Spinory

Wykład 28

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

$SU(2)$ i grupa obrotów

Dowolny obrót przestrzenny w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ma postać

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (R) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{lub} \qquad \vec{r}' = R\vec{r},$$

gdzie R jest macierzą obrotu.

Ponieważ przy obrotach odległość od początku układu współrzędnych nie ulega zmianie, to

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \text{lub} \qquad \vec{r}'^T \vec{r}' = \vec{r}^T \vec{r},$$

gdzie T oznacza transpozycję, to

$$\vec{r}^T R^T R \vec{r} = \vec{r}^T \vec{r} \quad \Leftrightarrow R^T R = 1.$$

tzn. R jest macierzą ortogonalną 3×3.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Dowolny obrót przestrzenny w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ma postać

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (R) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{lub} \qquad \vec{r}' = R\vec{r},$$

gdzie R jest macierzą obrotu.
Ponieważ przy obrotach odległość od początku układu współrzędnych nie ulega zmianie, to

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \text{lub} \qquad \vec{r}'^T \vec{r}' = \vec{r}^T \vec{r},$$

gdzie T oznacza transpozycję, to

$$\vec{r}^T R^T R \vec{r} = \vec{r}^T \vec{r} \quad \Leftrightarrow R^T R = 1.$$

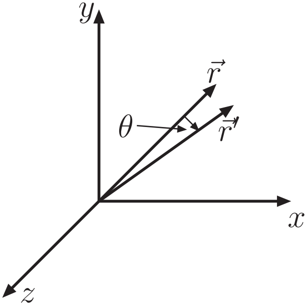
tzn. R jest macierzą ortogonalną 3×3.

Macierze ortogonalne tworzą grupę. Jeżeli R_1 i R_2 są macierzami ortogonalnymi, to $R_1 R_2$ jest macierzą ortogonalną:

$$(R_1 R_2)^T R_1 R_2 = R_2^T R_1^T R_1 R_2 = 1.$$

Tę grupę oznaczamy przez $O(3)$.

Zadanie. Pokazać spełnienie wszystkich postulatów grupowych.



Przykład. Aktywny obrót, tzn. obracamy wektor $\vec{r}$ a osie układu współrzędnych pozostają niezmienione, o kąt θ względem osi Oz.

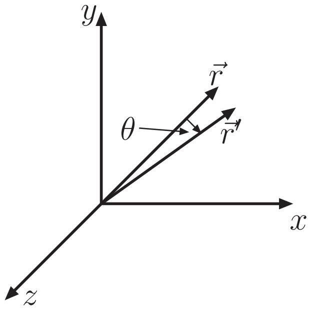
Macierze obrotów w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ tworzą grupę $O(n)$.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Macierze ortogonalne tworzą grupę. Jeżeli R_1 i R_2 są macierzami ortogonalnymi, to $R_1 R_2$ jest macierzą ortogonalną:

$$(R_1 R_2)^T R_1 R_2 = R_2^T R_1^T R_1 R_2 = 1.$$

Tę grupę oznaczamy przez $O(3)$.
Zadanie. Pokazać spełnienie wszystkich postulatów grupowych.



Przykład. Aktywny obrót, tzn. obracamy wektor $\vec{r}$ a osie układu współrzędnych pozostają niezmienione, o kąt θ względem osi Oz.

Macierze obrotów w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ tworzą grupę $O(n)$.

Przy aktywnym obrocie o kąt θ względem osi Oz zachodzi związek

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

gdzie macierz obrotu ma postać

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analogicznie macierze obrotu wokół osi Ox i Oy mają postać

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad R_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Przy aktywnym obrocie o kąt θ względem osi Oz zachodzi związek

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

gdzie macierz obrotu ma postać

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analogicznie macierze obrotu wokół osi Ox i Oy mają postać

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad R_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Zauważmy, że te macierze nie komutują ze sobą, np.

$$R_x(\varphi)R_z(\theta) \neq R_z(\theta)R_x(\varphi),$$

co oznacza, że grupa obrotów $O(3)$ jest grupą nieabelową.

$O(3)$ jest grupą Liego, tzn. grupą ciągłą z nieskończoną liczbą elementów, w której wartości parametrów, w tym przypadku kątów obrotu, tworzą zbiór kontinuum.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Zauważmy, że te macierze nie komutują ze sobą, np.

$$R_x(\varphi)R_z(\theta) \neq R_z(\theta)R_x(\varphi),$$

co oznacza, że grupa obrotów $O(3)$ jest grupą nieabelową.
$O(3)$ jest grupą Liego, tzn. grupą ciągłą z nieskończoną liczbą elementów, w której wartości parametrów, w tym przypadku kątów obrotu, tworzą zbiór kontinuum.
Łatwo się przekonać, że dowolny obrót w $\mathbb{R}^3$ jest zadany przez 3 kąty, gdyż macierz R ma 9 elementów, a warunek $R^T R = 1$ nakłada na nie 6 niezależnych warunków. Jako te parametry można wybrać np. kąty Eulera.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Zauważmy, że te macierze nie komutują ze sobą, np.

$$R_x(\varphi)R_z(\theta) \neq R_z(\theta)R_x(\varphi),$$

co oznacza, że grupa obrotów $O(3)$ jest grupą nieabelową.
$O(3)$ jest grupą Liego, tzn. grupą ciągłą z nieskończoną liczbą elementów, w której wartości parametrów, w tym przypadku kątów obrotu, tworzą zbiór kontinuum.
Łatwo się przekonać, że dowolny obrót w $\mathbb{R}^3$ jest zadany przez 3 kąty, gdyż macierz R ma 9 elementów, a warunek $R^T R = 1$ nakłada na nie 6 niezależnych warunków. Jako te parametry można wybrać np. kąty Eulera.
3 parametrom odpowiadają 3 generatory określone równaniami

$$J_z = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}R_z(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\bigg|_{\theta=0} = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Zauważmy, że te macierze nie komutują ze sobą, np.

$$R_x(\varphi)R_z(\theta) \neq R_z(\theta)R_x(\varphi),$$

co oznacza, że grupa obrotów $O(3)$ jest grupą nieabelową.
$O(3)$ jest grupą Liego, tzn. grupą ciągłą z nieskończoną liczbą elementów, w której wartości parametrów, w tym przypadku kątów obrotu, tworzą zbiór kontinuum.
Łatwo się przekonać, że dowolny obrót w $\mathbb{R}^3$ jest zadany przez 3 kąty, gdyż macierz R ma 9 elementów, a warunek $R^T R = 1$ nakłada na nie 6 niezależnych warunków. Jako te parametry można wybrać np. kąty Eulera.
3 parametrom odpowiadają 3 generatory określone równaniami

$$J_z = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}R_z(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\bigg|_{\theta=0} = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\begin{array}{ccc} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\Bigg|_{\theta=0} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

$$J_x = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}R_x(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\bigg|_{\varphi=0} = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{array}\right)\Bigg|_{\varphi=0} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{array}\right),$$

$$J_y = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}R_y(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\bigg|_{\psi=0} = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi}\left(\begin{array}{ccc} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{array}\right)\Bigg|_{\psi=0} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Generatory J_x, J_y, i J_z są hermitowskie, a obroty infinitezymalne zadane są przez związki

$$R_z(\delta\theta) = 1 + iJ_z\delta\theta, \quad R_x(\delta\varphi) = 1 + iJ_x\delta\varphi, \quad R_y(\delta\psi) = 1 + iJ_y\delta\psi.$$

Obliczmy komutator

$$[J_x, J_y] = J_xJ_y - J_yJ_x = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

$$J_x = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}R_x(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\bigg|_{\varphi=0} = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\Bigg|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_y = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}R_y(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\bigg|_{\psi=0} = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi}\begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}\Bigg|_{\psi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Generatory J_x, J_y, i J_z są hermitowskie, a obroty infinitezymalne zadane są przez związki

$$R_z(\delta\theta) = 1 + iJ_z\delta\theta, \quad R_x(\delta\varphi) = 1 + iJ_x\delta\varphi, \quad R_y(\delta\psi) = 1 + iJ_y\delta\psi.$$

Obliczmy komutator

$$[J_x, J_y] = J_xJ_y - J_yJ_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Zatem

$$[J_x, J_y] = J_x J_y - J_y J_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iJ_z.$$

Zadanie. Pokazać, że związki komutacyjne dla generatorów obrotów mają postać

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k,$$

gdzie utożsamiliśmy $J_1 = J_x$, $J_2 = J_y$ i $J_3 = J_z$.

Zatem

$$[J_x, J_y] = J_x J_y - J_y J_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iJ_z.$$

Zadanie. Pokazać, że związki komutacyjne dla generatorów obrotów mają postać

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k,$$

gdzie utożsamiliśmy $J_1 = J_x$, $J_2 = J_y$ i $J_3 = J_z$.

Zauważmy, że gdyby w definicji generatorów J_x, J_y i J_z wprowadzić czynnik $\hbar$, to otrzymalibyśmy reguły komutacji dla operatorów momentu pędu

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k.$$

Tak więc operatory momentu pędu są generatorami obrotów w $\mathbb{R}^3$.

Zatem

$$[J_x, J_y] = J_x J_y - J_y J_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iJ_z.$$

Zadanie. Pokazać, że związki komutacyjne dla generatorów obrotów mają postać

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k,$$

gdzie utożsamiliśmy $J_1 = J_x$, $J_2 = J_y$ i $J_3 = J_z$.
Zauważmy, że gdyby w definicji generatorów J_x, J_y i J_z wprowadzić czynnik $\hbar$, to otrzymalibyśmy reguły komutacji dla operatorów momentu pędu

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k.$$

Tak więc operatory momentu pędu są generatorami obrotów w $\mathbb{R}^3$.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Powyższe związki komutacyjne pozwalają wyznaczyć komutator dowolnych dwóch operatorów obrotów infinitezymalnych.

