

# Rozwiązania równania Diraca dla cząstki i antycząstki swobodnej

Wykład 26

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki  
Uniwersytet Śląski, Katowice  
<http://kk.us.edu.pl>

Poszukajmy rozwiązań swobodnego równania Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0$$

w postaci fal płaskich.

Dokonajmy podstawień

$$\psi^{(+)}(x) = e^{-ikx} u(k), \quad \text{dla energii dodatniej,}$$

Poszukajmy rozwiązań swobodnego równania Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

w postaci fal płaskich.

Dokonajmy podstawień

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(x) &= e^{-ikx} u(k), & \text{dla energii dodatniej,} \\ \psi^{(-)}(x) & \end{aligned}$$

Poszukajmy rozwiązań swobodnego równania Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

w postaci fal płaskich.

Dokonajmy podstawień

$$\begin{aligned}\psi^{(+)}(x) &= e^{-ikx} u(k), & \text{dla energii dodatniej,} \\ \psi^{(-)}(x) &= \end{aligned}$$

Poszukajmy rozwiązań swobodnego równania Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0$$

w postaci fal płaskich.

Dokonajmy podstawień

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(x) &= e^{-ikx} u(k), & \text{dla energii dodatniej,} \\ \psi^{(-)}(x) &= e^{ikx} v(k), & \text{dla energii ujemnej.} \end{aligned}$$

Poszukajmy rozwiązań swobodnego równania Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

w postaci fal płaskich.

Dokonajmy podstawień

$$\begin{aligned}\psi^{(+)}(x) &= e^{-ikx} u(k), & \text{dla energii dodatniej,} \\ \psi^{(-)}(x) &= e^{ikx} v(k), & \text{dla energii ujemnej.}\end{aligned}$$

Zakładamy, że zerowa składowa czteropędu cząstki jest równa jej energii, tzn.  $k^0 = E = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} > 0$ .

Poszukajmy rozwiązań swobodnego równania Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

w postaci fal płaskich.

Dokonajmy podstawień

$$\begin{aligned}\psi^{(+)}(x) &= e^{-ikx} u(k), & \text{dla energii dodatniej,} \\ \psi^{(-)}(x) &= e^{ikx} v(k), & \text{dla energii ujemnej.}\end{aligned}$$

Zakładamy, że zerowa składowa czteropędu cząstki jest równa jej energii, tzn.  $k^0 = E = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} > 0$ .

Oczywiście  $k^2 = E^2 - \vec{k}^2 = m^2$ , gdzie  $m \neq 0$  jest masą cząstki.

Poszukajmy rozwiązań swobodnego równania Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

w postaci fal płaskich.

Dokonajmy podstawień

$$\begin{aligned}\psi^{(+)}(x) &= e^{-ikx} u(k), & \text{dla energii dodatniej,} \\ \psi^{(-)}(x) &= e^{ikx} v(k), & \text{dla energii ujemnej.}\end{aligned}$$

Zakładamy, że zerowa składowa czteropędu cząstki jest równa jej energii, tzn.  $k^0 = E = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} > 0$ .

Oczywiście  $k^2 = E^2 - \vec{k}^2 = m^2$ , gdzie  $m \neq 0$  jest masą cząstki.



Obliczmy

$$i\gamma^\mu \partial_\mu e^{\mp ikx} = i\gamma^\mu \partial_\mu (\mp ik_\nu x^\nu) e^{\mp ikx} =$$

Obliczmy

$$i\gamma^\mu \partial_\mu e^{\mp ikx} = i\gamma^\mu \partial_\mu (\mp ik_\nu x^\nu) e^{\mp ikx} = \pm \gamma^\mu k_\nu \delta_\mu^\nu e^{\mp ikx} =$$

Obliczmy

$$i\gamma^\mu \partial_\mu e^{\mp ikx} = i\gamma^\mu \partial_\mu (\mp ik_\nu x^\nu) e^{\mp ikx} = \pm \gamma^\mu k_\nu \delta_\mu^\nu e^{\mp ikx} = \pm \gamma^\mu k_\mu e^{\mp ikx}.$$

Obliczmy

$$i\gamma^\mu \partial_\mu e^{\mp ikx} = i\gamma^\mu \partial_\mu (\mp ik_\nu x^\nu) e^{\mp ikx} = \pm \gamma^\mu k_\nu \delta_\mu^\nu e^{\mp ikx} = \pm \gamma^\mu k_\mu e^{\mp ikx}.$$

Po uproszczeniu eksponent równanie Diraca przyjmuje postać

$$(\gamma^\mu k_\mu - m) u(k) = 0, \quad \text{dla energii dodatniej,}$$

Obliczmy

$$i\gamma^\mu \partial_\mu e^{\mp ikx} = i\gamma^\mu \partial_\mu (\mp ik_\nu x^\nu) e^{\mp ikx} = \pm \gamma^\mu k_\nu \delta_\mu^\nu e^{\mp ikx} = \pm \gamma^\mu k_\mu e^{\mp ikx}.$$

Po uproszczeniu eksponent równanie Diraca przyjmuje postać

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu k_\mu - m) u(k) &= 0, & \text{dla energii dodatniej,} \\ (\gamma^\mu k_\mu + m) v(k) &= 0, & \text{dla energii ujemnej.} \end{aligned}$$

Obliczmy

$$i\gamma^\mu \partial_\mu e^{\mp ikx} = i\gamma^\mu \partial_\mu (\mp ik_\nu x^\nu) e^{\mp ikx} = \pm \gamma^\mu k_\nu \delta_\mu^\nu e^{\mp ikx} = \pm \gamma^\mu k_\mu e^{\mp ikx}.$$

Po uproszczeniu eksponent równanie Diraca przyjmuje postać

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu k_\mu - m) u(k) &= 0, & \text{dla energii dodatniej,} \\ (\gamma^\mu k_\mu + m) v(k) &= 0, & \text{dla energii ujemnej.} \end{aligned}$$

W układzie spoczynkowym cząstki, w którym jej czteropęd wynosi  $k^\mu = (m, \vec{0})$  równania te przyjmują postać

Obliczmy

$$i\gamma^\mu \partial_\mu e^{\mp ikx} = i\gamma^\mu \partial_\mu (\mp ik_\nu x^\nu) e^{\mp ikx} = \pm \gamma^\mu k_\nu \delta_\mu^\nu e^{\mp ikx} = \pm \gamma^\mu k_\mu e^{\mp ikx}.$$

Po uproszczeniu eksponent równanie Diraca przyjmuje postać

$$\begin{aligned}(\gamma^\mu k_\mu - m) u(k) &= 0, & \text{dla energii dodatniej,} \\(\gamma^\mu k_\mu + m) v(k) &= 0, & \text{dla energii ujemnej.}\end{aligned}$$

W układzie spoczynkowym cząstki, w którym jej czteropęd wynosi  $k^\mu = (m, \vec{0})$  równania te przyjmują postać

$$(\gamma^0 - \mathbb{I}) u(m, \vec{0}) = 0, \quad \text{dla energii dodatniej,}$$

Obliczmy

$$i\gamma^\mu \partial_\mu e^{\mp ikx} = i\gamma^\mu \partial_\mu (\mp ik_\nu x^\nu) e^{\mp ikx} = \pm \gamma^\mu k_\nu \delta_\mu^\nu e^{\mp ikx} = \pm \gamma^\mu k_\mu e^{\mp ikx}.$$

Po uproszczeniu eksponent równanie Diraca przyjmuje postać

$$\begin{aligned}(\gamma^\mu k_\mu - m) u(k) &= 0, & \text{dla energii dodatniej,} \\(\gamma^\mu k_\mu + m) v(k) &= 0, & \text{dla energii ujemnej.}\end{aligned}$$

W układzie spoczynkowym cząstki, w którym jej czteropęd wynosi  $k^\mu = (m, \vec{0})$  równania te przyjmują postać

$$\begin{aligned}(\gamma^0 - \mathbb{I}) u(m, \vec{0}) &= 0, & \text{dla energii dodatniej,} \\(\gamma^0 + \mathbb{I}) v(m, \vec{0}) &= 0,\end{aligned}$$



Obliczmy

$$i\gamma^\mu \partial_\mu e^{\mp ikx} = i\gamma^\mu \partial_\mu (\mp ik_\nu x^\nu) e^{\mp ikx} = \pm \gamma^\mu k_\nu \delta_\mu^\nu e^{\mp ikx} = \pm \gamma^\mu k_\mu e^{\mp ikx}.$$

Po uproszczeniu eksponent równanie Diraca przyjmuje postać

$$\begin{aligned}(\gamma^\mu k_\mu - m) u(k) &= 0, & \text{dla energii dodatniej,} \\(\gamma^\mu k_\mu + m) v(k) &= 0, & \text{dla energii ujemnej.}\end{aligned}$$

W układzie spoczynkowym cząstki, w którym jej czteropęd wynosi  $k^\mu = (m, \vec{0})$  równania te przyjmują postać

$$\begin{aligned}(\gamma^0 - \mathbb{I}) u(m, \vec{0}) &= 0, & \text{dla energii dodatniej,} \\(\gamma^0 + \mathbb{I}) v(m, \vec{0}) &= 0, & \text{dla energii ujemnej.}\end{aligned}$$

Obliczmy

$$i\gamma^\mu \partial_\mu e^{\mp ikx} = i\gamma^\mu \partial_\mu (\mp ik_\nu x^\nu) e^{\mp ikx} = \pm \gamma^\mu k_\nu \delta_\mu^\nu e^{\mp ikx} = \pm \gamma^\mu k_\mu e^{\mp ikx}.$$

Po uproszczeniu eksponent równanie Diraca przyjmuje postać

$$\begin{aligned}(\gamma^\mu k_\mu - m) u(k) &= 0, & \text{dla energii dodatniej,} \\(\gamma^\mu k_\mu + m) v(k) &= 0, & \text{dla energii ujemnej.}\end{aligned}$$

W układzie spoczynkowym cząstki, w którym jej czteropęd wynosi  $k^\mu = (m, \vec{0})$  równania te przyjmują postać

$$\begin{aligned}(\gamma^0 - \mathbb{I}) u(m, \vec{0}) &= 0, & \text{dla energii dodatniej,} \\(\gamma^0 + \mathbb{I}) v(m, \vec{0}) &= 0, & \text{dla energii ujemnej.}\end{aligned}$$

Rozwiązania o energii dodatniej reprezentują cząstki, a rozwiązania o energii ujemnej reprezentują antycząstki.

Rozwiązania o energii dodatniej reprezentują cząstki, a rozwiązania o energii ujemnej reprezentują antycząstki.

Ponieważ antycząstka też powinna mieć dodatnią energię, to będziemy ją traktować jako cząstkę propagującą się w kierunku przeciwnym do kierunku upływu czasu.

Rozwiązania o energii dodatniej reprezentują cząstki, a rozwiązania o energii ujemnej reprezentują antycząstki.

Ponieważ antycząstka też powinna mieć dodatnią energię, to będziemy ją traktować jako cząstkę propagującą się w kierunku przeciwnym do kierunku upływu czasu.

W reprezentacji Diraca

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

gdzie  $I$  i  $0$  są odpowiednio macierzą jednostkową i macierzą zerową  $2 \times 2$ .

Rozwiązania o energii dodatniej reprezentują cząstki, a rozwiązania o energii ujemnej reprezentują antycząstki.

Ponieważ antycząstka też powinna mieć dodatnią energię, to będziemy ją traktować jako cząstkę propagującą się w kierunku przeciwnym do kierunku upływu czasu.

W reprezentacji Diraca

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

gdzie  $I$  i  $0$  są odpowiednio macierzą jednostkową i macierzą zerową  $2 \times 2$ .

Zapiszmy spinory Diraca dla cząstki i dla antycząstki w formie

$$u = \begin{pmatrix} u_I \\ u_{II} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_I \\ v_{II} \end{pmatrix}.$$

Równanie Diraca dla cząstki w układzie spoczynkowym

$$(\gamma^0 - \mathbb{I}) u(m, \vec{0}) = 0,$$

Zapisać spinory Diraca dla cząstki i dla antycząstki w formie

$$u = \begin{pmatrix} u_I \\ u_{II} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_I \\ v_{II} \end{pmatrix}.$$

Równanie Diraca dla cząstki w układzie spoczynkowym

$$(\gamma^0 - \mathbb{I}) u(m, \vec{0}) = 0,$$

przybiera postać

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_I(m, \vec{0}) \\ u_{II}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = 0.$$



Zapisać spinory Diraca dla cząstki i dla antycząstki w formie

$$u = \begin{pmatrix} u_I \\ u_{II} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_I \\ v_{II} \end{pmatrix}.$$

Równanie Diraca dla cząstki w układzie spoczynkowym

$$(\gamma^0 - \mathbb{I}) u(m, \vec{0}) = 0,$$

przybiera postać

$$\left[ \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_I(m, \vec{0}) \\ u_{II}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = 0.$$

Po uproszczeniu otrzymamy

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I(m, \vec{0}) \\ u_{II}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow u_{II}(m, \vec{0}) = 0.$$

Po uproszczeniu otrzymamy

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I(m, \vec{0}) \\ u_{II}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow u_{II}(m, \vec{0}) = 0.$$

Natomiast równanie to nie ogranicza dwóch górnych składowych spinora  $u(m, \vec{0})$ , które oznaczyliśmy  $u_I(m, \vec{0})$ .

