Rozwiązania równania Diraca dla cząstki i antycząstki swobodnej

Wykład 27

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

Poszukajmy rozwiązań swobodnego równania Diraca

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\psi(x) = 0$$

w postaci fal płaskich.
Dokonajmy podstawień

$$\psi^{(+)}(x) \quad = \quad e^{-ikx}u(k), \qquad \text{dla energii dodatniej,}$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Poszukajmy rozwiązań swobodnego równania Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0$$

w postaci fal płaskich.
Dokonajmy podstawień

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(x) &= e^{-ikx}u(k), \qquad \text{dla energii dodatniej,} \\ \psi^{(-)}(x) & \end{aligned}$$

Poszukajmy rozwiązań swobodnego równania Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0$$

w postaci fal płaskich.
Dokonajmy podstawień

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(x) &= e^{-ikx} u(k), \qquad \text{dla energii dodatniej}, \\ \psi^{(-)}(x) &= \end{aligned}$$

Poszukajmy rozwiązań swobodnego równania Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0$$

w postaci fal płaskich.
Dokonajmy podstawień

$$\begin{aligned}\psi^{(+)}(x) &= e^{-ikx}u(k), \qquad \text{dla energii dodatniej,}\\ \psi^{(-)}(x) &= e^{ikx}v(k), \qquad \text{dla energii ujemnej.}\end{aligned}$$

Poszukajmy rozwiązań swobodnego równania Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0$$

w postaci fal płaskich.
Dokonajmy podstawień

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(x) &= e^{-ikx}u(k), && \text{dla energii dodatniej,} \\ \psi^{(-)}(x) &= e^{ikx}v(k), && \text{dla energii ujemnej.} \end{aligned}$$

Zakładamy, że zerowa składowa czteropędu cząstki jest równa jej energii, tzn. $k^0 = E = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} > 0$.

Poszukajmy rozwiązań swobodnego równania Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0$$

w postaci fal płaskich.
Dokonajmy podstawień

$$\begin{aligned}\psi^{(+)}(x) &= e^{-ikx}u(k), && \text{dla energii dodatniej,}\\ \psi^{(-)}(x) &= e^{ikx}v(k), && \text{dla energii ujemnej.}\end{aligned}$$

Zakładamy, że zerowa składowa czteropędu cząstki jest równa jej energii, tzn. $k^0 = E = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} > 0$.
Oczywiście $k^2 = E^2 - \vec{k}^2 = m^2$, gdzie $m \neq 0$ jest masą cząstki.

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Poszukajmy rozwiązań swobodnego równania Diraca

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi(x) = 0$$

w postaci fal płaskich.
Dokonajmy podstawień

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(x) &= e^{-ikx}u(k), \qquad \text{dla energii dodatniej}, \\ \psi^{(-)}(x) &= e^{ikx}v(k), \qquad \text{dla energii ujemnej}. \end{aligned}$$

Zakładamy, że zerowa składowa czteropędu cząstki jest równa jej energii, tzn. $k^0 = E = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} > 0$.
Oczywiście $k^2 = E^2 - \vec{k}^2 = m^2$, gdzie $m \neq 0$ jest masą cząstki.

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Obliczmy

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}e^{\mp ikx} = i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\left(\mp ik_{\nu}x^{\nu}\right)e^{\mp ikx} =$$

Obliczmy

$$i\gamma^\mu \partial_\mu e^{\mp ikx} = i\gamma^\mu \partial_\mu \left(\mp i k_\nu x^\nu\right) e^{\mp ikx} = \pm \gamma^\mu k_\nu \delta_\mu^\nu e^{\mp ikx} =$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Obliczmy

$$i\gamma^\mu \partial_\mu e^{\mp ikx} = i\gamma^\mu \partial_\mu \left(\mp i k_\nu x^\nu\right) e^{\mp ikx} = \pm \gamma^\mu k_\nu \delta^\nu_\mu e^{\mp ikx} = \pm \gamma^\mu k_\mu e^{\mp ikx}.$$

Obliczmy

$$i\gamma^\mu \partial_\mu e^{\mp ikx} = i\gamma^\mu \partial_\mu \left(\mp ik_\nu x^\nu\right) e^{\mp ikx} = \pm\, \gamma^\mu k_\nu \delta^\nu_\mu e^{\mp ikx} = \pm\, \gamma^\mu k_\mu e^{\mp ikx}.$$

Po uproszczeniu eksponent równanie Diraca przyjmuje postać

$$\left(\gamma^\mu k_\mu - m\right) u(k) = 0, \qquad \text{dla energii dodatniej,}$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Obliczmy

$$i\gamma^\mu \partial_\mu e^{\mp ikx} = i\gamma^\mu \partial_\mu \left(\mp i k_\nu x^\nu\right) e^{\mp ikx} = \pm\,\gamma^\mu k_\nu \delta^\nu_\mu e^{\mp ikx} = \pm\,\gamma^\mu k_\mu e^{\mp ikx}.$$

Po uproszczeniu eksponent równanie Diraca przyjmuje postać

$$\left(\gamma^\mu k_\mu - m\right) u(k) = 0, \qquad \text{dla energii dodatniej},$$
$$\left(\gamma^\mu k_\mu + m\right) v(k) = 0, \qquad \text{dla energii ujemnej}.$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Obliczmy

$$i\gamma^\mu \partial_\mu e^{\mp ikx} = i\gamma^\mu \partial_\mu \left(\mp i k_\nu x^\nu\right) e^{\mp ikx} = \pm\, \gamma^\mu k_\nu \delta^\nu_\mu e^{\mp ikx} = \pm\, \gamma^\mu k_\mu e^{\mp ikx}.$$

Po uproszczeniu eksponent równanie Diraca przyjmuje postać

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu k_\mu - m)\, u(k) &= 0, && \text{dla energii dodatniej,} \\ (\gamma^\mu k_\mu + m)\, v(k) &= 0, && \text{dla energii ujemnej.} \end{aligned}$$

W układzie spoczynkowym cząstki, w którym jej czteropęd wynosi $k^\mu = (m, \vec{0})$ równania te przyjmują postać

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Obliczmy

$$i\gamma^\mu \partial_\mu e^{\mp ikx} = i\gamma^\mu \partial_\mu \left(\mp ik_\nu x^\nu\right) e^{\mp ikx} = \pm\, \gamma^\mu k_\nu \delta^\nu_\mu e^{\mp ikx} = \pm\, \gamma^\mu k_\mu e^{\mp ikx}.$$

Po uproszczeniu eksponent równanie Diraca przyjmuje postać

$$\left(\gamma^\mu k_\mu - m\right) u(k) = 0, \qquad \text{dla energii dodatniej,}$$
$$\left(\gamma^\mu k_\mu + m\right) v(k) = 0, \qquad \text{dla energii ujemnej.}$$

W układzie spoczynkowym cząstki, w którym jej czteropęd wynosi $k^\mu = (m, \vec{0})$ równania te przyjmują postać

$$\left(\gamma^0 - \mathbb{I}\right) u(m, \vec{0}) = 0, \qquad \text{dla energii dodatniej,}$$

Obliczmy

$$i\gamma^\mu \partial_\mu e^{\mp ikx} = i\gamma^\mu \partial_\mu \left(\mp i k_\nu x^\nu\right) e^{\mp ikx} = \pm\,\gamma^\mu k_\nu \delta^\nu_\mu e^{\mp ikx} = \pm\,\gamma^\mu k_\mu e^{\mp ikx}.$$

Po uproszczeniu eksponent równanie Diraca przyjmuje postać

$$(\gamma^\mu k_\mu - m)\, u(k) = 0, \qquad \text{dla energii dodatniej,}$$
$$(\gamma^\mu k_\mu + m)\, v(k) = 0, \qquad \text{dla energii ujemnej.}$$

W układzie spoczynkowym cząstki, w którym jej czteropęd wynosi $k^\mu = (m, \vec{0})$ równania te przyjmują postać

$$\left(\gamma^0 - \mathbb{I}\right) u(m, \vec{0}) = 0, \qquad \text{dla energii dodatniej,}$$
$$\left(\gamma^0 + \mathbb{I}\right) v(m, \vec{0}) = 0,$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Obliczmy

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}e^{\mp ikx} = i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\left(\mp ik_{\nu}x^{\nu}\right)e^{\mp ikx} = \pm\,\gamma^{\mu}k_{\nu}\delta^{\nu}_{\mu}e^{\mp ikx} = \pm\,\gamma^{\mu}k_{\mu}e^{\mp ikx}.$$

Po uproszczeniu eksponent równanie Diraca przyjmuje postać

$$\begin{aligned} &(\gamma^{\mu}k_{\mu} - m)\,u(k) = 0, &&\text{dla energii dodatniej,}\\ &(\gamma^{\mu}k_{\mu} + m)\,v(k) = 0, &&\text{dla energii ujemnej.}\end{aligned}$$

W układzie spoczynkowym cząstki, w którym jej czteropęd wynosi $k^{\mu} = (m, \vec{0})$ równania te przyjmują postać

$$\begin{aligned} &\left(\gamma^{0} - \mathbb{I}\right)u(m,\vec{0}) = 0, &&\text{dla energii dodatniej,}\\ &\left(\gamma^{0} + \mathbb{I}\right)v(m,\vec{0}) = 0, &&\text{dla energii ujemnej.}\end{aligned}$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Obliczmy

$$i\gamma^\mu \partial_\mu e^{\mp ikx} = i\gamma^\mu \partial_\mu \left(\mp i k_\nu x^\nu\right) e^{\mp ikx} = \pm\,\gamma^\mu k_\nu \delta^\nu_\mu e^{\mp ikx} = \pm\,\gamma^\mu k_\mu e^{\mp ikx}.$$

Po uproszczeniu eksponent równanie Diraca przyjmuje postać

$$\begin{aligned} &(\gamma^\mu k_\mu - m)\, u(k) = 0, && \text{dla energii dodatniej,} \\ &(\gamma^\mu k_\mu + m)\, v(k) = 0, && \text{dla energii ujemnej.} \end{aligned}$$

W układzie spoczynkowym cząstki, w którym jej czteropęd wynosi $k^\mu = (m, \vec{0})$ równania te przyjmują postać

$$\begin{aligned} &\left(\gamma^0 - \mathbb{I}\right) u(m, \vec{0}) = 0, && \text{dla energii dodatniej,} \\ &\left(\gamma^0 + \mathbb{I}\right) v(m, \vec{0}) = 0, && \text{dla energii ujemnej.} \end{aligned}$$

Rozwiązania o energii dodatniej reprezentują cząstki, a rozwiązania o energii ujemnej reprezentują antycząstki.

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Rozwiązania o energii dodatniej reprezentują cząstki, a rozwiązania o energii ujemnej reprezentują antycząstki.

Ponieważ antycząstka też powinna mieć dodatnią energię, to będziemy ją traktować jako cząstkę propagującą się w kierunku przeciwnym do kierunku upływu czasu.

Rozwiązania o energii dodatniej reprezentują cząstki, a rozwiązania o energii ujemnej reprezentują antycząstki.

Ponieważ antycząstka też powinna mieć dodatnią energię, to będziemy ją traktować jako cząstkę propagującą się w kierunku przeciwnym do kierunku upływu czasu.

W reprezentacji Diraca

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

gdzie I i 0 są odpowiednio macierzą jednostkową i macierzą zerową 2×2.

Rozwiązania o energii dodatniej reprezentują cząstki, a rozwiązania o energii ujemnej reprezentują antycząstki.
Ponieważ antycząstka też powinna mieć dodatnią energię, to będziemy ją traktować jako cząstkę propagującą się w kierunku przeciwnym do kierunku upływu czasu.
W reprezentacji Diraca

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

gdzie I i 0 są odpowiednio macierzą jednostkową i macierzą zerową 2×2.

Zapiszmy spinory Diraca dla cząstki i dla antycząstki w formie

$$u = \begin{pmatrix} u_I \\ u_{II} \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} v_I \\ v_{II} \end{pmatrix}.$$

Równanie Diraca dla cząstki w układzie spoczynkowym

$$\left(\gamma^0 - \mathbb{I}\right) u(m, \vec{0}) = 0,$$

Zapiszmy spinory Diraca dla cząstki i dla antycząstki w formie

$$u = \begin{pmatrix} u_I \\ u_{II} \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} v_I \\ v_{II} \end{pmatrix}.$$

Równanie Diraca dla cząstki w układzie spoczynkowym

$$\left(\gamma^0 - \mathbb{I}\right) u(m, \vec{0}) = 0,$$

przybiera postać

$$\left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} u_I(m, \vec{0}) \\ u_{II}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = 0.$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Zapiszmy spinory Diraca dla cząstki i dla antycząstki w formie

$$u = \begin{pmatrix} u_I \\ u_{II} \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} v_I \\ v_{II} \end{pmatrix}.$$

Równanie Diraca dla cząstki w układzie spoczynkowym

$$\left(\gamma^0 - \mathbb{I}\right) u(m, \vec{0}) = 0,$$

przybiera postać

$$\left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} u_I(m, \vec{0}) \\ u_{II}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = 0.$$

Po uproszczeniu otrzymamy

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I(m,\vec{0}) \\ u_{II}(m,\vec{0}) \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{II}(m,\vec{0}) = 0.$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Po uproszczeniu otrzymamy

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I(m,\vec{0}) \\ u_{II}(m,\vec{0}) \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{II}(m,\vec{0}) = 0.$$

Natomiast równanie to nie ogranicza dwóch górnych składowych spinora $u(m,\vec{0})$, które oznaczyliśmy $u_I(m,\vec{0})$.