Macierze obrotów skończonych otrzymamy składając obroty infinitezymalne, np. obrót wokół osi Oz o kąt $\theta = N\delta\theta$, gdzie $N \to \infty$ otrzymamy następująco

$$R_z(\theta) = [R_z(\delta\theta)]^N = \left(1 + iJ_z \frac{\theta}{N}\right)^N \to e^{iJ_z\theta}.$$

Powyższe związki komutacyjne pozwalają wyznaczyć komutator dowolnych dwóch operatorów obrotów infinitezymalnych. Macierze obrotów skończonych otrzymamy składając obroty infinitezymalne, np. obrót wokół osi Oz o kąt $\theta = N\delta\theta$, gdzie $N \to \infty$ otrzymamy następująco

$$R_z(\theta) = [R_z(\delta\theta)]^N = \left(1 + iJ_z\frac{\theta}{N}\right)^N \to e^{iJ_z\theta}.$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$e^{iJ_z\theta} = 1 + iJ_z\theta - J_z^2\frac{\theta^2}{2!} - iJ_z^3\frac{\theta^3}{3!} + ... = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+\theta\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta^2}{2!}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta^3}{3!}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + ...$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Powyższe związki komutacyjne pozwalają wyznaczyć komutator dowolnych dwóch operatorów obrotów infinitezymalnych. Macierze obrotów skończonych otrzymamy składając obroty infinitezymalne, np. obrót wokół osi Oz o kąt $\theta = N\delta\theta$, gdzie $N \to \infty$ otrzymamy następująco

$$R_z(\theta) = [R_z(\delta\theta)]^N = \left(1 + iJ_z \frac{\theta}{N}\right)^N \to e^{iJ_z\theta}.$$

Rzeczywiście, obliczmy

$$e^{iJ_z\theta} = 1 + iJ_z\theta - J_z^2\frac{\theta^2}{2!} - iJ_z^3\frac{\theta^3}{3!} + \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta^2}{2!} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

a zatem

$$e^{iJ_z\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_z(\theta).$$

Macierz obrotu skończonego wokół osi $\vec{n}$ o kąt θ ma oczywiście postać

$$R_{\vec{n}}(\theta) = e^{i\vec{J}\cdot\vec{\theta}} = e^{i\vec{J}\cdot\vec{n}\theta},$$

gdzie $\vec{\theta} = \vec{n}\theta$, $|\vec{n}| = 1$.

a zatem

$$e^{iJ_z\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_z(\theta).$$

Macierz obrotu skończonego wokół osi $\vec{n}$ o kąt θ ma oczywiście postać

$$R_{\vec{n}}(\theta) = e^{i\vec{J}\cdot\vec{\theta}} = e^{i\vec{J}\cdot\vec{n}\theta},$$

gdzie $\vec{\theta} = \vec{n}\theta$, $|\vec{n}| = 1$.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Rozważmy teraz grupę $SU(2)$, czyli grupę macierzy unitarnych 2×2 z jednostkowym wyznacznikiem

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1, \qquad \det U = 1.$$

Załóżmy, że

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, wtedy warunki $U^\dagger = U^{-1}$ i $\det U = 1$ będą spełnione jeśli

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

skąd otrzymujemy dwa niezależne warunki $a^* = d$, $b^* = -c$.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Rozważmy teraz grupę $SU(2)$, czyli grupę macierzy unitarnych 2×2 z jednostkowym wyznacznikiem

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1, \qquad \det U = 1.$$

Załóżmy, że

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, wtedy warunki $U^\dagger = U^{-1}$ i $\det U = 1$ będą spełnione jeśli

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

skąd otrzymujemy dwa niezależne warunki $a^* = d$, $b^* = -c$.

Wtedy

$$\det U = ad - bc = aa^* + bb^* = |a|^2 + |b|^2,$$

gdzie uwzględniliśmy związki $d = a^*$ i $c = -b^*$, a macierz U przyjmuje postać

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Macierz U traktujemy jako macierz odwzorowania w przestrzeni spinorów

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{gdzie} \qquad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C},$$

zdefiniowanego następująco

$$\xi \to U\xi, \qquad \xi^\dagger \to \xi^\dagger U^\dagger, \qquad \text{gdzie} \qquad \xi^\dagger = (\xi_1^*, \xi_2^*).$$

Wtedy

$$\det U = ad - bc = aa^* + bb^* = |a|^2 + |b|^2,$$

gdzie uwzględniliśmy związki $d = a^*$ i $c = -b^*$, a macierz U przyjmuje postać

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Macierz U traktujemy jako macierz odwzorowania w przestrzeni spinorów

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{gdzie} \qquad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C},$$

zdefiniowanego następująco

$$\xi \to U\xi, \qquad \xi^\dagger \to \xi^\dagger U^\dagger, \qquad \text{gdzie} \qquad \xi^\dagger = (\xi_1^*, \xi_2^*).$$

Oczywiście $\xi^\dagger \xi \to \xi^\dagger U^\dagger U \xi = \xi^\dagger \xi = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2$,

Wtedy

$$\det U = ad - bc = aa^* + bb^* = |a|^2 + |b|^2,$$

gdzie uwzględniliśmy związki $d = a^*$ i $c = -b^*$, a macierz U przyjmuje postać

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Macierz U traktujemy jako macierz odwzorowania w przestrzeni spinorów

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{gdzie} \qquad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C},$$

zdefiniowanego następująco

$$\xi \to U\xi, \qquad \xi^\dagger \to \xi^\dagger U^\dagger, \qquad \text{gdzie} \qquad \xi^\dagger = (\xi_1^*, \xi_2^*).$$

Oczywiście $\xi^\dagger\xi \to \xi^\dagger U^\dagger U\xi = \xi^\dagger\xi = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2$,

a więc wyrażenie $\xi^\dagger \xi$ jest niezmiennikiem tak zdefiniowanego odwzorowania.

Jednocześnie dla iloczynu zewnętrznego mamy

$$\xi \otimes \xi^\dagger = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \otimes (\xi_1^*, \xi_2^*) = \begin{pmatrix} |\xi_1|^2 & \xi_1 \xi_2^* \\ \xi_2 \xi_1^* & |\xi_2|^2 \end{pmatrix} \to U\xi \otimes \xi^\dagger U^\dagger.$$

a więc wyrażenie $\xi^\dagger \xi$ jest niezmiennikiem tak zdefiniowanego odwzorowania.

Jednocześnie dla iloczynu zewnętrznego mamy

$$\xi \otimes \xi^\dagger = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \otimes (\xi_1^*, \xi_2^*) = \begin{pmatrix} |\xi_1|^2 & \xi_1 \xi_2^* \\ \xi_2 \xi_1^* & |\xi_2|^2 \end{pmatrix} \to U\xi \otimes \xi^\dagger U^\dagger.$$

Zauważmy, że macierz $\xi \otimes \xi^\dagger$ jest hermitowska.

a więc wyrażenie $\xi^\dagger \xi$ jest niezmiennikiem tak zdefiniowanego odwzorowania.
Jednocześnie dla iloczynu zewnętrznego mamy

$$\xi \otimes \xi^\dagger = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \otimes (\xi_1^*, \xi_2^*) = \begin{pmatrix} |\xi_1|^2 & \xi_1 \xi_2^* \\ \xi_2 \xi_1^* & |\xi_2|^2 \end{pmatrix} \to U\xi \otimes \xi^\dagger U^\dagger.$$

Zauważmy, że macierz $\xi \otimes \xi^\dagger$ jest hermitowska.
Ze związków

$$\xi \to U\xi, \qquad \xi^\dagger \to \xi^\dagger U^\dagger$$

wynika, że spinory ξ i $\xi^\dagger$ przekształcają się inaczej przy odwzorowaniu U. Jednak z warunku unitarności macierzy U wynika, że spinory

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} -\xi_2^* \\ \xi_1^* \end{pmatrix}$$

przekształcają się tak samo przy $U \in SU(2)$.

$SU(2)$ i grupa obrotów

a więc wyrażenie $\xi^\dagger\xi$ jest niezmiennikiem tak zdefiniowanego odwzorowania.
Jednocześnie dla iloczynu zewnętrznego mamy

$$\xi \otimes \xi^\dagger = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \otimes (\xi_1^*, \xi_2^*) = \begin{pmatrix} |\xi_1|^2 & \xi_1\xi_2^* \\ \xi_2\xi_1^* & |\xi_2|^2 \end{pmatrix} \to U\xi \otimes \xi^\dagger U^\dagger.$$

Zauważmy, że macierz $\xi \otimes \xi^\dagger$ jest hermitowska.
Ze związków

$$\xi \to U\xi, \qquad \xi^\dagger \to \xi^\dagger U^\dagger$$

wynika, że spinory ξ i $\xi^\dagger$ przekształcają się inaczej przy odwzorowaniu U. Jednak z warunku unitarności macierzy U wynika, że spinory

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} -\xi_2^* \\ \xi_1^* \end{pmatrix}$$

przekształcają się tak samo przy $U \in SU(2)$.

