

# Granica nierelatywistyczna

## Wykład 28

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki  
Uniwersytet Śląski, Katowice  
<http://kk.us.edu.pl>

# Cząstka w zewnętrznym polu EM

Rozważmy oddziaływanie cząstki diracowskiej z zewnętrznym polem elektromagnetycznym (EM) opisywanym czteropotencjałem

$$A^\mu(x) = (\varphi(t, \vec{x}), \vec{A}(t, \vec{x})).$$

Oddziaływanie to uwzględnimy przez zamianę czteropędu cząstki

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu \equiv \pi_\mu, \quad \text{gdzie } e = -|e|.$$

# Cząstka w zewnętrznym polu EM

Rozważmy oddziaływanie cząstki diracowskiej z zewnętrznym polem elektromagnetycznym (EM) opisywanym czteropotencjałem

$$A^\mu(x) = (\varphi(t, \vec{x}), \vec{A}(t, \vec{x})).$$

Oddziaływanie to uwzględnimy przez zamianę czteropędu cząstki

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu \equiv \pi_\mu, \quad \text{gdzie } e = -|e|.$$

W mechanice kwantowej odpowiada to podstawieniu

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - eA_\mu, \quad (\hbar = 1)$$

w równaniu Diraca.

# Cząstka w zewnętrznym polu EM

Rozważmy oddziaływanie cząstki diracowskiej z zewnętrznym polem elektromagnetycznym (EM) opisywanym czteropotencjałem

$$A^\mu(x) = (\varphi(t, \vec{x}), \vec{A}(t, \vec{x})).$$

Oddziaływanie to uwzględnimy przez zamianę czteropędu cząstki

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu \equiv \pi_\mu, \quad \text{gdzie } e = -|e|.$$

W mechanice kwantowej odpowiada to podstawieniu

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - eA_\mu, \quad (\hbar = 1)$$

w równaniu Diraca.

# Operator czteropędu

Zauważmy, że znana z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej reguła podstawienia

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

w mechanice relatywistycznej przybiera postać następującą

$$p_\mu = \left( \frac{E}{c}, -\vec{p} \right)$$

# Operator czteropędu

Zauważmy, że znana z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej reguła podstawienia

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

w mechanice relatywistycznej przybiera postać następującą

$$p_\mu = \left( \frac{E}{c}, -\vec{p} \right) \rightarrow i\hbar \partial_\mu$$

# Operator czteropędu

Zauważmy, że znana z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej reguła podstawienia

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

w mechanice relatywistycznej przybiera postać następującą

$$p_\mu = \left( \frac{E}{c}, -\vec{p} \right) \rightarrow i\hbar \partial_\mu = i\hbar (\partial_0, \partial_i)$$

# Operator czteropędu

Zauważmy, że znana z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej reguła podstawienia

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

w mechanice relatywistycznej przybiera postać następującą

$$p_\mu = \left( \frac{E}{c}, -\vec{p} \right) \rightarrow i\hbar \partial_\mu = i\hbar (\partial_0, \partial_i) = \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial ct}, i\hbar \vec{\nabla} \right),$$



# Operator czteropędu

Zauważmy, że znana z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej reguła podstawienia

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

w mechanice relatywistycznej przybiera postać następującą

$$p_\mu = \left( \frac{E}{c}, -\vec{p} \right) \rightarrow i\hbar \partial_\mu = i\hbar (\partial_0, \partial_i) = \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial ct}, i\hbar \vec{\nabla} \right),$$

co dla składowych kontrawariantnych czterowektora pędu daje

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

# Operator czteropędu

Zauważmy, że znana z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej reguła podstawienia

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

w mechanice relatywistycznej przybiera postać następującą

$$p_\mu = \left( \frac{E}{c}, -\vec{p} \right) \rightarrow i\hbar \partial_\mu = i\hbar (\partial_0, \partial_i) = \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial ct}, i\hbar \vec{\nabla} \right),$$

co dla składowych kontrawariantnych czterowektora pędu daje

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right) \rightarrow i\hbar \partial^\mu$$

# Operator czteropędu

Zauważmy, że znana z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej reguła podstawienia

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

w mechanice relatywistycznej przybiera postać następującą

$$p_\mu = \left( \frac{E}{c}, -\vec{p} \right) \rightarrow i\hbar \partial_\mu = i\hbar (\partial_0, \partial_i) = \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial ct}, i\hbar \vec{\nabla} \right),$$

co dla składowych kontrawariantnych czterowektora pędu daje

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right) \rightarrow i\hbar \partial^\mu = i\hbar (\partial^0, \partial^i)$$

# Operator czteropędu

Zauważmy, że znana z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej reguła podstawienia

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

w mechanice relatywistycznej przybiera postać następującą

$$p_\mu = \left( \frac{E}{c}, -\vec{p} \right) \rightarrow i\hbar \partial_\mu = i\hbar (\partial_0, \partial_i) = \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial ct}, i\hbar \vec{\nabla} \right),$$

co dla składowych kontrawariantnych czterowektora pędu daje

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right) \rightarrow i\hbar \partial^\mu = i\hbar (\partial^0, \partial^i) = \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial ct}, -i\hbar \vec{\nabla} \right).$$

# Operator czteropędu

Zauważmy, że znana z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej reguła podstawienia

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

w mechanice relatywistycznej przybiera postać następującą

$$p_\mu = \left( \frac{E}{c}, -\vec{p} \right) \rightarrow i\hbar \partial_\mu = i\hbar (\partial_0, \partial_i) = \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial ct}, i\hbar \vec{\nabla} \right),$$

co dla składowych kontrawariantnych czterowektora pędu daje

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right) \rightarrow i\hbar \partial^\mu = i\hbar (\partial^0, \partial^i) = \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial ct}, -i\hbar \vec{\nabla} \right).$$

To właśnie dlatego wprowadziliśmy znak “-” w definicji operatora pędu.

# Operator czteropędu

Zauważmy, że znana z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej reguła podstawienia

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

w mechanice relatywistycznej przybiera postać następującą

$$p_\mu = \left( \frac{E}{c}, -\vec{p} \right) \rightarrow i\hbar \partial_\mu = i\hbar (\partial_0, \partial_i) = \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial ct}, i\hbar \vec{\nabla} \right),$$

co dla składowych kontrawariantnych czterowektora pędu daje

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right) \rightarrow i\hbar \partial^\mu = i\hbar (\partial^0, \partial^i) = \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial ct}, -i\hbar \vec{\nabla} \right).$$

To właśnie dlatego wprowadziliśmy znak “-” w definicji operatora pędu.

# Cząstka w zewnętrznym polu EM

Równanie Diraca przybiera wtedy postać

$$(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m)\psi(x) = 0,$$

gdzie  $\cancel{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$  i  $\cancel{A} = \gamma^\mu A_\mu$ .

Aby równanie Diraca dla cząstki w zewnętrznym polu EM było relatywistycznie współzmiennicze, trzeba przyjąć, że kowariantne składowe czteropotencjału  $A_\mu(x)$  transformują się przy transformacjach Lorentza jak czterowektor kowariantny, tzn.

$$A'_\mu(\Lambda x) = A_\nu(x) (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu,$$

# Cząstka w zewnętrznym polu EM

Równanie Diraca przybiera wtedy postać

$$(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m)\psi(x) = 0,$$

gdzie  $\cancel{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$  i  $\cancel{A} = \gamma^\mu A_\mu$ .

Aby równanie Diraca dla cząstki w zewnętrznym polu EM było relatywistycznie współmiennicze, trzeba przyjąć, że kowariantne składowe czteropotencjału  $A_\mu(x)$  transformują się przy transformacjach Lorentza jak czterowektor kowariantny, tzn.

$$A'_\mu(\Lambda x) = A_\nu(x) (\Lambda^{-1})^\nu_\mu,$$

Nasze równanie posiada jeszcze inną symetrię, niezwiązaną z transformacjami czasoprzestrzeni, mianowicie lokalną niezmienniczość cechowania  $U(1)$ ,



Równanie Diraca przybiera wtedy postać

$$(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m)\psi(x) = 0,$$

gdzie  $\cancel{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$  i  $\cancel{A} = \gamma^\mu A_\mu$ .

