

Relatywistyczna współmienniczość równania Diraca

Wykład 25

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
<http://kk.us.edu.pl>

Pokażemy relatywistyczną współzmienniczość równania Diraca

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0,$$

gdzie macierze Diraca spełniają relacje antykomutacyjne

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

Pokażemy relatywistyczną współzmienniczość równania Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0,$$

gdzie macierze Diraca spełniają relacje antykomutacyjne

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbb{I}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

wraz z własnościami hermitowskością

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$$

Pokażemy relatywistyczną współzmienniczość równania Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0,$$

gdzie macierze Diraca spełniają relacje antykomutacyjne

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbb{I}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

wraz z własnościami hermitowskością

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i \quad \Rightarrow \quad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0.$$

Pokażemy relatywistyczną współzmienniczość równania Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0,$$

gdzie macierze Diraca spełniają relacje antykomutacyjne

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbb{I}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

wraz z własnościami hermitowskością

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i \quad \Rightarrow \quad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0.$$

Relatywistyczna współzmienniczość

Przez relatywistyczną współzmienniczość rozumiemy niezmienniczość względem translacji czasoprzestrzennych i współzmienniczość względem transformacji Lorentza, czyli **niejednorodnych transformacji z grupy Poincare'go**:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu,$$

Relatywistyczna współzmienniczość

Przez relatywistyczną współzmienniczość rozumiemy niezmienniczość względem translacji czasoprzestrzennych i współzmienniczość względem transformacji Lorentza, czyli **niejednorodnych transformacji z grupy Poincare'go**:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu,$$

gdzie $\Lambda^\mu{}_\nu$ jest elementem macierzy transformacji Lorentza, która nie zmienia iloczynu skalarnego czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego:

Relatywistyczna współzmienniczość

Przez relatywistyczną współzmienniczość rozumiemy niezmienniczość względem translacji czasoprzestrzennych i współzmienniczość względem transformacji Lorentza, **czyli niejednorodnych transformacji z grupy Poincare'go**:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu,$$

gdzie $\Lambda^\mu{}_\nu$ jest elementem macierzy transformacji Lorentza, która nie zmienia iloczynu skalarnego czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego:

$$x \rightarrow x' = \Lambda x, \quad \text{przy} \quad x' \cdot y' = x \cdot y.$$

Relatywistyczna współzmienniczość

Przez relatywistyczną współzmienniczość rozumiemy niezmienniczość względem translacji czasoprzestrzennych i współzmienniczość względem transformacji Lorentza, **czyli niejednorodnych transformacji z grupy Poincare'go**:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu,$$

gdzie $\Lambda^\mu{}_\nu$ jest elementem macierzy transformacji Lorentza, która nie zmienia iloczynu skalarnego czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego:

$$x \rightarrow x' = \Lambda x, \quad \text{przy} \quad x' \cdot y' = x \cdot y.$$

Iloczyn skalarny czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego pozostanie niezmienny jeśli

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma},$$

albo w formie macierzowej

$$\Lambda^T \Lambda = I.$$

Iloczyn skalarny czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego pozostanie niezmienny jeśli

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma},$$

albo w formie macierzowej

$$\Lambda^T \Lambda = I.$$

Obliczmy obustronnie wyznacznik

$$\det(\Lambda^T \Lambda) = \det(I)$$

Iloczyn skalarny czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego pozostanie niezmienny jeśli

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma},$$

albo w formie macierzowej

$$\Lambda^T \Lambda = I.$$

Obliczmy obustronnie wyznacznik

$$\det(\Lambda^T \Lambda) = \det(I) \Rightarrow [\det(\Lambda)]^2 = 1$$

Iloczyn skalarny czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego pozostanie niezmienny jeśli

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma},$$

albo w formie macierzowej

$$\Lambda^T \Lambda = I.$$

Obliczmy obustronnie wyznacznik

$$\det(\Lambda^T \Lambda) = \det(I) \Rightarrow [\det(\Lambda)]^2 = 1 \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1$$

Iloczyn skalarny czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego pozostanie niezmienny jeśli

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma},$$

albo w formie macierzowej

$$\Lambda^T \Lambda = I.$$

Obliczmy obustronnie wyznacznik

$$\det(\Lambda^T \Lambda) = \det(I) \Rightarrow [\det(\Lambda)]^2 = 1 \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1$$

$$\det(\Lambda) = 1 \Rightarrow \text{transformacje właściwe,}$$

Iloczyn skalarny czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego pozostanie niezmienny jeśli

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma},$$

albo w formie macierzowej

$$\Lambda^T \Lambda = I.$$

Obliczmy obustronnie wyznacznik

$$\det(\Lambda^T \Lambda) = \det(I) \Rightarrow [\det(\Lambda)]^2 = 1 \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1$$

$$\det(\Lambda) = 1 \Rightarrow \text{transformacje właściwe,}$$

$$\det(\Lambda) = -1 \Rightarrow \text{transformacje niewłaściwe.}$$

Iloczyn skalarny czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego pozostanie niezmienny jeśli

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma},$$

albo w formie macierzowej

$$\Lambda^T \Lambda = I.$$

Obliczmy obustronnie wyznacznik

$$\det(\Lambda^T \Lambda) = \det(I) \Rightarrow [\det(\Lambda)]^2 = 1 \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1$$

$$\det(\Lambda) = 1 \Rightarrow \text{transformacje właściwe,}$$

$$\det(\Lambda) = -1 \Rightarrow \text{transformacje niewłaściwe.}$$

Transformację niewłaściwą możemy zrealizować przez złożenie transformacji właściwej i odbicia przestrzennego lub czasowego.

Iloczyn skalarny czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego pozostanie niezmienny jeśli

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma},$$

albo w formie macierzowej

$$\Lambda^T \Lambda = I.$$

Obliczmy obustronnie wyznacznik

$$\det(\Lambda^T \Lambda) = \det(I) \Rightarrow [\det(\Lambda)]^2 = 1 \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1$$

$$\det(\Lambda) = 1 \Rightarrow \text{transformacje właściwe,}$$

$$\det(\Lambda) = -1 \Rightarrow \text{transformacje niewłaściwe.}$$

Transformację niewłaściwą możemy zrealizować przez złożenie transformacji właściwej i odbicia przestrzennego lub czasowego.