Rzeczywiście, dokonajmy transformacji obu spinorów

$$\left(\begin{array}{c} \xi_1' \\ \xi_2' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ -b^* & a^* \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} a\xi_1 + b\xi_2 \\ -b^*\xi_1 + a^*\xi_2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} -\, {\xi_2^*}' \\ {\xi_1^*}' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ -b^* & a^* \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} -\xi_2^* \\ \xi_1^* \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} -a\xi_2^* + b\xi_1^* \\ b^*\xi_2^* + a^*\xi_1^* \end{array}\right).$$

Z drugiego równania macierzowego wynikają związki transformacyjne

$$\begin{array}{rcl} -\, {\xi_2^*}' = -a\xi_2^* + b\xi_1^* & \Rightarrow & \xi_2' = -b^*\xi_1 + a^*\xi_2 \\ {\xi_1^*}' = b^*\xi_2^* + a^*\xi_1^* & \Rightarrow & \xi_1' = a\xi_1 + b\xi_2, \end{array}$$

które po sprzężeniu zespolonym obu równań i podzieleniu pierwszego równania przez (-1) są takie same jak związki transformacyjne wynikające z pierwszego równania macierzowego.

Zauważmy, że zachodzi związek

$$\begin{pmatrix} -\xi_2^* \\ \xi_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{pmatrix} = \zeta\xi^*,$$

gdzie

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

W ten sposób pokazaliśmy, że spinory ξ i $\zeta\xi^*$ transformują się tak samo przy przekształceniach z grupy $SU(2)$, co symbolicznie zapisujemy w następujący sposób

$$\xi \sim \zeta\xi^*.$$

Zauważmy, że zachodzi związek

$$\begin{pmatrix} -\xi_2^* \\ \xi_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{pmatrix} = \zeta\xi^*,$$

gdzie

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

W ten sposób pokazaliśmy, że spinory ξ i $\zeta\xi^*$ transformują się tak samo przy przekształceniach z grupy $SU(2)$, co symbolicznie zapisujemy w następujący sposób

$$\xi \sim \zeta\xi^*.$$

Podobnie można wykazać, że zachodzą związki

$$\xi^\dagger \sim (\zeta\xi)^T = \begin{pmatrix} -\xi_2, & \xi_1 \end{pmatrix},$$

$$\xi \otimes \xi^\dagger \sim \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\xi_2, & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_1\xi_2 & \xi_1^2 \\ -\xi_2^2 & \xi_1\xi_2 \end{pmatrix} \equiv -H.$$

Zauważmy, że macierz H jest bezśladowa, a przy przekształceniach z grupy $SU(2)$ transformuje się następująco

$$H = -\xi \otimes \xi^\dagger \to -U\xi \otimes \xi^\dagger U^\dagger = UHU^\dagger.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Podobnie można wykazać, że zachodzą związki

$$\xi^\dagger \sim (\zeta\xi)^T = \begin{pmatrix} -\xi_2, & \xi_1 \end{pmatrix},$$

$$\xi \otimes \xi^\dagger \sim \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\xi_2, & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_1\xi_2 & \xi_1^2 \\ -\xi_2^2 & \xi_1\xi_2 \end{pmatrix} \equiv -H.$$

Zauważmy, że macierz H jest bezśladowa, a przy przekształceniach z grupy $SU(2)$ transformuje się następująco

$$H = -\xi \otimes \xi^\dagger \to -U\xi \otimes \xi^\dagger U^\dagger = UHU^\dagger.$$

Z wektora położenia $\vec{r} = (x, y, z)$ możemy utworzyć macierz 2×2

$$h = \vec{r} \cdot \vec{\sigma} = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix},$$

gdzie $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_x, \sigma_z)$ są macierzami Pauliego

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Podobnie można wykazać, że zachodzą związki

$$\xi^\dagger \sim (\zeta\xi)^T = \begin{pmatrix} -\xi_2, & \xi_1 \end{pmatrix},$$

$$\xi \otimes \xi^\dagger \sim \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\xi_2, & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_1\xi_2 & \xi_1^2 \\ -\xi_2^2 & \xi_1\xi_2 \end{pmatrix} \equiv -H.$$

Zauważmy, że macierz H jest bezśladowa, a przy przekształceniach z grupy $SU(2)$ transformuje się następująco

$$H = -\xi \otimes \xi^\dagger \to -U\xi \otimes \xi^\dagger U^\dagger = UHU^\dagger.$$

Z wektora położenia $\vec{r} = (x, y, z)$ możemy utworzyć macierz 2×2

$$h = \vec{r} \cdot \vec{\sigma} = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix},$$

gdzie $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_x, \sigma_z)$ są macierzami Pauliego

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Oczywiście macierz h jest hermitowska, a przekształcenie

$$h \to h' = UhU^\dagger$$

zachowuje hermitowskość, gdyż

$$h'^{\dagger} = (UhU^\dagger)^\dagger = U^{\dagger\,\dagger} h^\dagger U^\dagger = UhU^\dagger = h'.$$

Ponieważ macierze $U \in SU(2)$, to $\det U = 1$, a zatem

$$\det h' = \det(UhU^\dagger) = \det(hU^\dagger U) = \det h = -z^2 - x^2 - y^2,$$

a więc jeśli uwzględnimy, że

$$h' = \vec{r}' \cdot \vec{\sigma} == \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det h' = -z'^2 - x'^2 - y'^2$$

to otrzymamy

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Oczywiście macierz h jest hermitowska, a przekształcenie

$$h \to h' = UhU^\dagger$$

zachowuje hermitowskość, gdyż

$$h'^{\dagger} = (UhU^\dagger)^\dagger = U^{\dagger\dagger} h^\dagger U^\dagger = UhU^\dagger = h'.$$

Ponieważ macierze $U \in SU(2)$, to $\det U = 1$, a zatem

$$\det h' = \det(UhU^\dagger) = \det(hU^\dagger U) = \det h = -z^2 - x^2 - y^2,$$

a więc jeśli uwzględnimy, że

$$h' = \vec{r}' \cdot \vec{\sigma} == \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det h' = -z'^2 - x'^2 - y'^2$$

to otrzymamy

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Widzimy, że powyższe przekształcenie unitarne $U \in SU(2)$ macierzy h indukuje obrót wektora położenia $\vec{r}$.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Oczywiście macierz h jest hermitowska, a przekształcenie

$$h \to h' = UhU^\dagger$$

zachowuje hermitowskość, gdyż

$$h'^{\dagger} = (UhU^\dagger)^\dagger = U^{\dagger\,\dagger} h^\dagger U^\dagger = UhU^\dagger = h'.$$

Ponieważ macierze $U \in SU(2)$, to $\det U = 1$, a zatem

$$\det h' = \det(UhU^\dagger) = \det(hU^\dagger U) = \det h = -z^2 - x^2 - y^2,$$

a więc jeśli uwzględnimy, że

$$h' = \vec{r}' \cdot \vec{\sigma} == \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det h' = -z'^2 - x'^2 - y'^2$$

to otrzymamy

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Widzimy, że powyższe przekształcenie unitarne $U \in SU(2)$ macierzy h indukuje obrót wektora położenia $\vec{r}$.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Utożsamiając macierze H i h zauważamy, że przekształcenie z grupy $SU(2)$ nad spinorem

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

jest równoważne przekształceniu z grupy $O(3)$ nad wektorem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ponieważ

$$H = \begin{pmatrix} \xi_1\xi_2 & -\xi_1^2 \\ \xi_2^2 & -\xi_1\xi_2 \end{pmatrix}, \quad \text{a} \quad h = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}$$

to

$$x = \frac{1}{2}(\xi_2^2 - \xi_1^2), \quad y = \frac{1}{2i}(\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad z = \xi_1\xi_2.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Utożsamiając macierze H i h zauważamy, że przekształcenie z grupy $SU(2)$ nad spinorem

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

jest równoważne przekształceniu z grupy $O(3)$ nad wektorem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ponieważ

$$H = \begin{pmatrix} \xi_1\xi_2 & -\xi_1^2 \\ \xi_2^2 & -\xi_1\xi_2 \end{pmatrix}, \quad \text{a} \quad h = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}$$

to

$$x = \frac{1}{2}(\xi_2^2 - \xi_1^2), \quad y = \frac{1}{2i}(\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad z = \xi_1\xi_2.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Przekształcenie $U \in SU(2)$ ma postać ogólną

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

a jego parametry a i b są liczbami zespolonymi, dla których $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

W takim razie macierz U ma 3 niezależne parametry rzeczywiste, dokładnie tyle ile kątów ma przekształcenie z grupy $O(3)$.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Przekształcenie $U \in SU(2)$ ma postać ogólną

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

a jego parametry a i b są liczbami zespolonymi, dla których $|a|^2 + |b|^2 = 1$.
W takim razie macierz U ma 3 niezależne parametry rzeczywiste, dokładnie tyle ile kątów ma przekształcenie z grupy $O(3)$.
Znajdźmy związki pomiędzy tymi parametrami. W tym celu wykorzystajmy związki pomiędzy składowymi spinora ξ i wektora $\vec{r}$ po transformacji

$$x' = \frac{1}{2}({\xi'_2}^2 - {\xi'_1}^2), \quad y' = \frac{1}{2i}({\xi'_1}^2 + {\xi'_2}^2), \quad z' = \xi'_1\xi'_2$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Przekształcenie $U \in SU(2)$ ma postać ogólną