Aby równanie Diraca dla cząstki w zewnętrznym polu EM było **relatywistycznie współmiennicze**, trzeba przyjąć, że kowariantne składowe czteropotencjału  $A_\mu(x)$  transformują się przy transformacjach Lorentza jak czterowektor kowariantny, tzn.

$$A'_\mu(\Lambda x) = A_\nu(x) \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu_\mu,$$

Nasze równanie posiada jeszcze inną symetrię, niezwiązaną z transformacjami czasoprzestrzeni, mianowicie **lokalną niezmienniczość cechowania  $U(1)$** ,

tn. niezmienniczość względem przekształceń

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\psi(x),$$

gdzie  $\alpha(x) \in \mathbb{R}$  jest dowolną różniczkowalną funkcją punktu czasoprzestrzeni Minkowskiego  $x$ ,

ozn. niezmienniczość względem przekształceń

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\psi(x),$$

gdzie  $\alpha(x) \in \mathbb{R}$  jest dowolną różniczkowalną funkcją punktu czasoprzestrzeni Minkowskiego  $x$ , pod warunkiem, że czteropotencjał będzie się transformował następująco

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x).$$

tn. niezmienniczość względem przekształceń

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\psi(x),$$

gdzie  $\alpha(x) \in \mathbb{R}$  jest dowolną różniczkowalną funkcją punktu czasoprzestrzeni Minkowskiego  $x$ , pod warunkiem, że czteropotencjał będzie się transformował następująco

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x).$$

**Zadanie.** Pokazać, że zbiór przekształceń postaci  $e^{ie\alpha(x)}$  tworzy jednoparametrową, abelową grupę przekształceń unitarnych, którą oznaczamy  $U(1)$ .

tzn. niezmienniczość względem przekształceń

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\psi(x),$$

gdzie  $\alpha(x) \in \mathbb{R}$  jest dowolną różniczkowalną funkcją punktu czasoprzestrzeni Minkowskiego  $x$ , pod warunkiem, że czteropotencjał będzie się transformował następująco

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x).$$

**Zadanie.** Pokazać, że zbiór przekształceń postaci  $e^{ie\alpha(x)}$  tworzy jednoparametrową, abelową grupę przekształceń unitarnych, którą oznaczamy  $U(1)$ .

Udowodnijmy niezmienniczość cechowania rozpatrywanego równania. Ponieważ

$$\partial_\mu (\psi'(x)) =$$

Udowodnijmy niezmienniczość cechowania rozpatrywanego równania. Ponieważ

$$\partial_\mu (\psi'(x)) = \partial_\mu \left( e^{ie\alpha(x)} \psi(x) \right) =$$

Udowodnijmy niezmienniczość cechowania rozpatrywanego równania. Ponieważ

$$\partial_\mu (\psi'(x)) = \partial_\mu \left( e^{ie\alpha(x)} \psi(x) \right) = ie\partial_\mu \alpha(x) e^{ie\alpha(x)} \psi(x) + e^{ie\alpha(x)} \partial_\mu \psi(x),$$



Udowodnijmy niezmienniczość cechowania rozpatrywanego równania. Ponieważ

$$\partial_\mu (\psi'(x)) = \partial_\mu \left( e^{ie\alpha(x)} \psi(x) \right) = ie\partial_\mu \alpha(x) e^{ie\alpha(x)} \psi(x) + e^{ie\alpha(x)} \partial_\mu \psi(x),$$

to lewa strona równania Diraca po transformacji cechowania będzie miała postać

$$(i\cancel{\partial} - e\cancel{A}' - m) \psi'(x) =$$

Udowodnijmy niezmienniczość cechowania rozpatrywanego równania. Ponieważ

$$\partial_\mu (\psi'(x)) = \partial_\mu \left( e^{ie\alpha(x)} \psi(x) \right) = ie\partial_\mu \alpha(x) e^{ie\alpha(x)} \psi(x) + e^{ie\alpha(x)} \partial_\mu \psi(x),$$

to lewa strona równania Diraca po transformacji cechowania będzie miała postać

$$(i\partial - eA' - m) \psi'(x) = e^{ie\alpha(x)} \left[ i\partial - e\gamma^\mu (\partial_\mu \alpha + A'_\mu) - m \right] \psi(x).$$

Udowodnijmy niezmienniczość cechowania rozpatrywanego równania. Ponieważ

$$\partial_\mu (\psi'(x)) = \partial_\mu \left( e^{ie\alpha(x)} \psi(x) \right) = ie\partial_\mu \alpha(x) e^{ie\alpha(x)} \psi(x) + e^{ie\alpha(x)} \partial_\mu \psi(x),$$

to lewa strona równania Diraca po transformacji cechowania będzie miała postać

$$(i\partial - eA' - m) \psi'(x) = e^{ie\alpha(x)} \left[ i\partial - e\gamma^\mu (\partial_\mu \alpha + A'_\mu) - m \right] \psi(x).$$

Widać, że prawa strona będzie równa zero na podstawie wyjściowego równania Diraca, jeżeli

$$\partial_\mu \alpha + A'_\mu = A_\mu \quad \Leftrightarrow \quad A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha.$$

Udowodnijmy niezmienniczość cechowania rozpatrywanego równania. Ponieważ

$$\partial_\mu (\psi'(x)) = \partial_\mu \left( e^{ie\alpha(x)} \psi(x) \right) = ie\partial_\mu \alpha(x) e^{ie\alpha(x)} \psi(x) + e^{ie\alpha(x)} \partial_\mu \psi(x),$$

to lewa strona równania Diraca po transformacji cechowania będzie miała postać

$$(i\partial - eA' - m) \psi'(x) = e^{ie\alpha(x)} \left[ i\partial - e\gamma^\mu (\partial_\mu \alpha + A'_\mu) - m \right] \psi(x).$$

Widać, że prawa strona będzie równa zero na podstawie wyjściowego równania Diraca, jeżeli

$$\partial_\mu \alpha + A'_\mu = A_\mu \quad \Leftrightarrow \quad A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha.$$

# Cząstka w zewnętrznym polu EM

Przekształćmy równanie Diraca dla cząstki w zewnętrznym polu EM

$$(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m)\psi = 0.$$

Rozpisując  $\cancel{\partial}$  i  $\cancel{A}$  w składowych otrzymamy

$$(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - e\gamma^0A_0 - e\gamma^iA_i - m)\psi = 0.$$

# Cząstka w zewnętrznym polu EM

Przekształćmy równanie Diraca dla cząstki w zewnętrznym polu EM

$$(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m)\psi = 0.$$

Rozpisując  $\cancel{\partial}$  i  $\cancel{A}$  w składowych otrzymamy

$$(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - e\gamma^0A_0 - e\gamma^iA_i - m)\psi = 0.$$

Mnożąc lewostronnie przez  $\gamma^0$  otrzymamy

$$(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^iA_i - m\gamma^0)\psi = 0,$$

gdzie skorzystaliśmy z równości  $(\gamma^0)^2 = \mathbb{I}$ .

# Cząstka w zewnętrznym polu EM

Przekształćmy równanie Diraca dla cząstki w zewnętrznym polu EM

$$(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m)\psi = 0.$$

Rozpisując  $\cancel{\partial}$  i  $\cancel{A}$  w składowych otrzymamy

$$(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - e\gamma^0A_0 - e\gamma^iA_i - m)\psi = 0.$$

Mnożąc lewostronnie przez  $\gamma^0$  otrzymamy

$$(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^iA_i - m\gamma^0)\psi = 0,$$

gdzie skorzystaliśmy z równości  $(\gamma^0)^2 = \mathbb{I}$ .