Rozważmy infinitezymalną translację czasoprzestrzenną

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu$$

Rozważmy infinitezymalną translację czasoprzestrzenną

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \rightarrow \partial'_\mu = \partial_\mu.$$

Rozważmy infinitezymalną translację czasoprzestrzenną

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \rightarrow \partial'_\mu = \partial_\mu.$$

Funkcja falowa transformuje się następująco

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \psi(x + \varepsilon)$$

Rozważmy infinitezymalną translację czasoprzestrzenną

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \rightarrow \partial'_\mu = \partial_\mu.$$

Funkcja falowa transformuje się następująco

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \psi(x + \varepsilon) \approx \psi(x) + \varepsilon^\mu \partial_\mu \psi(x),$$

Rozważmy infinitezymalną translację czasoprzestrzenną

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \rightarrow \partial'_\mu = \partial_\mu.$$

Funkcja falowa transformuje się następująco

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \psi(x + \varepsilon) \approx \psi(x) + \varepsilon^\mu \partial_\mu \psi(x),$$

gdzie zaniedbaliśmy wyrazy wyższego rzędu w nieskończenie małych parametrach ε^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Rozważmy infinitezymalną translację czasoprzestrzenną

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \rightarrow \partial'_\mu = \partial_\mu.$$

Funkcja falowa transformuje się następująco

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \psi(x + \varepsilon) \approx \psi(x) + \varepsilon^\mu \partial_\mu \psi(x),$$

gdzie zaniedbaliśmy wyrazy wyższego rzędu w nieskończenie małych parametrach ε^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Niezmienniczość translacyjna równanie Diraca

Rozważmy równanie Diraca w przetransformowanych zmiennych

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m) \psi'(x') = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) (\psi(x) + \varepsilon^\nu \partial_\nu \psi(x))$$

Rozważmy równanie Diraca w przetransformowanych zmiennych

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m) \psi'(x') &= (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) (\psi(x) + \varepsilon^\nu \partial_\nu \psi(x)) \\ &= \end{aligned}$$

Rozważmy równanie Diraca w przetransformowanych zmiennych

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi'(x') &= (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(\psi(x) + \varepsilon^\nu\partial_\nu\psi(x)) \\ &= (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) + \varepsilon^\nu\partial_\nu[(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)],\end{aligned}$$

Niezmienniczość translacyjna równanie Diraca

Rozważmy równanie Diraca w przetransformowanych zmiennych

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi'(x') &= (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(\psi(x) + \varepsilon^\nu\partial_\nu\psi(x)) \\ &= (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) + \varepsilon^\nu\partial_\nu[(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)],\end{aligned}$$

gdzie w drugim wyrazie po prawej stronie zamieniliśmy kolejność operatorów $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)$ i ∂_ν .

Rozważmy równanie Diraca w przetransformowanych zmiennych

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi'(x') &= (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(\psi(x) + \varepsilon^\nu\partial_\nu\psi(x)) \\ &= (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) + \varepsilon^\nu\partial_\nu[(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)],\end{aligned}$$

gdzie w drugim wyrazie po prawej stronie zamieniliśmy kolejność operatorów $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)$ i ∂_μ . Wykorzystując równanie Diraca w zmiennych wyjściowych otrzymujemy

$$(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0.$$

Rozważmy równanie Diraca w przetransformowanych zmiennych

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi'(x') &= (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(\psi(x) + \varepsilon^\nu\partial_\nu\psi(x)) \\ &= (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) + \varepsilon^\nu\partial_\nu[(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)],\end{aligned}$$

gdzie w drugim wyrazie po prawej stronie zamieniliśmy kolejność operatorów $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)$ i ∂_ν . Wykorzystując równanie Diraca w zmiennych wyjściowych otrzymujemy

$$(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0.$$

Czyli równanie Diraca w przetransformowanych zmiennych ma dokładnie taką samą postać co równanie wyjściowe.

Rozważmy równanie Diraca w przetransformowanych zmiennych

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi'(x') &= (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(\psi(x) + \varepsilon^\nu\partial_\nu\psi(x)) \\ &= (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) + \varepsilon^\nu\partial_\nu[(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)],\end{aligned}$$

gdzie w drugim wyrazie po prawej stronie zamieniliśmy kolejność operatorów $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)$ i ∂_ν . Wykorzystując równanie Diraca w zmiennych wyjściowych otrzymujemy

$$(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0.$$

Czyli równanie Diraca w przetransformowanych zmiennych ma dokładnie taką samą postać co równanie wyjściowe.

Właściwe przekształcenia Lorentza

Zbadajmy współmienniczość równania Diraca przy właściwych przekształceniach Lorentza, $x \rightarrow x' = \Lambda x \Rightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$

Zakładamy, że istnieje nieosobliwa macierz $S(\Lambda)$ taka, że

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Właściwe przekształcenia Lorentza

Zbadajmy współmienniczość równania Diraca przy właściwych przekształceniach Lorentza, $x \rightarrow x' = \Lambda x \Rightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$
Zakładamy, że istnieje nieosobliwa macierz $S(\Lambda)$ taka, że

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Chcemy aby po transformacji

$$(i\gamma^{\mu}\partial'_{\mu} - m)\psi'(x') = 0.$$

Właściwe przekształcenia Lorentza

Zbadajmy współmienniczość równania Diraca przy właściwych przekształceniach Lorentza, $x \rightarrow x' = \Lambda x \Rightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$
Zakładamy, że istnieje nieosobliwa macierz $S(\Lambda)$ taka, że

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Chcemy aby po transformacji

$$(i\gamma^{\mu}\partial'_{\mu} - m)\psi'(x') = 0.$$

Zbadajmy jak transformuje się pochodna

$$\partial'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$$

Właściwe przekształcenia Lorentza

Zbadajmy współmienniczość równania Diraca przy właściwych przekształceniach Lorentza, $x \rightarrow x' = \Lambda x \Rightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$
Zakładamy, że istnieje nieosobliwa macierz $S(\Lambda)$ taka, że