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

a jego parametry a i b są liczbami zespolonymi, dla których $|a|^2 + |b|^2 = 1$.
W takim razie macierz U ma 3 niezależne parametry rzeczywiste, dokładnie tyle ile kątów ma przekształcenie z grupy $O(3)$.
Znajdźmy związki pomiędzy tymi parametrami. W tym celu wykorzystajmy związki pomiędzy składowymi spinora ξ i wektora $\vec{r}$ po transformacji

$$x' = \frac{1}{2}({\xi_2'}^2 - {\xi_1'}^2), \quad y' = \frac{1}{2i}({\xi_1'}^2 + {\xi_2'}^2), \quad z' = \xi_1'\xi_2'$$

oraz związki transformacyjne

$$\xi_1' = a\xi_1 + b\xi_2 \quad \Rightarrow \quad {\xi_1'}^{\,2} = a^2\xi_1^2 + b^2\xi_2^2 + 2ab\xi_1\xi_2,$$
$$\xi_2' = -b^*\xi_1 + a^*\xi_2 \quad \Rightarrow \quad {\xi_2'}^{\,2} = b^{*\,2}\xi_1^2 + a^{*\,2}\xi_2^2 - 2a^*b^*\xi_1\xi_2.$$

Ponadto pamiętając, że z porównania macierzy H i h wynikają związki

$$\xi_1^2 = -x + iy, \qquad \xi_2^2 = x + iy, \qquad \xi_1\xi_2 = z,$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}({\xi_2'}^{\,2} - {\xi_1'}^{\,2}) = \frac{1}{2}(b^{*\,2} - a^2)\xi_1^2 + \frac{1}{2}(a^{*\,2} - b^2)\xi_2^2 - (a^*b^* + ab)\xi_1\xi_2 \\ &= \frac{1}{2}(b^{*\,2} - a^2)(-x + iy) + \frac{1}{2}(a^{*\,2} - b^2)(x + iy) - (a^*b^* + ab)z \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + a^{*\,2} - b^2 - b^{*\,2})x - \frac{i}{2}(a^2 - a^{*\,2} + b^2 - b^{*\,2})y - (a^*b^* + ab)z. \end{aligned}$$

Zadanie. Postępując analogicznie pokazać, że

$$y' = \frac{i}{2}(a^2 - a^{*\,2} - b^2 + b^{*\,2})x + \frac{1}{2}(a^2 + a^{*\,2} + b^2 + b^{*\,2})y - i(ab - a^* b^*)z,$$
$$z' = (ab^* + ba^*)x + i(ba^* - ab^*)y + (|a|^2 - |b|^2)z.$$

Przyjmijmy, że $a = e^{i\frac{\alpha}{2}}, b = 0$, co oczywiście spełnia warunek $|a|^2 + |b|^2 = 1$, wtedy nasze związki przyjmują postać

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$
$$z' = z,$$

co odpowiada związkom transformacyjnym dla obrotu o kąt α wokół osi Oz

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Zadanie. Postępując analogicznie pokazać, że

$$y' = \frac{i}{2}(a^2 - a^{*\,2} - b^2 + b^{*\,2})x + \frac{1}{2}(a^2 + a^{*\,2} + b^2 + b^{*\,2})y - i(ab - a^* b^*)z,$$
$$z' = (ab^* + ba^*)x + i(ba^* - ab^*)y + (|a|^2 - |b|^2)z.$$

Przyjmijmy, że $a = e^{i\frac{\alpha}{2}}$, $b = 0$, co oczywiście spełnia warunek $|a|^2 + |b|^2 = 1$, wtedy nasze związki przyjmują postać

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$
$$z' = z,$$

co odpowiada związkom transformacyjnym dla obrotu o kąt α wokół osi Oz

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Widzimy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy macierzami $U \in SU(2)$ i $R \in O(3)$

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wykorzystując generatory

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

możemy napisać

$$U = e^{i\sigma_z\frac{\alpha}{2}}, \qquad R = e^{iJ_z\alpha},$$

gdzie jak zwykle funkcję od macierzy rozumiemy jako jej rozwinięcie w szereg potęgowy.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Widzimy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy macierzami $U \in SU(2)$ i $R \in O(3)$

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wykorzystując generatory

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

możemy napisać

$$U = e^{i\sigma_z \frac{\alpha}{2}}, \qquad R = e^{iJ_z\alpha},$$

gdzie jak zwykle funkcję od macierzy rozumiemy jako jej rozwinięcie w szereg potęgowy.

Zadanie. Pokazać, że przyjmując $a = \cos\frac{\beta}{2}$ i $b = \sin\frac{\beta}{2}$ w związkach transformacyjnych

$$x' = \frac{1}{2}(a^2 + a^{*\,2} - b^2 - b^{*\,2})x - \frac{i}{2}(a^2 - a^{*\,2} + b^2 - b^{*\,2})y - (a^* b^* + ab)z,$$
$$y' = \frac{i}{2}(a^2 - a^{*\,2} - b^2 + b^{*\,2})x + \frac{1}{2}(a^2 + a^{*\,2} + b^2 + b^{*\,2})y - i(ab - a^* b^*)z,$$
$$z' = (ab^* + ba^*)x + i(ba^* - ab^*)y + (|a|^2 - |b|^2)z$$

otrzymamy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość

$$U = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & \sin\frac{\beta}{2} \\ -\sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad R = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix},$$

co wykorzystując generatory

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

możemy napisać

$$U = e^{i\sigma_y \frac{\beta}{2}}, \qquad R = e^{iJ_y \beta},$$

a podstawiając w powyższych związkach transformacyjnych $a = \cos\frac{\gamma}{2}$ i $b = \sin\frac{\gamma}{2}$ otrzymamy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość

$$U = \begin{pmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & i\sin\frac{\gamma}{2} \\ i\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix},$$

co wykorzystując generatory

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

możemy napisać

$$U = e^{i\sigma_x \frac{\gamma}{2}}, \qquad R = e^{iJ_x \gamma}.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Podsumowując widzimy, że ogólny związek pomiędzy przekształceniem U z grupy $SU(2)$ nad spinorem

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

i przekształceniem R z grupy $O(3)$ nad wektorem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ma postać

$$U = e^{i\vec{\sigma}\cdot\frac{\vec{\theta}}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + i\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\sin\frac{\theta}{2} \quad \leftrightarrow \quad R = e^{i\vec{J}\cdot\vec{\theta}},$$

gdzie $\vec{\theta} = \theta\vec{n}$.

$SU(2)$ i grupa obrotów

Ten wzajemnie jednoznaczny związek pomiędzy grupami $SU(2)$ i $O(3)$ oznacza, że grupy te powinny mieć analogiczną strukturę, a więc ich generatory powinny spełniać takie same związki komutacyjne.

Pamiętamy, że dla macierzy Pauliego zachodzą relacje komutacji

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2},$$

takie same jak dla generatorów obrotów J_i, $i = 1, 2, 3$,

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k.$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Ten wzajemnie jednoznaczny związek pomiędzy grupami $SU(2)$ i $O(3)$ oznacza, że grupy te powinny mieć analogiczną strukturę, a więc ich generatory powinny spełniać takie same związki komutacyjne.

Pamiętamy, że dla macierzy Pauliego zachodzą relacje komutacji

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2},$$

takie same jak dla generatorów obrotów J_i, $i = 1, 2, 3$,

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k.$$

Zauważmy jednak pewną różnicę. Otóż każdy wektor z $\mathbb{R}^3$ przejdzie w siebie przy obrocie o kąt $\theta = 2\pi$, natomiast spinor ξ zmieni się wtedy w $-\xi$, gdyż

$$U(2\pi)\xi = \left(\cos\frac{2\pi}{2} + i\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\sin\frac{2\pi}{2}\right)\xi = (\cos(\pi) + i\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\sin(\pi))\xi = -\xi,$$

$SU(2)$ i grupa obrotów

Ten wzajemnie jednoznaczny związek pomiędzy grupami $SU(2)$ i $O(3)$ oznacza, że grupy te powinny mieć analogiczną strukturę, a więc ich generatory powinny spełniać takie same związki komutacyjne.

Pamiętamy, że dla macierzy Pauliego zachodzą relacje komutacji

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2},$$

takie same jak dla generatorów obrotów J_i, $i = 1, 2, 3$,

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k.$$

Zauważmy jednak pewną różnicę. Otóż każdy wektor z $\mathbb{R}^3$ przejdzie w siebie przy obrocie o kąt $\theta = 2\pi$, natomiast spinor ξ zmieni się wtedy w $-\xi$, gdyż

$$U(2\pi)\xi = \left(\cos\frac{2\pi}{2} + i\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\sin\frac{2\pi}{2}\right)\xi = (\cos(\pi) + i\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\sin(\pi))\xi = -\xi,$$

a w siebie samego przejdzie dopiero przy obrocie o kąt $\theta = 4\pi$

$$U(4\pi)\xi = (\cos(2\pi) + i\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\sin(2\pi))\xi = \xi.$$

Tak więc dwóm elementom U i $-U$ grupy $SU(2)$ odpowiada jeden element R grupy $O(3)$. W szczególności

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \searrow & \\ & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \nearrow & \\ & & \\ SU(2) & & O(3) \end{array}$$

To sprawia, że grupy $SU(2)$ i $O(3)$ nie są topologicznie równoważne. $SU(2)$ nazywa się grupą nakrywającą grupy $O(3)$.

$SU(2)$ i grupa obrotów

a w siebie samego przejdzie dopiero przy obrocie o kąt $\theta = 4\pi$

$$U(4\pi)\xi = (\cos(2\pi) + i\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\sin(2\pi))\xi = \xi.$$

Tak więc dwóm elementom U i $-U$ grupy $SU(2)$ odpowiada jeden element R grupy $O(3)$. W szczególności

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \searrow & \\ & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \nearrow & \\ & & \\ SU(2) & & O(3) \end{array}$$

To sprawia, że grupy $SU(2)$ i $O(3)$ nie są topologicznie równoważne. $SU(2)$ nazywa się grupą nakrywającą grupy $O(3)$.