# Cząstka w zewnętrznym polu EM

Równanie

$$(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^iA_i - m\gamma^0)\psi = 0$$

możemy przepisać w formie

$$(i\partial_0 + i\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} - eA^0 + e\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{A} - m\gamma^0)\psi = 0,$$

gdzie wykorzystaliśmy związki

$$A^0 = A_0, \quad A^i = -A_i, \quad \vec{\nabla} = [\partial_1, \partial_2, \partial_3].$$



# Cząstka w zewnętrznym polu EM

Równanie

$$(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^iA_i - m\gamma^0)\psi = 0$$

możemy przepisać w formie

$$(i\partial_0 + i\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} - eA^0 + e\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{A} - m\gamma^0)\psi = 0,$$

gdzie wykorzystaliśmy związki

$$A^0 = A_0, \quad A^i = -A_i, \quad \vec{\nabla} = [\partial_1, \partial_2, \partial_3].$$

Powróćmy do macierzy  $\beta$  i  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

# Cząstka w zewnętrznym polu EM

Równanie

$$(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^iA_i - m\gamma^0)\psi = 0$$

możemy przepisać w formie

$$(i\partial_0 + i\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} - eA^0 + e\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{A} - m\gamma^0)\psi = 0,$$

gdzie wykorzystaliśmy związki

$$A^0 = A_0, \quad A^i = -A_i, \quad \vec{\nabla} = [\partial_1, \partial_2, \partial_3].$$

Powróćmy do macierzy  $\beta$  i  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\gamma^0 = \beta,$$

# Cząstka w zewnętrznym polu EM

Równanie

$$(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^iA_i - m\gamma^0)\psi = 0$$

możemy przepisać w formie

$$(i\partial_0 + i\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} - eA^0 + e\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{A} - m\gamma^0)\psi = 0,$$

gdzie wykorzystaliśmy związki

$$A^0 = A_0, \quad A^i = -A_i, \quad \vec{\nabla} = [\partial_1, \partial_2, \partial_3].$$

Powróćmy do macierzy  $\beta$  i  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha_i$$

Równanie

$$(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^iA_i - m\gamma^0)\psi = 0$$

możemy przepisać w formie

$$(i\partial_0 + i\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} - eA^0 + e\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{A} - m\gamma^0)\psi = 0,$$

gdzie wykorzystaliśmy związki

$$A^0 = A_0, \quad A^i = -A_i, \quad \vec{\nabla} = [\partial_1, \partial_2, \partial_3].$$

Powróćmy do macierzy  $\beta$  i  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha_i \Rightarrow \gamma^0\vec{\gamma} = \vec{\alpha},$$

gdzież  $\beta^2 = (\gamma^0)^2 = \mathbb{I}$ .

Równanie

$$(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^iA_i - m\gamma^0)\psi = 0$$

możemy przepisać w formie

$$(i\partial_0 + i\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} - eA^0 + e\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{A} - m\gamma^0)\psi = 0,$$

gdzie wykorzystaliśmy związki

$$A^0 = A_0, \quad A^i = -A_i, \quad \vec{\nabla} = [\partial_1, \partial_2, \partial_3].$$

Powróćmy do macierzy  $\beta$  i  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha_i \quad \Rightarrow \quad \gamma^0\vec{\gamma} = \vec{\alpha},$$

gdzież  $\beta^2 = (\gamma^0)^2 = \mathbb{I}$ .

# Cząstka w zewnętrznym polu EM

Równanie

$$(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^i A_i - m\gamma^0)\psi = 0$$

możemy wtedy przepisać w formie następującej

$$(i\partial_0 + i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - eA^0 + e\vec{\alpha} \cdot \vec{A} - m\beta)\psi = 0,$$

co daje równanie

$$i\partial_0\psi = [\vec{\alpha} \cdot (-i\vec{\nabla} - e\vec{A}) + eA^0 + m\beta]\psi.$$

Zauważmy, że równanie to mogliśmy otrzymać podstawiając  $\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla} - e\vec{A}$  oraz dodając wyraz  $e\phi = eA^0$  reprezentujący energię oddziaływania z zewnętrznym polem elektrycznym

# Cząstka w zewnętrznym polu EM

Równanie

$$(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^i A_i - m\gamma^0)\psi = 0$$

możemy wtedy przepisać w formie następującej

$$(i\partial_0 + i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - eA^0 + e\vec{\alpha} \cdot \vec{A} - m\beta)\psi = 0,$$

co daje równanie

$$i\partial_0\psi = [\vec{\alpha} \cdot (-i\vec{\nabla} - e\vec{A}) + eA^0 + m\beta]\psi.$$

Zauważmy, że równanie to moglibyśmy otrzymać podstawiając  $\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla} - e\vec{A}$  oraz dodając wyraz  $e\phi = eA^0$  reprezentujący energię oddziaływania z zewnętrznym polem elektrycznym w hamiltonianie Diraca

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m\beta,$$

tak jak robiliśmy w mechanice nierelatywistycznej.

# Cząstka w zewnętrznym polu EM

Równanie

$$\left( i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - eA_0 - e\gamma^0\gamma^i A_i - m\gamma^0 \right) \psi = 0$$

możemy wtedy przepisać w formie następującej

$$\left( i\partial_0 + i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - eA^0 + e\vec{\alpha} \cdot \vec{A} - m\beta \right) \psi = 0,$$

co daje równanie

$$i\partial_0\psi = \left[ \vec{\alpha} \cdot \left( -i\vec{\nabla} - e\vec{A} \right) + eA^0 + m\beta \right] \psi.$$

Zauważmy, że równanie to mogliśmy otrzymać podstawiając  $\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla} - e\vec{A}$  oraz dodając wyraz  $e\phi = eA^0$  reprezentujący energię oddziaływania z zewnętrznym polem elektrycznym w hamiltonianie Diraca

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m\beta,$$

tak jak robiliśmy w mechanice nierelatywistycznej.



Zauważmy, że prawą stronę równania możemy zapisać w formie

$$i\partial_0\psi = \left[ \vec{\alpha} \cdot \left( -i\vec{\nabla} - e\vec{A} \right) + eA^0 + m\beta \right] \psi$$

=

Zauważmy, że prawą stronę równania możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned}i\partial_0\psi &= \left[ \vec{\alpha} \cdot \left( -i\vec{\nabla} - e\vec{A} \right) + eA^0 + m\beta \right] \psi \\ &= \underbrace{\left[ \vec{\alpha} \cdot \left( -i\vec{\nabla} \right) + m\beta \right]}_{H_0} + \underbrace{e \left( -\vec{\alpha} \cdot \vec{A} + A^0 \right)}_{H_I} \psi\end{aligned}$$

Zauważmy, że prawą stronę równania możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned}i\partial_0\psi &= \left[ \vec{\alpha} \cdot \left( -i\vec{\nabla} - e\vec{A} \right) + eA^0 + m\beta \right] \psi \\ &= \underbrace{\left[ \vec{\alpha} \cdot \left( -i\vec{\nabla} \right) + m\beta \right]}_{H_0} \underbrace{\left[ -\vec{\alpha} \cdot \vec{A} + A^0 \right]}_{H_I} \psi = (H_0 + H_I) \psi.\end{aligned}$$

Zauważmy, że prawą stronę równania możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned}i\partial_0\psi &= \left[ \vec{\alpha} \cdot \left( -i\vec{\nabla} - e\vec{A} \right) + eA^0 + m\beta \right] \psi \\ &= \underbrace{\left[ \vec{\alpha} \cdot \left( -i\vec{\nabla} \right) + m\beta \right]}_{H_0} \underbrace{\left[ -\vec{\alpha} \cdot \vec{A} + A^0 \right]}_{H_I} \psi = (H_0 + H_I) \psi.\end{aligned}$$

Oznaczmy  $\vec{\pi} = -i\vec{\nabla} - e\vec{A}$ , wtedy pierwsza równość przybiera postać

$$i\partial_0\psi = \left[ \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + eA^0 + m\beta \right] \psi.$$

Zauważmy, że prawą stronę równania możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned}i\partial_0\psi &= \left[ \vec{\alpha} \cdot \left( -i\vec{\nabla} - e\vec{A} \right) + eA^0 + m\beta \right] \psi \\ &= \underbrace{\left[ \vec{\alpha} \cdot \left( -i\vec{\nabla} \right) + m\beta \right]}_{H_0} + \underbrace{e \left( -\vec{\alpha} \cdot \vec{A} + A^0 \right)}_{H_I} \psi = (H_0 + H_I) \psi.\end{aligned}$$

Oznaczmy  $\vec{\pi} = -i\vec{\nabla} - e\vec{A}$ , wtedy pierwsza równość przybiera postać

$$i\partial_0\psi = \left[ \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + eA^0 + m\beta \right] \psi.$$

Zbadajmy granicę nierelatywistyczną tego równania, tzn. założmy, że prędkość cząstki spełnia warunek  $v \ll c$ .