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Chcemy aby po transformacji

$$(i\gamma^{\mu}\partial'_{\mu} - m)\psi'(x') = 0.$$

Zbadajmy jak transformuje się pochodna

$$\partial'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left[\left(\Lambda^{-1} \right)^{\nu}_{\rho} x'^{\rho} \right] \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$$

Właściwe przekształcenia Lorentza

Zbadajmy współmienniczość równania Diraca przy właściwych przekształceniach Lorentza, $x \rightarrow x' = \Lambda x \Rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$
Zakładamy, że istnieje nieosobliwa macierz $S(\Lambda)$ taka, że

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Chcemy aby po transformacji

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m) \psi'(x') = 0.$$

Zbadajmy jak transformuje się pochodna

$$\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left[(\Lambda^{-1})^\nu_\rho x'^\rho \right] \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu_\rho \frac{\partial x'^\rho}{\partial x'^\mu} \partial_\nu$$

Właściwe przekształcenia Lorentza

Zbadajmy współmienniczość równania Diraca przy właściwych przekształceniach Lorentza, $x \rightarrow x' = \Lambda x \Rightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$
Zakładamy, że istnieje nieosobliwa macierz $S(\Lambda)$ taka, że

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Chcemy aby po transformacji

$$(i\gamma^{\mu}\partial'_{\mu} - m)\psi'(x') = 0.$$

Zbadajmy jak transformuje się pochodna

$$\begin{aligned}\partial'_{\mu} &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left[\left(\Lambda^{-1} \right)^{\nu}_{\rho} x'^{\rho} \right] \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \left(\Lambda^{-1} \right)^{\nu}_{\rho} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \\ &= \end{aligned}$$

Właściwe przekształcenia Lorentza

Zbadajmy współmienniczość równania Diraca przy właściwych przekształceniach Lorentza, $x \rightarrow x' = \Lambda x \Rightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$
Zakładamy, że istnieje nieosobliwa macierz $S(\Lambda)$ taka, że

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Chcemy aby po transformacji

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial'_{\mu} - m\right)\psi'(x') = 0.$$

Zbadajmy jak transformuje się pochodna

$$\begin{aligned}\partial'_{\mu} &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left[\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\rho} x'^{\rho} \right] \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\rho} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \\ &= \left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\rho} \delta^{\rho}_{\mu} \partial_{\nu}\end{aligned}$$

Właściwe przekształcenia Lorentza

Zbadajmy współmienniczość równania Diraca przy właściwych przekształceniach Lorentza, $x \rightarrow x' = \Lambda x \Rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$
Zakładamy, że istnieje nieosobliwa macierz $S(\Lambda)$ taka, że

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Chcemy aby po transformacji

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m) \psi'(x') = 0.$$

Zbadajmy jak transformuje się pochodna

$$\begin{aligned}\partial'_\mu &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left[(\Lambda^{-1})^\nu_\rho x'^\rho \right] \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu_\rho \frac{\partial x'^\rho}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \\ &= (\Lambda^{-1})^\nu_\rho \delta^\rho_\mu \partial_\nu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu\end{aligned}$$

Właściwe przekształcenia Lorentza

Zbadajmy współmienniczość równania Diraca przy właściwych przekształceniach Lorentza, $x \rightarrow x' = \Lambda x \Rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$
Zakładamy, że istnieje nieosobliwa macierz $S(\Lambda)$ taka, że

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Chcemy aby po transformacji

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m) \psi'(x') = 0.$$

Zbadajmy jak transformuje się pochodna

$$\begin{aligned}\partial'_\mu &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left[(\Lambda^{-1})^\nu_\rho x'^\rho \right] \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu_\rho \frac{\partial x'^\rho}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \\ &= (\Lambda^{-1})^\nu_\rho \delta^\rho_\mu \partial_\nu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu = \partial_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu.\end{aligned}$$

Właściwe przekształcenia Lorentza

Zbadajmy współmienniczość równania Diraca przy właściwych przekształceniach Lorentza, $x \rightarrow x' = \Lambda x \Rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$
Zakładamy, że istnieje nieosobliwa macierz $S(\Lambda)$ taka, że

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Chcemy aby po transformacji

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m) \psi'(x') = 0.$$

Zbadajmy jak transformuje się pochodna

$$\begin{aligned}\partial'_\mu &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left[(\Lambda^{-1})^\nu_\rho x'^\rho \right] \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu_\rho \frac{\partial x'^\rho}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \\ &= (\Lambda^{-1})^\nu_\rho \delta^\rho_\mu \partial_\nu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu = \partial_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu.\end{aligned}$$

Czyli pochodna transformuje się tak jak czterowektor kowariantny.
Wstawmy ten wynik wraz z prawem transformacyjnym dla funkcji falowej do rozpatrywanego równania

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m) \psi'(x') = 0.$$

Właściwe przekształcenia Lorentza

Czyli pochodna transformuje się tak jak czterowektor kowariantny. Wstawmy ten wynik wraz z prawem transformacyjnym dla funkcji falowej do rozpatrywanego równania

$$\left(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m \right) \psi'(x') = 0.$$

Wtedy otrzymamy

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\nu \left(\Lambda^{-1} \right)^\nu_\mu - m \right) S(\Lambda) \psi(x) = 0.$$

Właściwe przekształcenia Lorentza

Czyli pochodna transformuje się tak jak czterowektor kowariantny. Wstawmy ten wynik wraz z prawem transformacyjnym dla funkcji falowej do rozpatrywanego równania

$$\left(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m \right) \psi'(x') = 0.$$

Wtedy otrzymamy

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\nu \left(\Lambda^{-1} \right)^\nu_\mu - m \right) S(\Lambda) \psi(x) = 0.$$