$SL(2,\mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Analogiczna odpowiedniość istnieje pomiędzy grupą $SL(2,\mathbb{C})$ zespolonych macierzy 2×2 o wyznaczniku 1 a grupą Lorentza.

Czyste przekształcenia Lorentza, czyli tzw. *pchnięcia* wiążą współrzędne czasoprzestrzenne w dwóch inercjalnych układach odniesienia poruszających się ze względną prędkością $\vec{v}$. Jeżeli ruch odbywa się wzdłuż osi Ox, to $\vec{v} = (v, 0, 0)$ i zachodzą związki

$$x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t + \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Analogiczna odpowiedniość istnieje pomiędzy grupą $SL(2,\mathbb{C})$ zespolonych macierzy 2×2 o wyznaczniku 1 a grupą Lorentza.

Czyste przekształcenia Lorentza, czyli tzw. *pchnięcia* wiążą współrzędne czasoprzestrzenne w dwóch inercjalnych układach odniesienia poruszających się ze względną prędkością $\vec{v}$. Jeżeli ruch odbywa się wzdłuż osi Ox, to $\vec{v} = (v, 0, 0)$ i zachodzą związki

$$x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t + \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad x^0 = ct, \quad x^1 = x, \ \text{itd.}$$

powyższe związki transformacyjne możemy zapisać następująco

$$x^{0\,\prime} = \gamma(x^0 + \beta x^1), \quad x^{1\,\prime} = \gamma(\beta x^0 + x^1), \quad x^{2\,\prime} = x^2, \quad x^{3\,\prime} = x^3,$$

Analogiczna odpowiedniość istnieje pomiędzy grupą $SL(2,\mathbb{C})$ zespolonych macierzy 2×2 o wyznaczniku 1 a grupą Lorentza.
Czyste przekształcenia Lorentza, czyli tzw. *pchnięcia* wiążą współrzędne czasoprzestrzenne w dwóch inercjalnych układach odniesienia poruszających się ze względną prędkością $\vec{v}$. Jeżeli ruch odbywa się wzdłuż osi Ox, to $\vec{v} = (v, 0, 0)$ i zachodzą związki

$$x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t + \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad x^0 = ct, \quad x^1 = x, \text{ itd.}$$

powyższe związki transformacyjne możemy zapisać następująco

$$x^{0\,\prime} = \gamma(x^0 + \beta x^1), \quad x^{1\,\prime} = \gamma(\beta x^0 + x^1), \quad x^{2\,\prime} = x^2, \quad x^{3\,\prime} = x^3,$$

albo w formie macierzowej

$$\begin{pmatrix} x^{0\,\prime} \\ x^{1\,\prime} \\ x^{2\,\prime} \\ x^{3\,\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$ dlatego możemy przyjąć

$$\gamma = \mathrm{ch}\varphi, \quad \gamma\beta = \mathrm{sh}\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{th}\varphi = \beta$$

i zapisać powyższe związki transformacyjne następująco

$$\begin{pmatrix} x^{0\,\prime} \\ x^{1\,\prime} \\ x^{2\,\prime} \\ x^{3\,\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\varphi & \mathrm{sh}\varphi & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}\varphi & \mathrm{ch}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Powyższą macierz 4×4 oznaczymy B_x i będziemy nazywać macierzą pchnięcia lorentzowskiego w kierunku osi Ox.

albo w formie macierzowej

$$\begin{pmatrix} x^{0\,\prime} \\ x^{1\,\prime} \\ x^{2\,\prime} \\ x^{3\,\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$ dlatego możemy przyjąć

$$\gamma = \mathrm{ch}\varphi, \quad \gamma\beta = \mathrm{sh}\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{th}\varphi = \beta$$

i zapisać powyższe związki transformacyjne następująco

$$\begin{pmatrix} x^{0\,\prime} \\ x^{1\,\prime} \\ x^{2\,\prime} \\ x^{3\,\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\varphi & \mathrm{sh}\varphi & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}\varphi & \mathrm{ch}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Powyższą macierz 4×4 oznaczymy B_x i będziemy nazywać macierzą pchnięcia lorentzowskiego w kierunku osi Ox.

$SL(2,\mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Tak jak w przypadku obrotów możemy zdefiniować generatory K_x, K_y i K_z pchnięć w kierunku osi Ox, Oy i Oz:

$$K_x = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}B_x}{\mathrm{d}\varphi}\bigg|_{\varphi=0} = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\varphi & \mathrm{sh}\varphi & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}\varphi & \mathrm{ch}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{\varphi=0} = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_y = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}B_y}{\mathrm{d}\varphi}\bigg|_{\varphi=0} = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\varphi & 0 & \mathrm{sh}\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}\varphi & 0 & \mathrm{ch}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{\varphi=0} = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_z = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}\varphi}\bigg|_{\varphi=0} = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{sh}\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sh}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{ch}\varphi \end{pmatrix}\Bigg|_{\varphi=0} = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie parametr pchnięcia w kierunku każdej z osi oznaczyliśmy φ.

Natomiast generatory obrotów w czasoprzestrzeni Minkowskiego mają postać macierzy 4×4

$$J_x = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_y = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_z = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Przekształcenie Lorentza w najogólniejszej postaci składa się z pchnięcia w trzech niezależnych kierunkach i obrotów względem trzech osi, którym odpowiadają powyższe generatory.

Natomiast generatory obrotów w czasoprzestrzeni Minkowskiego mają postać macierzy 4×4

$$J_x = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_y = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_z = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Przekształcenie Lorentza w najogólniejszej postaci składa się z pchnięcia w trzech niezależnych kierunkach i obrotów względem trzech osi, którym odpowiadają powyższe generatory.

Zadanie. Pokazać, że komutatory generatorów K_i i J_j, gdzie indeksy $i, j = 1, 2, 3$ numerują osie układu kartezjańskiego x, y, z mają postać

$$[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk} J_k, \qquad [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk} K_k, \qquad [J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k.$$

Z powyższych relacji wynika, że pchnięcia nie tworzą podgrupy grupy Lorentza, gdyż np. złożenie infinitezymalnych pchnięć w dwóch różnych kierunkach może zawierać obrót.

Rzeczywiście, obliczmy

$$e^{iK_x\delta\varphi}e^{iK_y\delta\psi}e^{-iK_x\delta\varphi}e^{-iK_y\delta\psi} =$$

$$\left(1+iK_x\delta\varphi-\frac{1}{2}K_x^2(\delta\varphi)^2+\ldots\right)\left(1+iK_y\delta\psi-\frac{1}{2}K_y^2(\delta\psi)^2+\ldots\right)$$

$$\left(1-iK_x\delta\varphi-\frac{1}{2}K_x^2(\delta\varphi)^2+\ldots\right)\left(1-iK_y\delta\psi-\frac{1}{2}K_y^2(\delta\psi)^2+\ldots\right)=$$

$$\left(1+iK_y\delta\psi-\frac{1}{2}K_y^2(\delta\psi)^2+iK_x\delta\varphi-K_xK_y\delta\varphi\delta\psi-\frac{1}{2}K_x^2(\delta\varphi)^2+\ldots\right)$$

$$\left(1-iK_y\delta\psi-\frac{1}{2}K_y^2(\delta\psi)^2-iK_x\delta\varphi-K_xK_y\delta\varphi\delta\psi-\frac{1}{2}K_x^2(\delta\varphi)^2+\ldots\right)=$$

$$1-iK_y\delta\psi-\frac{1}{2}K_y^2(\delta\psi)^2-iK_x\delta\varphi-K_xK_y\delta\varphi\delta\psi-\frac{1}{2}K_x^2(\delta\varphi)^2+iK_y\delta\psi$$

$$+K_y^2(\delta\psi)^2+K_yK_x\delta\psi\delta\varphi-\frac{1}{2}K_y^2(\delta\psi)^2+iK_x\delta\varphi+K_xK_y\delta\varphi\delta\psi$$

$$+K_x^2(\delta\varphi)^2-K_xK_y\delta\varphi\delta\psi-\frac{1}{2}K_x^2(\delta\varphi)^2+\ldots=1-[K_x,K_y]\delta\varphi\delta\psi+\ldots,$$

gdzie pominęliśmy wyrazy rzędu wyższego niż drugi w nieskończenie małych parametrach $\delta\varphi, \delta\psi$.
Na podstawie udowodnionej wcześniej relacji komutacji

$$[K_x, K_y] = -iJ_z,$$

a więc złożenie pchnięć wzdłuż osi Ox i Oy

$$\begin{aligned} e^{iK_x\delta\varphi} e^{iK_y\delta\psi} e^{-iK_x\delta\varphi} e^{-iK_y\delta\psi} &= 1 - [K_x, K_y]\delta\varphi\delta\psi + \ldots \\ &= 1 + iJ_z\delta\varphi\delta\psi + \ldots \end{aligned}$$

zawiera obrót wokół osi Oz. Oczywiście w wyższych rzędach rozwinięcia pojawią się również pchnięcia.

gdzie pominęliśmy wyrazy rzędu wyższego niż drugi w nieskończenie małych parametrach $\delta\varphi, \delta\psi$.
Na podstawie udowodnionej wcześniej relacji komutacji

$$[K_x, K_y] = -iJ_z,$$

a więc złożenie pchnięć wzdłuż osi Ox i Oy

$$\begin{aligned} e^{iK_x\delta\varphi} e^{iK_y\delta\psi} e^{-iK_x\delta\varphi} e^{-iK_y\delta\psi} &= 1 - [K_x, K_y]\delta\varphi\delta\psi + \ldots \\ &= 1 + iJ_z\delta\varphi\delta\psi + \ldots \end{aligned}$$

zawiera obrót wokół osi Oz. Oczywiście w wyższych rzędach rozwinięcia pojawią się również pchnięcia.