Po uproszczeniu otrzymamy

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I(m, \vec{0}) \\ u_{II}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow u_{II}(m, \vec{0}) = 0.$$

Natomiast równanie to nie ogranicza dwóch górnych składowych spinora  $u(m, \vec{0})$ , które oznaczyliśmy  $u_I(m, \vec{0})$ .

Otrzymaliśmy dwa liniowo niezależne rozwiązania dla spinora cząstki w układzie spoczynkowym

$$u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2,$$

Po uproszczeniu otrzymamy

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I(m, \vec{0}) \\ u_{II}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow u_{II}(m, \vec{0}) = 0.$$

Natomiast równanie to nie ogranicza dwóch górnych składowych spinora  $u(m, \vec{0})$ , które oznaczyliśmy  $u_I(m, \vec{0})$ .

Otrzymaliśmy dwa liniowo niezależne rozwiązania dla spinora cząstki w układzie spoczynkowym

$$u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2,$$

gdzie spinory  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  w bazie kanonicznej mają postać

$$\varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi^{(2)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podobnie równanie dla antycząstki sprowadza się do

$$\begin{pmatrix} 2I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I(m, \vec{0}) \\ v_{II}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = 0$$

gdzie spinory  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  w bazie kanonicznej mają postać

$$\varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi^{(2)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podobnie równanie dla antycząstki sprowadza się do

$$\begin{pmatrix} 2I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I(m, \vec{0}) \\ v_{II}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_I(m, \vec{0}) = 0,$$

gdzie spinory  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  w bazie kanonicznej mają postać

$$\varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi^{(2)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podobnie równanie dla antycząstki sprowadza się do

$$\begin{pmatrix} 2I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I(m, \vec{0}) \\ v_{II}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_I(m, \vec{0}) = 0,$$

co nie ogranicza dwóch dolnych składowych spinora  $v(m, \vec{0})$ .



gdzie spinory  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  w bazie kanonicznej mają postać

$$\varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi^{(2)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podobnie równanie dla antycząstki sprowadza się do

$$\begin{pmatrix} 2I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I(m, \vec{0}) \\ v_{II}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_I(m, \vec{0}) = 0,$$

co nie ogranicza dwóch dolnych składowych spinora  $v(m, \vec{0})$ .

Znów otrzymaliśmy dwa liniowo niezależne rozwiązania dla spinora antycząstki w układzie spoczynkowym

$$v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

gdzie spinory  $\chi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  w bazie kanonicznej mają postać

$$\chi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Znów otrzymaliśmy dwa liniowo niezależne rozwiązania dla spinora antycząstki w układzie spoczynkowym

$$v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

gdzie spinory  $\chi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  w bazie kanonicznej mają postać

$$\chi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Użyliśmy tu innego symbolu dla spinorów bazowych  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  i  $\chi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ , gdyż w innej bazie niż kanoniczna mogą one mieć różną postać.

Znów otrzymaliśmy dwa liniowo niezależne rozwiązania dla spinora antycząstki w układzie spoczynkowym

$$v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

gdzie spinory  $\chi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  w bazie kanonicznej mają postać

$$\chi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Użyliśmy tu innego symbolu dla spinorów bazowych  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  i  $\chi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ , gdyż w innej bazie niż kanoniczna mogą one mieć różną postać.

Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie  $k^\mu$  wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 =$$

# Rozwiązania w postaci fal płaskich

Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie  $k^\mu$  wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 =$$

Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie  $k^\mu$  wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0.$$

Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie  $k^\mu$  wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0.$$

Skorzystaliśmy tu z równości  $\not{k}^2 = k^2$ , która zachodzi dla dowolnego czterowektora o komutujących składowych.



Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie  $k^\mu$  wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0.$$

Skorzystaliliśmy tu z równości  $\not{k}^2 = k^2$ , która zachodzi dla dowolnego czterowektora o komutujących składowych.

Rzeczywiście

$$\not{k}^2 =$$

Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie  $k^\mu$  wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0.$$

Skorzystaliliśmy tu z równości  $\not{k}^2 = k^2$ , która zachodzi dla dowolnego czterowektora o komutujących składowych. Rzeczywiście

$$\not{k}^2 = \gamma_\mu k^\mu \gamma_\nu k^\nu =$$

Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie  $k^\mu$  wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0.$$

Skorzystaliliśmy tu z równości  $\not{k}^2 = k^2$ , która zachodzi dla dowolnego czterowektora o komutujących składowych. Rzeczywiście

$$\not{k}^2 = \gamma_\mu k^\mu \gamma_\nu k^\nu = \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu k^\mu k^\nu + \frac{1}{2} \gamma_\nu \gamma_\mu k^\nu k^\mu$$

Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie  $k^\mu$  wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0.$$

Skorzystaliliśmy tu z równości  $\not{k}^2 = k^2$ , która zachodzi dla dowolnego czterowektora o komutujących składowych.

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}\not{k}^2 &= \gamma_\mu k^\mu \gamma_\nu k^\nu = \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu k^\mu k^\nu + \frac{1}{2} \gamma_\nu \gamma_\mu k^\nu k^\mu \\ &= \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) k^\mu k^\nu =\end{aligned}$$

Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie  $k^\mu$  wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0.$$

Skorzystaliliśmy tu z równości  $\not{k}^2 = k^2$ , która zachodzi dla dowolnego czterowektora o komutujących składowych. Rzeczywiście

$$\begin{aligned}\not{k}^2 &= \gamma_\mu k^\mu \gamma_\nu k^\nu = \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu k^\mu k^\nu + \frac{1}{2} \gamma_\nu \gamma_\mu k^\nu k^\mu \\ &= \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) k^\mu k^\nu = \frac{1}{2} 2g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu =\end{aligned}$$

Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie  $k^\mu$  wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0.$$

Skorzystaliliśmy tu z równości  $\not{k}^2 = k^2$ , która zachodzi dla dowolnego czterowektora o komutujących składowych.

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}\not{k}^2 &= \gamma_\mu k^\mu \gamma_\nu k^\nu = \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu k^\mu k^\nu + \frac{1}{2} \gamma_\nu \gamma_\mu k^\nu k^\mu \\ &= \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) k^\mu k^\nu = \frac{1}{2} 2g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = k^2.\end{aligned}$$

Aby znaleźć rozwiązania dla cząstki i antycząstki o czteropędzie  $k^\mu$  wykorzystamy tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0.$$

Skorzystaliliśmy tu z równości  $\not{k}^2 = k^2$ , która zachodzi dla dowolnego czterowektora o komutujących składowych. Rzeczywiście

$$\begin{aligned}\not{k}^2 &= \gamma_\mu k^\mu \gamma_\nu k^\nu = \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu k^\mu k^\nu + \frac{1}{2} \gamma_\nu \gamma_\mu k^\nu k^\mu \\ &= \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) k^\mu k^\nu = \frac{1}{2} 2g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = k^2.\end{aligned}$$

Ponieważ równanie Diraca w przestrzeni pędowej ma postać

$$\begin{aligned}(\not{k} - m) u(k) &= 0, \\(\not{k} + m) v(k) &= 0,\end{aligned}$$

to rozwiązania dla cząstki i antycząstki możemy zapisać w formie

$$u^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}),$$



Ponieważ równanie Diraca w przestrzeni pędowej ma postać

$$\begin{aligned}(\not{k} - m) u(k) &= 0, \\(\not{k} + m) v(k) &= 0,\end{aligned}$$

to rozwiązania dla cząstki i antycząstki możemy zapisać w formie

$$u^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}),$$
$$v^{(\alpha)}(k)$$

Ponieważ równanie Diraca w przestrzeni pędowej ma postać

$$\begin{aligned}(\not{k} - m) u(k) &= 0, \\(\not{k} + m) v(k) &= 0,\end{aligned}$$

to rozwiązania dla cząstki i antycząstki możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned}u^{(\alpha)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}), \\v^{(\alpha)}(k) &= \end{aligned}$$

Ponieważ równanie Diraca w przestrzeni pędowej ma postać

$$\begin{aligned}(\not{k} - m) u(k) &= 0, \\(\not{k} + m) v(k) &= 0,\end{aligned}$$

to rozwiązania dla cząstki i antycząstki możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned}u^{(\alpha)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}), \\v^{(\alpha)}(k) &= \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}),\end{aligned}$$

Ponieważ równanie Diraca w przestrzeni pędowej ma postać

$$\begin{aligned}(\not{k} - m) u(k) &= 0, \\(\not{k} + m) v(k) &= 0,\end{aligned}$$

to rozwiązania dla cząstki i antycząstki możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned}u^{(\alpha)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}), \\v^{(\alpha)}(k) &= \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}),\end{aligned}$$

gdzie  $u^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  i  $v^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  są rozwiązaniami w układzie spoczynkowym,

Ponieważ równanie Diraca w przestrzeni pędowej ma postać

$$\begin{aligned}(\not{k} - m) u(k) &= 0, \\(\not{k} + m) v(k) &= 0,\end{aligned}$$

to rozwiązania dla cząstki i antycząstki możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned}u^{(\alpha)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}), \\v^{(\alpha)}(k) &= \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}),\end{aligned}$$

gdzie  $u^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  i  $v^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  są rozwiązaniami w układzie spoczynkowym, a  $1/\sqrt{E + m}$  jest czynnikiem normalizacyjnym.

Ponieważ równanie Diraca w przestrzeni pędowej ma postać

$$\begin{aligned}(\not{k} - m) u(k) &= 0, \\(\not{k} + m) v(k) &= 0,\end{aligned}$$

to rozwiązania dla cząstki i antycząstki możemy zapisać w formie

$$\begin{aligned}u^{(\alpha)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}), \\v^{(\alpha)}(k) &= \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}),\end{aligned}$$

gdzie  $u^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  i  $v^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  są rozwiązaniami w układzie spoczynkowym, a  $1/\sqrt{E + m}$  jest czynnikiem normalizacyjnym.

Zauważmy, że taką samą postać związków pomiędzy spinorami w układzie, w którym cząstka lub antycząstka porusza się z czteropędem  $k^\mu$ , ze spinorami w jej układzie spoczynkowym otrzymamy niezależnie od wyboru reprezentacji macierzy Diraca. Natomiast konkretna postać spinorów  $u^{(\alpha)}(k)$ ,  $v^{(\alpha)}(k)$ ,  $u^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  i  $v^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  może być inna.

Zauważmy, że taką samą postać związków pomiędzy spinorami w układzie, w którym cząstka lub antycząstka porusza się z czteropędem  $k^\mu$ , ze spinorami w jej układzie spoczynkowym otrzymamy niezależnie od wyboru reprezentacji macierzy Diraca. Natomiast konkretna postać spinorów  $u^{(\alpha)}(k)$ ,  $v^{(\alpha)}(k)$ ,  $u^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  i  $v^{(\alpha)}(m, \vec{0})$  może być inna.



Znajdźmy jawną postać spinorów dla cząstki i antycząstki w reprezentacji Diraca.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , są macierzami Pauliego.

W tym celu obliczmy najpierw

$$\not{k} =$$

Znajdźmy jawną postać spinorów dla cząstki i antycząstki w reprezentacji Diraca.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , są macierzami Pauliego.

W tym celu obliczmy najpierw

$$\not{k} = k^\mu \gamma_\mu =$$

Znajdźmy jawną postać spinorów dla cząstki i antycząstki w reprezentacji Diraca.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , są macierzami Pauliego.

W tym celu obliczmy najpierw

$$\not{k} = k^\mu \gamma_\mu = k^0 \gamma^0 - \vec{k} \cdot \vec{\gamma} =$$

Znajdźmy jawną postać spinorów dla cząstki i antycząstki w reprezentacji Diraca.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , są macierzami Pauliego.

W tym celu obliczmy najpierw

$$\not{k} = k^\mu \gamma_\mu = k^0 \gamma^0 - \vec{k} \cdot \vec{\gamma} = E \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} - \vec{k} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

Znajdźmy jawną postać spinorów dla cząstki i antycząstki w reprezentacji Diraca.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , są macierzami Pauliego.

W tym celu obliczmy najpierw

$$\begin{aligned} \not{k} &= k^\mu \gamma_\mu = k^0 \gamma^0 - \vec{k} \cdot \vec{\gamma} = E \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} - \vec{k} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

Znajdźmy jawną postać spinorów dla cząstki i antycząstki w reprezentacji Diraca.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , są macierzami Pauliego.