Mnożąc lewostronnie przez $S^{-1}(\Lambda)$ dostaniemy

$$\left(i \left(\Lambda^{-1} \right)^\nu_\mu S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) \partial_\nu - m \right) \psi(x) = 0.$$

Właściwe przekształcenia Lorentza

Czyli pochodna transformuje się tak jak czterowektor kowariantny. Wstawmy ten wynik wraz z prawem transformacyjnym dla funkcji falowej do rozpatrywanego równania

$$\left(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m\right)\psi'(x') = 0.$$

Wtedy otrzymamy

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\nu\left(\Lambda^{-1}\right)^\nu_\mu - m\right)S(\Lambda)\psi(x) = 0.$$

Mnożąc lewostronnie przez $S^{-1}(\Lambda)$ dostaniemy

$$\left(i\left(\Lambda^{-1}\right)^\nu_\mu S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\partial_\nu - m\right)\psi(x) = 0.$$

Właściwe przekształcenia Lorentza

Skorzystaliśmy tu z liniowości mnożenia macierzy.

Równanie

$$\left(i \left(\Lambda^{-1} \right)^\nu{}_\mu S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) \partial_\nu - m \right) \psi(x) = 0,$$

będzie miało postać wyjściowego równania Diraca tylko jeśli będzie spełniony warunek

Właściwe przekształcenia Lorentza

Skorzystaliśmy tu z liniowości mnożenia macierzy.

Równanie

$$\left(i \left(\Lambda^{-1} \right)^\nu{}_\mu S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) \partial_\nu - m \right) \psi(x) = 0,$$

będzie miało postać wyjściowego równania Diraca tylko jeśli będzie spełniony warunek

$$\left(\Lambda^{-1} \right)^\nu{}_\mu S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \gamma^\nu.$$

Właściwe przekształcenia Lorentza

Skorzystaliśmy tu z liniowości mnożenia macierzy.

Równanie

$$\left(i \left(\Lambda^{-1} \right)^\nu_\mu S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) \partial_\nu - m \right) \psi(x) = 0,$$

będzie miało postać wyjściowego równania Diraca tylko jeśli będzie spełniony warunek

$$\left(\Lambda^{-1} \right)^\nu_\mu S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \gamma^\nu.$$

Warunek ten możemy przepisać w formie

$$S(\Lambda) \gamma^\nu S^{-1}(\Lambda) = \left(\Lambda^{-1} \right)^\nu_\mu \gamma^\mu.$$

Właściwe przekształcenia Lorentza

Skorzystaliśmy tu z liniowości mnożenia macierzy.

Równanie

$$\left(i \left(\Lambda^{-1} \right)^\nu{}_\mu S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) \partial_\nu - m \right) \psi(x) = 0,$$

będzie miało postać wyjściowego równania Diraca tylko jeśli będzie spełniony warunek

$$\left(\Lambda^{-1} \right)^\nu{}_\mu S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \gamma^\nu.$$

Warunek ten możemy przepisać w formie

$$S(\Lambda) \gamma^\nu S^{-1}(\Lambda) = \left(\Lambda^{-1} \right)^\nu{}_\mu \gamma^\mu.$$

Obiekt, który przy transformacjach Lorentza $x \rightarrow x' = \Lambda x$ transformuje się wg prawa

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x),$$

Obiekt, który przy transformacjach Lorentza $x \rightarrow x' = \Lambda x$ transformuje się wg prawa

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x),$$

gdzie macierz $S(\Lambda)$ spełnia warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

Obiekt, który przy transformacjach Lorentza $x \rightarrow x' = \Lambda x$ transformuje się wg prawa

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x),$$

gdzie macierz $S(\Lambda)$ spełnia warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

nazywamy spinorem Diraca.

Obiekt, który przy transformacjach Lorentza $x \rightarrow x' = \Lambda x$ transformuje się wg prawa

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x),$$

gdzie macierz $S(\Lambda)$ spełnia warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

nazywamy **spinorem Diraca**.

Musimy jeszcze wykazać istnienie nieosobliwej macierzy $S(\Lambda)$, która spełnia powyższy warunek.

Obiekt, który przy transformacjach Lorentza $x \rightarrow x' = \Lambda x$ transformuje się wg prawa

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x),$$

gdzie macierz $S(\Lambda)$ spełnia warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

nazywamy **spinorem Diraca**.

Musimy jeszcze wykazać istnienie nieosobliwej macierzy $S(\Lambda)$, która spełnia powyższy warunek.

Znajdźmy najpierw macierz $S(\Lambda)$ dla infinitezimalnego właściwego przekształcenia Lorentza.

Zadanie. Pokazać, że infinitezymalne właściwe przekształcenie Lorentza można przedstawić w postaci

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + (\delta\omega)^\mu{}_\nu, \quad \text{gdzie} \quad (\delta\omega)_{\mu\nu} = -(\delta\omega)_{\nu\mu}.$$

Znajdźmy najpierw macierz $S(\Lambda)$ dla infinitesimalnego właściwego przekształcenia Lorentza.

Zadanie. Pokazać, że infinitesimalne właściwe przekształcenie Lorentza można przedstawić w postaci

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + (\delta\omega)^\mu{}_\nu, \quad \text{gdzie} \quad (\delta\omega)_{\mu\nu} = -(\delta\omega)_{\nu\mu}.$$

Widzimy, że zgodnie z oczekiwaniem właściwa transformacja Lorentza jest opisywana przez 6 niezależnych parametrów.

Znajdźmy najpierw macierz $S(\Lambda)$ dla infinitesimalnego właściwego przekształcenia Lorentza.

Zadanie. Pokazać, że infinitesimalne właściwe przekształcenie Lorentza można przedstawić w postaci

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + (\delta\omega)^\mu{}_\nu, \quad \text{gdzie} \quad (\delta\omega)_{\mu\nu} = -(\delta\omega)_{\nu\mu}.$$

Widzimy, że zgodnie z oczekiwaniem właściwa transformacja Lorentza jest opisywana przez 6 niezależnych parametrów.

Zapiszmy

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} (\delta\omega)^{\mu\nu}, \quad \text{gdzie} \quad \sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}$$

są macierzami 4×4 .