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Wiemy już jak przekształca się spinor Pauliego

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

przy transformacjach z grupy $SU(2)$, a jak przekształca się on przy pchnięciach lorentzowskich?

Zauważmy, że operatory

$$K_i = \pm i \frac{\sigma_i}{2}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

spełniają znalezione wcześniej relacje komutacji dla generatorów grupy Lorentza.

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Wiemy już jak przekształca się spinor Pauliego

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

przy transformacjach z grupy $SU(2)$, a jak przekształca się on przy pchnięciach lorentzowskich?
Zauważmy, że operatory

$$K_i = \pm i \frac{\sigma_i}{2}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

spełniają znalezione wcześniej relacje komutacji dla generatorów grupy Lorentza. Rzeczywiście, obliczmy

$$[K_i, K_j] = \left[\pm i \frac{\sigma_i}{2}, \pm i \frac{\sigma_j}{2}\right] = -\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = -i\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2} = -i\varepsilon_{ijk}J_k,$$

$$[J_i, K_j] = \left[\frac{\sigma_i}{2}, \pm i \frac{\sigma_j}{2}\right] = \pm i \left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = \pm i i \varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2} = i\varepsilon_{ijk}\left(\pm i \frac{\sigma_k}{2}\right)$$
$$= i\varepsilon_{ijk}K_k.$$

Wiemy już jak przekształca się spinor Pauliego

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

przy transformacjach z grupy $SU(2)$, a jak przekształca się on przy pchnięciach lorentzowskich?
Zauważmy, że operatory

$$K_i = \pm i\frac{\sigma_i}{2}, \qquad i = 1,2,3,$$

spełniają znalezione wcześniej relacje komutacji dla generatorów grupy Lorentza. Rzeczywiście, obliczmy

$$[K_i, K_j] = \left[\pm i\frac{\sigma_i}{2}, \pm i\frac{\sigma_j}{2}\right] = -\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = -i\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2} = -i\varepsilon_{ijk}J_k,$$

$$[J_i, K_j] = \left[\frac{\sigma_i}{2}, \pm i\frac{\sigma_j}{2}\right] = \pm i\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = \pm ii\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2} = i\varepsilon_{ijk}\left(\pm i\frac{\sigma_k}{2}\right)$$
$$= i\varepsilon_{ijk}K_k.$$

$SL(2,\mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Operatory $K_i = +i\frac{\sigma_i}{2}$ i $K_i = -i\frac{\sigma_i}{2}$ określają reguły transformacyjne dla dwóch różnych typów spinorów Pauliego.

Aby to przybliżyć, zamiast generatorów J_i i K_i, $i = 1, 2, 3$, spełniających reguły komutacji

$$[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk} J_k, \qquad [J_i, K_j] \;\; = i\varepsilon_{ijk} K_k, \qquad [J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k,$$

zdefiniujmy nowe generatory grupa Lorentza

$$A_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i), \qquad B_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Operatory $K_i = +i\frac{\sigma_i}{2}$ i $K_i = -i\frac{\sigma_i}{2}$ określają reguły transformacyjne dla dwóch różnych typów spinorów Pauliego.

Aby to przybliżyć, zamiast generatorów J_i i K_i, $i = 1, 2, 3$, spełniających reguły komutacji

$$[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk} J_k, \qquad [J_i, K_j] \ = i\varepsilon_{ijk} K_k, \qquad [J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k,$$

zdefiniujmy nowe generatory grupa Lorentza

$$A_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i), \qquad B_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

i obliczmy ich komutatory

$$[A_i, A_j] = \left[\frac{1}{2}(J_i + iK_i), \frac{1}{2}(J_j + iK_j)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left([J_i, J_j] + i[J_i, K_j] + i[K_i, J_j] - [K_i, K_j]\right)$$

$$= \frac{1}{4}(i\varepsilon_{ijk} J_k + i^2\varepsilon_{ijk} K_k - i^2\varepsilon_{jik} K_k + i\varepsilon_{ijk} J_k) = i\varepsilon_{ijk}\frac{1}{2}(J_k + iK_k) = i\varepsilon_{ijk} A_k.$$

Operatory $K_i = +i\frac{\sigma_i}{2}$ i $K_i = -i\frac{\sigma_i}{2}$ określają reguły transformacyjne dla dwóch różnych typów spinorów Pauliego.

Aby to przybliżyć, zamiast generatorów J_i i K_i, $i = 1, 2, 3$, spełniających reguły komutacji

$$[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k, \qquad [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k, \qquad [J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k,$$

zdefiniujmy nowe generatory grupa Lorentza

$$A_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i), \qquad B_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

i obliczmy ich komutatory

$$[A_i, A_j] = \left[\frac{1}{2}(J_i + iK_i), \frac{1}{2}(J_j + iK_j)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left([J_i, J_j] + i[J_i, K_j] + i[K_i, J_j] - [K_i, K_j]\right)$$

$$= \frac{1}{4}(i\varepsilon_{ijk}J_k + i^2\varepsilon_{ijk}K_k - i^2\varepsilon_{jik}K_k + i\varepsilon_{ijk}J_k) = i\varepsilon_{ijk}\frac{1}{2}(J_k + iK_k) = i\varepsilon_{ijk}A_k.$$

$SL(2,\mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Podobnie

$$[B_i, B_j] = \left[\frac{1}{2}(J_i - iK_i), \frac{1}{2}(J_j - iK_j)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left([J_i, J_j] - i[J_i, K_j] - i[K_i, J_j] - [K_i, K_j]\right)$$
$$= \frac{1}{4}(i\varepsilon_{ijk}J_k - i^2\varepsilon_{ijk}K_k + i^2\varepsilon_{jik}K_k + i\varepsilon_{ijk}J_k) = i\varepsilon_{ijk}\frac{1}{2}(J_k - iK_k) = i\varepsilon_{ijk}B_k,$$
$$[A_i, B_j] = \left[\frac{1}{2}(J_i + iK_i), \frac{1}{2}(J_j - iK_j)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left([J_i, J_j] - i[J_i, K_j] + i[K_i, J_j] + [K_i, K_j]\right)$$
$$= \frac{1}{4}(i\varepsilon_{ijk}J_k + i^2\varepsilon_{ijk}K_k + i^2\varepsilon_{jik}K_k - i\varepsilon_{ijk}J_k) = 0.$$

To oznacza, że każdy z generatorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ generuje grupę $SU(2)$ i te dwie grupy ze sobą komutują.

Podobnie

$$[B_i, B_j] = \left[\frac{1}{2}(J_i - iK_i), \frac{1}{2}(J_j - iK_j)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left([J_i, J_j] - i[J_i, K_j] - i[K_i, J_j] - [K_i, K_j]\right)$$
$$= \frac{1}{4}(i\varepsilon_{ijk}J_k - i^2\varepsilon_{ijk}K_k + i^2\varepsilon_{jik}K_k + i\varepsilon_{ijk}J_k) = i\varepsilon_{ijk}\frac{1}{2}(J_k - iK_k) = i\varepsilon_{ijk}B_k,$$
$$[A_i, B_j] = \left[\frac{1}{2}(J_i + iK_i), \frac{1}{2}(J_j - iK_j)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left([J_i, J_j] - i[J_i, K_j] + i[K_i, J_j] + [K_i, K_j]\right)$$
$$= \frac{1}{4}(i\varepsilon_{ijk}J_k + i^2\varepsilon_{ijk}K_k + i^2\varepsilon_{jik}K_k - i\varepsilon_{ijk}J_k) = 0.$$

To oznacza, że każdy z generatorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ generuje grupę $SU(2)$ i te dwie grupy ze sobą komutują.

$SL(2,\mathbb{C})$ i grupa Lorentza

W takim razie grupa Lorentza jest tożsama z grupą $SU(2) \otimes SU(2)$, a to oznacza, że reprezentacje grupy Lorentza powinny być numerowane wartościami dwóch momentów pędu (j, j'), gdzie j odpowiada generatorom $\vec{A}$, a j' odpowiada generatorom $\vec{B}$.

W szczególnym przypadku jeden z tych momentów pędu może być równy 0:

$$\vec{B} = \frac{1}{2}(\vec{J} - i\vec{K}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (j, 0) \quad \rightarrow \quad \vec{J}^{(j)} = i\vec{K}^{(j)},$$
$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{J} + i\vec{K}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (0, j) \quad \rightarrow \quad \vec{J}^{(j)} = -i\vec{K}^{(j)},$$

co rzeczywiście odpowiada dwóm znakom we wzorze $\vec{K} = \pm i\frac{\vec{\sigma}}{2}$.

W takim razie grupa Lorentza jest tożsama z grupą $SU(2) \otimes SU(2)$, a to oznacza, że reprezentacje grupy Lorentza powinny być numerowane wartościami dwóch momentów pędu (j, j'), gdzie j odpowiada generatorom $\vec{A}$, a j' odpowiada generatorom $\vec{B}$.
W szczególnym przypadku jeden z tych momentów pędu może być równy 0:

$$\vec{B} = \frac{1}{2}(\vec{J} - i\vec{K}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (j, 0) \quad \rightarrow \quad \vec{J}^{(j)} = i\vec{K}^{(j)},$$
$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{J} + i\vec{K}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (0, j) \quad \rightarrow \quad \vec{J}^{(j)} = -i\vec{K}^{(j)},$$

co rzeczywiście odpowiada dwóm znakom we wzorze $\vec{K} = \pm i\frac{\vec{\sigma}}{2}$.