Po uproszczeniu otrzymamy

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I(m,\vec{0}) \\ u_{II}(m,\vec{0}) \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{II}(m,\vec{0}) = 0.$$

Natomiast równanie to nie ogranicza dwóch górnych składowych spinora $u(m,\vec{0})$, które oznaczyliśmy $u_I(m,\vec{0})$.
Otrzymaliśmy dwa liniowo niezależne rozwiązania dla spinora cząstki w układzie spoczynkowym

$$u^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha = 1, 2,$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Po uproszczeniu otrzymamy

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -2I \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} u_I(m,\vec{0}) \\ u_{II}(m,\vec{0}) \end{array}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{II}(m,\vec{0}) = 0.$$

Natomiast równanie to nie ogranicza dwóch górnych składowych spinora $u(m,\vec{0})$, które oznaczyliśmy $u_I(m,\vec{0})$.
Otrzymaliśmy dwa liniowo niezależne rozwiązania dla spinora cząstki w układzie spoczynkowym

$$u^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \left(\begin{array}{c} \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{array}\right), \qquad \alpha = 1, 2,$$

gdzie spinory $\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$ w bazie kanonicznej mają postać

$$\varphi^{(1)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi^{(2)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podobnie równanie dla antycząstki sprowadza się do

$$\begin{pmatrix} 2I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I(m,\vec{0}) \\ v_{II}(m,\vec{0}) \end{pmatrix} = 0$$

gdzie spinory $\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$ w bazie kanonicznej mają postać

$$\varphi^{(1)}(m,\vec{0}) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right), \qquad \varphi^{(2)}(m,\vec{0}) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right).$$

Podobnie równanie dla antycząstki sprowadza się do

$$\left(\begin{array}{cc} 2I & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} v_I(m,\vec{0}) \\ v_{II}(m,\vec{0}) \end{array} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_I(m,\vec{0}) = 0,$$

gdzie spinory $\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$ w bazie kanonicznej mają postać

$$\varphi^{(1)}(m,\vec{0}) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right), \qquad \varphi^{(2)}(m,\vec{0}) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right).$$

Podobnie równanie dla antycząstki sprowadza się do

$$\left(\begin{array}{cc} 2I & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} v_I(m,\vec{0}) \\ v_{II}(m,\vec{0}) \end{array} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_I(m,\vec{0}) = 0,$$

co nie ogranicza dwóch dolnych składowych spinora $v(m,\vec{0})$.

gdzie spinory $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ w bazie kanonicznej mają postać

$$\varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi^{(2)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podobnie równanie dla antycząstki sprowadza się do

$$\begin{pmatrix} 2I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I(m, \vec{0}) \\ v_{II}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_I(m, \vec{0}) = 0,$$

co nie ogranicza dwóch dolnych składowych spinora $v(m, \vec{0})$.

Znów otrzymaliśmy dwa liniowo niezależne rozwiązania dla spinora antycząstki w układzie spoczynkowym

$$v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix} = 0, \qquad \alpha = 1, 2,$$

gdzie spinory $\chi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$ w bazie kanonicznej mają postać

$$\chi^{(1)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi^{(2)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Znów otrzymaliśmy dwa liniowo niezależne rozwiązania dla spinora antycząstki w układzie spoczynkowym

$$v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix} = 0, \qquad \alpha = 1, 2,$$

gdzie spinory $\chi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$ w bazie kanonicznej mają postać

$$\chi^{(1)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi^{(2)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Użyliśmy tu innego symbolu dla spinorów bazowych $\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$ i $\chi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$, gdyż w innej bazie niż kanoniczna mogą one mieć różną postać.

Znów otrzymaliśmy dwa liniowo niezależne rozwiązania dla spinora antycząstki w układzie spoczynkowym

$$v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix} = 0, \qquad \alpha = 1,2,$$

gdzie spinory $\chi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$ w bazie kanonicznej mają postać

$$\chi^{(1)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi^{(2)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Użyliśmy tu innego symbolu dla spinorów bazowych $\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$ i $\chi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$, gdyż w innej bazie niż kanoniczna mogą one mieć różną postać.

Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie k^μ wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 =$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie k^{μ} wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 =$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie k^μ wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0.$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie k^μ wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0.$$

Skorzystaliśmy tu z równości $\not{k}^2 = k^2$, która zachodzi dla dowolnego czterowektora o komutujących składowych.

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie k^μ wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0.$$

Skorzystaliśmy tu z równości $\not{k}^2 = k^2$, która zachodzi dla dowolnego czterowektora o komutujących składowych.

Rzeczywiście

$$\not{k}^2 =$$

Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie k^μ wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0.$$

Skorzystaliśmy tu z równości $\not{k}^2 = k^2$, która zachodzi dla dowolnego czterowektora o komutujących składowych. Rzeczywiście

$$\not{k}^2 = \gamma_\mu k^\mu \gamma_\nu k^\nu =$$

Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie k^μ wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0.$$

Skorzystaliśmy tu z równości $\not{k}^2 = k^2$, która zachodzi dla dowolnego czterowektora o komutujących składowych. Rzeczywiście

$$\not{k}^2 = \gamma_\mu k^\mu \gamma_\nu k^\nu = \frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu k^\mu k^\nu + \frac{1}{2}\gamma_\nu\gamma_\mu k^\nu k^\mu$$

Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie k^μ wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0.$$

Skorzystaliśmy tu z równości $\not{k}^2 = k^2$, która zachodzi dla dowolnego czterowektora o komutujących składowych. Rzeczywiście

$$\begin{aligned} \not{k}^2 &= \gamma_\mu k^\mu \gamma_\nu k^\nu = \frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu k^\mu k^\nu + \frac{1}{2}\gamma_\nu\gamma_\mu k^\nu k^\mu \\ &= \frac{1}{2}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu\right) k^\mu k^\nu = \end{aligned}$$

Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie k^μ wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0.$$

Skorzystaliśmy tu z równości $\not{k}^2 = k^2$, która zachodzi dla dowolnego czterowektora o komutujących składowych. Rzeczywiście

$$\begin{aligned}\not{k}^2 &= \gamma_\mu k^\mu \gamma_\nu k^\nu = \frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu k^\mu k^\nu + \frac{1}{2}\gamma_\nu\gamma_\mu k^\nu k^\mu \\ &= \frac{1}{2}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu\right) k^\mu k^\nu = \frac{1}{2}\, 2g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu =\end{aligned}$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie k^μ wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0.$$

Skorzystaliśmy tu z równości $\not{k}^2 = k^2$, która zachodzi dla dowolnego czterowektora o komutujących składowych. Rzeczywiście

$$\begin{aligned} \not{k}^2 &= \gamma_\mu k^\mu \gamma_\nu k^\nu = \frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu k^\mu k^\nu + \frac{1}{2}\gamma_\nu\gamma_\mu k^\nu k^\mu \\ &= \frac{1}{2}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu\right) k^\mu k^\nu = \frac{1}{2}\, 2g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = k^2. \end{aligned}$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie k^μ wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)\,(\not{k} + m) \;= \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = \; 0.$$

Skorzystaliśmy tu z równości $\not{k}^2 = k^2$, która zachodzi dla dowolnego czterowektora o komutujących składowych. Rzeczywiście

$$\begin{aligned} \not{k}^2 &= \gamma_\mu k^\mu \gamma_\nu k^\nu = \frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu k^\mu k^\nu + \frac{1}{2}\gamma_\nu\gamma_\mu k^\nu k^\mu \\ &= \frac{1}{2}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu\right) k^\mu k^\nu = \frac{1}{2}\; 2 g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = \; k^2. \end{aligned}$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Ponieważ równanie Diraca w przestrzeni pędowej ma postać

$$
\begin{aligned}
(\not{k} - m)\, u(k) &= 0, \\
(\not{k} + m)\, v(k) &= 0,
\end{aligned}
$$

to rozwiązania dla cząstki i antycząstki możemy zapisać w formie

$$
u^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}),
$$

Ponieważ równanie Diraca w przestrzeni pędowej ma postać

$$\begin{aligned}(\not{k} - m)\, u(k) &= 0,\\ (\not{k} + m)\, v(k) &= 0,\end{aligned}$$

to rozwiązania dla cząstki i antycząstki możemy zapisać w formie

$$u^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E+m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}),$$

$$v^{(\alpha)}(k)$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Ponieważ równanie Diraca w przestrzeni pędowej ma postać

$$
\begin{aligned}
(\not{k} - m)\, u(k) &= 0, \\
(\not{k} + m)\, v(k) &= 0,
\end{aligned}
$$

to rozwiązania dla cząstki i antycząstki możemy zapisać w formie

$$
\begin{aligned}
u^{(\alpha)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E+m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}), \\
v^{(\alpha)}(k) &=
\end{aligned}
$$

Ponieważ równanie Diraca w przestrzeni pędowej ma postać

$$\begin{aligned}(\not{k} - m)\, u(k) &= 0,\\ (\not{k} + m)\, v(k) &= 0,\end{aligned}$$

to rozwiązania dla cząstki i antycząstki możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned}u^{(\alpha)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E+m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}),\\ v^{(\alpha)}(k) &= \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E+m}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}),\end{aligned}$$

Ponieważ równanie Diraca w przestrzeni pędowej ma postać

$$\begin{aligned} (\not{k} - m)\, u(k) &= 0, \\ (\not{k} + m)\, v(k) &= 0, \end{aligned}$$

to rozwiązania dla cząstki i antycząstki możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned} u^{(\alpha)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E+m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}), \\ v^{(\alpha)}(k) &= \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E+m}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}), \end{aligned}$$

gdzie $u^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ i $v^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ są rozwiązaniami w układzie spoczynkowym,

Ponieważ równanie Diraca w przestrzeni pędowej ma postać

$$\begin{aligned}(\not{k} - m)\, u(k) &= 0,\\ (\not{k} + m)\, v(k) &= 0,\end{aligned}$$

to rozwiązania dla cząstki i antycząstki możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned}u^{(\alpha)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E+m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}),\\ v^{(\alpha)}(k) &= \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E+m}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}),\end{aligned}$$

gdzie $u^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ i $v^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ są rozwiązaniami w układzie spoczynkowym, a $1/\sqrt{E+m}$ jest czynnikiem normalizacyjnym.

Ponieważ równanie Diraca w przestrzeni pędowej ma postać

$$
\begin{aligned}
(\not{k} - m)\, u(k) &= 0, \\
(\not{k} + m)\, v(k) &= 0,
\end{aligned}
$$

to rozwiązania dla cząstki i antycząstki możemy zapisać w formie

$$
\begin{aligned}
u^{(\alpha)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E+m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}), \\
v^{(\alpha)}(k) &= \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E+m}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}),
\end{aligned}
$$

gdzie $u^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ i $v^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ są rozwiązaniami w układzie spoczynkowym, a $1/\sqrt{E+m}$ jest czynnikiem normalizacyjnym.

Zauważmy, że taką samą postać związków pomiędzy spinorami w układzie, w którym cząstka lub antycząstka porusza się z czteropędem k^μ, ze spinorami w jej układzie spoczynkowym otrzymamy niezależnie od wyboru reprezentacji macierzy Diraca. Natomiast konkretna postać spinorów $u^{(\alpha)}(k)$, $v^{(\alpha)}(k)$, $u^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ i $v^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ może być inna.

Zauważmy, że taką samą postać związków pomiędzy spinorami w układzie, w którym cząstka lub antycząstka porusza się z czteropędem k^μ, ze spinorami w jej układzie spoczynkowym otrzymamy niezależnie od wyboru reprezentacji macierzy Diraca. Natomiast konkretna postać spinorów $u^{(\alpha)}(k)$, $v^{(\alpha)}(k)$, $u^{(\alpha)}(m,\vec{0})$ i $v^{(\alpha)}(m,\vec{0})$ może być inna.