Znajdźmy najpierw macierz $S(\Lambda)$ dla infinitezimalnego właściwego przekształcenia Lorentza.

Zadanie. Pokazać, że infinitezymalne właściwe przekształcenie Lorentza można przedstawić w postaci

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + (\delta\omega)^\mu{}_\nu, \quad \text{gdzie} \quad (\delta\omega)_{\mu\nu} = -(\delta\omega)_{\nu\mu}.$$

Widzimy, że zgodnie z oczekiwaniem właściwa transformacja Lorentza jest opisywana przez 6 niezależnych parametrów. Zapiszmy

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} (\delta\omega)^{\mu\nu}, \quad \text{gdzie} \quad \sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}$$

są macierzami 4×4 .

Pokażemy, że macierze $\sigma_{\mu\nu}$ rzeczywiście są antysymetryczne ze względu na numerujące je indeksy μ, ν .

Znajdźmy najpierw macierz $S(\Lambda)$ dla infinitezimalnego właściwego przekształcenia Lorentza.

Zadanie. Pokazać, że infinitezymalne właściwe przekształcenie Lorentza można przedstawić w postaci

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + (\delta\omega)^\mu{}_\nu, \quad \text{gdzie} \quad (\delta\omega)_{\mu\nu} = -(\delta\omega)_{\nu\mu}.$$

Widzimy, że zgodnie z oczekiwaniem właściwa transformacja Lorentza jest opisywana przez 6 niezależnych parametrów. Zapiszmy

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} (\delta\omega)^{\mu\nu}, \quad \text{gdzie} \quad \sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}$$

są macierzami 4×4 .

Pokażemy, że macierze $\sigma_{\mu\nu}$ rzeczywiście są antysymetryczne ze względu na numerujące je indeksy μ, ν .

Spinory Diraca

Dowolny tensor $T_{\mu\nu}$ możemy zapisać w postaci sumy

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) = S_{\mu\nu} + A_{\mu\nu},$$

gdzie $S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu})$ jest tensorem symetrycznym, a $A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu})$ jest tensorem antysymetrycznym.

Zwężenie tensora $T_{\mu\nu}$ z wielkością antysymetryczną $\omega_{\mu\nu}$ ma wtedy postać

$$T_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} = S_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + A_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu},$$

ale

$$S_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} = \frac{1}{2}S_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}S_{\nu\mu}\omega^{\nu\mu} = \frac{1}{2}S_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - \frac{1}{2}S_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} = 0,$$

gdzie w drugim wyrazie po pierwszej równości zamieniliśmy indeksy $\mu \leftrightarrow \nu$, a następnie skorzystaliśmy z własności $S_{\nu\mu} = S_{\mu\nu}$ i $\omega^{\nu\mu} = -\omega^{\mu\nu}$. Dlatego tensor $\sigma_{\mu\nu}$, którego elementami są macierze 4×4 , musi być antysymetryczny w indeksach μ, ν .

Spinory Diraca

Dowolny tensor $T_{\mu\nu}$ możemy zapisać w postaci sumy

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) = S_{\mu\nu} + A_{\mu\nu},$$

gdzie $S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu})$ jest tensorem symetrycznym, a $A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu})$ jest tensorem antysymetrycznym.

Zwężenie tensora $T_{\mu\nu}$ z wielkością antysymetryczną $\omega_{\mu\nu}$ ma wtedy postać

$$T_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} = S_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + A_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu},$$

ale

$$S_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} = \frac{1}{2}S_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}S_{\nu\mu}\omega^{\nu\mu} = \frac{1}{2}S_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - \frac{1}{2}S_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} = 0,$$

gdzie w drugim wyrazie po pierwszej równości zamieniliśmy indeksy $\mu \leftrightarrow \nu$, a następnie skorzystaliśmy z własności $S_{\nu\mu} = S_{\mu\nu}$ i $\omega^{\nu\mu} = -\omega^{\mu\nu}$. Dlatego tensor $\sigma_{\mu\nu}$, którego elementami są macierze 4×4 , musi być antysymetryczny w indeksach μ, ν .

Wstawiając związki

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + (\delta\omega)^\mu{}_\nu \quad \Rightarrow$$

Wstawiając związki

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + (\delta\omega)^\mu{}_\nu \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu - (\delta\omega)^\mu{}_\nu$$

Wstawiając związki

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + (\delta\omega)^\mu{}_\nu \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu - (\delta\omega)^\mu{}_\nu$$

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} (\delta\omega)^{\mu\nu}$$

Wstawiając związki

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + (\delta\omega)^\mu{}_\nu \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu - (\delta\omega)^\mu{}_\nu$$

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} (\delta\omega)^{\mu\nu} \quad \Rightarrow$$

Wstawiając związki

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + (\delta\omega)^\mu{}_\nu \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu - (\delta\omega)^\mu{}_\nu$$

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}(\delta\omega)^{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad S^{-1}(\Lambda) = 1 + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}(\delta\omega)^{\mu\nu}$$

Wstawiając związki

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + (\delta\omega)^\mu{}_\nu \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu - (\delta\omega)^\mu{}_\nu$$

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}(\delta\omega)^{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad S^{-1}(\Lambda) = 1 + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}(\delta\omega)^{\mu\nu}$$

do równania

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

Wstawiając związki

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + (\delta\omega)^\mu{}_\nu \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu - (\delta\omega)^\mu{}_\nu$$

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}(\delta\omega)^{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad S^{-1}(\Lambda) = 1 + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}(\delta\omega)^{\mu\nu}$$

do równania

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

otrzymamy

$$\left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}(\delta\omega)^{\alpha\beta}\right) \gamma^\mu \left(1 + \frac{i}{4}\sigma_{\rho\tau}(\delta\omega)^{\rho\tau}\right) = (\delta^\mu_\nu - (\delta\omega)^\mu{}_\nu) \gamma^\nu.$$

Wstawiając związki

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + (\delta\omega)^\mu{}_\nu \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu - (\delta\omega)^\mu{}_\nu$$