Zauważmy, że prawą stronę równania możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned}i\partial_0\psi &= \left[ \vec{\alpha} \cdot \left( -i\vec{\nabla} - e\vec{A} \right) + eA^0 + m\beta \right] \psi \\ &= \underbrace{\left[ \vec{\alpha} \cdot \left( -i\vec{\nabla} \right) + m\beta \right]}_{H_0} \underbrace{\left[ -\vec{\alpha} \cdot \vec{A} + A^0 \right]}_{H_I} \psi = (H_0 + H_I) \psi.\end{aligned}$$

Oznaczmy  $\vec{\pi} = -i\vec{\nabla} - e\vec{A}$ , wtedy pierwsza równość przybiera postać

$$i\partial_0\psi = \left[ \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + eA^0 + m\beta \right] \psi.$$

Zbadajmy **granice nierelatywistyczną** tego równania, tzn. założmy, że prędkość cząstki spełnia warunek  $v \ll c$ .

Macierze Diraca w reprezentacji Diraca mają postać

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \equiv \beta, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , są macierzami Pauliego.

W tej reprezentacji macierze  $\vec{\alpha}$  dane są wzorem

$$\vec{\alpha} = \beta \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

Macierze Diraca w reprezentacji Diraca mają postać

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \equiv \beta, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , są macierzami Pauliego.

W tej reprezentacji macierze  $\vec{\alpha}$  dane są wzorem

$$\vec{\alpha} = \beta \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}.$$



Macierze Diraca w reprezentacji Diraca mają postać

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \equiv \beta, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , są macierzami Pauliego.

W tej reprezentacji macierze  $\vec{\alpha}$  dane są wzorem

$$\vec{\alpha} = \beta \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}.$$

Spinor Diraca zapiszemy w formie

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Macierze Diraca w reprezentacji Diraca mają postać

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \equiv \beta, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , są macierzami Pauliego.

W tej reprezentacji macierze  $\vec{\alpha}$  dane są wzorem

$$\vec{\alpha} = \beta \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}.$$

Spinor Diraca zapiszemy w formie

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Równanie

$$i\partial_0\psi = [\vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + eA^0 + m\beta] \psi$$

w reprezentacji Diraca przybiera postać

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\pi} + eA^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Równanie

$$i\partial_0\psi = [\vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + eA^0 + m\beta] \psi$$

w reprezentacji Diraca przybiera postać

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\pi} + eA^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Dodając macierze w nawiasie kwadratowym otrzymamy równanie

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA^0 + m & \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & eA^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Równanie

$$i\partial_0\psi = [\vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + eA^0 + m\beta] \psi$$

w reprezentacji Diraca przybiera postać

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\pi} + eA^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Dodając macierze w nawiasie kwadratowym otrzymamy równanie

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA^0 + m & \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & eA^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Równanie

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA^0 + m & \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & eA^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

możemy rozbić na dwa równania na spinory dwuskładnikowe  $\varphi$  i  $\chi$

Równanie

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA^0 + m & \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & eA^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

możemy rozbić na dwa równania na spinory dwuskładnikowe  $\varphi$  i  $\chi$

$$i\partial_0\varphi$$

Równanie

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA^0 + m & \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & eA^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

możemy rozbić na dwa równania na spinory dwuskładnikowe  $\varphi$  i  $\chi$

$$i\partial_0\varphi =$$



Równanie

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA^0 + m & \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & eA^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

możemy rozbić na dwa równania na spinory dwuskładnikowe  $\varphi$  i  $\chi$

$$i\partial_0\varphi = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \chi + eA^0\varphi + m\varphi,$$

Równanie

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA^0 + m & \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & eA^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

możemy rozbić na dwa równania na spinory dwuskładnikowe  $\varphi$  i  $\chi$

$$\begin{aligned} i\partial_0 \varphi &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \chi + eA^0 \varphi + m\varphi, \\ i\partial_0 \chi & \end{aligned}$$

Równanie

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA^0 + m & \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & eA^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

możemy rozbić na dwa równania na spinory dwuskładnikowe  $\varphi$  i  $\chi$

$$\begin{aligned} i\partial_0\varphi &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \chi + eA^0\varphi + m\varphi, \\ i\partial_0\chi &= \end{aligned}$$

Równanie

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA^0 + m & \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & eA^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

możemy rozbić na dwa równania na spinory dwuskładnikowe  $\varphi$  i  $\chi$

$$i\partial_0\varphi = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \chi + eA^0\varphi + m\varphi,$$

$$i\partial_0\chi = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \varphi + eA^0\chi - m\chi.$$

Równanie

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA^0 + m & \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & eA^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

możemy rozbić na dwa równania na spinory dwuskładnikowe  $\varphi$  i  $\chi$

$$i\partial_0\varphi = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \chi + eA^0\varphi + m\varphi,$$

$$i\partial_0\chi = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \varphi + eA^0\chi - m\chi.$$

W granicy nierelatywistycznej dominuje energia spoczynkowa cząstki, a więc największe są wyrazy z masą cząstki  $m$ .

Równanie

$$i\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eA^0 + m & \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & eA^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

możemy rozbić na dwa równania na spinory dwuskładnikowe  $\varphi$  i  $\chi$

$$\begin{aligned} i\partial_0\varphi &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \chi + eA^0\varphi + m\varphi, \\ i\partial_0\chi &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \varphi + eA^0\chi - m\chi. \end{aligned}$$

W granicy nierelatywistycznej dominuje energia spoczynkowa cząstki, a więc największe są wyrazy z masą cząstki  $m$ .

Przypomnijmy, że dla stanów stacjonarnych zależność funkcji falowej od czasu ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

Ponieważ energia jest zdominowana przez masę, to możemy wprowadzić  $\Phi$  i  $\chi$ , które będą wolnozmiennie w czasie  $t$

$$\varphi = e^{-imt}\Phi, \quad \chi = e^{-imt}\chi, \quad (\hbar = c = 1).$$

Przypomnijmy, że dla stanów stacjonarnych zależność funkcji falowej od czasu ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

Ponieważ energia jest zdominowana przez masę, to możemy wprowadzić  $\Phi$  i  $\chi$ , które będą wolnozmiennie w czasie  $t$

$$\varphi = e^{-imt}\Phi, \quad \chi = e^{-imt}\chi, \quad (\hbar = c = 1).$$

Obliczmy pochodne czasowe

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} =$$



Przypomnijmy, że dla stanów stacjonarnych zależność funkcji falowej od czasu ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

Ponieważ energia jest zdominowana przez masę, to możemy wprowadzić  $\Phi$  i  $\chi$ , które będą wolnozmiennie w czasie  $t$

$$\varphi = e^{-imt}\Phi, \quad \chi = e^{-imt}\chi, \quad (\hbar = c = 1).$$

Obliczmy pochodne czasowe

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = i(-im)e^{-imt}\Phi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t} =$$

Przypomnijmy, że dla stanów stacjonarnych zależność funkcji falowej od czasu ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

Ponieważ energia jest zdominowana przez masę, to możemy wprowadzić  $\Phi$  i  $\chi$ , które będą wolnozmiennie w czasie  $t$

$$\varphi = e^{-imt}\Phi, \quad \chi = e^{-imt}\chi, \quad (\hbar = c = 1).$$

Obliczmy pochodne czasowe

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = i(-im)e^{-imt}\Phi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

Przypomnijmy, że dla stanów stacjonarnych zależność funkcji falowej od czasu ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

Ponieważ energia jest zdominowana przez masę, to możemy wprowadzić  $\Phi$  i  $\chi$ , które będą wolnozmiennie w czasie  $t$

$$\varphi = e^{-imt}\Phi, \quad \chi = e^{-imt}\chi, \quad (\hbar = c = 1).$$

Obliczmy pochodne czasowe

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = i(-im)e^{-imt}\Phi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$
$$i\frac{\partial\chi}{\partial t}$$

Przypomnijmy, że dla stanów stacjonarnych zależność funkcji falowej od czasu ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

Ponieważ energia jest zdominowana przez masę, to możemy wprowadzić  $\Phi$  i  $\chi$ , które będą wolnozmiennie w czasie  $t$

$$\varphi = e^{-imt}\Phi, \quad \chi = e^{-imt}\chi, \quad (\hbar = c = 1).$$

Obliczmy pochodne czasowe

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = i(-im)e^{-imt}\Phi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$
$$i\frac{\partial\chi}{\partial t} =$$

Przypomnijmy, że dla stanów stacjonarnych zależność funkcji falowej od czasu ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