W tym celu obliczmy najpierw

$$\begin{aligned} \not{k} &= k^\mu \gamma_\mu = k^0 \gamma^0 - \vec{k} \cdot \vec{\gamma} = E \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} - \vec{k} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -E \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Znajdźmy jawną postać spinorów dla cząstki i antycząstki w reprezentacji Diraca.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , są macierzami Pauliego.

W tym celu obliczmy najpierw

$$\begin{aligned} \not{k} &= k^\mu \gamma_\mu = k^0 \gamma^0 - \vec{k} \cdot \vec{\gamma} = E \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} - \vec{k} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -E \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

W takim razie spinor dla cząstki w reprezentacji Diraca ma postać

$$u^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0})$$
$$=$$



W takim razie spinor dla cząstki w reprezentacji Diraca ma postać

$$\begin{aligned} u^{(\alpha)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} E + m & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -E + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

W takim razie spinor dla cząstki w reprezentacji Diraca ma postać

$$\begin{aligned}u^{(\alpha)}(k) &= \frac{k + m}{\sqrt{E + m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} E + m & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -E + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

W takim razie spinor dla cząstki w reprezentacji Diraca ma postać

$$\begin{aligned}u^{(\alpha)}(k) &= \frac{k + m}{\sqrt{E + m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\&= \frac{1}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} E + m & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -E + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} \sqrt{E + m} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ \frac{\vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{\sqrt{E + m}} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

W takim razie spinor dla cząstki w reprezentacji Diraca ma postać

$$\begin{aligned}u^{(\alpha)}(k) &= \frac{k + m}{\sqrt{E + m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\&= \frac{1}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} E + m & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -E + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} \sqrt{E + m} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ \frac{\vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{\sqrt{E + m}} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Podobnie znajdujemy postać spinora dla antycząstki w reprezentacji Diraca

$$v^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0})$$
$$=$$

Podobnie znajdujemy postać spinora dla antycząstki w reprezentacji Diraca

$$\begin{aligned}v^{(\alpha)}(k) &= \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} -E + m & \vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} & E + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Podobnie znajdujemy postać spinora dla antycząstki w reprezentacji Diraca

$$\begin{aligned}v^{(\alpha)}(k) &= \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} -E + m & \vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} & E + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

Podobnie znajdujemy postać spinora dla antycząstki w reprezentacji Diraca

$$\begin{aligned}v^{(\alpha)}(k) &= \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\&= \frac{1}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} -E + m & \vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} & E + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} \frac{\vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{\sqrt{E + m}} \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ \sqrt{E + m} \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$



Podobnie znajdujemy postać spinora dla antycząstki w reprezentacji Diraca

$$\begin{aligned}v^{(\alpha)}(k) &= \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\&= \frac{1}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} -E + m & \vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} & E + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} \frac{\vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{\sqrt{E + m}} \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ \sqrt{E + m} \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

**Zadanie.** Pokazać następujące związki ortogonalności dla spinorów Diraca w przestrzeni pędowej

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k) &= 2m\delta_{\alpha\beta}, & \bar{u}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k) &= 0, \\ \bar{v}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k) &= -2m\delta_{\alpha\beta}, & \bar{v}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k) &= 0.\end{aligned}$$

**Zadanie.** Pokazać następujące związki zupełności dla spinorów Diraca w przestrzeni pędowej

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^2 u_a^{(\alpha)}(k)\bar{u}_b^{(\alpha)}(k) &= (\not{k} + m)_{ab}, \\ \sum_{\alpha=1}^2 v_a^{(\alpha)}(k)\bar{v}_b^{(\alpha)}(k) &= (\not{k} - m)_{ab}.\end{aligned}$$

**Zadanie.** Pokazać następujące związki ortogonalności dla spinorów Diraca w przestrzeni pędowej

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k) &= 2m\delta_{\alpha\beta}, & \bar{u}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k) &= 0, \\ \bar{v}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k) &= -2m\delta_{\alpha\beta}, & \bar{v}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k) &= 0.\end{aligned}$$

**Zadanie.** Pokazać następujące związki zupełności dla spinorów Diraca w przestrzeni pędowej

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^2 u_a^{(\alpha)}(k)\bar{u}_b^{(\alpha)}(k) &= (\not{k} + m)_{ab}, \\ \sum_{\alpha=1}^2 v_a^{(\alpha)}(k)\bar{v}_b^{(\alpha)}(k) &= (\not{k} - m)_{ab}.\end{aligned}$$

Zdefiniujmy operatory rzutowe

$$\Lambda_+(k) \equiv \frac{1}{2m} \sum_{\alpha=1}^2 u^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{u}^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{2m},$$

$$\Lambda_-(k) \equiv -\frac{1}{2m} \sum_{\alpha=1}^2 v^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{v}^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m}.$$

Zauważmy, że

$$(\not{k} + m)^2 =$$

Zdefiniujmy operatory rzutowe

$$\Lambda_+(k) \equiv \frac{1}{2m} \sum_{\alpha=1}^2 u^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{u}^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{2m},$$

$$\Lambda_-(k) \equiv -\frac{1}{2m} \sum_{\alpha=1}^2 v^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{v}^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m}.$$

Zauważmy, że

$$(\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 + 2m\not{k} + m^2 =$$

Zdefiniujmy operatory rzutowe

$$\Lambda_+(k) \equiv \frac{1}{2m} \sum_{\alpha=1}^2 u^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{u}^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{2m},$$

$$\Lambda_-(k) \equiv -\frac{1}{2m} \sum_{\alpha=1}^2 v^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{v}^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m}.$$

Zauważmy, że

$$(\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 + 2m\not{k} + m^2 = 2m\not{k} + 2m^2 =$$

Zdefiniujmy operatory rzutowe

$$\Lambda_+(k) \equiv \frac{1}{2m} \sum_{\alpha=1}^2 u^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{u}^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{2m},$$

$$\Lambda_-(k) \equiv -\frac{1}{2m} \sum_{\alpha=1}^2 v^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{v}^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m}.$$

Zauważmy, że

$$(\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 + 2m\not{k} + m^2 = 2m\not{k} + 2m^2 = 2m(\not{k} + m).$$

Zdefiniujmy operatory rzutowe

$$\Lambda_+(k) \equiv \frac{1}{2m} \sum_{\alpha=1}^2 u^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{u}^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{2m},$$

$$\Lambda_-(k) \equiv -\frac{1}{2m} \sum_{\alpha=1}^2 v^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{v}^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m}.$$

Zauważmy, że

$$(\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 + 2m\not{k} + m^2 = 2m\not{k} + 2m^2 = 2m(\not{k} + m).$$

Dlatego

$$\Lambda_+(k)u^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{2m} \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) =$$



Zdefiniujmy operatory rzutowe

$$\Lambda_+(k) \equiv \frac{1}{2m} \sum_{\alpha=1}^2 u^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{u}^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{2m},$$

$$\Lambda_-(k) \equiv -\frac{1}{2m} \sum_{\alpha=1}^2 v^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{v}^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m}.$$

Zauważmy, że

$$(\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 + 2m\not{k} + m^2 = 2m\not{k} + 2m^2 = 2m(\not{k} + m).$$

Dlatego

$$\Lambda_+(k)u^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{2m} \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = u^{(\alpha)}(k).$$

Zdefiniujmy operatory rzutowe

$$\Lambda_+(k) \equiv \frac{1}{2m} \sum_{\alpha=1}^2 u^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{u}^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{2m},$$

$$\Lambda_-(k) \equiv -\frac{1}{2m} \sum_{\alpha=1}^2 v^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{v}^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m}.$$

Zauważmy, że

$$(\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 + 2m\not{k} + m^2 = 2m\not{k} + 2m^2 = 2m(\not{k} + m).$$

Dlatego

$$\Lambda_+(k)u^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{2m} \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = u^{(\alpha)}(k).$$

Podobnie, ponieważ

$$(-\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 - 2m\not{k} + m^2 =$$

Podobnie, ponieważ

$$(-\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 - 2m\not{k} + m^2 = -2m\not{k} + 2m^2 =$$

Podobnie, ponieważ

$$(-\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 - 2m\not{k} + m^2 = -2m\not{k} + 2m^2 = 2m(-\not{k} + m),$$

Podobnie, ponieważ

$$(-\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 - 2m\not{k} + m^2 = -2m\not{k} + 2m^2 = 2m(-\not{k} + m),$$

to

$$\Lambda_-(k)v^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m} \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) =$$

Podobnie, ponieważ

$$(-\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 - 2m\not{k} + m^2 = -2m\not{k} + 2m^2 = 2m(-\not{k} + m),$$

to

$$\Lambda_-(k)v^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m} \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = v^{(\alpha)}(k).$$

Podobnie, ponieważ

$$(-\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 - 2m\not{k} + m^2 = -2m\not{k} + 2m^2 = 2m(-\not{k} + m),$$

to

$$\Lambda_-(k)v^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m} \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = v^{(\alpha)}(k).$$

Natomiast z tożsamości

$$(-\not{k} + m)(\not{k} + m) = (\not{k} + m)(-\not{k} + m) =$$



Podobnie, ponieważ

$$(-\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 - 2m\not{k} + m^2 = -2m\not{k} + 2m^2 = 2m(-\not{k} + m),$$

to

$$\Lambda_-(k)v^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m} \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = v^{(\alpha)}(k).$$

Natomiast z tożsamości

$$(-\not{k} + m)(\not{k} + m) = (\not{k} + m)(-\not{k} + m) = -\not{k}^2 + m^2 =$$

Podobnie, ponieważ

$$(-\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 - 2m\not{k} + m^2 = -2m\not{k} + 2m^2 = 2m(-\not{k} + m),$$

to

$$\Lambda_-(k)v^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m} \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = v^{(\alpha)}(k).$$

Natomiast z tożsamości

$$(-\not{k} + m)(\not{k} + m) = (\not{k} + m)(-\not{k} + m) = -\not{k}^2 + m^2 = 0$$

Podobnie, ponieważ

$$(-\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 - 2m\not{k} + m^2 = -2m\not{k} + 2m^2 = 2m(-\not{k} + m),$$

to

$$\Lambda_-(k)v^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m} \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = v^{(\alpha)}(k).$$

Natomiast z tożsamości

$$(-\not{k} + m)(\not{k} + m) = (\not{k} + m)(-\not{k} + m) = -\not{k}^2 + m^2 = 0$$

wynika, że

$$\Lambda_+(k)v^{(\alpha)}(k) = \Lambda_-(k)u^{(\alpha)}(k) =$$

Podobnie, ponieważ

$$(-\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 - 2m\not{k} + m^2 = -2m\not{k} + 2m^2 = 2m(-\not{k} + m),$$

to

$$\Lambda_-(k)v^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m} \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = v^{(\alpha)}(k).$$

Natomiast z tożsamości

$$(-\not{k} + m)(\not{k} + m) = (\not{k} + m)(-\not{k} + m) = -\not{k}^2 + m^2 = 0$$

wynika, że

$$\Lambda_+(k)v^{(\alpha)}(k) = \Lambda_-(k)u^{(\alpha)}(k) = 0.$$

Podobnie, ponieważ

$$(-\not{k} + m)^2 = \not{k}^2 - 2m\not{k} + m^2 = -2m\not{k} + 2m^2 = 2m(-\not{k} + m),$$

to

$$\Lambda_-(k)v^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m} \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = v^{(\alpha)}(k).$$

Natomiast z tożsamości

$$(-\not{k} + m)(\not{k} + m) = (\not{k} + m)(-\not{k} + m) = -\not{k}^2 + m^2 = 0$$

wynika, że

$$\Lambda_+(k)v^{(\alpha)}(k) = \Lambda_-(k)u^{(\alpha)}(k) = 0.$$

Czyli operatory  $\Lambda_+(k)$  i  $\Lambda_-(k)$  rzutują odpowiednio na stany o dodatniej i ujemnej energii.

**Zadanie.** Pokazać, że operatory  $\Lambda_{\pm}(k)$  spełniają własności idempotentności i zupełności, tzn.

$$\Lambda_{\pm}^2(k) = \Lambda_{\pm}(k) \quad \text{i} \quad \Lambda_+(k) + \Lambda_-(k) = \mathbb{I}$$

Czyli operatory  $\Lambda_+(k)$  i  $\Lambda_-(k)$  rzutują odpowiednio na stany o dodatniej i ujemnej energii.

**Zadanie.** Pokazać, że operatory  $\Lambda_{\pm}(k)$  spełniają własności idempotentności i zupełności, tzn.

$$\Lambda_{\pm}^2(k) = \Lambda_{\pm}(k) \quad \text{i} \quad \Lambda_+(k) + \Lambda_-(k) = \mathbb{I}$$

oraz, że

$$\text{Tr } \Lambda_{\pm}(k) = 2.$$

Czyli operatory  $\Lambda_+(k)$  i  $\Lambda_-(k)$  rzutują odpowiednio na stany o dodatniej i ujemnej energii.