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}(\delta\omega)^{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad S^{-1}(\Lambda) = 1 + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}(\delta\omega)^{\mu\nu}$$

do równania

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

otrzymamy

$$\left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}(\delta\omega)^{\alpha\beta}\right) \gamma^\mu \left(1 + \frac{i}{4}\sigma_{\rho\tau}(\delta\omega)^{\rho\tau}\right) = (\delta^\mu_\nu - (\delta\omega)^\mu{}_\nu) \gamma^\nu.$$

Przekształcając równanie

$$\left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}(\delta\omega)^{\alpha\beta}\right) \gamma^\mu \left(1 + \frac{i}{4}\sigma_{\rho\tau}(\delta\omega)^{\rho\tau}\right) = (\delta^\mu_\nu - (\delta\omega)^\mu_\nu) \gamma^\nu.$$

otrzymamy

$$\gamma^\mu + \frac{i}{4}(\delta\omega)^{\alpha\beta} [\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] = \gamma^\mu - (\delta\omega)^\mu_\nu \gamma^\nu.$$

Przekształcając równanie

$$\left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}(\delta\omega)^{\alpha\beta}\right) \gamma^\mu \left(1 + \frac{i}{4}\sigma_{\rho\tau}(\delta\omega)^{\rho\tau}\right) = (\delta^\mu_\nu - (\delta\omega)^\mu_\nu) \gamma^\nu.$$

otrzymamy

$$\gamma^\mu + \frac{i}{4}(\delta\omega)^{\alpha\beta} [\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] = \gamma^\mu - (\delta\omega)^\mu_\nu \gamma^\nu.$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} \frac{i}{4}(\delta\omega)^{\alpha\beta} [\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] &= -(\delta\omega)^\mu_\nu \gamma^\nu = -(\delta\omega)^{\mu\nu} \gamma_\nu = -(\delta\omega)^{\alpha\beta} \delta^\mu_\alpha \gamma_\beta \\ &= \frac{1}{2}(\delta\omega)^{\alpha\beta} \left(-\delta^\mu_\alpha \gamma_\beta + \delta^\mu_\beta \gamma_\alpha \right). \end{aligned}$$

Przekształcając równanie

$$\left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}(\delta\omega)^{\alpha\beta}\right) \gamma^\mu \left(1 + \frac{i}{4}\sigma_{\rho\tau}(\delta\omega)^{\rho\tau}\right) = (\delta^\mu_\nu - (\delta\omega)^\mu{}_\nu) \gamma^\nu.$$

otrzymamy

$$\gamma^\mu + \frac{i}{4}(\delta\omega)^{\alpha\beta} [\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] = \gamma^\mu - (\delta\omega)^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} \frac{i}{4}(\delta\omega)^{\alpha\beta} [\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] &= -(\delta\omega)^\mu{}_\nu \gamma^\nu = -(\delta\omega)^{\mu\nu} \gamma_\nu = -(\delta\omega)^{\alpha\beta} \delta^\mu_\alpha \gamma_\beta \\ &= \frac{1}{2}(\delta\omega)^{\alpha\beta} \left(-\delta^\mu_\alpha \gamma_\beta + \delta^\mu_\beta \gamma_\alpha \right). \end{aligned}$$

Współczynniki przy $(\delta\omega)^{\alpha\beta}$ po obu stronach równania są antysymetryczne w α, β , więc nie ma pomiędzy nimi kasowań

Przekształcając równanie

$$\left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}(\delta\omega)^{\alpha\beta}\right) \gamma^\mu \left(1 + \frac{i}{4}\sigma_{\rho\tau}(\delta\omega)^{\rho\tau}\right) = (\delta^\mu_\nu - (\delta\omega)^\mu{}_\nu) \gamma^\nu.$$

otrzymamy

$$\gamma^\mu + \frac{i}{4}(\delta\omega)^{\alpha\beta} [\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] = \gamma^\mu - (\delta\omega)^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} \frac{i}{4}(\delta\omega)^{\alpha\beta} [\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] &= -(\delta\omega)^\mu{}_\nu \gamma^\nu = -(\delta\omega)^{\mu\nu} \gamma_\nu = -(\delta\omega)^{\alpha\beta} \delta^\mu_\alpha \gamma_\beta \\ &= \frac{1}{2}(\delta\omega)^{\alpha\beta} \left(-\delta^\mu_\alpha \gamma_\beta + \delta^\mu_\beta \gamma_\alpha\right). \end{aligned}$$

Współczynniki przy $(\delta\omega)^{\alpha\beta}$ po obu stronach równania są antysymetryczne w α, β , więc nie ma pomiędzy nimi kasowań

i dlatego możemy je porównać

$$\frac{i}{4} [\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2} \left(-\delta_\alpha^\mu \gamma_\beta + \delta_\beta^\mu \gamma_\alpha \right).$$

Ostatecznie otrzymujemy warunek

$$[\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] = 2i \left(\delta_\alpha^\mu \gamma_\beta - \delta_\beta^\mu \gamma_\alpha \right),$$

i dlatego możemy je porównać

$$\frac{i}{4} [\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2} \left(-\delta_\alpha^\mu \gamma_\beta + \delta_\beta^\mu \gamma_\alpha \right).$$

Ostatecznie otrzymujemy warunek

$$[\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] = 2i \left(\delta_\alpha^\mu \gamma_\beta - \delta_\beta^\mu \gamma_\alpha \right),$$

a mnożąc obustronnie przez $g_{\nu\mu}$ dostaniemy

$$[\gamma_\nu, \sigma_{\alpha\beta}] = 2i \left(g_{\nu\alpha} \gamma_\beta - g_{\nu\beta} \gamma_\alpha \right).$$

i dlatego możemy je porównać

$$\frac{i}{4} [\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2} \left(-\delta_\alpha^\mu \gamma_\beta + \delta_\beta^\mu \gamma_\alpha \right).$$