Ponieważ energia jest zdominowana przez masę, to możemy wprowadzić  $\Phi$  i  $\chi$ , które będą wolnozmiennie w czasie  $t$

$$\varphi = e^{-imt}\Phi, \quad \chi = e^{-imt}\chi, \quad (\hbar = c = 1).$$

Obliczmy pochodne czasowe

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= i(-im)e^{-imt}\Phi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \\ i\frac{\partial\chi}{\partial t} &= m\chi + ie^{-imt}\frac{\partial\chi}{\partial t}. \end{aligned}$$

Przypomnijmy, że dla stanów stacjonarnych zależność funkcji falowej od czasu ma postać

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

Ponieważ energia jest zdominowana przez masę, to możemy wprowadzić  $\Phi$  i  $X$ , które będą wolnozmiennie w czasie  $t$

$$\varphi = e^{-imt}\Phi, \quad \chi = e^{-imt}X, \quad (\hbar = c = 1).$$

Obliczmy pochodne czasowe

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= i(-im)e^{-imt}\Phi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = m\varphi + ie^{-imt}\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \\ i\frac{\partial\chi}{\partial t} &= m\chi + ie^{-imt}\frac{\partial X}{\partial t}. \end{aligned}$$

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$m\varphi + ie^{-imt} \frac{\partial \Phi}{\partial t} =$$

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$m\varphi + ie^{-imt} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e^{-imt} \chi + eA^0 e^{-imt} \Phi + m\varphi,$$



Wstawmy wyniki do naszych równań

$$m\varphi + ie^{-imt} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e^{-imt} \chi + eA^0 e^{-imt} \Phi + m\varphi,$$
$$m\chi + ie^{-imt} \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$m\varphi + ie^{-imt} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e^{-imt} \chi + eA^0 e^{-imt} \Phi + m\varphi,$$
$$m\chi + ie^{-imt} \frac{\partial \chi}{\partial t} =$$

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$m\varphi + ie^{-imt} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e^{-imt} \chi + eA^0 e^{-imt} \Phi + m\varphi,$$
$$m\chi + ie^{-imt} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e^{-imt} \Phi + eA^0 e^{-imt} \chi - m\chi.$$

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$m\varphi + ie^{-imt} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e^{-imt} \chi + eA^0 e^{-imt} \Phi + m\varphi,$$
$$m\chi + ie^{-imt} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e^{-imt} \Phi + eA^0 e^{-imt} \chi - m\chi.$$

Zredukujmy wyrazy z masą  $m$  i pomnóżmy obustronnie przez  $e^{imt}$ , wówczas otrzymamy

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$m\varphi + ie^{-imt} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e^{-imt} \chi + eA^0 e^{-imt} \Phi + m\varphi,$$
$$m\chi + ie^{-imt} \frac{\partial \chi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e^{-imt} \Phi + eA^0 e^{-imt} \chi - m\chi.$$

Zredukujmy wyrazy z masą  $m$  i pomnóżmy obustronnie przez  $e^{imt}$ , wówczas otrzymamy

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} =$$

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$m\varphi + ie^{-imt} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e^{-imt} \chi + eA^0 e^{-imt} \Phi + m\varphi,$$

$$m\chi + ie^{-imt} \frac{\partial \chi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e^{-imt} \Phi + eA^0 e^{-imt} \chi - m\chi.$$

Zredukujmy wyrazy z masą  $m$  i pomnóżmy obustronnie przez  $e^{imt}$ , wówczas otrzymamy

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \chi + eA^0 \Phi,$$

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$m\varphi + ie^{-imt} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e^{-imt} X + eA^0 e^{-imt} \Phi + m\varphi,$$
$$m\chi + ie^{-imt} \frac{\partial X}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e^{-imt} \Phi + eA^0 e^{-imt} X - m\chi.$$

Zredukujmy wyrazy z masą  $m$  i pomnóżmy obustronnie przez  $e^{imt}$ , wówczas otrzymamy

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} X + eA^0 \Phi,$$
$$i \frac{\partial X}{\partial t}$$

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$m\varphi + ie^{-imt} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e^{-imt} X + eA^0 e^{-imt} \Phi + m\varphi,$$

$$m\chi + ie^{-imt} \frac{\partial X}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e^{-imt} \Phi + eA^0 e^{-imt} X - m\chi.$$

Zredukujmy wyrazy z masą  $m$  i pomnóżmy obustronnie przez  $e^{imt}$ , wówczas otrzymamy

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} X + eA^0 \Phi,$$

$$i \frac{\partial X}{\partial t} =$$



Wstawmy wyniki do naszych równań

$$\begin{aligned}m\varphi + ie^{-imt} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e^{-imt} X + eA^0 e^{-imt} \Phi + m\varphi, \\m\chi + ie^{-imt} \frac{\partial X}{\partial t} &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e^{-imt} \Phi + eA^0 e^{-imt} X - m\chi.\end{aligned}$$

Zredukujmy wyrazy z masą  $m$  i pomnóżmy obustronnie przez  $e^{imt}$ , wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned}i \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} X + eA^0 \Phi, \\i \frac{\partial X}{\partial t} &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Phi + eA^0 X - 2mX,\end{aligned}$$

gdzie po prawej stronie drugiego równania wykorzystaliśmy związek  $-2m\chi e^{imt} = -2mX$ .

Wstawmy wyniki do naszych równań

$$\begin{aligned}m\varphi + ie^{-imt} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e^{-imt} X + eA^0 e^{-imt} \Phi + m\varphi, \\m\chi + ie^{-imt} \frac{\partial X}{\partial t} &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e^{-imt} \Phi + eA^0 e^{-imt} X - m\chi.\end{aligned}$$

Zredukujmy wyrazy z masą  $m$  i pomnóżmy obustronnie przez  $e^{imt}$ , wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned}i \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} X + eA^0 \Phi, \\i \frac{\partial X}{\partial t} &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Phi + eA^0 X - 2mX,\end{aligned}$$

gdzie po prawej stronie drugiego równania wykorzystaliśmy związek  $-2m\chi e^{imt} = -2mX$ .

W drugim równaniu

$$i \frac{\partial X}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Phi + eA^0 X - 2mX$$

załóżmy, że  $eA^0 \ll 2m$  i skorzystajmy z założenia, że  $X$  jest wolnozmienną funkcją czasu, wtedy możemy je zapisać w formie

$$0 \approx \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Phi - 2mX$$

W drugim równaniu

$$i \frac{\partial X}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Phi + eA^0 X - 2mX$$

załóżmy, że  $eA^0 \ll 2m$  i skorzystajmy z założenia, że  $X$  jest wolnozmienną funkcją czasu, wtedy możemy je zapisać w formie

$$0 \approx \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Phi - 2mX \quad \Rightarrow \quad X \approx \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m} \Phi$$

W drugim równaniu

$$i \frac{\partial X}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Phi + eA^0 X - 2mX$$

załóżmy, że  $eA^0 \ll 2m$  i skorzystajmy z założenia, że  $X$  jest wolnozmienną funkcją czasu, wtedy możemy je zapisać w formie

$$0 \approx \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Phi - 2mX \quad \Rightarrow \quad X \approx \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m} \Phi \ll \Phi.$$

W drugim równaniu

$$i \frac{\partial X}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Phi + eA^0 X - 2mX$$

załóżmy, że  $eA^0 \ll 2m$  i skorzystajmy z założenia, że  $X$  jest wolnozmienną funkcją czasu, wtedy możemy je zapisać w formie

$$0 \approx \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Phi - 2mX \quad \Rightarrow \quad X \approx \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m} \Phi \ll \Phi.$$

Dlatego funkcje  $\chi$  i  $\varphi$  nazywamy odpowiednio małą i dużą składową spinora Diraca  $\psi$ .

W drugim równaniu

$$i \frac{\partial X}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Phi + eA^0 X - 2mX$$

załóżmy, że  $eA^0 \ll 2m$  i skorzystajmy z założenia, że  $X$  jest wolnozmienną funkcją czasu, wtedy możemy je zapisać w formie

$$0 \approx \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Phi - 2mX \quad \Rightarrow \quad X \approx \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m} \Phi \ll \Phi.$$

Dlatego funkcje  $\chi$  i  $\varphi$  nazywamy odpowiednio małą i dużą składową spinora Diraca  $\psi$ .