**Zadanie.** Pokazać, że operatory  $\Lambda_{\pm}(k)$  spełniają własności idempotentności i zupełności, tzn.

$$\Lambda_{\pm}^2(k) = \Lambda_{\pm}(k) \quad \text{i} \quad \Lambda_+(k) + \Lambda_-(k) = \mathbb{I}$$

oraz, że

$$\text{Tr } \Lambda_{\pm}(k) = 2.$$



**Zadanie.** Pokazać, że gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki lub antycząstki, reprezentowanej odpowiednio przez falę płaską  $\psi_{(+)}^{(\alpha)}(x)$  lub  $\psi_{(-)}^{(\alpha)}(x)$ , wynosi

$$\bar{\psi}_{(+)}^{(\alpha)}(x)\gamma^0\psi_{(+)}^{(\beta)}(x) = \bar{\psi}_{(-)}^{(\alpha)}(x)\gamma^0\psi_{(-)}^{(\beta)}(x) = 2E\delta_{\alpha\beta}.$$

Zauważmy, że mamy po dwa stany z dodatnią i ujemną energią, które do tej pory numerowaliśmy wskaźnikami  $\alpha, \beta = 1, 2$ .

**Zadanie.** Pokazać, że gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki lub antycząstki, reprezentowanej odpowiednio przez falę płaską  $\psi_{(+)}^{(\alpha)}(x)$  lub  $\psi_{(-)}^{(\alpha)}(x)$ , wynosi

$$\bar{\psi}_{(+)}^{(\alpha)}(x)\gamma^0\psi_{(+)}^{(\beta)}(x) = \bar{\psi}_{(-)}^{(\alpha)}(x)\gamma^0\psi_{(-)}^{(\beta)}(x) = 2E\delta_{\alpha\beta}.$$

Zauważmy, że mamy po dwa stany z dodatnią i ujemną energią, które do tej pory numerowaliśmy wskaźnikami  $\alpha, \beta = 1, 2$ .

Aby opisać tę degenerację skonstruujemy operatory rzutujące na stany o określonej polaryzacji.

**Zadanie.** Pokazać, że gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki lub antycząstki, reprezentowanej odpowiednio przez falę płaską  $\psi_{(+)}^{(\alpha)}(x)$  lub  $\psi_{(-)}^{(\alpha)}(x)$ , wynosi

$$\bar{\psi}_{(+)}^{(\alpha)}(x)\gamma^0\psi_{(+)}^{(\beta)}(x) = \bar{\psi}_{(-)}^{(\alpha)}(x)\gamma^0\psi_{(-)}^{(\beta)}(x) = 2E\delta_{\alpha\beta}.$$

Zauważmy, że mamy po dwa stany z dodatnią i ujemną energią, które do tej pory numerowaliśmy wskaźnikami  $\alpha, \beta = 1, 2$ .

Aby opisać tę degenerację skonstruujemy operatory rzutujące na stany o określonej polaryzacji.

Przypomnijmy, że w reprezentacji Diraca spinory cząstki i antycząstki w układzie spoczynkowym mają postać

$$u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix},$$

gdzie w bazie kanonicznej  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ ,  $\alpha = 1, 2$ , i

$$\varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi^{(2)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Przypomnijmy, że w reprezentacji Diraca spinory cząstki i antycząstki w układzie spoczynkowym mają postać

$$u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix},$$

gdzie w bazie kanonicznej  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ ,  $\alpha = 1, 2$ , i

$$\varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi^{(2)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ .

$$\sigma_3 \varphi^{(1)}(m, \vec{0}) =$$

Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ .

$$\sigma_3 \varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ .

$$\sigma_3 \varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$



Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ .

$$\sigma_3 \varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi^{(1)}(m, \vec{0}),$$

Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ .

$$\sigma_3 \varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi^{(1)}(m, \vec{0}),$$

$$\sigma_3 \varphi^{(2)}(m, \vec{0})$$

Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ .

$$\sigma_3 \varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi^{(1)}(m, \vec{0}),$$

$$\sigma_3 \varphi^{(2)}(m, \vec{0}) =$$

Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ .

$$\sigma_3 \varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi^{(1)}(m, \vec{0}),$$

$$\sigma_3 \varphi^{(2)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ .

$$\sigma_3 \varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi^{(1)}(m, \vec{0}),$$

$$\sigma_3 \varphi^{(2)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ .

$$\sigma_3 \varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi^{(1)}(m, \vec{0}),$$

$$\sigma_3 \varphi^{(2)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\varphi^{(2)}(m, \vec{0}).$$

Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ .

$$\sigma_3 \varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi^{(1)}(m, \vec{0}),$$

$$\sigma_3 \varphi^{(2)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\varphi^{(2)}(m, \vec{0}).$$

Widzimy, że spinory  $\varphi^{(1)}(m, \vec{0})$  i  $\varphi^{(2)}(m, \vec{0})$  są wektorami własnymi macierzy Pauliego  $\sigma_3$  do wartości własnych odpowiednio 1 i  $-1$ .

Podziałajmy trzecią macierzą Pauliego na spinory bazowe  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ .

$$\sigma_3 \varphi^{(1)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi^{(1)}(m, \vec{0}),$$

$$\sigma_3 \varphi^{(2)}(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\varphi^{(2)}(m, \vec{0}).$$

Widzimy, że spinory  $\varphi^{(1)}(m, \vec{0})$  i  $\varphi^{(2)}(m, \vec{0})$  są wektorami własnymi macierzy Pauliego  $\sigma_3$  do wartości własnych odpowiednio 1 i  $-1$ .



Utwórzmy macierz spinową ( $\hbar = 1$ )

$$\frac{1}{2} \vec{\Sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

i obliczmy

$$\frac{1}{2} \Sigma_3 u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) =$$

Utwórzmy macierz spinową ( $\hbar = 1$ )

$$\frac{1}{2} \vec{\Sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

i obliczmy

$$\frac{1}{2} \Sigma_3 u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Utwórzmy macierz spinową ( $\hbar = 1$ )

$$\frac{1}{2} \vec{\Sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

i obliczmy

$$\frac{1}{2} \Sigma_3 u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

=

Utwórzmy macierz spinową ( $\hbar = 1$ )

$$\frac{1}{2} \vec{\Sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

i obliczmy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma_3 u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

Utwórzmy macierz spinową ( $\hbar = 1$ )

$$\frac{1}{2} \vec{\Sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

i obliczmy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma_3 u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

Utwórzmy macierz spinową ( $\hbar = 1$ )

$$\frac{1}{2} \vec{\Sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

i obliczmy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma_3 u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}), \end{aligned}$$

Utwórzmy macierz spinową ( $\hbar = 1$ )

$$\frac{1}{2} \vec{\Sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

i obliczmy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma_3 u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}), \end{aligned}$$

gdzie  $+\frac{1}{2}$  odpowiada  $\alpha = 1$ , a  $-\frac{1}{2}$  odpowiada  $\alpha = 2$ .

Utwórzmy macierz spinową ( $\hbar = 1$ )

$$\frac{1}{2} \vec{\Sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

i obliczmy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma_3 u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}), \end{aligned}$$

gdzie  $+\frac{1}{2}$  odpowiada  $\alpha = 1$ , a  $-\frac{1}{2}$  odpowiada  $\alpha = 2$ .



Podobnie, korzystając z równości  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ , obliczamy

$$\frac{1}{2}\Sigma_3 v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix}$$

Podobnie, korzystając z równości  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ , obliczamy

$$\frac{1}{2} \Sigma_3 v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix}$$

=

Podobnie, korzystając z równości  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ , obliczamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma_3 v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_3 \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

Podobnie, korzystając z równości  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ , obliczamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma_3 v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_3 \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

Podobnie, korzystając z równości  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ , obliczamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma_3 v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_3 \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}), \end{aligned}$$

Podobnie, korzystając z równości  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ , obliczamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma_3 v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_3 \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}), \end{aligned}$$

gdzie  $+\frac{1}{2}$  odpowiada  $\alpha = 1$ , a  $-\frac{1}{2}$  odpowiada  $\alpha = 2$ .

Podobnie, korzystając z równości  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ , obliczamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma_3 v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_3 \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}), \end{aligned}$$

gdzie  $+\frac{1}{2}$  odpowiada  $\alpha = 1$ , a  $-\frac{1}{2}$  odpowiada  $\alpha = 2$ .

Widzimy, że dwukrotna degeneracja stanów o tej samej energii ma związek ze spinem  $s = \frac{1}{2}$  cząstki lub antycząstki opisywanej równaniem Diraca.

Podobnie, korzystając z równości  $\varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) = \chi^{(\alpha)}(m, \vec{0})$ , obliczamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma_3 v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_3 \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}), \end{aligned}$$

gdzie  $+\frac{1}{2}$  odpowiada  $\alpha = 1$ , a  $-\frac{1}{2}$  odpowiada  $\alpha = 2$ .

Widzimy, że dwukrotna degeneracja stanów o tej samej energii ma związek ze spinem  $s = \frac{1}{2}$  cząstki lub antycząstki opisywanej równaniem Diraca.



Można pokazać, że operator rzutujący na stany o określonym rzucie spinu na kierunek wyznaczony przez wektor  $\vec{n}$  ma w dowolnej reprezentacji macierzy Diraca, w układzie, którym czteropęd cząstki wynosi  $k^\mu$  postać

$$P(n) = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \gamma_5 \not{n}), \quad \text{gdzie } n \cdot k = 0, \quad n^2 = -1.$$

**Zadanie.** Pokazać, że operator  $P(n)$  ma następujące własności:

Można pokazać, że operator rzutujący na stany o określonym rzucie spinu na kierunek wyznaczony przez wektor  $\vec{n}$  ma w dowolnej reprezentacji macierzy Diraca, w układzie, którym czteropęd cząstki wynosi  $k^\mu$  postać

$$P(n) = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \gamma_5 \not{n}), \quad \text{gdzie } n \cdot k = 0, \quad n^2 = -1.$$

**Zadanie.** Pokazać, że operator  $P(n)$  ma następujące własności:

①  $P^2(n) = P(n),$

Można pokazać, że operator rzutu na stany o określonym rzucie spinu na kierunek wyznaczony przez wektor  $\vec{n}$  ma w dowolnej reprezentacji macierzy Diraca, w układzie, którym czteropęd cząstki wynosi  $k^\mu$  postać

$$P(n) = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \gamma_5 \not{n}), \quad \text{gdzie } n \cdot k = 0, \quad n^2 = -1.$$

**Zadanie.** Pokazać, że operator  $P(n)$  ma następujące własności:

- 1  $P^2(n) = P(n)$ ,
- 2  $[\Lambda_\pm(k), P(n)] = 0$ ,

Można pokazać, że operator rzutujący na stany o określonym rzucie spinu na kierunek wyznaczony przez wektor  $\vec{n}$  ma w dowolnej reprezentacji macierzy Diraca, w układzie, którym czteropęd cząstki wynosi  $k^\mu$  postać

$$P(n) = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \gamma_5 \not{n}), \quad \text{gdzie } n \cdot k = 0, \quad n^2 = -1.$$

**Zadanie.** Pokazać, że operator  $P(n)$  ma następujące własności:

- 1  $P^2(n) = P(n)$ ,
- 2  $[\Lambda_\pm(k), P(n)] = 0$ ,
- 3  $\Lambda_+(k)P(n) + \Lambda_-(k)P(n) + \Lambda_+(k)P(-n) + \Lambda_-(k)P(-n) = \mathbb{I}$ ,

Można pokazać, że operator rzutujący na stany o określonym rzucie spinu na kierunek wyznaczony przez wektor  $\vec{n}$  ma w dowolnej reprezentacji macierzy Diraca, w układzie, którym czteropęd cząstki wynosi  $k^\mu$  postać

$$P(n) = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \gamma_5 \not{n}), \quad \text{gdzie } n \cdot k = 0, \quad n^2 = -1.$$

**Zadanie.** Pokazać, że operator  $P(n)$  ma następujące własności:

- 1  $P^2(n) = P(n)$ ,
- 2  $[\Lambda_\pm(k), P(n)] = 0$ ,
- 3  $\Lambda_+(k)P(n) + \Lambda_-(k)P(n) + \Lambda_+(k)P(-n) + \Lambda_-(k)P(-n) = \mathbb{I}$ ,
- 4  $\text{Tr} (\Lambda_\pm(k)P(n)) = 1$ .

Można pokazać, że operator rzutu na stany o określonym rzucie spinu na kierunek wyznaczony przez wektor  $\vec{n}$  ma w dowolnej reprezentacji macierzy Diraca, w układzie, którym czteropęd cząstki wynosi  $k^\mu$  postać

$$P(n) = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \gamma_5 \not{n}), \quad \text{gdzie } n \cdot k = 0, \quad n^2 = -1.$$

**Zadanie.** Pokazać, że operator  $P(n)$  ma następujące własności:

- 1  $P^2(n) = P(n)$ ,
- 2  $[\Lambda_\pm(k), P(n)] = 0$ ,
- 3  $\Lambda_+(k)P(n) + \Lambda_-(k)P(n) + \Lambda_+(k)P(-n) + \Lambda_-(k)P(-n) = \mathbb{I}$ ,
- 4  $\text{Tr} (\Lambda_\pm(k)P(n)) = 1$ .