W związku z tym możemy zdefiniować dwa typy spinorów

Typ I: $\left(\frac{1}{2},0\right): \quad \vec{J}^{(1/2)} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K}^{(1/2)} = -i\frac{\vec{\sigma}}{2},$

Typ II: $\left(0,\frac{1}{2}\right): \quad \vec{J}^{(1/2)} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K}^{(1/2)} = i\frac{\vec{\sigma}}{2}.$

Oznaczmy parametry obrotu i pchnięcia lorentzowskiego przez $(\vec{\theta},\vec{\varphi})$.

W związku z tym możemy zdefiniować dwa typy spinorów

$$\text{Typ I:} \quad \left(\frac{1}{2},0\right): \quad \vec{J}^{(1/2)} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K}^{(1/2)} = -i\frac{\vec{\sigma}}{2},$$
$$\text{Typ II:} \quad \left(0,\frac{1}{2}\right): \quad \vec{J}^{(1/2)} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K}^{(1/2)} = i\frac{\vec{\sigma}}{2}.$$

Oznaczmy parametry obrotu i pchnięcia lorentzowskiego przez $(\vec{\theta},\vec{\varphi})$.

Wówczas spinor typu I ξ transformuje się następująco

$$\xi \to e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\theta}+\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\varphi}}\xi = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\varphi})}\xi \equiv M\xi,$$

a spinor typu II η transformuje się następująco

$$\eta \to e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\theta}-\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\varphi}}\eta = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\varphi})}\eta \equiv N\eta.$$

W związku z tym możemy zdefiniować dwa typy spinorów

$$\text{Typ I:} \quad \left(\frac{1}{2},0\right): \quad \vec{J}^{(1/2)} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K}^{(1/2)} = -i\frac{\vec{\sigma}}{2},$$
$$\text{Typ II:} \quad \left(0,\frac{1}{2}\right): \quad \vec{J}^{(1/2)} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K}^{(1/2)} = i\frac{\vec{\sigma}}{2}.$$

Oznaczmy parametry obrotu i pchnięcia lorentzowskiego przez $(\vec{\theta},\vec{\varphi})$.

Wówczas spinor typu I ξ transformuje się następująco

$$\xi \to e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\theta}+\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\varphi}}\xi = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\varphi})}\xi \equiv M\xi,$$

a spinor typu II η transformuje się następująco

$$\eta \to e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\theta}-\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\varphi}}\eta = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\varphi})}\eta \equiv N\eta.$$

Są to dwie nierównoważne reprezentacje grupy Lorentza, tzn. że nie istnieje nieosobliwa macierz S, dla której $N = SMS^{-1}$.

W związku z tym możemy zdefiniować dwa typy spinorów

$$\text{Typ I:} \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right): \quad \vec{J}^{(1/2)} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K}^{(1/2)} = -i\frac{\vec{\sigma}}{2},$$
$$\text{Typ II:} \quad \left(0, \frac{1}{2}\right): \quad \vec{J}^{(1/2)} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K}^{(1/2)} = i\frac{\vec{\sigma}}{2}.$$

Oznaczmy parametry obrotu i pchnięcia lorentzowskiego przez $(\vec{\theta}, \vec{\varphi})$.

Wówczas spinor typu I ξ transformuje się następująco

$$\xi \to e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\theta} + \frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\varphi}}\xi = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta} - i\vec{\varphi})}\xi \equiv M\xi,$$

a spinor typu II η transformuje się następująco

$$\eta \to e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\theta} - \frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\varphi}}\eta = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta} + i\vec{\varphi})}\eta \equiv N\eta.$$

Są to dwie nierównoważne reprezentacje grupy Lorentza, tzn. że nie istnieje nieosobliwa macierz S, dla której $N = SMS^{-1}$.

Macierze M i N są jednak powiązane równaniem

$$N = \zeta M^* \zeta^{-1}, \qquad \text{gdzie} \quad \zeta = -i\sigma_2,$$

co łatwo sprawdzić, jeśli zauważymy, że $\sigma_2^2 = 1 \ \Rightarrow\ \sigma_2^{-1} = \sigma_2$ i

$$\sigma_2\sigma_i^*\sigma_2 = \sigma_2\sigma_i\sigma_2 = -\sigma_2^2\sigma_i = -\sigma_i, \qquad i = 1, 3,$$
$$\sigma_2\sigma_2^*\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_2\sigma_2 = -\sigma_2,$$

gdyż macierze σ_1 i σ_3 są rzeczywiste i antykomutują z σ_2, a macierz σ_2 jest czysto urojona. Zauważmy, że $\zeta^{-1} = i\sigma_2$.

Macierz ζ zdefiniowaliśmy już wcześniej w równaniu

$$\begin{pmatrix} -\xi_2^* \\ \xi_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{pmatrix} = \zeta\xi^*, \quad \text{gdzie} \quad \zeta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Widać, że jest to dokładnie ta sama macierz.

Macierze M i N są jednak powiązane równaniem

$$N = \zeta M^* \zeta^{-1}, \qquad \text{gdzie} \quad \zeta = -i\sigma_2,$$

co łatwo sprawdzić, jeśli zauważymy, że $\sigma_2^2 = 1 \;\Rightarrow\; \sigma_2^{-1} = \sigma_2$ i

$$\sigma_2 \sigma_i^* \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_i \sigma_2 = -\sigma_2^2 \sigma_i = -\sigma_i, \qquad i = 1, 3,$$
$$\sigma_2 \sigma_2^* \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_2 \sigma_2 = -\sigma_2,$$

gdyż macierze σ_1 i σ_3 są rzeczywiste i antykomutują z σ_2, a macierz σ_2 jest czysto urojona. Zauważmy, że $\zeta^{-1} = i\sigma_2$. Macierz ζ zdefiniowaliśmy już wcześniej w równaniu

$$\begin{pmatrix} -\xi_2^* \\ \xi_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{pmatrix} = \zeta \xi^*, \quad \text{gdzie} \quad \zeta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Widać, że jest to dokładnie ta sama macierz.

Dla macierzy

$$M = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\varphi})}$$

otrzymamy

$$\zeta M^* \zeta^{-1} = \sigma_2 e^{-\frac{i}{2}\vec{\sigma}^*\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\varphi})}\sigma_2 = e^{-\frac{i}{2}\sigma_2\vec{\sigma}^*\sigma_2\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\varphi})} = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\varphi})} = N,$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodniony wcześniej związek $\sigma_2\vec{\sigma}^*\sigma_2 = -\vec{\sigma}$.

Obliczmy wyznacznik macierzy M i N

$$\det M = \det e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\varphi})} = e^{\mathrm{Tr}[\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\varphi})]} = e^{\frac{i}{2}\mathrm{Tr}[\vec{\sigma}]\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\varphi})} = e^0 = 1,$$

$$\det N = \det e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\varphi})} = e^{\mathrm{Tr}[\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\varphi})]} = e^{\frac{i}{2}\mathrm{Tr}[\vec{\sigma}]\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\varphi})} = e^0 = 1,$$

gdzie wykorzystaliśmy własność $\det e^A = e^{\mathrm{Tr}A}$, która zachodzi dla dowolnej zespolonej lub rzeczywistej macierzy kwadratowej i bezśladowość macierzy Pauliego.

$SL(2,\mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Dla macierzy

$$M = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\varphi})}$$

otrzymamy

$$\zeta M^* \zeta^{-1} = \sigma_2 e^{-\frac{i}{2}\vec{\sigma}^*\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\varphi})}\sigma_2 = e^{-\frac{i}{2}\sigma_2\vec{\sigma}^*\sigma_2\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\varphi})} = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\varphi})} = N,$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodniony wcześniej związek $\sigma_2\vec{\sigma}^*\sigma_2 = -\vec{\sigma}$.

Obliczmy wyznacznik macierzy M i N

$$\det M = \det e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\varphi})} = e^{\mathrm{Tr}[\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\varphi})]} = e^{\frac{i}{2}\mathrm{Tr}[\vec{\sigma}]\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\varphi})} = e^0 = 1,$$
$$\det N = \det e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\varphi})} = e^{\mathrm{Tr}[\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\varphi})]} = e^{\frac{i}{2}\mathrm{Tr}[\vec{\sigma}]\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\varphi})} = e^0 = 1,$$

gdzie wykorzystaliśmy własność $\det e^A = e^{\mathrm{Tr}A}$, która zachodzi dla dowolnej zespolonej lub rzeczywistej macierzy kwadratowej i bezśladowość macierzy Pauliego.

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Widzimy, że M i N są macierzami zespolonymi 2×2 o wyznaczniku 1, tak więc $M, N \in SL(2, \mathbb{C})$.

Grupa $SL(2, \mathbb{C})$ jest sześcioparametrowa, gdyż tworzące ją macierze mają postać

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad ad - bc = 1,$$

a więc zawiera $8 - 2 = 6$ parametrów rzeczywistych. Te 6 parametrów wiąże się z kątami obrotów i składowymi prędkości względnej inercjalnych układów odniesienia.

$SL(2, \mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Widzimy, że M i N są macierzami zespolonymi 2×2 o wyznaczniku 1, tak więc $M, N \in SL(2, \mathbb{C})$.
Grupa $SL(2, \mathbb{C})$ jest sześcioparametrowa, gdyż tworzące ją macierze mają postać

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad ad - bc = 1,$$

a więc zawiera $8 - 2 = 6$ parametrów rzeczywistych. Te 6 parametrów wiąże się z kątami obrotów i składowymi prędkości względnej inercjalnych układów odniesienia.