Wstawmy związek  $\chi \approx \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m} \Phi$  do pierwszego równania

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \chi + eA^0 \Phi$$

przyjmuje postać

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[ \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + eA^0 \right] \Phi.$$



Wstawmy związek  $X \approx \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m} \Phi$  do pierwszego równania

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} X + eA^0 \Phi$$

przyjmuje postać

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[ \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + eA^0 \right] \Phi.$$

Jest to [równanie Pauliego](#), które Wolfgang Pauli zaproponował w 1927 r. aby uwzględnić spin elektronu.

Wstawmy związek  $X \approx \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m} \Phi$  do pierwszego równania

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} X + eA^0 \Phi$$

przyjmuje postać

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[ \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + eA^0 \right] \Phi.$$

Jest to **równanie Pauliego**, które Wolfgang Pauli zaproponował w 1927 r. aby uwzględnić spin elektronu. Przypomnijmy, że  $\vec{\pi} = -i\vec{\nabla} - e\vec{A} = \vec{p} - e\vec{A}$ , a  $A^0$  jest potencjałem skalarnym.

Wstawmy związek  $X \approx \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m} \Phi$  do pierwszego równania

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} X + eA^0 \Phi$$

przyjmuje postać

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[ \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + eA^0 \right] \Phi.$$

Jest to **równanie Pauliego**, które Wolfgang Pauli zaproponował w 1927 r. aby uwzględnić spin elektronu. Przypomnijmy, że  $\vec{\pi} = -i\vec{\nabla} - e\vec{A} = \vec{p} - e\vec{A}$ , a  $A^0$  jest potencjałem skalarnym. Przyjrzyjmy się bliżej równaniu Pauliego.

Wstawmy związek  $X \approx \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m} \Phi$  do pierwszego równania

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} X + eA^0 \Phi$$

przyjmuje postać

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[ \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + eA^0 \right] \Phi.$$

Jest to **równanie Pauliego**, które Wolfgang Pauli zaproponował w 1927 r. aby uwzględnić spin elektronu. Przypomnijmy, że  $\vec{\pi} = -i\vec{\nabla} - e\vec{A} = \vec{p} - e\vec{A}$ , a  $A^0$  jest potencjałem skalarnym. Przyjrzyjmy się bliżej równaniu Pauliego.

# Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \Phi = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \Phi =$$

# Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \Phi = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \Phi = \sigma_i \pi_i \sigma_j \pi_j \Phi =$$

# Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \Phi = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \Phi = \sigma_i \pi_i \sigma_j \pi_j \Phi = (\delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k) \pi_i \pi_j \Phi,$$

gdzie wykorzystaliśmy związek  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$ .

# Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \Phi = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \Phi = \sigma_i \pi_i \sigma_j \pi_j \Phi = (\delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k) \pi_i \pi_j \Phi,$$

gdzie wykorzystaliśmy związek  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$ . Przekształćmy drugi wyraz

$$i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \pi_i \pi_j \Phi =$$



# Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \Phi = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \Phi = \sigma_i \pi_i \sigma_j \pi_j \Phi = (\delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k) \pi_i \pi_j \Phi,$$

gdzie wykorzystaliśmy związek  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$ . Przekształćmy drugi wyraz

$$i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \pi_i \pi_j \Phi = i \varepsilon_{ijk} \sigma_k (-i \partial_i - e A_i) (-i \partial_j - e A_j) \Phi$$

# Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \Phi = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \Phi = \sigma_i \pi_i \sigma_j \pi_j \Phi = (\delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k) \pi_i \pi_j \Phi,$$

gdzie wykorzystaliśmy związek  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$ . Przekształćmy drugi wyraz

$$\begin{aligned} i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \pi_i \pi_j \Phi &= i \varepsilon_{ijk} \sigma_k (-i \partial_i - e A_i) (-i \partial_j - e A_j) \Phi \\ &= \end{aligned}$$

# Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \Phi = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \Phi = \sigma_i \pi_i \sigma_j \pi_j \Phi = (\delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k) \pi_i \pi_j \Phi,$$

gdzie wykorzystaliśmy związek  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$ . Przekształćmy drugi wyraz

$$\begin{aligned} i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \pi_i \pi_j \Phi &= i \varepsilon_{ijk} \sigma_k (-i \partial_i - e A_i) (-i \partial_j - e A_j) \Phi \\ &= i \varepsilon_{ijk} \sigma_k [i \partial_i (e A_j \Phi) + e A_i i \partial_j \Phi], \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy równości  $\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j = 0$  i  $\varepsilon_{ijk} A_i A_j = 0$ .

# Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \Phi = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \Phi = \sigma_i \pi_i \sigma_j \pi_j \Phi = (\delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k) \pi_i \pi_j \Phi,$$

gdzie wykorzystaliśmy związek  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$ . Przekształćmy drugi wyraz

$$\begin{aligned} i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \pi_i \pi_j \Phi &= i \varepsilon_{ijk} \sigma_k (-i \partial_i - e A_i) (-i \partial_j - e A_j) \Phi \\ &= i \varepsilon_{ijk} \sigma_k [i \partial_i (e A_j \Phi) + e A_i i \partial_j \Phi], \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy równości  $\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j = 0$  i  $\varepsilon_{ijk} A_i A_j = 0$ .  
Obliczając pochodną iloczynu otrzymamy

$$i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \pi_i \pi_j \Phi =$$

# Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \Phi = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \Phi = \sigma_i \pi_i \sigma_j \pi_j \Phi = (\delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k) \pi_i \pi_j \Phi,$$

gdzie wykorzystaliśmy związek  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$ . Przekształćmy drugi wyraz

$$\begin{aligned} i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \pi_i \pi_j \Phi &= i \varepsilon_{ijk} \sigma_k (-i \partial_i - e A_i) (-i \partial_j - e A_j) \Phi \\ &= i \varepsilon_{ijk} \sigma_k [i \partial_i (e A_j \Phi) + e A_i i \partial_j \Phi], \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy równości  $\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j = 0$  i  $\varepsilon_{ijk} A_i A_j = 0$ .  
Obliczając pochodną iloczynu otrzymamy

$$\begin{aligned} i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \pi_i \pi_j \Phi &= i \sigma_k \varepsilon_{kij} [ie (\partial_i A_j) \Phi + ie A_j \partial_i \Phi + ie A_i \partial_j \Phi] \\ &= -e \sigma_k \varepsilon_{kij} (\partial_i A_j) \Phi - e \sigma_k \varepsilon_{kji} A_i \partial_j \Phi + e \sigma_k \varepsilon_{kji} A_i \partial_j \Phi, \end{aligned}$$

# Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \Phi = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \Phi = \sigma_i \pi_i \sigma_j \pi_j \Phi = (\delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k) \pi_i \pi_j \Phi,$$

gdzie wykorzystaliśmy związek  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$ . Przekształćmy drugi wyraz

$$\begin{aligned} i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \pi_i \pi_j \Phi &= i \varepsilon_{ijk} \sigma_k (-i \partial_i - e A_i) (-i \partial_j - e A_j) \Phi \\ &= i \varepsilon_{ijk} \sigma_k [i \partial_i (e A_j \Phi) + e A_i i \partial_j \Phi], \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy równości  $\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j = 0$  i  $\varepsilon_{ijk} A_i A_j = 0$ .  
Obliczając pochodną iloczynu otrzymamy

$$\begin{aligned} i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \pi_i \pi_j \Phi &= i \sigma_k \varepsilon_{kij} [ie (\partial_i A_j) \Phi + ie A_j \partial_i \Phi + ie A_i \partial_j \Phi] \\ &= -e \sigma_k \varepsilon_{kij} (\partial_i A_j) \Phi - e \sigma_k \varepsilon_{kji} A_i \partial_j \Phi + e \sigma_k \varepsilon_{kji} A_i \partial_j \Phi, \end{aligned}$$

gdzie w przedostatnim wyrazie zamieniliśmy  $i \leftrightarrow j$ .