Szczególne znaczenie ma następujący wybór czterowektora  $n$ :

$$n_k^\mu = \left( \frac{|\vec{k}|}{m}, \frac{E}{m} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right).$$

**Zadanie.** Pokazać, że czterowektor  $n_k$  spełnia wymagane własności, tzn.  $n_k^2 = -1$  i  $n_k \cdot k = 0$ .

Szczególne znaczenie ma następujący wybór czterowektora  $n$ :

$$n_k^\mu = \left( \frac{|\vec{k}|}{m}, \frac{E}{m} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right).$$

**Zadanie.** Pokazać, że czterowektor  $n_k$  spełnia wymagane własności, tzn.  $n_k^2 = -1$  i  $n_k \cdot k = 0$ .

Operator  $P(n_k)$  rzutuje na stany o określonej skrętności, która jest rzutem spinu na kierunek pędu

$$\lambda \equiv \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}.$$



Szczególne znaczenie ma następujący wybór czterowektora  $n$ :

$$n_k^\mu = \left( \frac{|\vec{k}|}{m}, \frac{E}{m} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right).$$

**Zadanie.** Pokazać, że czterowektor  $n_k$  spełnia wymagane własności, tzn.  $n_k^2 = -1$  i  $n_k \cdot k = 0$ .

Operator  $P(n_k)$  rzutuje na stany o określonej skrętności, która jest rzutem spinu na kierunek pędu

$$\lambda \equiv \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}.$$

**Zadanie.** Pokazać, że

$$P(n_k)\Lambda_{\pm}(k) = \frac{1}{2} \left( \mathbb{I} \pm \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{k}}{|\vec{k}|} \right) \Lambda_{\pm}(k).$$

Stąd wynika, że operator  $P(n_k)$  rzutuje na stany o dodatniej skrętności i dodatniej energii oraz na stany o ujemnej skrętności i ujemnej energii.

**Zadanie.** Pokazać, że

$$P(n_k)\Lambda_{\pm}(k) = \frac{1}{2} \left( \mathbb{I} \pm \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{k}}{|\vec{k}|} \right) \Lambda_{\pm}(k).$$

Stąd wynika, że operator  $P(n_k)$  rzutuje na stany o dodatniej skrętności i dodatniej energii oraz na stany o ujemnej skrętności i ujemnej energii.

W granicy ultrarelatywistycznej,  $E \gg m \Rightarrow E = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \approx |\vec{k}|$

$$n_k^{\mu} = \left( \frac{|\vec{k}|}{m}, \frac{E}{m} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right) \approx \left( \frac{E}{m}, \frac{\vec{k}}{m} \right) = \frac{k^{\mu}}{m}$$

i operator rzutujący na stany o określonej skrętności ma postać

$$P(n_k) = \frac{1}{2} \left( \mathbb{I} + \gamma_5 \frac{\not{k}}{m} \right).$$

**Zadanie.** Pokazać, że

$$P(n_k)\Lambda_{\pm}(k) = \frac{1}{2} \left( \mathbb{I} \pm \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{k}}{|\vec{k}|} \right) \Lambda_{\pm}(k).$$

Stąd wynika, że operator  $P(n_k)$  rzutuje na stany o dodatniej skrętności i dodatniej energii oraz na stany o ujemnej skrętności i ujemnej energii.

W granicy ultrarelatywistycznej,  $E \gg m \Rightarrow E = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \approx |\vec{k}|$

$$n_k^{\mu} = \left( \frac{|\vec{k}|}{m}, \frac{E}{m} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right) \approx \left( \frac{E}{m}, \frac{\vec{k}}{m} \right) = \frac{k^{\mu}}{m}$$

i operator rzutujący na stany o określonej skrętności ma postać

$$P(n_k) = \frac{1}{2} \left( \mathbb{I} + \gamma_5 \frac{\not{k}}{m} \right).$$

# Skrętność cząstki ultrarelatywistycznej

W tym przypadku

$$\begin{aligned}P(\pm n_k)\Lambda_+(k) &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{I} \pm \gamma_5 \frac{\not{k}}{m} \right) \frac{\not{k} + m}{2m} = \frac{1}{2} \frac{\not{k} + m}{2m} \pm \frac{1}{2} \gamma_5 \frac{m^2 + m\not{k}}{2m^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\not{k} + m}{2m} \pm \frac{1}{2} \gamma_5 \frac{\not{k} + m}{2m} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) \Lambda_+(k),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\pm n_k)\Lambda_-(k) &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{I} \pm \gamma_5 \frac{\not{k}}{m} \right) \frac{-\not{k} + m}{2m} \\ &= \frac{1}{2} \frac{-\not{k} + m}{2m} \pm \frac{1}{2} \gamma_5 \frac{-m^2 + m\not{k}}{2m^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{-\not{k} + m}{2m} \mp \frac{1}{2} \gamma_5 \frac{-\not{k} + m}{2m} = \frac{1}{2} (1 \mp \gamma_5) \Lambda_-(k).\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy tożsamość  $\not{k}^2 = k^2 = m^2$ .

W granicy ultrarelatywistycznej cząstki można traktować jako bezmasowe.

# Skętność cząstki ultrarelatywistycznej

W tym przypadku

$$\begin{aligned}P(\pm n_k)\Lambda_+(k) &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{I} \pm \gamma_5 \frac{\not{k}}{m} \right) \frac{\not{k} + m}{2m} = \frac{1}{2} \frac{\not{k} + m}{2m} \pm \frac{1}{2} \gamma_5 \frac{m^2 + m\not{k}}{2m^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\not{k} + m}{2m} \pm \frac{1}{2} \gamma_5 \frac{\not{k} + m}{2m} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) \Lambda_+(k), \\ P(\pm n_k)\Lambda_-(k) &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{I} \pm \gamma_5 \frac{\not{k}}{m} \right) \frac{-\not{k} + m}{2m} \\ &= \frac{1}{2} \frac{-\not{k} + m}{2m} \pm \frac{1}{2} \gamma_5 \frac{-m^2 + m\not{k}}{2m^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{-\not{k} + m}{2m} \mp \frac{1}{2} \gamma_5 \frac{-\not{k} + m}{2m} = \frac{1}{2} (1 \mp \gamma_5) \Lambda_-(k).\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy tożsamość  $\not{k}^2 = k^2 = m^2$ .

W granicy ultrarelatywistycznej cząstki można traktować jako bezmasowe.

# Skrętność cząstki ultrarelatywistycznej a chiralność

Jak pokażemy w dalszym ciągu wykładu, spinory Diraca reprezentujące **cząstki bezmasowe** są stanami własnymi macierzy  $\gamma_5$ , nazywanej czasem operatorem *chiralności*, a odpowiednie wartości własne przyjmują wartości  $\pm 1$ , co najlepiej widać z jawnej postaci macierzy  $\gamma_5$  w reprezentacji Weyla:

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Fermiony o chiralności  $+1$  nazywamy prawymi i oznaczamy symbolem  $R$ , a fermiony o chiralności  $-1$  nazywamy lewymi i oznaczamy symbolem  $L$ .

# Skrętność cząstki ultrarelatywistycznej a chiralność

Jak pokażemy w dalszym ciągu wykładu, spinory Diraca reprezentujące **cząstki bezmasowe** są stanami własnymi macierzy  $\gamma_5$ , nazywanej czasem operatorem *chiralności*, a odpowiednie wartości własne przyjmują wartości  $\pm 1$ , co najlepiej widać z jawnej postaci macierzy  $\gamma_5$  w reprezentacji Weyla:

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Fermiony o chiralności  $+1$  nazywamy prawymi i oznaczamy symbolem  $R$ , a fermiony o chiralności  $-1$  nazywamy lewymi i oznaczamy symbolem  $L$ .

Operatory rzutujące na stany o określonej chiralności mają w związku z tym postać

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5).$$



# Skrętność cząstki ultrarelatywistycznej a chiralność

Jak pokażemy w dalszym ciągu wykładu, spinory Diraca reprezentujące **cząstki bezmasowe** są stanami własnymi macierzy  $\gamma_5$ , nazywanej czasem operatorem *chiralności*, a odpowiednie wartości własne przyjmują wartości  $\pm 1$ , co najlepiej widać z jawnej postaci macierzy  $\gamma_5$  w reprezentacji Weyla:

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Fermiony o chiralności  $+1$  nazywamy prawymi i oznaczamy symbolem  $R$ , a fermiony o chiralności  $-1$  nazywamy lewymi i oznaczamy symbolem  $L$ .

Operatory rzutujące na stany o określonej chiralności mają w związku z tym postać

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5).$$

Na podstawie wzorów

$$P(\pm n_k)\Lambda_+(k) = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\Lambda_+(k),$$
$$P(\pm n_k)\Lambda_-(k) = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)\Lambda_-(k)$$

widzimy, że w granicy ultrarelatywistycznej skrętność cząstki jest zgodna, a skrętność antycząstki jest przeciwna do jej chiralności. Tę ostatnią możemy określić tylko dla cząstki bezmasowej.

# Spinory w bazie skrętności

Znajdźmy spinory Diraca w bazie skrętności. Dwuwymiarowe spinory bazowe powinny być funkcjami własnymi operatora rzutu spinu  $\frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}$  na kierunek pędu  $\hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ , gdzie  $\vec{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$ , jest wektorem utworzonym z macierzy Pauliego

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a wektor jednostkowy  $\hat{k}$  określa kierunek pędu cząstki. We współrzędnych sferycznych  $\hat{k} = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$ . Dlatego iloczyn  $\vec{\sigma} \cdot \hat{k} = \sigma_1 \hat{k}_1 + \sigma_2 \hat{k}_2 + \sigma_3 \hat{k}_3$  ma postać

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \hat{k} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta(\cos\varphi - i\sin\varphi) \\ \sin\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi) & -\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

# Spinory w bazie skrętności

Znajdźmy spinory Diraca w bazie skrętności. Dwuwymiarowe spinory bazowe powinny być funkcjami własnymi operatora rzutu spinu  $\frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}$  na kierunek pędu  $\hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ , gdzie  $\vec{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$ , jest wektorem utworzonym z macierzy Pauliego

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a wektor jednostkowy  $\hat{k}$  określa kierunek pędu cząstki. We współrzędnych sferycznych  $\hat{k} = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$ . Dlatego iloczyn  $\vec{\sigma} \cdot \hat{k} = \sigma_1 \hat{k}_1 + \sigma_2 \hat{k}_2 + \sigma_3 \hat{k}_3$  ma postać

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \hat{k} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta(\cos\varphi - i\sin\varphi) \\ \sin\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi) & -\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

# Spinory w bazie skrętności

Rozważmy równanie własne

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{k} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) = \lambda \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}).$$

Niezerowe wartości własne  $\lambda$  istnieją, tylko jeśli

$$\begin{vmatrix} \cos \theta - \lambda & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Skąd otrzymujemy równanie na wartości własne

$$\lambda^2 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

W takim razie rozpatrywane równanie własne możemy zapisać następująco

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{k} \varphi^{(\pm)}(\hat{k}) = \pm \varphi^{(\pm)}(\hat{k}).$$

Zapiszmy poszukiwane funkcje własne  $\varphi^{(\pm)}(\hat{k})$  w formie

$$\varphi^{(\pm)}(\hat{k}) = \begin{pmatrix} a_{\pm} \\ b_{\pm} \end{pmatrix}$$

i załóżmy, że są one unormowane. Rozważmy równanie macierzowe

$$\begin{pmatrix} \cos \theta - 1 & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ b_+ \end{pmatrix} = 0,$$

skąd otrzymujemy dwa równania na składowe spinora  $\varphi^{(+)}(\hat{k})$

$$(\cos \theta - 1)a_+ + \sin \theta e^{-i\varphi} b_+ = 0$$

$$\sin \theta e^{i\varphi} a_+ - (1 + \cos \theta)b_+ = 0$$

Równania te są zależne, gdyż wyznacznik układu znika.