Ostatecznie otrzymujemy warunek

$$[\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] = 2i \left(\delta_\alpha^\mu \gamma_\beta - \delta_\beta^\mu \gamma_\alpha \right),$$

a mnożąc obustronnie przez $g_{\nu\mu}$ dostaniemy

$$[\gamma_\nu, \sigma_{\alpha\beta}] = 2i (g_{\nu\alpha} \gamma_\beta - g_{\nu\beta} \gamma_\alpha).$$

Zadanie. Pokazać, że rozwiązanie ma postać

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta].$$

i dlatego możemy je porównać

$$\frac{i}{4} [\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2} \left(-\delta_\alpha^\mu \gamma_\beta + \delta_\beta^\mu \gamma_\alpha \right).$$

Ostatecznie otrzymujemy warunek

$$[\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] = 2i \left(\delta_\alpha^\mu \gamma_\beta - \delta_\beta^\mu \gamma_\alpha \right),$$

a mnożąc obustronnie przez $g_{\nu\mu}$ dostaniemy

$$[\gamma_\nu, \sigma_{\alpha\beta}] = 2i (g_{\nu\alpha} \gamma_\beta - g_{\nu\beta} \gamma_\alpha).$$

Zadanie. Pokazać, że rozwiązanie ma postać

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta].$$

Spinory Diraca

Znajdźmy macierz $S(\Lambda)$ dla przekształcenia skończonego $\Lambda(\omega)$, gdzie $\omega_{\mu\nu} = N(\delta\omega)_{\mu\nu}$, przy $N \rightarrow \infty$.

$$S(\Lambda) = \left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}(\delta\omega)^{\mu\nu}\right)^N = \left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\frac{\omega^{\mu\nu}}{N}\right)^N \rightarrow e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}},$$

a więc

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}}.$$

Przeanalizujmy jeszcze jak transformuje się spinor Diraca przy odbiciu przestrzennym

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}) \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = (x^0, -\vec{x}).$$

Spinory Diraca

Znajdźmy macierz $S(\Lambda)$ dla przekształcenia skończonego $\Lambda(\omega)$, gdzie $\omega_{\mu\nu} = N(\delta\omega)_{\mu\nu}$, przy $N \rightarrow \infty$.

$$S(\Lambda) = \left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}(\delta\omega)^{\mu\nu}\right)^N = \left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\frac{\omega^{\mu\nu}}{N}\right)^N \rightarrow e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}},$$

a więc

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}}.$$

Przeanalizujmy jeszcze **jak transformuje się spinor Diraca przy odbiciu przestrzennym**

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}) \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = (x^0, -\vec{x}).$$

Macierz transformacji Lorentza ma w tym przypadku postać

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Spinory Diraca

Znajdźmy macierz $S(\Lambda)$ dla przekształcenia skończonego $\Lambda(\omega)$, gdzie $\omega_{\mu\nu} = N(\delta\omega)_{\mu\nu}$, przy $N \rightarrow \infty$.

$$S(\Lambda) = \left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}(\delta\omega)^{\mu\nu}\right)^N = \left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\frac{\omega^{\mu\nu}}{N}\right)^N \rightarrow e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}},$$

a więc

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}}.$$

Przeanalizujmy jeszcze **jak transformuje się spinor Diraca przy odbiciu przestrzennym**

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}) \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = (x^0, -\vec{x}).$$

Macierz transformacji Lorentza ma w tym przypadku postać

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu.$$

Spinory Diraca

Znajdźmy macierz $S(\Lambda)$ dla przekształcenia skończonego $\Lambda(\omega)$, gdzie $\omega_{\mu\nu} = N(\delta\omega)_{\mu\nu}$, przy $N \rightarrow \infty$.

$$S(\Lambda) = \left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}(\delta\omega)^{\mu\nu}\right)^N = \left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\frac{\omega^{\mu\nu}}{N}\right)^N \rightarrow e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}},$$

a więc

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}}.$$

Przeanalizujmy jeszcze **jak transformuje się spinor Diraca przy odbiciu przestrzennym**

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}) \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = (x^0, -\vec{x}).$$

Macierz transformacji Lorentza ma w tym przypadku postać

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu.$$

W tym przypadku

$$S(\Lambda) = \eta_P \gamma^0, \quad \text{gdzie} \quad |\eta_P|^2 = 1.$$

Zauważmy, że

$$S^{-1}(\Lambda) = \eta_P^* \gamma^0.$$

W tym przypadku

$$S(\Lambda) = \eta_P \gamma^0, \quad \text{gdzie} \quad |\eta_P|^2 = 1.$$

Zauważmy, że

$$S^{-1}(\Lambda) = \eta_P^* \gamma^0.$$

Rzeczywiście

$$S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda) = \eta_P^* \gamma^0 \eta_P \gamma^0$$

W tym przypadku

$$S(\Lambda) = \eta_P \gamma^0, \quad \text{gdzie} \quad |\eta_P|^2 = 1.$$

Zauważmy, że

$$S^{-1}(\Lambda) = \eta_P^* \gamma^0.$$

Rzeczywiście

$$S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda) = \eta_P^* \gamma^0 \eta_P \gamma^0 = |\eta_P|^2 (\gamma^0)^2$$

W tym przypadku

$$S(\Lambda) = \eta_P \gamma^0, \quad \text{gdzie} \quad |\eta_P|^2 = 1.$$

Zauważmy, że

$$S^{-1}(\Lambda) = \eta_P^* \gamma^0.$$

Rzeczywiście

$$S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda) = \eta_P^* \gamma^0 \eta_P \gamma^0 = |\eta_P|^2 (\gamma^0)^2 = 1,$$

W tym przypadku

$$S(\Lambda) = \eta_P \gamma^0, \quad \text{gdzie} \quad |\eta_P|^2 = 1.$$

Zauważmy, że

$$S^{-1}(\Lambda) = \eta_P^* \gamma^0.$$

Rzeczywiście

$$S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda) = \eta_P^* \gamma^0 \eta_P \gamma^0 = |\eta_P|^2 (\gamma^0)^2 = 1,$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\gamma^0 \gamma^0 + \gamma^0 \gamma^0 = 2g^{00}\mathbb{I}$$

