $(\ |\ )$ nazywamy przestrzenią Hilberta, gdy jest ona zupełna przy odległości $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y|x - y)}$.