# Spinory w bazie skrętności

Dlatego pominiemy drugie i rozważmy pierwsze z nich.

$$(1 - \cos \theta)a_+ = \sin \theta e^{-i\varphi} b_+,$$

ale

$$\cos \theta = \cos 2\frac{\theta}{2} = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$\sin \theta = \sin 2\frac{\theta}{2} = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2},$$

więc nasze równanie możemy zapisać następująco

$$2 \sin^2 \frac{\theta}{2} a_+ = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} b_+.$$

Skąd otrzymujemy związek

$$b_+ = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} e^{i\varphi} a_+.$$

# Spinory w bazie skrętności

Skorzystajmy z warunku normalizacji

$$\varphi^{(+)\dagger} \varphi^{(+)} = 1 \Rightarrow (a_+^*, b_+^*) \begin{pmatrix} a_+ \\ b_+ \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow |a_+|^2 + |b_+|^2 = 1$$

i wykorzystajmy związek

$$b_+ = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} e^{i\varphi} a_+,$$

wtedy otrzymamy równanie

$$|a_+|^2 \left( 1 + \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \right) = \frac{|a_+|^2}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = 1 \Rightarrow |a_+|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

Wybermy fazę dowolną w ostatnim równaniu jako 1, wtedy  $a_+ = \cos \frac{\theta}{2}$ , a spinor  $\varphi^{(+)}(\hat{k})$  będzie miał postać

$$\varphi^{(+)}(\hat{k}) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$



# Spinory w bazie skrętności

Dla  $\lambda = -1$  otrzymamy równanie macierzowe

$$\begin{pmatrix} \cos \theta + 1 & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_- \\ b_- \end{pmatrix} = 0.$$

Wykorzystując takie same tożsamości trygonometryczne jak poprzednio, pierwsze równanie możemy zapisać jako

$$2 \cos^2 \frac{\theta}{2} a_- + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} b_- = 0.$$

Skąd otrzymujemy związek

$$a_- = -\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} e^{-i\varphi} b_-.$$

# Spinory w bazie skrętności

Wykorzystując związek

$$a_- = -\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} e^{-i\varphi} b_-.$$

w warunku normalizacji  $\varphi^{(-)\dagger} \varphi^{(-)} = 1$  otrzymamy

$$|a_-|^2 + |b_-|^2 = 1 \Rightarrow \left( \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} + 1 \right) |b_-|^2 = \frac{|b_-|^2}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = 1.$$

Tak jak poprzednio, wybierzmy fazę dowolną w ostatnim równaniu jako 1, wtedy  $b_- = \cos \frac{\theta}{2}$ , a spinor  $\varphi^{(-)}(\hat{k})$  będzie miał postać

$$\varphi^{(-)}(\hat{k}) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

# Spinory w bazie skrętności

Spinory dwuskładnikowe  $\varphi^{(\pm)}(\hat{k})$  są funkcjami własnymi operatora

$$\frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma} \cdot \hat{k} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|},$$

który określa rzut spinu cząstki na kierunek jej pędu. Wartości własne tego operatora nazywamy **skrętnością** (ang. *helicity*). Jak pokazaliśmy dla cząstki o spinie  $\frac{1}{2}$  skrętność może przyjmować tylko dwie wartości  $\pm\frac{1}{2}$ . Dla wygody, często używamy podwojonej skrętności  $\lambda = \pm 1$ .

Spinory dla  $\lambda = +1$  i  $\lambda = -1$  nazywamy, odpowiednio, prawoskrętnym ( $R$ ) i lewoskrętnym ( $L$ ) spinorem Weyla.

# Spinory w bazie skrętności

Spinory dwuskładnikowe  $\varphi^{(\pm)}(\hat{k})$  są funkcjami własnymi operatora

$$\frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma} \cdot \hat{k} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|},$$

który określa rzut spinu cząstki na kierunek jej pędu. Wartości własne tego operatora nazywamy **skrętnością** (ang. *helicity*). Jak pokazaliśmy dla cząstki o spinie  $\frac{1}{2}$  skrętność może przyjmować tylko dwie wartości  $\pm\frac{1}{2}$ . Dla wygody, często używamy podwojonej skrętności  $\lambda = \pm 1$ .

Spinory dla  $\lambda = +1$  i  $\lambda = -1$  nazywamy, odpowiednio, **prawoskrętnym** ( $R$ ) i **lewoskrętnym** ( $L$ ) spinorem Weyla.

Podsumujmy.

$$\varphi^{(+)}(\hat{k}) \equiv \varphi_R(\hat{k}) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \varphi^{(-)}(\hat{k}) \equiv \varphi_L(\hat{k}) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

# Spinory w bazie skrętności

Spinory dwuskładnikowe  $\varphi^{(\pm)}(\hat{k})$  są funkcjami własnymi operatora

$$\frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma} \cdot \hat{k} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|},$$

który określa rzut spinu cząstki na kierunek jej pędu. Wartości własne tego operatora nazywamy **skrętnością** (ang. *helicity*). Jak pokazaliśmy dla cząstki o spine  $\frac{1}{2}$  skrętność może przyjmować tylko dwie wartości  $\pm\frac{1}{2}$ . Dla wygody, często używamy podwojonej skrętności  $\lambda = \pm 1$ .

Spinory dla  $\lambda = +1$  i  $\lambda = -1$  nazywamy, odpowiednio, **prawoskrętnym** ( $R$ ) i **lewoskrętnym** ( $L$ ) spinorem Weyla.

Podsumujmy.

$$\varphi^{(+)}(\hat{k}) \equiv \varphi_R(\hat{k}) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \varphi^{(-)}(\hat{k}) \equiv \varphi_L(\hat{k}) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

# Spinory Diraca w bazie skrętności

Spinory Diraca w bazie skrętności dla cząstki otrzymamy tak jak poprzednio wykorzystując tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0$$

i macierze  $\gamma^\mu$  w reprezentacji Diraca

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , są macierzami Pauliego.

$$\begin{aligned} u^{(\lambda)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

# Spinory Diraca w bazie skrętności

Spinory Diraca w bazie skrętności dla cząstki otrzymamy tak jak poprzednio wykorzystując tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0$$

i macierze  $\gamma^\mu$  w reprezentacji Diraca

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , są macierzami Pauliego.

$$\begin{aligned} u^{(\lambda)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} E + m & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -E + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Spinory Diraca w bazie skrętności

Spinory Diraca w bazie skrętności dla cząstki otrzymamy tak jak poprzednio wykorzystując tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0$$

i macierze  $\gamma^\mu$  w reprezentacji Diraca

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , są macierzami Pauliego.

$$\begin{aligned} u^{(\lambda)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} E + m & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -E + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \end{aligned}$$



# Spinory Diraca w bazie skrętności

Spinory Diraca w bazie skrętności dla cząstki otrzymamy tak jak poprzednio wykorzystując tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0$$

i macierze  $\gamma^\mu$  w reprezentacji Diraca

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , są macierzami Pauliego.

$$\begin{aligned} u^{(\lambda)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} E + m & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -E + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} (E + m) \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda |\vec{k}| \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

# Spinory Diraca w bazie skrętności

Spinory Diraca w bazie skrętności dla cząstki otrzymamy tak jak poprzednio wykorzystując tożsamość

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2 = 0$$

i macierze  $\gamma^\mu$  w reprezentacji Diraca

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , są macierzami Pauliego.

$$\begin{aligned} u^{(\lambda)}(k) &= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} E + m & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -E + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} (E + m) \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda |\vec{k}| \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wykorzystując związek  $|\vec{k}| = \sqrt{E^2 - m^2} = \sqrt{(E - m)(E + m)}$  otrzymamy

$$u^{(\lambda)}(k) = \frac{1}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} (E + m) \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda |\vec{k}| \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E + m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda \sqrt{E - m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}.$$

Aby poprawnie zdefiniować spinory Diraca dla antycząstki, rozważmy operację sprzężenia ładunkowego  $C$ .

Wykorzystując związek  $|\vec{k}| = \sqrt{E^2 - m^2} = \sqrt{(E - m)(E + m)}$  otrzymamy

$$u^{(\lambda)}(k) = \frac{1}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} (E + m) \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda |\vec{k}| \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E + m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda \sqrt{E - m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}.$$

Aby poprawnie zdefiniować spinory Diraca dla antycząstki, rozważmy operację sprzężenia ładunkowego  $C$ .

# Operacja sprzężenia ładunkowego

Rozważmy ruch cząstki o ładunku elektrycznym  $q$  w polu elektromagnetycznym (EM) o czteropotencjale

$A^\mu(x) = (\phi(x), \vec{A}(x))$ , gdzie  $x$  jest czterowektorem położenia cząstki w czasoprzestrzeni Minkowskiego,  $x^\mu = (ct, \vec{x}) = (x^0, \vec{x})$ .

Z kursu *Mechaniki klasycznej i relatywistycznej* pamiętamy, że oddziaływanie z zewnętrznym polem EM uwzględniamy dokonując podstawień

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A}, \quad E \rightarrow E - q\phi,$$

gdzie przyjęliśmy  $c = 1$ . Reguła podstawienia dla energii wynika z faktu, że w hamiltonianie cząstki naładowanej w polu EM pojawia się wyraz  $q\phi$ .

# Operacja sprzężenia ładunkowego

Rozważmy ruch cząstki o ładunku elektrycznym  $q$  w polu elektromagnetycznym (EM) o czteropotencjale  $A^\mu(x) = (\phi(x), \vec{A}(x))$ , gdzie  $x$  jest czterowektorem położenia cząstki w czasoprzestrzeni Minkowskiego,  $x^\mu = (ct, \vec{x}) = (x^0, \vec{x})$ . Z kursu *Mechaniki klasycznej i relatywistycznej* pamiętamy, że oddziaływanie z zewnętrznym polem EM uwzględniamy dokonując podstawień

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A}, \quad E \rightarrow E - q\phi,$$

gdzie przyjęliśmy  $c = 1$ . Reguła podstawienia dla energii wynika z faktu, że w hamiltonianie cząstki naładowanej w polu EM pojawia się wyraz  $q\phi$ .

W przypadku relatywistycznym obie te reguły mają postać

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu,$$

a dla operator pędu w reprezentacji położeniowej

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - qA_\mu.$$

# Operacja sprzężenia ładunkowego

Rozważmy ruch cząstki o ładunku elektrycznym  $q$  w polu elektromagnetycznym (EM) o czteropotencjale  $A^\mu(x) = (\phi(x), \vec{A}(x))$ , gdzie  $x$  jest czterowektorem położenia cząstki w czasoprzestrzeni Minkowskiego,  $x^\mu = (ct, \vec{x}) = (x^0, \vec{x})$ . Z kursu *Mechaniki klasycznej i relatywistycznej* pamiętamy, że oddziaływanie z zewnętrznym polem EM uwzględniamy dokonując podstawień

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A}, \quad E \rightarrow E - q\phi,$$

gdzie przyjęliśmy  $c = 1$ . Reguła podstawienia dla energii wynika z faktu, że w hamiltonianie cząstki naładowanej w polu EM pojawia się wyraz  $q\phi$ .

W przypadku relatywistycznym obie te reguły mają postać

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu,$$

a dla operator pędu w reprezentacji położeniowej

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - qA_\mu.$$

# Operacja sprzężenia ładunkowego

Dlatego równanie Diraca dla cząstki o ładunku elektrycznym  $q$  znajdującej się w polu elektromagnetycznym (EM) o czteropotencjale  $A^\mu$  ma postać

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi(x) = 0.$$

Dokonajmy zamiany cząstki na antycząstkę, co odpowiada następującym podstawieniom w równaniu Diraca

$$q \rightarrow -q, \quad \psi(x) \rightarrow \psi^c(x).$$

Chcemy, aby powyższe przekształcenie było lokalne i aby jego dwukrotne zastosowanie sprowadzało się do niemierzalnego czynnika fazowego.



# Operacja sprzężenia ładunkowego

Dlatego równanie Diraca dla cząstki o ładunku elektrycznym  $q$  znajdującej się w polu elektromagnetycznym (EM) o czteropotencjale  $A^\mu$  ma postać

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi(x) = 0.$$

Dokonajmy zamiany cząstki na antycząstkę, co odpowiada następującym podstawieniom w równaniu Diraca

$$q \rightarrow -q, \quad \psi(x) \rightarrow \psi^c(x).$$

Chcemy, aby powyższe przekształcenie było lokalne i aby jego dwukrotne zastosowanie sprowadzało się do niemierzalnego czynnika fazowego. W jego wyniku równanie Diraca przyjmuje postać

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi^c(x) = 0.$$

# Operacja sprzężenia ładunkowego

Dlatego równanie Diraca dla cząstki o ładunku elektrycznym  $q$  znajdującej się w polu elektromagnetycznym (EM) o czteropotencjale  $A^\mu$  ma postać

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi(x) = 0.$$

Dokonajmy zamiany cząstki na antycząstkę, co odpowiada następującym podstawieniom w równaniu Diraca

$$q \rightarrow -q, \quad \psi(x) \rightarrow \psi^c(x).$$

Chcemy, aby powyższe przekształcenie było lokalne i aby jego dwukrotne zastosowanie sprowadzało się do niemierzalnego czynnika fazowego. W jego wyniku równanie Diraca przyjmuje postać

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi^c(x) = 0.$$

Sprzęgnijmy hermitowsko wyjściowe równanie Diraca

$$\psi^\dagger \left( -i(\gamma^\mu)^\dagger \overleftarrow{\partial}_\mu - q(\gamma^\mu)^\dagger A_\mu - m \right) = 0,$$

# Operacja sprzężenia ładunkowego

Dlatego równanie Diraca dla cząstki o ładunku elektrycznym  $q$  znajdującej się w polu elektromagnetycznym (EM) o czteropotencjale  $A^\mu$  ma postać

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi(x) = 0.$$

Dokonajmy zamiany cząstki na antycząstkę, co odpowiada następującym podstawieniom w równaniu Diraca

$$q \rightarrow -q, \quad \psi(x) \rightarrow \psi^c(x).$$

Chcemy, aby powyższe przekształcenie było lokalne i aby jego dwukrotne zastosowanie sprowadzało się do niemierzalnego czynnika fazowego. W jego wyniku równanie Diraca przyjmuje postać

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi^c(x) = 0.$$

Sprzęgnijmy hermitowsko wyjściowe równanie Diraca

$$\psi^\dagger \left( -i(\gamma^\mu)^\dagger \overleftarrow{\partial}_\mu - q(\gamma^\mu)^\dagger A_\mu - m \right) = 0,$$

# Operacja sprzężenia ładunkowego

gdzie strzałka na pochodną cząstkową oznacza, że działa ona na lewo na spinor  $\psi^\dagger(x)$ .