Znajdźmy jawną postać spinorów dla cząstki i antycząstki w reprezentacji Diraca.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego.
W tym celu obliczmy najpierw

$$\not{k} \quad =$$

Znajdźmy jawną postać spinorów dla cząstki i antycząstki w reprezentacji Diraca.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego.
W tym celu obliczmy najpierw

$$\not{k} \quad = \quad k^\mu \gamma_\mu =$$

Znajdźmy jawną postać spinorów dla cząstki i antycząstki w reprezentacji Diraca.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego.
W tym celu obliczmy najpierw

$$\not{k} \quad = \quad k^\mu \gamma_\mu = k^0\gamma^0 - \vec{k} \cdot \vec{\gamma} =$$

Znajdźmy jawną postać spinorów dla cząstki i antycząstki w reprezentacji Diraca.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego.
W tym celu obliczmy najpierw

$$\not{k} \quad = \quad k^\mu \gamma_\mu = k^0 \gamma^0 - \vec{k} \cdot \vec{\gamma} = E \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} - \vec{k} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

Znajdźmy jawną postać spinorów dla cząstki i antycząstki w reprezentacji Diraca.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego.
W tym celu obliczmy najpierw

$$\not{k} = k^\mu \gamma_\mu = k^0 \gamma^0 - \vec{k} \cdot \vec{\gamma} = E \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} - \vec{k} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

$$=$$

Znajdźmy jawną postać spinorów dla cząstki i antycząstki w reprezentacji Diraca.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego.
W tym celu obliczmy najpierw

$$\begin{aligned} \not{k} &= k^\mu \gamma_\mu = k^0\gamma^0 - \vec{k}\cdot\vec{\gamma} = E\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} - \vec{k}\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E & -\vec{k}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{k}\cdot\vec{\sigma} & -E \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Znajdźmy jawną postać spinorów dla cząstki i antycząstki w reprezentacji Diraca.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego.
W tym celu obliczmy najpierw

$$\begin{aligned} \not{k} &= k^\mu \gamma_\mu = k^0 \gamma^0 - \vec{k} \cdot \vec{\gamma} = E \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} - \vec{k} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -E \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

W takim razie spinor dla cząstki w reprezentacji Diraca ma postać

$$u^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E+m}}\, u^{(\alpha)}(m, \vec{0})$$

$$=$$

W takim razie spinor dla cząstki w reprezentacji Diraca ma postać

$$
\begin{aligned}
u^{(\alpha)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E+m}}\, u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} E+m & -\vec{k}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{k}\cdot\vec{\sigma} & -E+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

W takim razie spinor dla cząstki w reprezentacji Diraca ma postać

$$
\begin{aligned}
u^{(\alpha)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E+m}}\, u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} E+m & -\vec{k}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{k}\cdot\vec{\sigma} & -E+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&=
\end{aligned}
$$

W takim razie spinor dla cząstki w reprezentacji Diraca ma postać

$$
\begin{aligned}
u^{(\alpha)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E+m}}\, u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} E+m & -\vec{k}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{k}\cdot\vec{\sigma} & -E+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}\,\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ \frac{\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}{\sqrt{E+m}}\,\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

W takim razie spinor dla cząstki w reprezentacji Diraca ma postać

$$
\begin{aligned}
u^{(\alpha)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E+m}}\, u^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} E+m & -\vec{k}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{k}\cdot\vec{\sigma} & -E+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}\,\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ \frac{\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}{\sqrt{E+m}}\,\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Podobnie znajdujemy postać spinora dla antycząstki w reprezentacji Diraca

$$v^{(\alpha)}(k) \quad = \quad \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E+m}}\, v^{(\alpha)}(m, \vec{0})$$

$$=$$

Podobnie znajdujemy postać spinora dla antycząstki w reprezentacji Diraca

$$
\begin{aligned}
v^{(\alpha)}(k) &= \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E+m}}\, v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} -E+m & \vec{k}\cdot\vec{\sigma} \\ -\vec{k}\cdot\vec{\sigma} & E+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Podobnie znajdujemy postać spinora dla antycząstki w reprezentacji Diraca

$$
\begin{aligned}
v^{(\alpha)}(k) &= \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E+m}}\, v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} -E+m & \vec{k}\cdot\vec{\sigma} \\ -\vec{k}\cdot\vec{\sigma} & E+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} \\
&=
\end{aligned}
$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Podobnie znajdujemy postać spinora dla antycząstki w reprezentacji Diraca

$$
\begin{aligned}
v^{(\alpha)}(k) &= \frac{-\not{k}+m}{\sqrt{E+m}}\, v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} -E+m & \vec{k}\cdot\vec{\sigma} \\ -\vec{k}\cdot\vec{\sigma} & E+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}{\sqrt{E+m}}\, \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ \sqrt{E+m}\, \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Podobnie znajdujemy postać spinora dla antycząstki w reprezentacji Diraca

$$
\begin{aligned}
v^{(\alpha)}(k) &= \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E+m}}\, v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} -E+m & \vec{k}\cdot\vec{\sigma} \\ -\vec{k}\cdot\vec{\sigma} & E+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}{\sqrt{E+m}}\, \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ \sqrt{E+m}\, \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Zadanie. Pokazać następujące związki ortogonalności dla spinorów Diraca w przestrzeni pędowej

$$\bar{u}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k) = 2m\delta_{\alpha\beta}, \qquad \bar{u}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k) = 0,$$
$$\bar{v}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k) = -2m\delta_{\alpha\beta}, \qquad \bar{v}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k) = 0.$$

Zadanie. Pokazać następujące związki zupełności dla spinorów Diraca w przestrzeni pędowej

$$\sum_{\alpha=1}^{2} u_a^{(\alpha)}(k)\bar{u}_b^{(\alpha)}(k) = (\not{k} + m)_{ab}\,,$$
$$\sum_{\alpha=1}^{2} v_a^{(\alpha)}(k)\bar{v}_b^{(\alpha)}(k) = (\not{k} - m)_{ab}\,.$$

Zadanie. Pokazać następujące związki ortogonalności dla spinorów Diraca w przestrzeni pędowej

$$\bar{u}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k) = 2m\delta_{\alpha\beta}, \qquad \bar{u}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k) = 0,$$
$$\bar{v}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k) = -2m\delta_{\alpha\beta}, \qquad \bar{v}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k) = 0.$$

Zadanie. Pokazać następujące związki zupełności dla spinorów Diraca w przestrzeni pędowej

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{2} u_a^{(\alpha)}(k)\bar{u}_b^{(\alpha)}(k) &= (\not{k} + m)_{ab}\,,\\ \sum_{\alpha=1}^{2} v_a^{(\alpha)}(k)\bar{v}_b^{(\alpha)}(k) &= (\not{k} - m)_{ab}\,.\end{aligned}$$

Zdefiniujmy operatory rzutowe

$$\Lambda_+(k) \equiv \frac{1}{2m}\sum_{\alpha=1}^{2} u^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{u}^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{2m},$$

$$\Lambda_-(k) \equiv -\frac{1}{2m}\sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{v}^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m}.$$

Zauważmy, że

$(\not{k} + m)^2 =$

Zdefiniujmy operatory rzutowe

$$\Lambda_+(k) \equiv \frac{1}{2m}\sum_{\alpha=1}^{2} u^{(\alpha)}(k)\otimes\bar{u}^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k}+m}{2m},$$

$$\Lambda_-(k) \equiv -\frac{1}{2m}\sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}(k)\otimes\bar{v}^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k}+m}{2m}.$$

Zauważmy, że

$$(\not{k}+m)^2 = \not{k}^2 + 2m\not{k} + m^2 =$$

Zdefiniujmy operatory rzutowe

$$\Lambda_+(k) \equiv \frac{1}{2m}\sum_{\alpha=1}^{2} u^{(\alpha)}(k)\otimes\bar{u}^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k}+m}{2m},$$

$$\Lambda_-(k) \equiv -\frac{1}{2m}\sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}(k)\otimes\bar{v}^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k}+m}{2m}.$$

Zauważmy, że

$$(\not{k}+m)^2 = \not{k}^2 + 2m\not{k} + m^2 = 2m\not{k} + 2m^2 =$$

Zdefiniujmy operatory rzutowe

$$\Lambda_+(k) \equiv \frac{1}{2m}\sum_{\alpha=1}^{2} u^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{u}^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{2m},$$

$$\Lambda_-(k) \equiv -\frac{1}{2m}\sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{v}^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m}.$$

Zauważmy, że

$$(\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 + 2m\not{k} + m^2 = 2m\not{k} + 2m^2 = 2m(\not{k} + m).$$

Zdefiniujmy operatory rzutowe

$$\Lambda_+(k) \equiv \frac{1}{2m}\sum_{\alpha=1}^{2} u^{(\alpha)}(k)\otimes \bar{u}^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k}+m}{2m},$$

$$\Lambda_-(k) \equiv -\frac{1}{2m}\sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}(k)\otimes \bar{v}^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k}+m}{2m}.$$

Zauważmy, że

$$(\not{k}+m)^2 = \not{k}^2 + 2m\not{k} + m^2 = 2m\not{k} + 2m^2 = 2m\,(\not{k}+m)\,.$$

Dlatego

$$\Lambda_+(k)u^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k}+m}{2m}\,\frac{\not{k}+m}{\sqrt{E+m}}\,u^{(\alpha)}(m,\vec{0}) =$$

Zdefiniujmy operatory rzutowe

$$\Lambda_+(k) \equiv \frac{1}{2m}\sum_{\alpha=1}^{2} u^{(\alpha)}(k)\otimes\bar{u}^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k}+m}{2m},$$

$$\Lambda_-(k) \equiv -\frac{1}{2m}\sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}(k)\otimes\bar{v}^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k}+m}{2m}.$$

Zauważmy, że

$$(\not{k}+m)^2 = \not{k}^2 + 2m\not{k} + m^2 = 2m\not{k} + 2m^2 = 2m\,(\not{k}+m)\,.$$

Dlatego

$$\Lambda_+(k)u^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k}+m}{2m}\,\frac{\not{k}+m}{\sqrt{E+m}}\,u^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = u^{(\alpha)}(k).$$

Zdefiniujmy operatory rzutowe

$$\Lambda_+(k) \equiv \frac{1}{2m}\sum_{\alpha=1}^{2} u^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{u}^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{2m},$$

$$\Lambda_-(k) \equiv -\frac{1}{2m}\sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{v}^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m}.$$

Zauważmy, że

$$(\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 + 2m\not{k} + m^2 = 2m\not{k} + 2m^2 = 2m\,(\not{k} + m)\,.$$

Dlatego

$$\Lambda_+(k)u^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{2m}\,\frac{\not{k} + m}{\sqrt{E + m}}\,u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = u^{(\alpha)}(k).$$

Podobnie, ponieważ

$$(-\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 - 2m\not{k} + m^2 =$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Podobnie, ponieważ

$$(-\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 - 2m\not{k} + m^2 = -2m\not{k} + 2m^2 =$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Podobnie, ponieważ

$$(-\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 - 2m\not{k} + m^2 = -2m\not{k} + 2m^2 = 2m(-\not{k} + m),$$

Podobnie, ponieważ

$$(-\not{k}+m)^2 = \not{k}^2 - 2m\not{k} + m^2 = \,-2m\not{k} + 2m^2 = 2m\,(-\not{k}+m)\,,$$

to

$$\Lambda_-(k)v^{(\alpha)}(k) \;= \frac{-\not{k}+m}{2m}\,\frac{-\not{k}+m}{\sqrt{E+m}}\,v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) =$$

Podobnie, ponieważ

$$(-\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 - 2m\not{k} + m^2 = -2m\not{k} + 2m^2 = 2m\,(-\not{k} + m)\,,$$

to

$$\Lambda_-(k)v^{(\alpha)}(k) \; = \frac{-\not{k} + m}{2m}\,\frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E+m}}\,v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \; v^{(\alpha)}(k).$$

Podobnie, ponieważ

$$(-\not{k}+m)^2=\not{k}^2-2m\not{k}+m^2=\,-2m\not{k}+2m^2=2m\,(-\not{k}+m)\,,$$

to

$$\Lambda_-(k)v^{(\alpha)}(k)\;=\frac{-\not{k}+m}{2m}\,\frac{-\not{k}+m}{\sqrt{E+m}}\,v^{(\alpha)}(m,\vec{0})=\;v^{(\alpha)}(k).$$

Natomiast z tożsamości

$$(-\not{k}+m)\,(\not{k}+m)=(\not{k}+m)\,(-\not{k}+m)=$$

Podobnie, ponieważ

$$(-\not k + m)^2 = \not k^2 - 2m\not k + m^2 = \; - 2m\not k + 2m^2 = 2m\,(-\not k + m)\,,$$

to

$$\Lambda_-(k)v^{(\alpha)}(k) \; = \frac{-\not k + m}{2m}\,\frac{-\not k + m}{\sqrt{E+m}}\,v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \; v^{(\alpha)}(k).$$

Natomiast z tożsamości

$$(-\not k + m)\,(\not k + m) = (\not k + m)\,(-\not k + m) = \; - \not k^2 + m^2 =$$

Podobnie, ponieważ

$$(-\not{k}+m)^2 = \not{k}^2 - 2m\not{k} + m^2 = \; - 2m\not{k} + 2m^2 = 2m\,(-\not{k}+m)\,,$$

to

$$\Lambda_-(k)v^{(\alpha)}(k) \;= \frac{-\not{k}+m}{2m}\;\frac{-\not{k}+m}{\sqrt{E+m}}\;v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \; v^{(\alpha)}(k).$$

Natomiast z tożsamości

$$(-\not{k}+m)\,(\not{k}+m) = (\not{k}+m)\,(-\not{k}+m) = \; - \not{k}^2 + m^2 = 0$$

Podobnie, ponieważ

$$(-\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 - 2m\not{k} + m^2 = \; - 2m\not{k} + 2m^2 = 2m\,(-\not{k} + m)\,,$$

to

$$\Lambda_-(k)v^{(\alpha)}(k) \; = \frac{-\not{k} + m}{2m} \; \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} \; v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \; v^{(\alpha)}(k).$$

Natomiast z tożsamości

$$(-\not{k} + m)\,(\not{k} + m) = (\not{k} + m)\,(-\not{k} + m) = \; - \not{k}^2 + m^2 = 0$$

wynika, że

$$\Lambda_+(k)v^{(\alpha)}(k) = \Lambda_-(k)u^{(\alpha)}(k) =$$

Podobnie, ponieważ

$$(-\not{k}+m)^2 = \not{k}^2 - 2m\not{k} + m^2 = -2m\not{k} + 2m^2 = 2m\,(-\not{k}+m)\,,$$

to

$$\Lambda_-(k)v^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k}+m}{2m}\,\frac{-\not{k}+m}{\sqrt{E+m}}\,v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = v^{(\alpha)}(k).$$

Natomiast z tożsamości

$$(-\not{k}+m)\,(\not{k}+m) = (\not{k}+m)\,(-\not{k}+m) = -\not{k}^2 + m^2 = 0$$

wynika, że

$$\Lambda_+(k)v^{(\alpha)}(k) = \Lambda_-(k)u^{(\alpha)}(k) = 0.$$

Podobnie, ponieważ

$$(-\not{k}+m)^2 = \not{k}^2 - 2m\not{k} + m^2 = -2m\not{k} + 2m^2 = 2m\,(-\not{k}+m)\,,$$

to

$$\Lambda_-(k)v^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k}+m}{2m}\,\frac{-\not{k}+m}{\sqrt{E+m}}\,v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = v^{(\alpha)}(k).$$

Natomiast z tożsamości

$$(-\not{k}+m)\,(\not{k}+m) = (\not{k}+m)\,(-\not{k}+m) = -\not{k}^2 + m^2 = 0$$

wynika, że

$$\Lambda_+(k)v^{(\alpha)}(k) = \Lambda_-(k)u^{(\alpha)}(k) = 0.$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Czyli operatory $\Lambda_+(k)$ i $\Lambda_-(k)$ rzutują odpowiednio na stany o dodatniej i ujemnej energii.