# Równanie Pauliego

Rozważmy wyrażenie

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \Phi = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \Phi = \sigma_i \pi_i \sigma_j \pi_j \Phi = (\delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k) \pi_i \pi_j \Phi,$$

gdzie wykorzystaliśmy związek  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$ . Przekształćmy drugi wyraz

$$\begin{aligned} i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \pi_i \pi_j \Phi &= i \varepsilon_{ijk} \sigma_k (-i \partial_i - e A_i) (-i \partial_j - e A_j) \Phi \\ &= i \varepsilon_{ijk} \sigma_k [i \partial_i (e A_j \Phi) + e A_i i \partial_j \Phi], \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy równości  $\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j = 0$  i  $\varepsilon_{ijk} A_i A_j = 0$ .  
Obliczając pochodną iloczynu otrzymamy

$$\begin{aligned} i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \pi_i \pi_j \Phi &= i \sigma_k \varepsilon_{kij} [ie (\partial_i A_j) \Phi + ie A_j \partial_i \Phi + ie A_i \partial_j \Phi] \\ &= -e \sigma_k \varepsilon_{kij} (\partial_i A_j) \Phi - e \sigma_k \varepsilon_{kji} A_i \partial_j \Phi + e \sigma_k \varepsilon_{kji} A_i \partial_j \Phi, \end{aligned}$$

gdzie w przedostatnim wyrazie zamieniliśmy  $i \leftrightarrow j$ .

Dwa ostatnie wyrazy redukują się, dlatego

$$i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi = -e\sigma_k\varepsilon_{kij}(\partial_i A_j)\Phi =$$



Dwa ostatnie wyrazy redukują się, dlatego

$$i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi = -e\sigma_k\varepsilon_{kij}(\partial_i A_j)\Phi = -e\sigma_k(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k\Phi$$

Dwa ostatnie wyrazy redukują się, dlatego

$$\begin{aligned} i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= -e\sigma_k\varepsilon_{kij}(\partial_i A_j)\Phi = -e\sigma_k(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k\Phi \\ &= \end{aligned}$$

Dwa ostatnie wyrazy redukują się, dlatego

$$\begin{aligned} i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= -e\sigma_k\varepsilon_{kij}(\partial_i A_j)\Phi = -e\sigma_k(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k\Phi \\ &= -e\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})\Phi = \end{aligned}$$

Dwa ostatnie wyrazy redukują się, dlatego

$$\begin{aligned} i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= -e\sigma_k\varepsilon_{kij}(\partial_i A_j)\Phi = -e\sigma_k(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k\Phi \\ &= -e\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})\Phi = -e\vec{\sigma} \cdot \vec{B}\Phi, \end{aligned}$$

Dwa ostatnie wyrazy redukują się, dlatego

$$\begin{aligned} i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= -e\sigma_k\varepsilon_{kij}(\partial_i A_j)\Phi = -e\sigma_k(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k\Phi \\ &= -e\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})\Phi = -e\vec{\sigma} \cdot \vec{B}\Phi, \end{aligned}$$

gdzie wprowadziliśmy wektor indukcji magnetycznej  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ .

Dwa ostatnie wyrazy redukują się, dlatego

$$\begin{aligned} i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= -e\sigma_k\varepsilon_{kij}(\partial_i A_j)\Phi = -e\sigma_k(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k\Phi \\ &= -e\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})\Phi = -e\vec{\sigma} \cdot \vec{B}\Phi, \end{aligned}$$

gdzie wprowadziliśmy wektor indukcji magnetycznej  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ .

Zatem

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \Phi = (\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k)\pi_i\pi_j\Phi =$$

Dwa ostatnie wyrazy redukują się, dlatego

$$\begin{aligned}i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= -e\sigma_k\varepsilon_{kij}(\partial_i A_j)\Phi = -e\sigma_k(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k\Phi \\ &= -e\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})\Phi = -e\vec{\sigma} \cdot \vec{B}\Phi,\end{aligned}$$

gdzie wprowadziliśmy wektor indukcji magnetycznej  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ .  
Zatem

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \Phi = (\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k)\pi_i\pi_j\Phi = \vec{\pi}^2\Phi - e\vec{\sigma} \cdot \vec{B}\Phi.$$

Dwa ostatnie wyrazy redukują się, dlatego

$$\begin{aligned}i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j\Phi &= -e\sigma_k\varepsilon_{kij}(\partial_i A_j)\Phi = -e\sigma_k(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k\Phi \\ &= -e\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})\Phi = -e\vec{\sigma} \cdot \vec{B}\Phi,\end{aligned}$$

gdzie wprowadziliśmy wektor indukcji magnetycznej  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ .  
Zatem

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \Phi = (\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k)\pi_i\pi_j\Phi = \vec{\pi}^2\Phi - e\vec{\sigma} \cdot \vec{B}\Phi.$$



Równanie Pauliego

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[ \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + eA^0 \right] \Phi$$

możemy przepisać w formie

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[ \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} - \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + eA^0 \right] \Phi.$$

# Równanie Pauliego

Równanie Pauliego

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[ \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + eA^0 \right] \Phi$$

możemy przepisać w formie

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[ \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} - \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + eA^0 \right] \Phi.$$

Drugi wyraz po prawej stronie równania możemy zapisać jako

$$-\frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \equiv -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B},$$

# Równanie Pauliego

Równanie Pauliego

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[ \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + eA^0 \right] \Phi$$

możemy przepisać w formie

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[ \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} - \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + eA^0 \right] \Phi.$$

Drugi wyraz po prawej stronie równania możemy zapisać jako

$$-\frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \equiv -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B},$$

gdzie wprowadziliśmy spinowy moment magnetyczny elektronu  $\vec{\mu}_s$ .

# Równanie Pauliego

Równanie Pauliego

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[ \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + eA^0 \right] \Phi$$

możemy przepisać w formie

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[ \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} - \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + eA^0 \right] \Phi.$$

Drugi wyraz po prawej stronie równania możemy zapisać jako

$$-\frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \equiv -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B},$$

gdzie wprowadziliśmy **spinowy moment magnetyczny elektronu**  $\vec{\mu}_s$ .

# Równanie Pauliego

Spinowy moment magnetyczny elektronu możemy przepisać w formie

$$\vec{\mu}_s = \frac{e}{2m} \vec{\sigma} = 2 \left( \frac{e}{2m} \right) \frac{1}{2} \vec{\sigma}$$

# Równanie Pauliego

Spinowy moment magnetyczny elektronu możemy przepisać w formie

$$\vec{\mu}_s = \frac{e}{2m} \vec{\sigma} = 2 \left( \frac{e}{2m} \right) \frac{1}{2} \vec{\sigma} \equiv g \left( \frac{e}{2m} \right) \vec{S},$$

# Równanie Pauliego

Spinowy moment magnetyczny elektronu możemy przepisać w formie

$$\vec{\mu}_s = \frac{e}{2m} \vec{\sigma} = 2 \left( \frac{e}{2m} \right) \frac{1}{2} \vec{\sigma} \equiv g \left( \frac{e}{2m} \right) \vec{S},$$

gdzie stosunek  $\frac{e}{2m}$  nazywamy magnetonem Bohra,

# Równanie Pauliego

Spinowy moment magnetyczny elektronu możemy przepisać w formie

$$\vec{\mu}_s = \frac{e}{2m} \vec{\sigma} = 2 \left( \frac{e}{2m} \right) \frac{1}{2} \vec{\sigma} \equiv g \left( \frac{e}{2m} \right) \vec{S},$$

gdzie stosunek  $\frac{e}{2m}$  nazywamy magnetonem Bohra,  $g$  jest stosunkiem żyromagnetycznym, nazywanym też czynnikiem Landégo,



# Równanie Pauliego

Spinowy moment magnetyczny elektronu możemy przepisać w formie

$$\vec{\mu}_s = \frac{e}{2m} \vec{\sigma} = 2 \left( \frac{e}{2m} \right) \frac{1}{2} \vec{\sigma} \equiv g \left( \frac{e}{2m} \right) \vec{S},$$

gdzie stosunek  $\frac{e}{2m}$  nazywamy magnetonem Bohra,  $g$  jest stosunkiem żyromagnetycznym, nazywanym też czynnikiem Landégo, a  $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$  jest operatorem spinu elektronu w jednostkach  $\hbar = 1$ .

# Równanie Pauliego

Spinowy moment magnetyczny elektronu możemy przepisać w formie

$$\vec{\mu}_s = \frac{e}{2m} \vec{\sigma} = 2 \left( \frac{e}{2m} \right) \frac{1}{2} \vec{\sigma} \equiv g \left( \frac{e}{2m} \right) \vec{S},$$

gdzie stosunek  $\frac{e}{2m}$  nazywamy magnetonem Bohra,  $g$  jest stosunkiem żyromagnetycznym, nazywanym też czynnikiem Landégo, a  $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$  jest operatorem spinu elektronu w jednostkach  $\hbar = 1$ .