Pomnóżmy to równanie prawostronnie przez macierz  $\gamma^0$  i wstawmy  $(\gamma^0)^2 = 1$  pomiędzy spinor  $\psi^\dagger(x)$  i wyrażenia w nawiasie, wtedy otrzymamy równanie

$$\psi^\dagger (\gamma^0)^2 \left( -i(\gamma^\mu)^\dagger \overleftarrow{\partial}_\mu - q(\gamma^\mu)^\dagger A_\mu - m \right) \gamma^0 = 0,$$

które możemy przepisać następująco

$$\bar{\psi} \left( -i\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \overleftarrow{\partial}_\mu - q\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 A_\mu - m \right) = 0,$$

gdzie wprowadziliśmy barowany spinor Dirac  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ .

# Operacja sprzężenia ładunkowego

gdzie strzałka na pochodną cząstkową oznacza, że działa ona na lewo na spinor  $\psi^\dagger(x)$ .

Pomnóżmy to równanie prawostronnie przez macierz  $\gamma^0$  i wstawmy  $(\gamma^0)^2 = 1$  pomiędzy spinor  $\psi^\dagger(x)$  i wyrażenia w nawiasie, wtedy otrzymamy równanie

$$\psi^\dagger (\gamma^0)^2 \left( -i(\gamma^\mu)^\dagger \overleftarrow{\partial}_\mu - q(\gamma^\mu)^\dagger A_\mu - m \right) \gamma^0 = 0,$$

które możemy przepisać następująco

$$\bar{\psi} \left( -i\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \overleftarrow{\partial}_\mu - q\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 A_\mu - m \right) = 0,$$

gdzie wprowadziliśmy barowany spinor Dirac  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ .

Skorzystajmy z własności  $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \Rightarrow \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu$ , wtedy otrzymamy równanie

$$\bar{\psi} \left( -i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m \right) = 0.$$

# Operacja sprzężenia ładunkowego

gdzie strzałka na pochodną cząstkową oznacza, że działa ona na lewo na spinor  $\psi^\dagger(x)$ .

Pomnóżmy to równanie prawostronnie przez macierz  $\gamma^0$  i wstawmy  $(\gamma^0)^2 = 1$  pomiędzy spinor  $\psi^\dagger(x)$  i wyrażenia w nawiasie, wtedy otrzymamy równanie

$$\psi^\dagger (\gamma^0)^2 \left( -i(\gamma^\mu)^\dagger \overleftarrow{\partial}_\mu - q(\gamma^\mu)^\dagger A_\mu - m \right) \gamma^0 = 0,$$

które możemy przepisać następująco

$$\bar{\psi} \left( -i\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \overleftarrow{\partial}_\mu - q\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 A_\mu - m \right) = 0,$$

gdzie wprowadziliśmy barowany spinor Dirac  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ .

Skorzystajmy z własności  $\gamma^\mu \dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \Rightarrow \gamma^0 \gamma^\mu \dagger \gamma^0 = \gamma^\mu$ , wtedy otrzymamy równanie

$$\bar{\psi} \left( -i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m \right) = 0.$$

# Operacja sprzężenia ładunkowego

Dokonajmy transpozycji tego równania

$$\left(-(\gamma^\mu)^T (i\partial_\mu + qA_\mu) - m\right) \bar{\psi}^T = 0.$$

Pomnóżmy lewostronnie przez nieosobliwą macierz  $C$  i wstawmy  $C^{-1}C = 1$  pomiędzy  $\bar{\psi}^T$  i wyrażenie w nawiasie, wtedy otrzymamy równanie

$$\left(C(-\gamma^\mu)^T C^{-1}(i\partial_\mu + qA_\mu) - m\right) C\bar{\psi}^T = 0,$$

które jest równoważne równaniu Diraca dla antycząstki w polu EM

$$(\gamma^\mu (i\partial_\mu + qA_\mu) - m) \psi^c = 0,$$

pod warunkiem że istnieje nieosobliwa macierz  $C$  taka, że

$$\psi^c = \eta_c C \bar{\psi}^T, \quad \text{gdzie} \quad |\eta_c|^2 = 1 \quad \text{i} \quad C(-\gamma^\mu)^T C^{-1} = \gamma^\mu.$$

# Operacja sprzężenia ładunkowego

Drugą równość przepiszmy w formie

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}.$$

Macierz  $C$  możemy skonstruować wykorzystując reprezentację Diraca macierzy  $\gamma^\mu$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie macierze Pauliego dane są wzorami

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

w której zachodzą związki

$$\gamma^0 T = \gamma^0, \quad \gamma^1 T = -\gamma^1, \quad \gamma^2 T = \gamma^2, \quad \gamma^3 T = -\gamma^3.$$



# Operacja sprzężenia ładunkowego

W takim razie macierz  $C$  powinna antykomutować z macierzami  $\gamma^0$  i  $\gamma^2$ , a komutować z macierzami  $\gamma^1$  i  $\gamma^3$ . Jak łatwo się przekonać, takie własności ma macierz

$$C = i\gamma^2\gamma^0.$$

**Zadanie.** Pokazać, że macierz  $C$  w reprezentacji Diraca spełnia następujące własności

$$C^{-1} = C^\dagger = C^T = -C.$$

W reprezentacji Weyla

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

również są spełnione związki

$$\gamma^{0T} = \gamma^0, \quad \gamma^{1T} = -\gamma^1, \quad \gamma^{2T} = \gamma^2, \quad \gamma^{3T} = -\gamma^3,$$

a zatem macierz  $C$  ma taką samą postać jak w reprezentacji Diraca.

# Operacja sprzężenia ładunkowego

Zauważmy, że jeśli w równaniu Diraca dla cząstki o ładunku elektrycznym  $q$  w polu EM o czteropotencjale  $A^\mu(x)$

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu(x) - m)\psi(x) = 0$$

dokonyamy operacji sprzężenia ładunkowego

$$q \rightarrow -q, \quad \psi(x) \rightarrow \psi^c(x) = \eta_c C \bar{\psi}^T(x), \quad \text{gdzie} \quad |\eta_c|^2 = 1$$

i jednocześnie dokonamy transformacji

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu^c(x) = -A_\mu(x),$$

to jego postać pozostanie nie zmieniona.

# Spinory w bazie skrętności

Zdefiniujemy spinor w bazie skrętności dla antycząstki poprzez relację

$$v^{(\lambda)}(k) = C \bar{u}^{(\lambda)}(k)^T,$$

gdzie

$$u^{(\lambda)}(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda \sqrt{E-m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}$$

jest znalezionym wcześniej spinorem w bazie skrętności dla cząstki w reprezentacji Diraca Znajdźmy spinor barowany

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\lambda)}(k) &= u^{(\lambda)}(k)^\dagger \gamma^0 \\ &= \left( \sqrt{E+m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^*, \lambda \sqrt{E-m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^* \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Spinory w bazie skrętności

Zdefiniujmy spinor w bazie skrętności dla antycząstki poprzez relację

$$v^{(\lambda)}(k) = C \bar{u}^{(\lambda)}(k)^T,$$

gdzie

$$u^{(\lambda)}(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda \sqrt{E-m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}$$

jest znalezionym wcześniej spinorem w bazie skrętności dla cząstki w reprezentacji Diraca Znajdźmy spinor barowany

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\lambda)}(k) &= u^{(\lambda)}(k)^\dagger \gamma^0 \\ &= \left( \sqrt{E+m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^*, \lambda \sqrt{E-m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^* \right) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \\ &= \left( \sqrt{E+m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^*, -\lambda \sqrt{E-m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^* \right). \end{aligned}$$

# Spinory w bazie skrętności

Zdefiniujmy spinor w bazie skrętności dla antycząstki poprzez relację

$$v^{(\lambda)}(k) = C \bar{u}^{(\lambda)}(k)^T,$$

gdzie

$$u^{(\lambda)}(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda \sqrt{E-m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}$$

jest znalezionym wcześniej spinorem w bazie skrętności dla cząstki w reprezentacji Diraca Znajdźmy spinor barowany

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\lambda)}(k) &= u^{(\lambda)}(k)^\dagger \gamma^0 \\ &= \left( \sqrt{E+m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^*, \lambda \sqrt{E-m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^* \right) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \\ &= \left( \sqrt{E+m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^*, -\lambda \sqrt{E-m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^* \right). \end{aligned}$$

# Spinory w bazie skrętności

Macierz  $C$  w reprezentacji Diraca ma postać

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix},$$

a zatem

$$\begin{aligned} v^{(\lambda)}(k) &= \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^* \\ -\lambda\sqrt{E-m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\lambda\sqrt{E-m} (-i\sigma_2)\varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^* \\ \sqrt{E+m} (-i\sigma_2)\varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zdefiniujemy spinory bazowe w bazie skrętności dla antycząstki jako

$$\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) = -i\sigma_2\varphi^{(\lambda)}(\hat{k})^*.$$

# Spinory w bazie skrętności

Wtedy spinor dla antycząstki w bazie skrętności w reprezentacji Diraca możemy zapisać następująco

$$v^{(\lambda)}(k) = \begin{pmatrix} -\lambda\sqrt{E-m} \chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \sqrt{E+m} \chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix},$$

a spinory bazowe  $\chi^{(\lambda)}(\hat{k})$  znajdziemy wykorzystując postać spinorów  $\varphi^{(\lambda)}(\hat{k})$  dla cząstki

$$\varphi^{(+)}(\hat{k}) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \varphi^{(-)}(\hat{k}) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Mają one postać następującą

$$\begin{aligned} \chi^{(+)}(\hat{k}) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \varphi^{(-)}(\hat{k}), \\ \chi^{(-)}(\hat{k}) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} = -\varphi^{(+)}(\hat{k}), \end{aligned}$$

Widzimy, że zachodzi następujący związek

$$\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) = \lambda \varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}).$$

Dlatego

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{k} \chi^{(\lambda)}(\hat{k}) = \lambda \vec{\sigma} \cdot \hat{k} \varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) = \lambda(-\lambda) \varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) = -\lambda \chi^{(\lambda)}(\hat{k}),$$

a więc, zgodnie z oczekiwaniem, skrętność antycząstki jest przeciwna do skrętności cząstki.



# Spinory w bazie skrętności w reprezentacji Weyla

Przypomnijmy, że związek pomiędzy macierzami  $\gamma^\mu$  w reprezentacji Diraca i reprezentacji Weyla ma postać

$$\gamma_D^\mu = U^\dagger \gamma_W^\mu U, \quad \text{gdzie} \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix},$$

przy czym dla spinorów zachodzi związek  $\psi_D = U^\dagger \psi_W$ . Dlatego spinory w bazie skrętności w reprezentacji Weyla otrzymamy działając na spinory w reprezentacji Diraca macierzą  $U$ .

$$\begin{aligned} u_W^{(\lambda)}(k) &= U u_D^{(\lambda)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda \sqrt{E-m} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\sqrt{E+m} - \lambda \sqrt{E-m}) \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ (\sqrt{E+m} + \lambda \sqrt{E-m}) \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{E - \lambda |\vec{k}|} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \sqrt{E + \lambda |\vec{k}|} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

# Spinory w bazie skrętności w reprezentacji Weyla

gdzie wykorzystaliśmy następującą tożsamość

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\sqrt{E+m} \mp \lambda \sqrt{E-m}}{\sqrt{2}} \right]^2 &= \frac{1}{2} \left( E+m + E-m \mp 2\lambda \sqrt{E+m} \sqrt{E-m} \right) \\ &= E \mp \lambda |\vec{k}|. \end{aligned}$$

Spinory w bazie skrętności w reprezentacji Weyla dla antycząstki otrzymamy w ten sam sposób.

$$\begin{aligned} v_W^{(\lambda)}(k) &= U v^{(\lambda)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda \sqrt{E-m} \chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \sqrt{E+m} \chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (-\lambda \sqrt{E-m} - \sqrt{E+m}) \chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ (-\lambda \sqrt{E-m} + \sqrt{E+m}) \chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sqrt{E + \lambda |\vec{k}|} \chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \sqrt{E - \lambda |\vec{k}|} \chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \sqrt{E + \lambda |\vec{k}|} \varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda \sqrt{E - \lambda |\vec{k}|} \varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie również wykorzystaliśmy powyższą tożsamość

# Spinory w bazie skrętności w reprezentacji Weyla

gdzie wykorzystaliśmy następującą tożsamość

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\sqrt{E+m} \mp \lambda \sqrt{E-m}}{\sqrt{2}} \right]^2 &= \frac{1}{2} \left( E+m + E-m \mp 2\lambda \sqrt{E+m} \sqrt{E-m} \right) \\ &= E \mp \lambda |\vec{k}|. \end{aligned}$$

Spinory w bazie skrętności w reprezentacji Weyla dla antycząstki otrzymamy w ten sam sposób.

$$\begin{aligned} v_W^{(\lambda)}(k) &= U v^{(\lambda)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda \sqrt{E-m} \chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \sqrt{E+m} \chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (-\lambda \sqrt{E-m} - \sqrt{E+m}) \chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ (-\lambda \sqrt{E-m} + \sqrt{E+m}) \chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sqrt{E + \lambda |\vec{k}|} \chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \sqrt{E - \lambda |\vec{k}|} \chi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \sqrt{E + \lambda |\vec{k}|} \varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda \sqrt{E - \lambda |\vec{k}|} \varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie również wykorzystaliśmy powyższą tożsamość

i związek  $\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) = \lambda \varphi^{(-\lambda)}(\hat{k})$ .