Zadanie. Pokazać, że operatory $\Lambda_\pm(k)$ spełniają własności idempotentności i zupełności, tzn.

$$\Lambda_\pm^2(k) = \Lambda_\pm(k) \qquad \text{i} \qquad \Lambda_+(k) + \Lambda_-(k) = \mathbb{I}$$

Czyli operatory $\Lambda_+(k)$ i $\Lambda_-(k)$ rzutują odpowiednio na stany o dodatniej i ujemnej energii.
Zadanie. Pokazać, że operatory $\Lambda_\pm(k)$ spełniają własności idempotentności i zupełności, tzn.

$$\Lambda_\pm^2(k) = \Lambda_\pm(k) \qquad \mathrm{i} \qquad \Lambda_+(k) + \Lambda_-(k) = \mathbb{I}$$

oraz, że

$$\mathrm{Tr}\,\Lambda_\pm(k) = 2.$$

Czyli operatory $\Lambda_+(k)$ i $\Lambda_-(k)$ rzutują odpowiednio na stany o dodatniej i ujemnej energii.

Zadanie. Pokazać, że operatory $\Lambda_\pm(k)$ spełniają własności idempotentności i zupełności, tzn.

$$\Lambda_\pm^2(k) = \Lambda_\pm(k) \qquad \text{i} \qquad \Lambda_+(k) + \Lambda_-(k) = \mathbb{I}$$

oraz, że

$$\mathrm{Tr}\, \Lambda_\pm(k) = 2.$$

Zadanie. Pokazać, że gęstość prawdopodbieństwa znalezienia cząstki lub antycząstki, reprezentowanej odpowiednio przez falę płaską $\psi_{(+)}^{(\alpha)}(x)$ lub $\psi_{(-)}^{(\alpha)}(x)$, wynosi

$$\bar{\psi}_{(+)}^{(\alpha)}(x)\gamma^0\psi_{(+)}^{(\beta)}(x) = \bar{\psi}_{(-)}^{(\alpha)}(x)\gamma^0\psi_{(-)}^{(\beta)}(x) = 2E\delta_{\alpha\beta}.$$

Zauważmy, że mamy po dwa stany z dodatnią i ujemną energią, które do tej pory numerowaliśmy wskaźnikami $\alpha, \beta = 1, 2$.

Zadanie. Pokazać, że gęstość prawdopodbieństwa znalezienia cząstki lub antycząstki, reprezentowanej odpowiednio przez falę płaską $\psi_{(+)}^{(\alpha)}(x)$ lub $\psi_{(-)}^{(\alpha)}(x)$, wynosi

$$\bar{\psi}_{(+)}^{(\alpha)}(x)\gamma^0\psi_{(+)}^{(\beta)}(x) = \bar{\psi}_{(-)}^{(\alpha)}(x)\gamma^0\psi_{(-)}^{(\beta)}(x) = 2E\delta_{\alpha\beta}.$$

Zauważmy, że mamy po dwa stany z dodatnią i ujemną energią, które do tej pory numerowaliśmy wskaźnikami $\alpha, \beta = 1, 2$.
Aby opisać tę degenerację skonstruujemy operatory rzutujące na stany o określonej polaryzacji.

Zadanie. Pokazać, że gęstość prawdopodbieństwa znalezienia cząstki lub antycząstki, reprezentowanej odpowiednio przez falę płaską $\psi_{(+)}^{(\alpha)}(x)$ lub $\psi_{(-)}^{(\alpha)}(x)$, wynosi

$$\bar{\psi}_{(+)}^{(\alpha)}(x)\gamma^0\psi_{(+)}^{(\beta)}(x) = \bar{\psi}_{(-)}^{(\alpha)}(x)\gamma^0\psi_{(-)}^{(\beta)}(x) = 2E\delta_{\alpha\beta}.$$

Zauważmy, że mamy po dwa stany z dodatnią i ujemną energią, które do tej pory numerowaliśmy wskaźnikami $\alpha, \beta = 1, 2$.
Aby opisać tę degenerację skonstruujemy operatory rzutujące na stany o określonej polaryzacji.

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Przypomnijmy, że w reprezentacji Diraca spinory cząstki i antycząstki w układzie spoczynkowym mają postać

$$u^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix},$$

gdzie w bazie kanonicznej $\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$, $\alpha = 1,2$, i

$$\varphi^{(1)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi^{(2)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Przypomnijmy, że w reprezentacji Diraca spinory cząstki i antycząstki w układzie spoczynkowym mają postać

$$u^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix},$$

gdzie w bazie kanonicznej $\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0}), \;\; \alpha = 1,2,$ i

$$\varphi^{(1)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi^{(2)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe $\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$.

$$\sigma_3 \varphi^{(1)}(m,\vec{0}) \quad =$$

Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$.

$$\sigma_3 \varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$.

$$\sigma_3 \varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe $\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$.

$$\sigma_3 \varphi^{(1)}(m,\vec{0}) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi^{(1)}(m,\vec{0}),$$

Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$.

$$\sigma_3 \varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi^{(1)}(m, \vec{0}),$$

$$\sigma_3 \varphi^{(2)}(m, \vec{0})$$

Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$.

$$\sigma_3 \varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi^{(1)}(m, \vec{0}),$$

$$\sigma_3 \varphi^{(2)}(m, \vec{0}) =$$

Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$.

$$\sigma_3 \varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi^{(1)}(m, \vec{0}),$$

$$\sigma_3 \varphi^{(2)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$.

$$\sigma_3 \varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi^{(1)}(m, \vec{0}),$$

$$\sigma_3 \varphi^{(2)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe $\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$.

$$\sigma_3\varphi^{(1)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi^{(1)}(m,\vec{0}),$$

$$\sigma_3\varphi^{(2)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\varphi^{(2)}(m,\vec{0}).$$

Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe $\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$.

$$\sigma_3\varphi^{(1)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi^{(1)}(m,\vec{0}),$$

$$\sigma_3\varphi^{(2)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\varphi^{(2)}(m,\vec{0}).$$

Widzimy, że spinory $\varphi^{(1)}(m,\vec{0})$ i $\varphi^{(2)}(m,\vec{0})$ są wektorami własnymi macierzy Pauliego σ_3 do wartości własnych odpowiednio 1 i -1.

Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$.

$$
\begin{aligned}
\sigma_3 \varphi^{(1)}(m, \vec{0}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi^{(1)}(m, \vec{0}), \\
\sigma_3 \varphi^{(2)}(m, \vec{0}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\varphi^{(2)}(m, \vec{0}).
\end{aligned}
$$

Widzimy, że spinory $\varphi^{(1)}(m, \vec{0})$ i $\varphi^{(2)}(m, \vec{0})$ są wektorami własnymi macierzy Pauliego σ_3 do wartości własnych odpowiednio 1 i -1.

Utwórzmy macierz spinową ($\hbar = 1$)

$$\frac{1}{2}\vec{\Sigma} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

i obliczmy

$$\frac{1}{2}\Sigma_3\, u^{(\alpha)}(m,\vec{0}) =$$

Utwórzmy macierz spinową ($\hbar = 1$)

$$\frac{1}{2}\,\vec{\Sigma} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

i obliczmy

$$\frac{1}{2}\Sigma_3\, u^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Utwórzmy macierz spinową ($\hbar = 1$)

$$\frac{1}{2}\vec{\Sigma} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

i obliczmy

$$\frac{1}{2}\Sigma_3\, u^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=$$

Utwórzmy macierz spinową ($\hbar = 1$)

$$\frac{1}{2}\vec{\Sigma} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

i obliczmy

$$\frac{1}{2}\Sigma_3\, u^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Utwórzmy macierz spinową ($\hbar = 1$)

$$\frac{1}{2}\vec{\Sigma} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

i obliczmy

$$\frac{1}{2}\Sigma_3\, u^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Utwórzmy macierz spinową ($\hbar = 1$)

$$\frac{1}{2}\vec{\Sigma} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

i obliczmy

$$\frac{1}{2}\Sigma_3\, u^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}u^{(\alpha)}(m,\vec{0}),$$

Utwórzmy macierz spinową ($\hbar = 1$)

$$\frac{1}{2}\vec{\Sigma} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

i obliczmy

$$\frac{1}{2}\Sigma_3\, u^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}u^{(\alpha)}(m,\vec{0}),$$

gdzie $+\frac{1}{2}$ odpowiada $\alpha = 1$, a $-\frac{1}{2}$ odpowiada $\alpha = 2$.

Utwórzmy macierz spinową ($\hbar = 1$)

$$\frac{1}{2}\vec{\Sigma} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

i obliczmy

$$\frac{1}{2}\Sigma_3\, u^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}u^{(\alpha)}(m,\vec{0}),$$

gdzie $+\frac{1}{2}$ odpowiada $\alpha = 1$, a $-\frac{1}{2}$ odpowiada $\alpha = 2$.

Podobnie, korzystając z równości $\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$, obliczamy

$$\frac{1}{2}\Sigma_3\, v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix}$$

Podobnie, korzystając z równości $\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$, obliczamy

$$\frac{1}{2}\Sigma_3 \, v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix}$$

$=$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Podobnie, korzystając z równości $\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$, obliczamy

$$\frac{1}{2}\Sigma_3\, v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_3\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix} =$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Podobnie, korzystając z równości $\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$, obliczamy

$$\frac{1}{2}\Sigma_3\, v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_3\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix} =$$

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Podobnie, korzystając z równości $\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$, obliczamy

$$\frac{1}{2}\Sigma_3\, v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_3\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2} v^{(\alpha)}(m,\vec{0}),$$

Podobnie, korzystając z równości $\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$, obliczamy

$$\frac{1}{2}\Sigma_3\, v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_3\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}v^{(\alpha)}(m,\vec{0}),$$

gdzie $+\frac{1}{2}$ odpowiada $\alpha = 1$, a $-\frac{1}{2}$ odpowiada $\alpha = 2$.

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Podobnie, korzystając z równości $\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$, obliczamy

$$\frac{1}{2}\Sigma_3 \, v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_3\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}v^{(\alpha)}(m,\vec{0}),$$

gdzie $+\frac{1}{2}$ odpowiada $\alpha = 1$, a $-\frac{1}{2}$ odpowiada $\alpha = 2$.
Widzimy, że dwukrotna degeneracja stanów o tej samej energii ma związek ze spinem $s = \frac{1}{2}$ cząstki lub antycząstki opisywanej równaniem Diraca.

Podobnie, korzystając z równości $\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \chi^{(\alpha)}(m,\vec{0})$, obliczamy

$$\frac{1}{2}\Sigma_3\, v^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_3\varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m,\vec{0}) \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2} v^{(\alpha)}(m,\vec{0}),$$

gdzie $+\frac{1}{2}$ odpowiada $\alpha = 1$, a $-\frac{1}{2}$ odpowiada $\alpha = 2$.
Widzimy, że dwukrotna degeneracja stanów o tej samej energii ma związek ze spinem $s = \frac{1}{2}$ cząstki lub antycząstki opisywanej równaniem Diraca.