Nierelatywistyczne równanie Pauliego przewiduje wartość

$$g = 2,$$

# Równanie Pauliego

Spinowy moment magnetyczny elektronu możemy przepisać w formie

$$\vec{\mu}_s = \frac{e}{2m} \vec{\sigma} = 2 \left( \frac{e}{2m} \right) \frac{1}{2} \vec{\sigma} \equiv g \left( \frac{e}{2m} \right) \vec{S},$$

gdzie stosunek  $\frac{e}{2m}$  nazywamy magnetonem Bohra,  $g$  jest stosunkiem żyromagnetycznym, nazywanym też czynnikiem Landégo, a  $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$  jest operatorem spinu elektronu w jednostkach  $\hbar = 1$ .

Nierelatywistyczne równanie Pauliego przewiduje wartość

$$g = 2,$$

co dobrze - z dokładnością do małej poprawki - zgadza się z obserwacjami dla cząstek takich jak elektron i mion, czyli cząstek o spinie  $\frac{1}{2}$  bez struktury wewnętrznej.

# Równanie Pauliego

Spinowy moment magnetyczny elektronu możemy przepisać w formie

$$\vec{\mu}_s = \frac{e}{2m} \vec{\sigma} = 2 \left( \frac{e}{2m} \right) \frac{1}{2} \vec{\sigma} \equiv g \left( \frac{e}{2m} \right) \vec{S},$$

gdzie stosunek  $\frac{e}{2m}$  nazywamy magnetonem Bohra,  $g$  jest stosunkiem żyromagnetycznym, nazywanym też czynnikiem Landégo, a  $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$  jest operatorem spinu elektronu w jednostkach  $\hbar = 1$ .

Nierelatywistyczne równanie Pauliego przewiduje wartość

$$g = 2,$$

co dobrze - z dokładnością do małej poprawki - zgadza się z obserwacjami dla cząstek takich jak elektron i mion, czyli cząstek o spinie  $\frac{1}{2}$  bez struktury wewnętrznej.

Dla protonu i neutronu, które są cząstkami złożonymi, jest inaczej.

# Równanie Pauliego

Spinowy moment magnetyczny elektronu możemy przepisać w formie

$$\vec{\mu}_s = \frac{e}{2m} \vec{\sigma} = 2 \left( \frac{e}{2m} \right) \frac{1}{2} \vec{\sigma} \equiv g \left( \frac{e}{2m} \right) \vec{S},$$

gdzie stosunek  $\frac{e}{2m}$  nazywamy magnetonem Bohra,  $g$  jest stosunkiem żyromagnetycznym, nazywanym też czynnikiem Landégo, a  $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$  jest operatorem spinu elektronu w jednostkach  $\hbar = 1$ .

Nierelatywistyczne równanie Pauliego przewiduje wartość

$$g = 2,$$

co dobrze - z dokładnością do małej poprawki - zgadza się z obserwacjami dla cząstek takich jak elektron i mion, czyli cząstek o spinie  $\frac{1}{2}$  bez struktury wewnętrznej.

Dla protonu i neutronu, które są cząstkami złożonymi, jest inaczej.

# Równanie Pauliego

W jednorodnym polu magnetycznym  $\vec{B}$ , którego potencjał możemy zapisać w formie

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r},$$

wyraz

$$\frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 \Phi$$

po prawej stronie równania Pauliego możemy przekształcić. W tym celu rozważmy

$$\begin{aligned} (\vec{p} - e\vec{A})^2 \Phi &= (p_i - eA_i)(p_i - eA_i) \Phi = (p_i p_i + e^2 A_i A_i) \Phi \\ &- i\hbar \partial_i (-eA_i \Phi) - eA_i (-i\hbar \partial_i \Phi) = \end{aligned}$$

# Równanie Pauliego

W jednorodnym polu magnetycznym  $\vec{B}$ , którego potencjał możemy zapisać w formie

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r},$$

wyraz

$$\frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 \Phi$$

po prawej stronie równania Pauliego możemy przekształcić. W tym celu rozważmy

$$\begin{aligned} (\vec{p} - e\vec{A})^2 \Phi &= (p_i - eA_i)(p_i - eA_i) \Phi = (p_i p_i + e^2 A_i A_i) \Phi \\ &\quad - i\hbar \partial_i (-eA_i \Phi) - eA_i (-i\hbar \partial_i \Phi) = (\vec{p}^2 + e^2 \vec{A}^2) \Phi + 2ie\hbar A_i \partial_i \Phi, \end{aligned}$$

# Równanie Pauliego

W jednorodnym polu magnetycznym  $\vec{B}$ , którego potencjał możemy zapisać w formie

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r},$$

wyraz

$$\frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 \Phi$$

po prawej stronie równania Pauliego możemy przekształcić. W tym celu rozważmy

$$\begin{aligned} (\vec{p} - e\vec{A})^2 \Phi &= (p_i - eA_i)(p_i - eA_i) \Phi = (p_i p_i + e^2 A_i A_i) \Phi \\ &\quad - i\hbar \partial_i (-eA_i \Phi) - eA_i (-i\hbar \partial_i \Phi) = (\vec{p}^2 + e^2 \vec{A}^2) \Phi + 2ie\hbar A_i \partial_i \Phi, \end{aligned}$$



# Równanie Pauliego

gdzie wykorzystaliśmy równość

$$\partial_i A_i = \frac{1}{2} \partial_i (\vec{B} \times \vec{r})_i = \frac{1}{2} \partial_i (\varepsilon_{ijk} B_j x_k) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} B_j \partial_i x_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} B_j \delta_{ik} = 0.$$

Dalej zauważmy, że

$$\begin{aligned} 2ie\hbar A_i \partial_i &= -2eA_i p_i = -2e \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} B_j x_k p_i = -e \varepsilon_{jki} x_k p_i B_j \\ &= -e (\vec{r} \times \vec{p})_j B_j = -e \vec{L} \cdot \vec{B}, \end{aligned}$$

a zatem równanie Pauliego w jednorodnym polu magnetycznym przybiera postać

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[ \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2m} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B} + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2 + eA^0 \right] \Phi.$$

# Równanie Pauliego

gdzie wykorzystaliśmy równość

$$\partial_i A_i = \frac{1}{2} \partial_i (\vec{B} \times \vec{r})_i = \frac{1}{2} \partial_i (\varepsilon_{ijk} B_j x_k) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} B_j \partial_i x_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} B_j \delta_{ik} = 0.$$

Dalej zauważmy, że

$$\begin{aligned} 2ie\hbar A_i \partial_i &= -2eA_i p_i = -2e \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} B_j x_k p_i = -e \varepsilon_{jki} x_k p_i B_j \\ &= -e (\vec{r} \times \vec{p})_j B_j = -e \vec{L} \cdot \vec{B}, \end{aligned}$$

a zatem równanie Pauliego w jednorodnym polu magnetycznym przybiera postać

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[ \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2m} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B} + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2 + eA^0 \right] \Phi.$$

Wyraz

$$-\frac{e}{2m} \vec{L} \cdot \vec{B} \equiv -\vec{\mu}_o \cdot \vec{B}$$

opisuje oddziaływanie momentu magnetycznego elektronu związanego z jego orbitalnym momentem pędu z zewnętrznym polem magnetycznym.

Całkowity moment magnetyczny  $\vec{\mu}$ , poprzez który elektron oddziałuje z zewnętrznym polem magnetycznym jest sumą momentu orbitalnego i spinowego

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_o + \vec{\mu}_s = -\frac{e}{2m} (\vec{L} + 2\vec{S}).$$

Wyraz

$$-\frac{e}{2m} \vec{L} \cdot \vec{B} \equiv -\vec{\mu}_o \cdot \vec{B}$$

opisuje oddziaływanie momentu magnetycznego elektronu związanego z jego orbitalnym momentem pędu z zewnętrznym polem magnetycznym.

Całkowity moment magnetyczny  $\vec{\mu}$ , poprzez który elektron oddziałuje z zewnętrznym polem magnetycznym jest sumą momentu orbitalnego i spinowego

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_o + \vec{\mu}_s = -\frac{e}{2m} (\vec{L} + 2\vec{S}).$$