$SL(2,\mathbb{C})$ i grupa Lorentza

Podsumowując, spinory Pauliego

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

transformują się przy obrotach w następujący sposób

$$\xi \to U\xi,$$

gdzie macierz $U \in SU(2)$ dana jest wzorem

$$U = e^{i\vec{\sigma}\cdot\frac{\vec{\theta}}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + i\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\sin\frac{\theta}{2}.$$

Macierz U można jednoznacznie powiązać z macierzą obrotu wektora w $\mathbb{R}^3$, która dana jest wzorem $R = e^{i\vec{J}\cdot\vec{\theta}}$.

Jednak przy dowolnych transformacjach Lorentza spinory Pauliego rozdzielają się na dwa różne typy ξ i η, transformujące się zgodnie z wzorami

$$\xi \longrightarrow e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\varphi})}\xi,$$

$$\eta \longrightarrow e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\varphi})}\eta,$$

które odpowiadają reprezentacjom $(1/2,0)$ i $(0,1/2)$ grupy Lorentza.
W starszej literaturze te spinory nazywano spinorami z kropką i bez kropki.

Aby powiązać dwuskładnikowe spinory Pauliego z czteroskładnikowymi spinorami Diraca wprowadźmy operację odbicia przestrzennego, przy którym

$$\vec{r} \to -\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \to -\vec{v}.$$

Parametr pchnięcia lorentzowskigo φ_i dany równaniem $\mathrm{th}\varphi_i = v_i/c$ przejdzie w $-\varphi_i$, $i = 1, 2, 3$, dlatego odpowiedni generator pchnięcia zmieni się następująco

$$K_i = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\varphi_i}\bigg|_{\varphi_i=0} \to -K_i.$$

Natomiast kąt obrotu θ_i względem i-tej osi nie zmieni znaku, co można zauważyć, analizując rysunek na stronie 3. Dlatego odpowiedni generator obrotu

$$J_i = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}R(\theta_i)}{\mathrm{d}\theta_i}\bigg|_{\theta_i=0} \to J_i.$$

Spinor Diraca

Orbitalny moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ transformuje się przy odbiciu tak samo

$$\vec{L} \to (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) = \vec{L}.$$

Z tego względu $\vec{J}$ i $\vec{L}$ nazywa się pseudo wektorami.

Zauważmy, że przy transformacji odbicia przestrzennego

$$\vec{K} \to -\vec{K} \qquad \Rightarrow \qquad (j,0) \to (0,j)$$

w związku z czym spinory ξ i η zamieniają się rolami

$$\xi \leftrightarrow \eta.$$

Orbitalny moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ transformuje się przy odbiciu tak samo

$$\vec{L} \to (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) = \vec{L}.$$

Z tego względu $\vec{J}$ i $\vec{L}$ nazywa się pseudo wektorami.
Zauważmy, że przy transformacji odbicia przestrzennego

$$\vec{K} \to -\vec{K} \qquad \Rightarrow \qquad (j,0) \to (0,j)$$

w związku z czym spinory ξ i η zamieniają się rolami

$$\xi \leftrightarrow \eta.$$

W takim razie dwuskładnikowe spinory ξ i η możemy potraktować jak składowe bispinora Diraca

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

Spinor Diraca

Orbitalny moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ transformuje się przy odbiciu tak samo

$$\vec{L} \to (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) = \vec{L}.$$

Z tego względu $\vec{J}$ i $\vec{L}$ nazywa się pseudo wektorami. Zauważmy, że przy transformacji odbicia przestrzennego

$$\vec{K} \to -\vec{K} \qquad \Rightarrow \qquad (j, 0) \to (0, j)$$

w związku z czym spinory ξ i η zamieniają się rolami

$$\xi \leftrightarrow \eta.$$

W takim razie dwuskładnikowe spinory ξ i η możemy potraktować jak składowe bispinora Diraca

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

który przy transformacji Lorentza

$$x \to \Lambda x \qquad \Rightarrow \qquad x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu},$$

będzie transformował się następująco

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix} \to \psi'(x') = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\varphi})} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\varphi})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} D(\Lambda) & 0 \\ 0 & \bar{D}(\Lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix},$$

gdzie

$$\bar{D}(\Lambda) = \zeta D^{*}(\Lambda) \zeta^{-1}.$$

To jest dokładnie takie samo prawo transformacyjne, jakie otrzymaliśmy dla spinorów Diraca dowodząc lorentzowskiej współzmienniczości równania Diraca.

Spinor Diraca

który przy transformacji Lorentza

$$x \to \Lambda x \qquad \Rightarrow \qquad x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu},$$

będzie transformował się następująco

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix} \to \psi'(x') = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\varphi})} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\varphi})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} D(\Lambda) & 0 \\ 0 & \bar{D}(\Lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix},$$

gdzie

$$\bar{D}(\Lambda) = \zeta D^{*}(\Lambda)\zeta^{-1}.$$

To jest dokładnie takie samo prawo transformacyjne, jakie otrzymaliśmy dla spinorów Diraca dowodząc lorentzowskiej współzmienniczości równania Diraca.

Spinor Diraca

Przy odbiciu przestrzennym bispinor ψ transformuje się następująco

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \to \psi' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}.$$

Rozszerzenie ciągłej grupy Lorentza o odbicia przestrzenne sprawia, że czteroskładnikowe spinory Diraca ψ, nazywane też bispinorami, transformują się zgodnie z nieprzywiedlną reprezentację tej rozszerzonej grupy:

Spinor Diraca

Przy odbiciu przestrzennym bispinor ψ transformuje się następująco

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \to \psi' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}.$$

Rozszerzenie ciągłej grupy Lorentza o odbicia przestrzenne sprawia, że czteroskładnikowe spinory Diraca ψ, nazywane też bispinorami, transformują się zgodnie z nieprzywiedlną reprezentację tej rozszerzonej grupy:

$$\begin{pmatrix} D(\Lambda) & 0 \\ 0 & \bar{D}(\Lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\varphi})} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\varphi})} \end{pmatrix}$$

Zauważmy jednak, że jest to reprezentacja nieunitarna, gdyż tworzące ją macierze nie są unitarne, gdyż macierz $e^{\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}}$ jest nieunitarna.

Spinor Diraca

Przy odbiciu przestrzennym bispinor ψ transformuje się następująco

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \to \psi' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}.$$

Rozszerzenie ciągłej grupy Lorentza o odbicia przestrzenne sprawia, że czteroskładnikowe spinory Diraca ψ, nazywane też bispinorami, transformują się zgodnie z nieprzywiedlną reprezentację tej rozszerzonej grupy:

$$\begin{pmatrix} D(\Lambda) & 0 \\ 0 & \bar{D}(\Lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\varphi})} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\varphi})} \end{pmatrix}$$

Zauważmy jednak, że jest to reprezentacja nieunitarna, gdyż tworzące ją macierze nie są unitarne, gdyż macierz $e^{\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}}$ jest nieunitarna.

Spinor Diraca

W mechanice kwantowej zasadniczo interesują nas unitarne reprezentacje grup symetrii, gdyż tylko dla transformacji unitarnych gęstość prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy dwoma stanami kwantowymi nie zależy od wyboru układu odniesienia, w którym prowadzimy pomiary.

W takim razie dla grupy Lorentza otrzymaliśmy wynik, który nie spełnia naszych oczekiwań.

Spinor Diraca

W mechanice kwantowej zasadniczo interesują nas unitarne reprezentacje grup symetrii, gdyż tylko dla transformacji unitarnych gęstość prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy dwoma stanami kwantowymi nie zależy od wyboru układu odniesienia, w którym prowadzimy pomiary.

W takim razie dla grupy Lorentza otrzymaliśmy wynik, który nie spełnia naszych oczekiwań.

Nieistnienie skończenie wymiarowych unitarnych reprezentacji grupy Lorentza wiąże się z tym, że nie jest ona grupą zwartą. Fakt ten wiąże się z tym, że prędkości względne, będące parametrami pchnięć lorentzowskich, przyjmują wartości w przedziale lewostronnie otwartym

$$v \in [0, c) \quad \Rightarrow \quad \beta \in [0, 1),$$

gdyż v nigdy nie może osiągnąć wartości c, podczas gdy kąty obrotu θ można zmieniać w przedziale domkniętym $[0, 2\pi]$, jeśli utożsamimy wartości $\theta = 0$ i $\theta = 2\pi$, zamykając odcinek w okrąg.

Spinor Diraca

W mechanice kwantowej zasadniczo interesują nas unitarne reprezentacje grup symetrii, gdyż tylko dla transformacji unitarnych gęstość prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy dwoma stanami kwantowymi nie zależy od wyboru układu odniesienia, w którym prowadzimy pomiary.
W takim razie dla grupy Lorentza otrzymaliśmy wynik, który nie spełnia naszych oczekiwań.
Nieistnienie skończenie wymiarowych unitarnych reprezentacji grupy Lorentza wiąże się z tym, że nie jest ona grupą zwartą.
Fakt ten wiąże się z tym, że prędkości względne, będące parametrami pchnięć lorentzowskich, przyjmują wartości w przedziale lewostronnie otwartym

$$v \in [0, c) \quad \Rightarrow \quad \beta \in [0, 1),$$

gdyż v nigdy nie może osiągnąć wartości c, podczas gdy kąty obrotu θ można zmieniać w przedziale domkniętym $[0, 2\pi]$, jeśli utożsamimy wartości $\theta = 0$ i $\theta = 2\pi$, zamykając odcinek w okrąg.