Można pokazać, że operator rzutujący na stany o określonym rzucie spinu na kierunek wyznaczony przez wektor $\vec{n}$ ma w dowolnej reprezentacji macierzy Diraca, w układzie, którym czteropęd cząstki wynosi k^μ postać

$$P(n) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \gamma_5 \not{n}\right), \qquad \text{gdzie} \quad n \cdot k = 0, \quad n^2 = -1.$$

Zadanie. Pokazać, że operator $P(n)$ ma następujące własności:

Rozwiązania w postaci fal płaskich

Można pokazać, że operator rzutujący na stany o określonym rzucie spinu na kierunek wyznaczony przez wektor $\vec{n}$ ma w dowolnej reprezentacji macierzy Diraca, w układzie, którym czteropęd cząstki wynosi k^μ postać

$$P(n) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \gamma_5 \not{n}\right), \qquad \text{gdzie} \quad n \cdot k = 0, \quad n^2 = -1.$$

Zadanie. Pokazać, że operator $P(n)$ ma następujące własności:

1. $P^2(n) = P(n)$,

Można pokazać, że operator rzutujący na stany o określonym rzucie spinu na kierunek wyznaczony przez wektor $\vec{n}$ ma w dowolnej reprezentacji macierzy Diraca, w układzie, którym czteropęd cząstki wynosi k^μ postać

$$P(n) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \gamma_5 \not{n}\right), \qquad \text{gdzie} \quad n \cdot k = 0, \quad n^2 = -1.$$

Zadanie. Pokazać, że operator $P(n)$ ma następujące własności:

1. $P^2(n) = P(n)$,
2. $[\Lambda_\pm(k), P(n)] = 0$,

Można pokazać, że operator rzutujący na stany o określonym rzucie spinu na kierunek wyznaczony przez wektor $\vec{n}$ ma w dowolnej reprezentacji macierzy Diraca, w układzie, którym czteropęd cząstki wynosi k^μ postać

$$P(n) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \gamma_5 \not{n}\right), \qquad \text{gdzie} \quad n \cdot k = 0, \quad n^2 = -1.$$

Zadanie. Pokazać, że operator $P(n)$ ma następujące własności:

1. $P^2(n) = P(n)$,
2. $[\Lambda_\pm(k), P(n)] = 0$,
3. $\Lambda_+(k)P(n) + \Lambda_-(k)P(n) + \Lambda_+(k)P(-n) + \Lambda_-(k)P(-n) = \mathbb{I}$,

Można pokazać, że operator rzutujący na stany o określonym rzucie spinu na kierunek wyznaczony przez wektor $\vec{n}$ ma w dowolnej reprezentacji macierzy Diraca, w układzie, którym czteropęd cząstki wynosi k^μ postać

$$P(n) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \gamma_5 \not{n}\right), \qquad \text{gdzie} \quad n \cdot k = 0, \quad n^2 = -1.$$

Zadanie. Pokazać, że operator $P(n)$ ma następujące własności:

1. $P^2(n) = P(n)$,
2. $[\Lambda_\pm(k), P(n)] = 0$,
3. $\Lambda_+(k)P(n) + \Lambda_-(k)P(n) + \Lambda_+(k)P(-n) + \Lambda_-(k)P(-n) = \mathbb{I}$,
4. $\mathrm{Tr}\,\left(\Lambda_\pm(k)P(n)\right) = 1.$

Można pokazać, że operator rzutujący na stany o określonym rzucie spinu na kierunek wyznaczony przez wektor $\vec{n}$ ma w dowolnej reprezentacji macierzy Diraca, w układzie, którym czteropęd cząstki wynosi k^μ postać

$$P(n) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \gamma_5 \not{n}\right), \qquad \text{gdzie} \quad n \cdot k = 0, \quad n^2 = -1.$$

Zadanie. Pokazać, że operator $P(n)$ ma następujące własności:

1. $P^2(n) = P(n)$,
2. $[\Lambda_\pm(k), P(n)] = 0$,
3. $\Lambda_+(k)P(n) + \Lambda_-(k)P(n) + \Lambda_+(k)P(-n) + \Lambda_-(k)P(-n) = \mathbb{I}$,
4. $\mathrm{Tr}\ (\Lambda_\pm(k)P(n)) = 1$.

Skrętność

Szczególne znaczenie ma następujący wybór czterowektora n:

$$n_k^\mu = \left(\frac{|\vec{k}|}{m}, \frac{E}{m} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right).$$

Zadanie. Pokazać, że czterowektor n_k spełnia wymagane własności, tzn. $n_k^2 = -1$ i $n_k \cdot k = 0$.

Skrętność

Szczególne znaczenie ma następujący wybór czterowektora n:

$$n_k^\mu = \left(\frac{|\vec{k}|}{m}, \frac{E}{m} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right).$$

Zadanie. Pokazać, że czterowektor n_k spełnia wymagane własności, tzn. $n_k^2 = -1$ i $n_k \cdot k = 0$.

Operator $P(n_k)$ rzutuje na stany o określonej skrętności, która jest rzutem spinu na kierunek pędu

$$\lambda \equiv \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}.$$

Szczególne znaczenie ma następujący wybór czterowektora n:

$$n_k^\mu = \left(\frac{|\vec{k}|}{m}, \frac{E}{m}\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\right).$$

Zadanie. Pokazać, że czterowektor n_k spełnia wymagane własności, tzn. $n_k^2 = -1$ i $n_k \cdot k = 0$.
Operator $P(n_k)$ rzutuje na stany o określonej skrętności, która jest rzutem spinu na kierunek pędu

$$\lambda \equiv \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}.$$

Zadanie. Pokazać, że

$$P(n_k)\Lambda_\pm(k) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} \pm \frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{k}}{|\vec{k}|}\right)\Lambda_\pm(k).$$

Stąd wynika, że operator $P(n_k)$ rzutuje na stany o dodatniej skrętności i dodatniej energii oraz na stany o ujemnej skrętności i ujemnej energii.

Zadanie. Pokazać, że

$$P(n_k)\Lambda_\pm(k) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} \pm \frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{k}}{|\vec{k}|}\right)\Lambda_\pm(k).$$

Stąd wynika, że operator $P(n_k)$ rzutuje na stany o dodatniej skrętności i dodatniej energii oraz na stany o ujemnej skrętności i ujemnej energii.

W granicy ultrarelatywistycznej, $E \gg m \;\Rightarrow\; E = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \approx |\vec{k}|$

$$n_k^\mu = \left(\frac{|\vec{k}|}{m}, \frac{E}{m}\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\right) \approx \left(\frac{E}{m}, \frac{\vec{k}}{m}\right) = \frac{k^\mu}{m}$$

i operator rzutujący na stany o określonej skrętności ma postać

$$P(n_k) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \gamma_5\frac{\not{k}}{m}\right).$$

Skrętność

Zadanie. Pokazać, że

$$P(n_k)\Lambda_\pm(k) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} \pm \frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{k}}{|\vec{k}|}\right)\Lambda_\pm(k).$$

Stąd wynika, że operator $P(n_k)$ rzutuje na stany o dodatniej skrętności i dodatniej energii oraz na stany o ujemnej skrętności i ujemnej energii.

W granicy ultrarelatywistycznej, $E \gg m \Rightarrow E = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \approx |\vec{k}|$

$$n_k^\mu = \left(\frac{|\vec{k}|}{m}, \frac{E}{m}\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\right) \approx \left(\frac{E}{m}, \frac{\vec{k}}{m}\right) = \frac{k^\mu}{m}$$

i operator rzutujący na stany o określonej skrętności ma postać

$$P(n_k) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \gamma_5\frac{\not{k}}{m}\right).$$

Skrętność cząstki ultrarelatywistycznej

W tym przypadku

$$
\begin{aligned}
P(\pm n_k)\Lambda_+(k) &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} \pm \gamma_5 \frac{\not{k}}{m}\right)\frac{\not{k}+m}{2m} = \frac{1}{2}\frac{\not{k}+m}{2m} \pm \frac{1}{2}\gamma_5 \frac{m^2+m\not{k}}{2m^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\not{k}+m}{2m} \pm \frac{1}{2}\gamma_5 \frac{\not{k}+m}{2m} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\Lambda_+(k), \\
P(\pm n_k)\Lambda_-(k) &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} \pm \gamma_5 \frac{\not{k}}{m}\right)\frac{-\not{k}+m}{2m} \\
&= \frac{1}{2}\frac{-\not{k}+m}{2m} \pm \frac{1}{2}\gamma_5 \frac{-m^2+m\not{k}}{2m^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{-\not{k}+m}{2m} \mp \frac{1}{2}\gamma_5 \frac{-\not{k}+m}{2m} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)\Lambda_-(k).
\end{aligned}
$$

gdzie wykorzystaliśmy tożsamość $\not{k}^2 = k^2 = m^2$.
W granicy ultrarelatywistycznej cząstki można traktować jako bezmasowe.

W tym przypadku

$$
\begin{aligned}
P(\pm n_k)\Lambda_+(k) &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} \pm \gamma_5 \frac{\not{k}}{m}\right)\frac{\not{k}+m}{2m} = \frac{1}{2}\frac{\not{k}+m}{2m} \pm \frac{1}{2}\gamma_5 \frac{m^2+m\not{k}}{2m^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\not{k}+m}{2m} \pm \frac{1}{2}\gamma_5\frac{\not{k}+m}{2m} = \frac{1}{2}(1\pm\gamma_5)\Lambda_+(k), \\
P(\pm n_k)\Lambda_-(k) &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} \pm \gamma_5 \frac{\not{k}}{m}\right)\frac{-\not{k}+m}{2m} \\
&= \frac{1}{2}\frac{-\not{k}+m}{2m} \pm \frac{1}{2}\gamma_5\frac{-m^2+m\not{k}}{2m^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{-\not{k}+m}{2m} \mp \frac{1}{2}\gamma_5\frac{-\not{k}+m}{2m} = \frac{1}{2}(1\mp\gamma_5)\Lambda_-(k).
\end{aligned}
$$

gdzie wykorzystaliśmy tożsamość $\not{k}^2 = k^2 = m^2$.
W granicy ultrarelatywistycznej cząstki można traktować jako bezmasowe.

Jak pokażemy w dalszym ciągu wykładu, spinory Diraca reprezentujące cząstki bezmasowe są stanami własnymi macierzy γ_5, nazywanej czasem operatorem *chiralności*, a odpowiednie wartości własne przyjmują wartości ± 1, co najlepiej widać z jawnej postaci macierzy γ_5 w reprezentacji Weyla:

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Fermiony o chiralności $+1$ nazywamy prawymi i oznaczamy symbolem R, a fermiony o chiralności -1 nazywamy lewymi i oznaczamy symbolem L.

Skrętność cząstki ultrarelatywistycznej a chiralność

Jak pokażemy w dalszym ciągu wykładu, spinory Diraca reprezentujące cząstki bezmasowe są stanami własnymi macierzy γ_5, nazywanej czasem operatorem *chiralności*, a odpowiednie wartości własne przyjmują wartości ± 1, co najlepiej widać z jawnej postaci macierzy γ_5 w reprezentacji Weyla:

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Fermiony o chiralności $+1$ nazywamy prawymi i oznaczamy symbolem R, a fermiony o chiralności -1 nazywamy lewymi i oznaczamy symbolem L.

Operatory rzutujące na stany o określonej chiralności mają w związku z tym postać

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \qquad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5).$$

Skrętność cząstki ultrarelatywistycznej a chiralność

Jak pokażemy w dalszym ciągu wykładu, spinory Diraca reprezentujące cząstki bezmasowe są stanami własnymi macierzy γ_5, nazywanej czasem operatorem *chiralności*, a odpowiednie wartości własne przyjmują wartości ± 1, co najlepiej widać z jawnej postaci macierzy γ_5 w reprezentacji Weyla:

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Fermiony o chiralności $+1$ nazywamy prawymi i oznaczamy symbolem R, a fermiony o chiralności -1 nazywamy lewymi i oznaczamy symbolem L.
Operatory rzutujące na stany o określonej chiralności mają w związku z tym postać

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \qquad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5).$$

Skrętność cząstki ultrarelatywistycznej a chiralność

Na podstawie wzorów

$$\begin{aligned} P(\pm n_k)\Lambda_+(k) &= \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\Lambda_+(k), \\ P(\pm n_k)\Lambda_-(k) &= \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)\Lambda_-(k) \end{aligned}$$

widzimy, że w granicy ultrarelatywistycznej skrętność cząstki jest zgodna, a skrętność antycząstki jest przeciwna do jej chiralności. Tę ostatnią możemy określić tylko dla cząstki bezmasowej.

Znajdźmy spinory Diraca w bazie skrętności. Dwuwymiarowe spinory bazowe powinny być funkcjami własnymi operatora rzutu spinu $\frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}$ na kierunek pędu $\hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$, gdzie $\vec{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$, jest wektorem utworzonym z macierzy Pauliego

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a wektor jednostkowy $\hat{k}$ określa kierunek pędu cząstki. We współrzędnych sferycznych $\hat{k} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$. Dlatego iloczyn $\vec{\sigma}\cdot\hat{k} = \sigma_1\hat{k}_1 + \sigma_2\hat{k}_2 + \sigma_3\hat{k}_3$ ma postać

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}\cdot\hat{k} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta(\cos\varphi - i\sin\varphi) \\ \sin\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi) & -\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Znajdźmy spinory Diraca w bazie skrętności. Dwuwymiarowe spinory bazowe powinny być funkcjami własnymi operatora rzutu spinu $\frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}$ na kierunek pędu $\hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$, gdzie $\vec{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$, jest wektorem utworzonym z macierzy Pauliego

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a wektor jednostkowy $\hat{k}$ określa kierunek pędu cząstki. We współrzędnych sferycznych $\hat{k} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$. Dlatego iloczyn $\vec{\sigma}\cdot\hat{k} = \sigma_1\hat{k}_1 + \sigma_2\hat{k}_2 + \sigma_3\hat{k}_3$ ma postać

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}\cdot\hat{k} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta(\cos\varphi - i\sin\varphi) \\ \sin\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi) & -\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Spinory w bazie skrętności

Rozważmy równanie własne

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{k} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) = \lambda \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}).$$

Niezerowe wartości własne λ istnieją, tylko jeśli

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Skąd otrzymujemy równanie na wartości własne

$$\lambda^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 1.$$

W takim razie rozpatrywane równanie własne możemy zapisać następująco

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{k} \varphi^{(\pm)}(\hat{k}) = \pm \varphi^{(\pm)}(\hat{k}).$$

Zapiszmy poszukiwane funkcje własne $\varphi^{(\pm)}(\hat{k})$ w formie

$$\varphi^{(\pm)}(\hat{k}) = \begin{pmatrix} a_\pm \\ b_\pm \end{pmatrix}$$

i załóżmy, że są one unormowane. Rozważmy równanie macierzowe

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ b_+ \end{pmatrix} = 0,$$

skąd otrzymujemy dwa równania na składowe spinora $\varphi^{(+)}(\hat{k})$

$$\begin{aligned} (\cos\theta - 1)a_+ + \sin\theta e^{-i\varphi} b_+ &= 0 \\ \sin\theta e^{i\varphi} a_+ - (1 + \cos\theta) b_+ &= 0 \end{aligned}$$

Równania te są zależne, gdyż wyznacznik układu znika.