**Zadanie.** Pokazać, że dla spinorów w bazie skrętności w reprezentacji Weyla zachodzą następujące związki

$$P(\pm n_k) u_W^{(\lambda)}(k) = \frac{1}{2}(1 \pm \lambda) u_W^{(\lambda)}(k)$$
$$P(\pm n_k) v_W^{(\lambda)}(k) = \frac{1}{2}(1 \pm \lambda) v_W^{(\lambda)}(k).$$

*Wskazówka.* Skorzystać z definicji operatora rzutującego na stany o określonej skrętności,  $P(\pm n_k) = \frac{1}{2}(\mathbb{I} \pm \gamma_5 \not{n}_k)$ , gdzie  $\not{n}_k = n_k^\mu \gamma_\mu$ ,  $n_k^\mu = \left( \frac{|\vec{k}|}{m}, \frac{E}{m} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right)$  i z jawnej postaci macierzy  $\gamma^\mu$  w reprezentacji Weyla.

i związek  $\chi^{(\lambda)}(\hat{k}) = \lambda\varphi^{(-\lambda)}(\hat{k})$ .

**Zadanie.** Pokazać, że dla spinorów w bazie skrętności w reprezentacji Weyla zachodzą następujące związki

$$P(\pm n_k)u_W^{(\lambda)}(k) = \frac{1}{2}(1 \pm \lambda)u_W^{(\lambda)}(k)$$

$$P(\pm n_k)v_W^{(\lambda)}(k) = \frac{1}{2}(1 \pm \lambda)v_W^{(\lambda)}(k).$$

*Wskazówka.* Skorzystać z definicji operatora rzutującego na stany o określonej skrętności,  $P(\pm n_k) = \frac{1}{2}(\mathbb{I} \pm \gamma_5 \not{n}_k)$ , gdzie  $\not{n}_k = n_k^\mu \gamma_\mu$ ,  $n_k^\mu = \left( \frac{|\vec{k}|}{m}, \frac{E}{m} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right)$  i z jawnej postaci macierzy  $\gamma^\mu$  w reprezentacji Weyla.

Spinory w bazie skrętności w reprezentacji Weyla dla cząstki i antycząstki mają postać

$$u_W^{(\lambda)}(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{E - \lambda|\vec{k}|} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \sqrt{E + \lambda|\vec{k}|} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}, \quad v_W^{(\lambda)}(k) = \begin{pmatrix} -\lambda \sqrt{E + \lambda|\vec{k}|} \varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda \sqrt{E - \lambda|\vec{k}|} \varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}.$$

**Zadanie.** Pokazać, że powyższe spinory w bazie skrętności spełniają następujące warunki:

$$\bar{u}_W^{(\lambda_1)}(k) \gamma^0 u_W^{(\lambda_2)}(k) = \bar{v}_W^{(\lambda_1)}(k) \gamma^0 v_W^{(\lambda_2)}(k) = 2E \delta_{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Spinory w bazie skrętności w reprezentacji Weyla dla cząstki i antycząstki mają postać

$$u_W^{(\lambda)}(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{E - \lambda|\vec{k}|} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \sqrt{E + \lambda|\vec{k}|} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}, \quad v_W^{(\lambda)}(k) = \begin{pmatrix} -\lambda \sqrt{E + \lambda|\vec{k}|} \varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda \sqrt{E - \lambda|\vec{k}|} \varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}.$$

**Zadanie.** Pokazać, że powyższe spinory w bazie skrętności spełniają następujące warunki:

$$\bar{u}_W^{(\lambda_1)}(k) \gamma^0 u_W^{(\lambda_2)}(k) = \bar{v}_W^{(\lambda_1)}(k) \gamma^0 v_W^{(\lambda_2)}(k) = 2E \delta_{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Spinory w bazie skrętności w reprezentacji Weyla dla cząstki i antycząstki mają postać

$$u_W^{(\lambda)}(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{E - \lambda|\vec{k}|} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \\ \sqrt{E + \lambda|\vec{k}|} \varphi^{(\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}, \quad v_W^{(\lambda)}(k) = \begin{pmatrix} -\lambda \sqrt{E + \lambda|\vec{k}|} \varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) \\ \lambda \sqrt{E - \lambda|\vec{k}|} \varphi^{(-\lambda)}(\hat{k}) \end{pmatrix}.$$

**Zadanie.** Pokazać, że powyższe spinory w bazie skrętności spełniają następujące warunki:

$$\bar{u}_W^{(\lambda_1)}(k) \gamma^0 u_W^{(\lambda_2)}(k) = \bar{v}_W^{(\lambda_1)}(k) \gamma^0 v_W^{(\lambda_2)}(k) = 2E \delta_{\lambda_1 \lambda_2}.$$



W granicy ultrarelatywistycznej możemy przyjąć  
 $m = 0 \Rightarrow E = |\vec{k}|$  i spinory przyjmują postać

$$u_W^{(+)}(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2E}\varphi^{(+)}(\hat{k}) \end{pmatrix}, \quad u_W^{(-)}(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{2E}\varphi^{(-)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

dla cząstki i

$$v_W^{(+)}(k) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2E}\varphi^{(-)}(\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_W^{(-)}(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2E}\varphi^{(+)}(\hat{k}) \end{pmatrix},$$

dla antycząstki, a zatem  $v_W^{(\pm)}(k) = -u_W^{(\mp)}(k)$ .

# Spinory w bazie skrętności w reprezentacji Weyla

Wykorzystując postać macierzy  $\gamma_5$  w reprezentacji Weyla:

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

widzimy, że operatory rzutujące na stany o określonej chiralności mają postać:

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Dlatego dla bezmasowych spinorów Diraca otrzymujemy następujące zależności

$$P_L u_W^{(+)}(k) = 0, \quad P_L u_W^{(-)}(k) = u_W^{(-)}(k) \equiv \begin{pmatrix} \varphi_L(k) \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$P_R u_W^{(+)}(k) = u_W^{(+)}(k) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_R(k) \end{pmatrix}, \quad P_R u_W^{(-)}(k) = 0.$$

# Równanie Diraca w reprezentacji Weyla

Wstawmy spinory  $u_W^{(\pm)}(k)$  do równania Diraca w reprezentacji pędowej dla cząstki o energii dodatniej  $E = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$ ,

$$(\gamma^\mu k_\mu - m) u_W^{(\pm)}(k) = 0,$$

gdzie powinniśmy użyć macierzy  $\gamma^\mu$  w reprezentacji Weyla:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

a więc

$$\gamma^\mu k_\mu = \gamma^0 k^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 & k^0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \\ k^0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{k} & 0 \end{pmatrix}.$$

# Równanie Diraca w reprezentacji Weyla

Dla cząstki bezmasowej,  $m = 0$  i  $k^0 = E = |\vec{k}|$ , równanie Diraca  $\gamma^\mu k_\mu u_W^{(\pm)}(k) = 0$ , przyjmuje postać

$$\begin{pmatrix} 0 & k^0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \\ k^0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{k} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_L(k) \\ \varphi_R(k) \end{pmatrix} = 0,$$

co daje następujące dwa równania na dwuskładnikowe spinory  $\varphi_R(k)$  i  $\varphi_L(k)$

$$(|\vec{k}| - \vec{\sigma} \cdot \vec{k})\varphi_R(k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \varphi_R(k) = \varphi_R(k)$$

$$(|\vec{k}| + \vec{\sigma} \cdot \vec{k})\varphi_L(k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \varphi_L(k) = -\varphi_L(k),$$

które po obustronnym pomnożeniu przez  $\frac{1}{2}\hbar$  stają się równaniami własnymi operatora skrętności dla spinu  $\frac{1}{2}$ .

# Ogólna postać rozwiązania równania Diraca

Ogólne rozwiązanie swobodnego równania Diraca jest superpozycją rozwiązań dla dodatniej i ujemnej energii:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \sum_{\alpha} \left[ c(\vec{k}, \alpha) u^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} + d(\vec{k}, \alpha)^* v^{(\alpha)}(k) e^{ikx} \right],$$

przy czym  $k^0 = E = +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ , wskaźnik polaryzacyjny  $\alpha$  przyjmuje **dwie wartości**, które zwykle wybiera się jako

- rzut spinu na oś  $Oz$  (baza kanoniczna) lub
- rzut spinu na kierunek pędu (skrętność),

bądź ich wartości podwojone, a miara całkowania

$$\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E}$$

jest relatywistycznie niezmiennicza.

# Ogólna postać rozwiązania równania Diraca

Aby to wykazać, rozważmy następujące wyrażenie

$$d^4k \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0),$$

które w oczywisty sposób jest niezmiennicze względem ortochronicznych właściwych transformacji Lorentza, gdyż zarówno miara  $d^4k$  jak i argument  $\delta$  Diraca są niezmiennicze względem dowolnej transformacji Lorentza  $\Lambda$ , a funkcja Heviside'a  $\theta(k^0)$  ogranicza nas do transformacji, które nie zmieniają znaku składowej "0".

Skorzystajmy ze wzoru

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_{0i})}{|f'(x_{0i})|},$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich miejscach zerowych funkcji  $f(x)$ ,  $f(x_{0i}) = 0$ .

# Ogólna postać rozwiązania równania Diraca

Aby to wykazać, rozważmy następujące wyrażenie

$$d^4k \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0),$$

które w oczywisty sposób jest niezmiennicze względem ortochronicznych właściwych transformacji Lorentza, gdyż zarówno miara  $d^4k$  jak i argument  $\delta$  Diraca są niezmiennicze względem dowolnej transformacji Lorentza  $\Lambda$ , a funkcja Heviside'a  $\theta(k^0)$  ogranicza nas do transformacji, które nie zmieniają znaku składowej "0".

Skorzystajmy ze wzoru

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_{0i})}{|f'(x_{0i})|},$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich miejscach zerowych funkcji  $f(x)$ ,  $f(x_{0i}) = 0$ .

# Ogólna postać rozwiązania równania Diraca

Oznaczmy  $\delta(k^2 - m^2) = \delta(f(k^0))$ , gdzie

$$f(k^0) = k^2 - m^2 = (k^0)^2 - \vec{k}^2 - m^2 = 0 \Rightarrow k^0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}.$$

Ponadto  $f'(k^0) = 2k^0$ . Oznaczmy  $E = +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ , wtedy

$$\delta(k^2 - m^2)\theta(k^0) = \frac{\delta(k^0 - E)}{2E}\theta(E) + \frac{\delta(k^0 + E)}{|-2E|}\theta(-E) = \frac{\delta(k^0 - E)}{2E}.$$

Dlatego możemy zapisać

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - m^2)\theta(k^0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk^0 \delta(k^0 - E) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E},$$

gdzie czynnik  $1/(2\pi)^3$  jest związany z transformatą Fouriera do przestrzeni pędowej.



**Zadanie.** Pokazać, że spinor Diraca  $\psi(x)$  określony wyżej rzeczywiście spełnia swobodne równanie Diraca.

Uwzględnienie w  $\psi(x)$  tylko rozwiązań dla dodatniej energii prowadzi do sprzeczności jeśli np. chcemy rozpatrywać elektron zlokalizowany w obszarze o rozmiarach mniejszych niż jego komptonowska długość fali  $\frac{\hbar}{mc}$ .

**Zadanie.** Pokazać, że spinor Diraca  $\psi(x)$  określony wyżej rzeczywiście spełnia swobodne równanie Diraca. Uwzględnienie w  $\psi(x)$  tylko rozwiązań dla dodatniej energii prowadzi do sprzeczności jeśli np. chcemy rozpatrywać elektron zlokalizowany w obszarze o rozmiarach mniejszych niż jego komptonowska długość fali  $\frac{\hbar}{mc}$ .