Dlatego pomińmy drugie i rozważmy pierwsze z nich.

$$(1-\cos\theta)a_+ = \sin\theta e^{-i\varphi} b_+,$$

ale

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos 2\frac{\theta}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2},\\ \sin\theta &= \sin 2\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},\end{aligned}$$

więc nasze równanie możemy zapisać następująco

$$2\sin^2\frac{\theta}{2} a_+ = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} b_+.$$

Skąd otrzymujemy związek

$$b_+ = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} e^{i\varphi} a_+.$$

Skorzystajmy z warunku normalizacji

$$\varphi^{(+)\,\dagger}\varphi^{(+)} = 1 \quad \Rightarrow \quad (a_+^*, b_+^*)\left(\begin{array}{c} a_+ \\ b_+ \end{array}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad |a_+|^2 + |b_+|^2 = 1$$

i wykorzystajmy związek

$$b_+ = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} e^{i\varphi} a_+,$$

wtedy otrzymamy równanie

$$|a_+|^2\left(1 + \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right) = \frac{|a_+|^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad |a_+|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}$$

Wybierzmy fazę dowolną w ostatnim równaniu jako 1, wtedy $a_+ = \cos\frac{\theta}{2}$, a spinor $\varphi^{(+)}(\hat{k})$ będzie miał postać

$$\varphi^{(+)}(\hat{k}) = \left(\begin{array}{c} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{array}\right)$$

Dla $\lambda = -1$ otrzymamy równanie macierzowe

$$\begin{pmatrix} \cos\theta + 1 & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_- \\ b_- \end{pmatrix} = 0.$$

Wykorzystując takie same tożsamości trygonometryczne jak poprzednio, pierwsze równanie możemy zapisać jako

$$2\cos^2\frac{\theta}{2} a_- + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} b_- = 0.$$

Skąd otrzymujemy związek

$$a_- = -\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} e^{-i\varphi} b_-.$$

Wykorzystując związek

$$a_- = -\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} e^{-i\varphi} b_-.$$

w warunku normalizacji $\varphi^{(-)\,\dagger}\varphi^{(-)} = 1$ otrzymamy

$$|a_-|^2 + |b_-|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} + 1\right)|b_-|^2 = \frac{|b_-|^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = 1.$$

Tak jak poprzednio, wybierzmy fazę dowolną w ostatnim równaniu jako 1, wtedy $b_- = \cos\frac{\theta}{2}$, a spinor $\varphi^{(-)}(\hat{k})$ będzie miał postać

$$\varphi^{(-)}(\hat{k}) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Spinory w bazie skrętności

Spinory dwuskładnikowe $\varphi^{(\pm)}(\hat{k})$ są funkcjami własnymi operatora

$$\frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}\cdot\hat{k} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}\cdot\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|},$$

który określa rzut spinu cząstki na kierunek jej pędu. Wartości własne tego operatora nazywamy skrętnością (ang. *helicity*). Jak pokazaliśmy dla cząstki o spine $\frac{1}{2}$ skrętność może przyjmować tylko dwie wartości $\pm\frac{1}{2}$. Dla wygody, często używamy podwojonej skrętności $\lambda = \pm 1$.

Spinory dla $\lambda = +1$ i $\lambda = -1$ nazywamy, odpowiednio, prawoskrętnym (R) i lewoskrętnym (L) spinorem Weyla.

Spinory dwuskładnikowe $\varphi^{(\pm)}(\hat{k})$ są funkcjami własnymi operatora

$$\frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}\cdot\hat{k} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}\cdot\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|},$$

który określa rzut spinu cząstki na kierunek jej pędu. Wartości własne tego operatora nazywamy skrętnością (ang. *helicity*). Jak pokazaliśmy dla cząstki o spine $\frac{1}{2}$ skrętność może przyjmować tylko dwie wartości $\pm\frac{1}{2}$. Dla wygody, często używamy podwojonej skrętności $\lambda = \pm 1$.

Spinory dla $\lambda = +1$ i $\lambda = -1$ nazywamy, odpowiednio, prawoskrętnym (R) i lewoskrętnym (L) spinorem Weyla.

Podsumujmy.

$$\varphi^{(+)}(\hat{k}) \equiv \varphi_R(\hat{k}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \varphi^{(-)}(\hat{k}) \equiv \varphi_L(\hat{k}) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Spinory w bazie skrętności

Spinory dwuskładnikowe $\varphi^{(\pm)}(\hat{k})$ są funkcjami własnymi operatora

$$\frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}\cdot\hat{k} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}\cdot\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|},$$

który określa rzut spinu cząstki na kierunek jej pędu. Wartości własne tego operatora nazywamy skrętnością (ang. *helicity*). Jak pokazaliśmy dla cząstki o spine $\frac{1}{2}$ skrętność może przyjmować tylko dwie wartości $\pm\frac{1}{2}$. Dla wygody, często używamy podwojonej skrętności $\lambda = \pm 1$.
Spinory dla $\lambda = +1$ i $\lambda = -1$ nazywamy, odpowiednio, prawoskrętnym (R) i lewoskrętnym (L) spinorem Weyla.
Podsumujmy.

$$\varphi^{(+)}(\hat{k}) \equiv \varphi_R(\hat{k}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \varphi^{(-)}(\hat{k}) \equiv \varphi_L(\hat{k}) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Spinory Diraca w bazie skrętności dla cząstki otrzymamy tak jak poprzednio wykorzystując tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0$$

i macierze γ^μ w reprezentacji Diraca

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego.

$$u^{(\lambda)}(k) = \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=$$

Spinory Diraca w bazie skrętności dla cząstki otrzymamy tak jak poprzednio wykorzystując tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0$$

i macierze γ^μ w reprezentacji Diraca

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego.

$$u^{(\lambda)}(k) = \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} E + m & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -E + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Spinory Diraca w bazie skrętności dla cząstki otrzymamy tak jak poprzednio wykorzystując tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0$$

i macierze γ^μ w reprezentacji Diraca

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego.

$$\begin{aligned} u^{(\lambda)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} E+m & -\vec{k}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{k}\cdot\vec{\sigma} & -E+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

Spinory Diraca w bazie skrętności dla cząstki otrzymamy tak jak poprzednio wykorzystując tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0$$

i macierze γ^μ w reprezentacji Diraca

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego.

$$\begin{aligned} u^{(\lambda)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} E+m & -\vec{k}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{k}\cdot\vec{\sigma} & -E+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} (E+m)\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda|\vec{k}|\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Spinory Diraca w bazie skrętności dla cząstki otrzymamy tak jak poprzednio wykorzystując tożsamość

$$(\not k - m)(\not k + m) = \not k^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0$$

i macierze γ^μ w reprezentacji Diraca

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego.

$$\begin{aligned} u^{(\lambda)}(k) &= \frac{\not k + m}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} E+m & -\vec{k}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{k}\cdot\vec{\sigma} & -E+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} (E+m)\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda|\vec{k}|\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wykorzystując związek $|\vec{k}| = \sqrt{E^2 - m^2} = \sqrt{(E-m)(E+m)}$ otrzymamy

$$u^{(\lambda)}(k) = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \left(\begin{array}{c} (E+m)\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda|\vec{k}|\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \sqrt{E+m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda\sqrt{E-m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{array} \right).$$

Aby poprawnie zdefiniować spinory Diraca dla antycząstki, rozważmy operację sprzężenia ładunkowego C.

Wykorzystując związek $|\vec{k}| = \sqrt{E^2 - m^2} = \sqrt{(E-m)(E+m)}$ otrzymamy

$$u^{(\lambda)}(k) = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} (E+m)\, \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda |\vec{k}| \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}\, \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda \sqrt{E-m}\, \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}.$$

Aby poprawnie zdefiniować spinory Diraca dla antycząstki, rozważmy operację sprzężenia ładunkowego C.

Operacja sprzężenia ładunkowego

Rozważmy ruch cząstki o ładunku elektrycznym q w polu elektromagnetycznym (EM) o czteropotencjale $A^\mu(x) = (\phi(x), \vec{A}(x))$, gdzie x jest czterowektorem położenia cząstki w czasoprzestrzeni Minkowskiego, $x^\mu = (ct, \vec{x}) = (x^0, \vec{x})$.

Z kursu *Mechaniki klasycznej i relatywistycznej* pamiętamy, że oddziaływanie z zewnętrznym polem EM uwzględniamy dokonując podstawień

$$\vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A}, \qquad E \to E - q\phi,$$

gdzie przyjęliśmy $c = 1$. Reguła podstawienia dla energii wynika z faktu, że w hamiltonianie cząstki naładowanej w polu EM pojawia się wyraz $q\phi$.

Operacja sprzężenia ładunkowego

Rozważmy ruch cząstki o ładunku elektrycznym q w polu elektromagnetycznym (EM) o czteropotencjale $A^\mu(x) = (\phi(x), \vec{A}(x))$, gdzie x jest czterowektorem położenia cząstki w czasoprzestrzeni Minkowskiego, $x^\mu = (ct, \vec{x}) = (x^0, \vec{x})$. Z kursu *Mechaniki klasycznej i relatywistycznej* pamiętamy, że oddziaływanie z zewnętrznym polem EM uwzględniamy dokonując podstawień

$$\vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A}, \qquad E \to E - q\phi,$$

gdzie przyjęliśmy $c = 1$. Reguła podstawienia dla energii wynika z faktu, że w hamiltonianie cząstki naładowanej w polu EM pojawia się wyraz $q\phi$.

W przypadku relatywistycznym obie te reguły mają postać

$$p^\mu \to p^\mu - qA^\mu,$$

a dla operator pędu w reprezentacji położeniowej

$$i\partial_\mu \to i\partial_\mu - qA_\mu.$$

Operacja sprzężenia ładunkowego

Rozważmy ruch cząstki o ładunku elektrycznym q w polu elektromagnetycznym (EM) o czteropotencjale $A^\mu(x) = (\phi(x), \vec{A}(x))$, gdzie x jest czterowektorem położenia cząstki w czasoprzestrzeni Minkowskiego, $x^\mu = (ct, \vec{x}) = (x^0, \vec{x})$.
Z kursu *Mechaniki klasycznej i relatywistycznej* pamiętamy, że oddziaływanie z zewnętrznym polem EM uwzględniamy dokonując podstawień

$$\vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A}, \qquad E \to E - q\phi,$$

gdzie przyjęliśmy $c = 1$. Reguła podstawienia dla energii wynika z faktu, że w hamiltonianie cząstki naładowanej w polu EM pojawia się wyraz $q\phi$.
W przypadku relatywistycznym obie te reguły mają postać

$$p^\mu \to p^\mu - qA^\mu,$$

a dla operator pędu w reprezentacji położeniowej

$$i\partial_\mu \to i\partial_\mu - qA_\mu.$$

Operacja sprzężenia ładunkowego

Dlatego równanie Diraca dla cząstki o ładunku elektrycznym q znajdującej się w polu elektromagnetycznym (EM) o czteropotencjale A^μ ma postać

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\,\psi(x) = 0.$$

Dokonajmy zamiany cząstki na antycząstkę, co odpowiada następującym podstawieniom w równaniu Diraca

$$q \to -q, \qquad \psi(x) \to \psi^c(x).$$

Chcemy, aby powyższe przekształcenie było lokalne i aby jego dwukrotne zastosowanie sprowadzało się do niemierzalnego czynnika fazowego.

Operacja sprzężenia ładunkowego

Dlatego równanie Diraca dla cząstki o ładunku elektrycznym q znajdującej się w polu elektromagnetycznym (EM) o czteropotencjale A^μ ma postać

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi(x) = 0.$$

Dokonajmy zamiany cząstki na antycząstkę, co odpowiada następującym podstawieniom w równaniu Diraca

$$q \to -q, \qquad \psi(x) \to \psi^c(x).$$

Chcemy, aby powyższe przekształcenie było lokalne i aby jego dwukrotne zastosowanie sprowadzało się do niemierzalnego czynnika fazowego. W jego wyniku równanie Diraca przyjmuje postać

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu + q\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi^c(x) = 0.$$

Dlatego równanie Diraca dla cząstki o ładunku elektrycznym q znajdującej się w polu elektromagnetycznym (EM) o czteropotencjale A^μ ma postać

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi(x) = 0.$$

Dokonajmy zamiany cząstki na antycząstkę, co odpowiada następującym podstawieniom w równaniu Diraca

$$q \to -q, \qquad \psi(x) \to \psi^c(x).$$

Chcemy, aby powyższe przekształcenie było lokalne i aby jego dwukrotne zastosowanie sprowadzało się do niemierzalnego czynnika fazowego. W jego wyniku równanie Diraca przyjmuje postać

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu + q\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi^c(x) = 0.$$

Sprzęgnijmy hermitowsko wyjściowe równanie Diraca

$$\psi^\dagger\left(-i(\gamma^\mu)^\dagger\overleftarrow{\partial}_\mu - q(\gamma^\mu)^\dagger A_\mu - m\right) = 0,$$

Operacja sprzężenia ładunkowego

Dlatego równanie Diraca dla cząstki o ładunku elektrycznym q znajdującej się w polu elektromagnetycznym (EM) o czteropotencjale A^μ ma postać

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi(x) = 0.$$

Dokonajmy zamiany cząstki na antycząstkę, co odpowiada następującym podstawieniom w równaniu Diraca

$$q \to -q, \qquad \psi(x) \to \psi^c(x).$$

Chcemy, aby powyższe przekształcenie było lokalne i aby jego dwukrotne zastosowanie sprowadzało się do niemierzalnego czynnika fazowego. W jego wyniku równanie Diraca przyjmuje postać

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu + q\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi^c(x) = 0.$$

Sprzęgnijmy hermitowsko wyjściowe równanie Diraca

$$\psi^\dagger \left(-i(\gamma^\mu)^\dagger \overleftarrow{\partial}_\mu - q(\gamma^\mu)^\dagger A_\mu - m\right) = 0,$$

gdzie strzałka na pochodną cząstkową oznacza, że działa ona na lewo na spinor $\psi^\dagger(x)$.

Pomnóżmy to równanie prawostronnie przez macierz γ^0 i wstawmy $(\gamma^0)^2 = 1$ pomiędzy spinor $\psi^\dagger(x)$ i wyrażenia w nawiasie, wtedy otrzymamy równanie

$$\psi^\dagger(\gamma^0)^2 \left(-i(\gamma^\mu)^\dagger \overleftarrow{\partial}_\mu - q(\gamma^\mu)^\dagger A_\mu - m\right)\gamma^0 = 0,$$

które możemy przepisać następująco

$$\bar{\psi}\left(-i\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 \overleftarrow{\partial}_\mu - q\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 A_\mu - m\right) = 0,$$

gdzie wprowadziliśmy barowany spinor Dirac $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$.

gdzie strzałka na pochodną cząstkową oznacza, że działa ona na lewo na spinor $\psi^\dagger(x)$.

Pomnóżmy to równanie prawostronnie przez macierz γ^0 i wstawmy $(\gamma^0)^2 = 1$ pomiędzy spinor $\psi^\dagger(x)$ i wyrażenia w nawiasie, wtedy otrzymamy równanie

$$\psi^\dagger(\gamma^0)^2\left(-i(\gamma^\mu)^\dagger\overleftarrow{\partial}_\mu - q(\gamma^\mu)^\dagger A_\mu - m\right)\gamma^0 = 0,$$

które możemy przepisać następująco

$$\bar{\psi}\left(-i\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\overleftarrow{\partial}_\mu - q\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 A_\mu - m\right) = 0,$$

gdzie wprowadziliśmy barowany spinor Dirac $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$.

Skorzystajmy z własnsości $\gamma^{\mu\,\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \Rightarrow \gamma^0\,\gamma^{\mu\,\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu$, wtedy otrzymamy równanie

$$\bar{\psi}\left(-i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m\right) = 0.$$

gdzie strzałka na pochodną cząstkową oznacza, że działa ona na lewo na spinor $\psi^\dagger(x)$.
Pomnóżmy to równanie prawostronnie przez macierz γ^0 i wstawmy $(\gamma^0)^2 = 1$ pomiędzy spinor $\psi^\dagger(x)$ i wyrażenia w nawiasie, wtedy otrzymamy równanie

$$\psi^\dagger(\gamma^0)^2 \left(-i(\gamma^\mu)^\dagger \overleftarrow{\partial}_\mu - q(\gamma^\mu)^\dagger A_\mu - m\right)\gamma^0 = 0,$$

które możemy przepisać następująco

$$\bar{\psi}\left(-i\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 \overleftarrow{\partial}_\mu - q\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 A_\mu - m\right) = 0,$$

gdzie wprowadziliśmy barowany spinor Dirac $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$.
Skorzystajmy z własnsości $\gamma^{\mu\,\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \Rightarrow \gamma^0\,\gamma^{\mu\,\dagger}\,\gamma^0 = \gamma^\mu$, wtedy otrzymamy równanie

$$\bar{\psi}\left(-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m\right) = 0.$$

Operacja sprzężenia ładunkowego

Dokonajmy transpozycji tego równania

$$\left(-(\gamma^\mu)^T(i\partial_\mu + qA_\mu) - m\right)\bar{\psi}^T = 0.$$

Pomnóżmy lewostronnie przez nieosobliwą macierz C i wstawmy $C^{-1}C = 1$ pomiędzy $\bar{\psi}^T$ i wyrażenie w nawiasie, wtedy otrzymamy równanie

$$\left(C(-\gamma^\mu)^T C^{-1}(i\partial_\mu + qA_\mu) - m\right) C\bar{\psi}^T = 0,$$

które jest równoważne równaniu Diraca dla antycząstki w polu EM

$$\left(\gamma^\mu(i\partial_\mu + qA_\mu) - m\right)\psi^c = 0,$$

pod warunkiem że istnieje nieosobliwa macierz C taka, że

$$\psi^c = \eta_c C\bar{\psi}^T, \quad \text{gdzie} \quad |\eta_c|^2 = 1 \quad \text{i} \quad C(-\gamma^\mu)^T C^{-1} = \gamma^\mu.$$

Drugą równość przepiszmy w formie

$$C^{-1}\gamma^{\mu}C = -\,\gamma^{\mu\,T}.$$

Macierz C możemy skonstruować wykorzystując reprezentację Diraca macierzy γ^{μ}

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie macierze Pauliego dane są wzorami

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

w której zachodzą związki

$$\gamma^{0\,T} = \gamma^0, \quad \gamma^{1\,T} = -\gamma^1, \quad \gamma^{2\,T} = \gamma^2, \quad \gamma^{3\,T} = -\gamma^3.$$

W takim razie macierz C powinna antykomutwoać z macierzami γ^0 i γ^2, a komutować z macierzami γ^1 i γ^3. Jak łatwo się przekonać, takie własności ma macierz

$$C = i\gamma^2\gamma^0.$$

Zadanie. Pokazać, że macierz C w reprezentacji Diraca spełnia następujące własności

$$C^{-1} = C^\dagger = C^T = -C.$$

W reprezentacji Weyla

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

również są spełnione związki

$$\gamma^{0\,T} = \gamma^0, \quad \gamma^{1\,T} = -\gamma^1, \quad \gamma^{2\,T} = \gamma^2, \quad \gamma^{3\,T} = -\gamma^3,$$

a zatem macierz C ma taką samą postać jak w reprezentacji Diraca.

Operacja sprzężenia ładunkowego

Zauważmy, że jeśli w równaniu Diraca dla cząstki o ładunku elektrycznym q w polu EM o czteropotencjale $A^\mu(x)$

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu(x) - m)\,\psi(x) = 0$$

dokonamy operacji sprzężenia ładunkowego

$$q \to -q, \quad \psi(x) \to \psi^c(x) = \eta_c C\bar{\psi}^T(x), \quad \text{gdzie} \quad |\eta_c|^2 = 1$$

i jednocześnie dokonamy transformacji

$$A_\mu(x) \to A_\mu^c(x) = -A_\mu(x),$$

to jego postać pozostanie nie zmieniona.

Zdefiniujmy spinor w bazie skrętności dla antycząstki poprzez relację

$$v^{(\lambda)}(k) = C\bar{u}^{(\lambda)}(k)^T,$$

gdzie

$$u^{(\lambda)}(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda\sqrt{E-m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}$$

jest znalezionym wcześniej spinorem w bazie skrętności dla cząstki w reprezentacji Diraca Znajdźmy spinor barowany

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\lambda)}(k) &= u^{(\lambda)}(k)^\dagger \gamma^0 \\ &= \left(\sqrt{E+m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^\dagger,\ \lambda\sqrt{E-m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^\dagger\right) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zdefiniujmy spinor w bazie skrętności dla antycząstki poprzez relację

$$v^{(\lambda)}(k) = C\,\bar{u}^{(\lambda)}(k)^T,$$

gdzie

$$u^{(\lambda)}(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda\sqrt{E-m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}$$

jest znalezionym wcześniej spinorem w bazie skrętności dla cząstki w reprezentacji Diraca Znajdźmy spinor barowany

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\lambda)}(k) &= u^{(\lambda)}(k)^\dagger \gamma^0 \\ &= \left(\sqrt{E+m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^\dagger,\ \lambda\sqrt{E-m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^\dagger\right) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \\ &= \left(\sqrt{E+m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^\dagger,\ -\lambda\sqrt{E-m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^\dagger\right). \end{aligned}$$

Spinory w bazie skrętności

Zdefiniujmy spinor w bazie skrętności dla antycząstki poprzez relację

$$v^{(\lambda)}(k) = C\,\bar{u}^{(\lambda)}(k)^T,$$

gdzie

$$u^{(\lambda)}(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda\sqrt{E-m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}$$

jest znalezionym wcześniej spinorem w bazie skrętności dla cząstki w reprezentacji Diraca Znajdźmy spinor barowany

$$\begin{aligned}
\bar{u}^{(\lambda)}(k) &= u^{(\lambda)}(k)^\dagger \gamma^0 \\
&= \left(\sqrt{E+m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^\dagger,\ \lambda\sqrt{E-m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^\dagger\right) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \\
&= \left(\sqrt{E+m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^\dagger,\ -\lambda\sqrt{E-m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^\dagger\right).
\end{aligned}$$

Macierz C w reprezentacji Diraca ma postać

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix},$$

a zatem

$$\begin{aligned} v^{(\lambda)}(k) &= \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^* \\ -\lambda\sqrt{E-m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\lambda\sqrt{E-m}\,(-i\sigma_2)\varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^* \\ \sqrt{E+m}\,(-i\sigma_2)\varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zdefiniujmy spinory bazowe w bazie skrętności dla antycząstki jako

$$\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) = -i\sigma_2\varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^*.$$

Wtedy spinor dla antycząstki w bazie skrętności w reprezentacji Diraca możemy zapisać następująco

$$v^{(\lambda)}(k) = \begin{pmatrix} -\lambda\sqrt{E-m}\,\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \sqrt{E+m}\,\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix},$$

a spinory bazowe $\chi^{(\lambda)}(\hat{k})$ znajdziemy wykorzystując postać spinorów $\varphi^{(\lambda)}(\hat{k})$ dla cząstki

$$\varphi^{(+)}(\hat{k}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \varphi^{(-)}(\hat{k}) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Mają one postać następującą

$$\chi^{(+)}(\hat{k}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \varphi^{(-)}(\hat{k}),$$

$$\chi^{(-)}(\hat{k}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{pmatrix} = -\varphi^{(+)}(\hat{k}),$$

Widzimy, że zachodzi następujący związek

$$\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) = \lambda\varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}).$$

Dlatego

$$\vec{\sigma}\cdot\hat{k}\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) = \lambda\vec{\sigma}\cdot\hat{k}\varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) = \lambda(-\lambda)\varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) = -\lambda\chi^{(\lambda)}(\hat{k}),$$

a więc, zgodnie z oczekiwaniem, skrętność antycząstki jest przeciwna do skrętności cząstki.

Spinory w bazie skrętności w reprezentacji Weyla

Przypomnijmy, że związek pomiędzy macierzami γ^μ w reprezentacji Diraca i reprezentacji Weyla ma postać

$$\gamma_D^\mu = U^\dagger \gamma_W^\mu U, \quad \text{gdzie} \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix},$$

przy czym dla spinorów zachodzi związek $\psi_D = U^\dagger \psi_W$. Dlatego spinory w bazie skrętności w reprezentacji Weyla otrzymamy działając na spinory w reprezentacji Diraca macierzą U.

$$\begin{aligned} u_W^{(\lambda)}(k) &= U u^{(\lambda)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda\sqrt{E-m}\,\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\sqrt{E+m} - \lambda\sqrt{E-m})\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ (\sqrt{E+m} + \lambda\sqrt{E-m})\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{E - \lambda|\vec{k}|}\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \sqrt{E + \lambda|\vec{k}|}\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy następującą tożsamość

$$\left[\frac{\sqrt{E+m} \mp \lambda\sqrt{E-m}}{\sqrt{2}}\right]^2 = \frac{1}{2}\left(E+m+E-m \mp 2\lambda\sqrt{E+m}\sqrt{E-m}\right) = E \mp \lambda|\vec{k}|.$$

Spinory w bazie skrętności w reprezentacji Weyla dla antycząstki otrzymamy w ten sam sposób.

$$\begin{aligned} v_W^{(\lambda)}(k) &= Uv^{(\lambda)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\lambda\sqrt{E-m}\,\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \sqrt{E+m}\,\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (-\lambda\sqrt{E-m} - \sqrt{E+m})\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ (-\lambda\sqrt{E-m} + \sqrt{E+m})\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sqrt{E+\lambda|\vec{k}|}\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \sqrt{E-\lambda|\vec{k}|}\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda\sqrt{E+\lambda|\vec{k}|}\varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda\sqrt{E-\lambda|\vec{k}|}\varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie również wykorzystaliśmy powyższą tożsamość gdzie wykorzystaliśmy następującą tożsamość

$$\left[\frac{\sqrt{E+m} \mp \lambda\sqrt{E-m}}{\sqrt{2}}\right]^2 = \frac{1}{2}\left(E+m+E-m \mp 2\lambda\sqrt{E+m}\sqrt{E-m}\right) = E \mp \lambda|\vec{k}|.$$

Spinory w bazie skrętności w reprezentacji Weyla dla antycząstki otrzymamy w ten sam sposób.

$$\begin{aligned} v_W^{(\lambda)}(k) &= Uv^{(\lambda)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\lambda\sqrt{E-m}\,\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \sqrt{E+m}\,\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (-\lambda\sqrt{E-m} - \sqrt{E+m})\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ (-\lambda\sqrt{E-m} + \sqrt{E+m})\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sqrt{E+\lambda|\vec{k}|}\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \sqrt{E-\lambda|\vec{k}|}\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda\sqrt{E+\lambda|\vec{k}|}\varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda\sqrt{E-\lambda|\vec{k}|}\varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie również wykorzystaliśmy powyższą tożsamość i związek $\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) = \lambda\varphi^{(-\lambda)}(\hat{k})$.

Zadanie. Pokazać, że dla spinorów w bazie skrętności w reprezentacji Weyla zachodzą następujące związki

$$\begin{aligned} P(\pm n_k)u_W^{(\lambda)}(k) &= \frac{1}{2}(1 \pm \lambda)u_W^{(\lambda)}(k) \\ P(\pm n_k)v_W^{(\lambda)}(k) &= \frac{1}{2}(1 \pm \lambda)v_W^{(\lambda)}(k). \end{aligned}$$

Wskazówka. Skorzystać z definicji operatora rzutującego na stany o określonej skrętności, $P(\pm n_k) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} \pm \gamma_5 \not{n}_k\right)$, gdzie $\not{n}_k = n_k^\mu \gamma_\mu$, $n_k^\mu = \left(\frac{|\vec{k}|}{m}, \frac{E}{m}\ \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\right)$ i z jawnej postaci macierzy γ^μ w reprezentacji Weyla.

i związek $\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) = \lambda\varphi^{(-\lambda)}(\hat{k})$.

Zadanie. Pokazać, że dla spinorów w bazie skrętności w reprezentacji Weyla zachodzą następujące związki

$$\begin{aligned} P(\pm n_k)u_W^{(\lambda)}(k) &= \frac{1}{2}(1 \pm \lambda)u_W^{(\lambda)}(k) \\ P(\pm n_k)v_W^{(\lambda)}(k) &= \frac{1}{2}(1 \pm \lambda)v_W^{(\lambda)}(k). \end{aligned}$$

Wskazówka. Skorzystać z definicji operatora rzutującego na stany o określonej skrętności, $P(\pm n_k) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} \pm \gamma_5 \not{n}_k\right)$, gdzie $\not{n}_k = n_k^\mu \gamma_\mu$, $n_k^\mu = \left(\frac{|\vec{k}|}{m}, \frac{E}{m}\ \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\right)$ i z jawnej postaci macierzy γ^μ w reprezentacji Weyla.

Spinory w bazie skrętności w reprezentacji Weyla dla cząstki i antycząstki mają postać

$$u_W^{(\lambda)}(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{E - \lambda|\vec{k}|}\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \sqrt{E + \lambda|\vec{k}|}\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}, \quad v_W^{(\lambda)}(k) = \begin{pmatrix} -\lambda\sqrt{E + \lambda|\vec{k}|}\varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda\sqrt{E - \lambda|\vec{k}|}\varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}.$$

Zadanie. Pokazać, że powyższe spinory w bazie skrętności spełniają następujące warunki:

$$\bar{u}_W^{(\lambda_1)}(k)\gamma^0 u_W^{(\lambda_2)}(k) = \bar{v}_W^{(\lambda_1)}(k)\gamma^0 v_W^{(\lambda_2)}(k) = 2E\delta_{\lambda_1\lambda_2}.$$

Spinory w bazie skrętności w reprezentacji Weyla dla cząstki i antycząstki mają postać

$$u_W^{(\lambda)}(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{E-\lambda|\vec{k}|}\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \sqrt{E+\lambda|\vec{k}|}\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}, \quad v_W^{(\lambda)}(k) = \begin{pmatrix} -\lambda\sqrt{E+\lambda|\vec{k}|}\varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda\sqrt{E-\lambda|\vec{k}|}\varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}.$$

Zadanie. Pokazać, że powyższe spinory w bazie skrętności spełniają następujące warunki:

$$\bar{u}_W^{(\lambda_1)}(k)\gamma^0 u_W^{(\lambda_2)}(k) = \bar{v}_W^{(\lambda_1)}(k)\gamma^0 v_W^{(\lambda_2)}(k) = 2E\delta_{\lambda_1\lambda_2}.$$

Spinory w bazie skrętności w reprezentacji Weyla dla cząstki i antycząstki mają postać

$$u_W^{(\lambda)}(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{E-\lambda|\vec{k}|}\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \sqrt{E+\lambda|\vec{k}|}\varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}, \quad v_W^{(\lambda)}(k) = \begin{pmatrix} -\lambda\sqrt{E+\lambda|\vec{k}|}\varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda\sqrt{E-\lambda|\vec{k}|}\varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}.$$

Zadanie. Pokazać, że powyższe spinory w bazie skrętności spełniają następujące warunki:

$$\bar{u}_W^{(\lambda_1)}(k)\gamma^0 u_W^{(\lambda_2)}(k) = \bar{v}_W^{(\lambda_1)}(k)\gamma^0 v_W^{(\lambda_2)}(k) = 2E\delta_{\lambda_1\lambda_2}.$$

W granicy ultrarelatywistycznej możemy przyjąć
$m = 0 \quad \Rightarrow \quad E = |\vec{k}|$ i spinory przyjmują postać

$$u_W^{(+)}(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2E}\varphi^{(+)}(\hat{k}) \end{pmatrix}, \quad u_W^{(-)}(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{2E}\varphi^{(-)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

dla cząstki i

$$v_W^{(+)}(k) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2E}\varphi^{(-)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_W^{(-)}(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2E}\varphi^{(+)}(\hat{k}) \end{pmatrix},$$

dla antycząstki, a zatem $v_W^{(\pm)}(k) = -u_W^{(\mp)}(k)$.

Spinory w bazie skrętności w reprezentacji Weyla

Wykorzystując postać macierzy γ_5 w reprezentacji Weyla:

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

widzimy, że operatory rzutujące na stany o określonej chiralności mają postać:

$$P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Dlatego dla bezmasowych spinorów Diraca otrzymujemy następujące zależności

$$P_L u_W^{(+)}(k) = 0, \qquad P_L u_W^{(-)}(k) = u_W^{(-)}(k) \equiv \begin{pmatrix} \varphi_L(k) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$P_R u_W^{(+)}(k) = u_W^{(+)}(k) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_R(k) \end{pmatrix}, \qquad P_L u_W^{(-)}(k) = 0.$$

Równanie Diraca w reprezentacji Weyla

Wstawmy spinory $u_W^{(\pm)}(k)$ do równania Diraca w reprezentacji pędowej dla cząstki o energii dodatniej $E = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$,

$$(\gamma^\mu k_\mu - m)\, u_W^{(\pm)}(k) = 0,$$

gdzie powinniśmy użyć macierzy γ^μ w reprezentacji Weyla:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

a więc

$$\gamma^\mu k_\mu = \gamma^0 k^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 & k^0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \\ k^0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{k} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dla cząstki bezmasowej, $m = 0$ i $k^0 = E = |\vec{k}|$, równanie Diraca $\gamma^\mu k_\mu u_W^{(\pm)}(k) = 0$, przyjmuje postać

$$\begin{pmatrix} 0 & k^0 - \vec{\sigma}\cdot\vec{k} \\ k^0 + \vec{\sigma}\cdot\vec{k} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_L(k) \\ \varphi_R(k) \end{pmatrix} = 0,$$

co daje następujące dwa równania na dwuskładnikowe spinory $\varphi_R(k)$ i $\varphi_L(k)$

$$(|\vec{k}| - \vec{\sigma}\cdot\vec{k})\varphi_R(k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\sigma}\cdot\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\varphi_R(k) = \varphi_R(k)$$

$$(|\vec{k}| + \vec{\sigma}\cdot\vec{k})\varphi_L(k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\sigma}\cdot\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\varphi_L(k) = -\varphi_L(k),$$

które po obustronnym pomnożeniu przez $\frac{1}{2}\hbar$ stają się rówaniami własnymi operatora skrętności dla spinu $\frac{1}{2}$.

Ogólna postać rozwiązania równania Diraca

Ogólne rozwiązanie swobodnego równania Diraca jest superpozycją rozwiązań dla dodatniej i ujemnej energii:

$$\psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3 2E} \sum_{\alpha} \left[c(\vec{k},\alpha) u^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} + d(\vec{k},\alpha)^* v^{(\alpha)}(k) e^{ikx} \right],$$

przy czym $k^0 = E = +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$, wskaźnik polaryzacyjny α przyjmuje dwie wartości, które zwykle wybiera się jako

- rzut spinu na oś Oz (baza kanoniczna) lub
- rzut spinu na kierunek pędu (skrętność),

bądź ich wartości podwojone, a miara całkowania

$$\frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3 2E}$$

jest relatywistycznie niezmiennicza.

Ogólna postać rozwiązania równania Diraca

Aby to wykazać, rozważmy następujące wyrażenie

$$\mathrm{d}^4 k \delta(k^2 - m^2)\theta(k^0),$$

które w oczywisty sposób jest niezmiennicze względem ortochronicznych właściwych transformacji Lorentza, gdyż zarówno miara $\mathrm{d}^4 k$ jak i argument δ Diraca są niezmiennicze względem dowolnej transformacji Lorentza Λ, a funkcja Heviside'a $\theta(k^0)$ ogranicza nas do transformacji, które nie zmieniają znaku składowej "0".

Skorzystajmy ze wzoru

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_{0i})}{|f'(x_{0i})|},$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich miejscach zerowych funkcji $f(x)$, $f(x_{0i}) = 0$.

Ogólna postać rozwiązania równania Diraca

Aby to wykazać, rozważmy następujące wyrażenie

$$\mathrm{d}^4 k \delta(k^2 - m^2)\theta(k^0),$$

które w oczywisty sposób jest niezmiennicze względem ortochronicznych właściwych transformacji Lorentza, gdyż zarówno miara $\mathrm{d}^4 k$ jak i argument δ Diraca są niezmiennicze względem dowolnej transformacji Lorentza Λ, a funkcja Heviside'a $\theta(k^0)$ ogranicza nas do transformacji, które nie zmieniają znaku składowej "0".

Skorzystajmy ze wzoru

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_{0i})}{|f'(x_{0i})|},$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich miejscach zerowych funkcji $f(x)$, $f(x_{0i}) = 0$.

Ogólna postać rozwiązania równania Diraca

Oznaczmy $\delta(k^2 - m^2) = \delta(f(k^0))$, gdzie

$$f(k^0) = k^2 - m^2 = (k^0)^2 - \vec{k}^2 - m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k^0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}.$$

Ponadto $f'(k^0) = 2k^0$. Oznaczmy $E = +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$, wtedy

$$\delta(k^2 - m^2)\theta(k^0) = \frac{\delta(k^0 - E)}{2E}\theta(E) + \frac{\delta(k^0 + E)}{|-2E|}\theta(-E) = \frac{\delta(k^0 - E)}{2E}.$$

Dlatego możemy zapisać

$$\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^3}\delta(k^2 - m^2)\theta(k^0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k^0 \delta(k^0 - E) \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3 2E} = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3 2E},$$

gdzie czynnik $1/(2\pi)^3$ jest związany z transformatą Fouriera do przestrzeni pędowej.

Zadanie. Pokazać, że spinor Diraca $\psi(x)$ określony wyżej rzeczywiście spełnia swobodne równanie Diraca.

Uwzględnienie w $\psi(x)$ tylko rozwiązań dla dodatnije energii prowadzi do sprzeczności jeśli np. chcemy rozpatrywać elektron zlokalizowany w obszarze o rozmiarach mniejszych niż jego komptonowska długość fali $\frac{\hbar}{mc}$.

Zadanie. Pokazać, że spinor Diraca $\psi(x)$ określony wyżej rzeczywiście spełnia swobodne równanie Diraca.
Uwzględnienie w $\psi(x)$ tylko rozwiązań dla dodatnije energii prowadzi do sprzeczności jeśli np. chcemy rozpatrywać elektron zlokalizowany w obszarze o rozmiarach mniejszych niż jego komptonowska długość fali $\frac{\hbar}{mc}$.