W tym przypadku

$$S(\Lambda) = \eta_P \gamma^0, \quad \text{gdzie} \quad |\eta_P|^2 = 1.$$

Zauważmy, że

$$S^{-1}(\Lambda) = \eta_P^* \gamma^0.$$

Rzeczywiście

$$S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda) = \eta_P^* \gamma^0 \eta_P \gamma^0 = |\eta_P|^2 (\gamma^0)^2 = 1,$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\gamma^0 \gamma^0 + \gamma^0 \gamma^0 = 2g^{00}\mathbb{I} \Rightarrow (\gamma^0)^2 = 1.$$

W tym przypadku

$$S(\Lambda) = \eta_P \gamma^0, \quad \text{gdzie} \quad |\eta_P|^2 = 1.$$

Zauważmy, że

$$S^{-1}(\Lambda) = \eta_P^* \gamma^0.$$

Rzeczywiście

$$S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda) = \eta_P^* \gamma^0 \eta_P \gamma^0 = |\eta_P|^2 (\gamma^0)^2 = 1,$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\gamma^0 \gamma^0 + \gamma^0 \gamma^0 = 2g^{00}\mathbb{I} \quad \Rightarrow \quad (\gamma^0)^2 = 1.$$

Spinory Diraca

Sprawdźmy czy jest spełniony warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = 0$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda)$$

Spinory Diraca

Sprawdźmy czy jest spełniony warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = 0$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) =$$

Spinory Diraca

Sprawdźmy czy jest spełniony warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = 0$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) = \eta_P \gamma^0 \gamma^0 \eta_P^* \gamma^0$$

Spinory Diraca

Sprawdźmy czy jest spełniony warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = 0$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) = \eta_P \gamma^0 \gamma^0 \eta_P^* \gamma^0 = |\eta_P|^2 \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0$$

Spinory Diraca

Sprawdźmy czy jest spełniony warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = 0$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) = \eta_P \gamma^0 \gamma^0 \eta_P^* \gamma^0 = |\eta_P|^2 \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0$$

Spinory Diraca

Sprawdźmy czy jest spełniony warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = 0$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) = \eta_P \gamma^0 \gamma^0 \eta_P^* \gamma^0 = |\eta_P|^2 \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0 = (\Lambda^{-1})^0{}_\nu \gamma^\nu.$$

Spinory Diraca

Sprawdźmy czy jest spełniony warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = 0$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) = \eta_P \gamma^0 \gamma^0 \eta_P^* \gamma^0 = |\eta_P|^2 \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0 = (\Lambda^{-1})^0{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = i = 1, 2, 3$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^i S^{-1}(\Lambda)$$

Spinory Diraca

Sprawdźmy czy jest spełniony warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = 0$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) = \eta_P \gamma^0 \gamma^0 \eta_P^* \gamma^0 = |\eta_P|^2 \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0 = (\Lambda^{-1})^0{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = i = 1, 2, 3$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^i S^{-1}(\Lambda) =$$

Spinory Diraca

Sprawdźmy czy jest spełniony warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = 0$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) = \eta_P \gamma^0 \gamma^0 \eta_P^* \gamma^0 = |\eta_P|^2 \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0 = (\Lambda^{-1})^0{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = i = 1, 2, 3$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^i S^{-1}(\Lambda) = \eta_P \gamma^0 \gamma^i \eta_P^* \gamma^0$$

Spinory Diraca

Sprawdźmy czy jest spełniony warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = 0$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) = \eta_P \gamma^0 \gamma^0 \eta_P^* \gamma^0 = |\eta_P|^2 \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0 = (\Lambda^{-1})^0{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = i = 1, 2, 3$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^i S^{-1}(\Lambda) = \eta_P \gamma^0 \gamma^i \eta_P^* \gamma^0 = |\eta_P|^2 \gamma^0 \gamma^i \gamma^0$$

Spinory Diraca

Sprawdźmy czy jest spełniony warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = 0$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) = \eta_P \gamma^0 \gamma^0 \eta_P^* \gamma^0 = |\eta_P|^2 \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0 = (\Lambda^{-1})^0{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = i = 1, 2, 3$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^i S^{-1}(\Lambda) = \eta_P \gamma^0 \gamma^i \eta_P^* \gamma^0 = |\eta_P|^2 \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = -\gamma^i (\gamma^0)^2$$

Spinory Diraca

Sprawdźmy czy jest spełniony warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = 0$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) = \eta_P \gamma^0 \gamma^0 \eta_P^* \gamma^0 = |\eta_P|^2 \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0 = (\Lambda^{-1})^0{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = i = 1, 2, 3$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^i S^{-1}(\Lambda) = \eta_P \gamma^0 \gamma^i \eta_P^* \gamma^0 = |\eta_P|^2 \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = -\gamma^i (\gamma^0)^2 = -\gamma^i$$

Spinory Diraca

Sprawdźmy czy jest spełniony warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = 0$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) = \eta_P \gamma^0 \gamma^0 \eta_P^* \gamma^0 = |\eta_P|^2 \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0 = (\Lambda^{-1})^0{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = i = 1, 2, 3$ mamy

$$\begin{aligned} S(\Lambda)\gamma^i S^{-1}(\Lambda) &= \eta_P \gamma^0 \gamma^i \eta_P^* \gamma^0 = |\eta_P|^2 \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = -\gamma^i (\gamma^0)^2 = -\gamma^i \\ &= \end{aligned}$$

Spinory Diraca

Sprawdźmy czy jest spełniony warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = 0$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) = \eta_P \gamma^0 \gamma^0 \eta_P^* \gamma^0 = |\eta_P|^2 \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0 = (\Lambda^{-1})^0{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = i = 1, 2, 3$ mamy

$$\begin{aligned} S(\Lambda)\gamma^i S^{-1}(\Lambda) &= \eta_P \gamma^0 \gamma^i \eta_P^* \gamma^0 = |\eta_P|^2 \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = -\gamma^i (\gamma^0)^2 = -\gamma^i \\ &= (\Lambda^{-1})^i{}_\nu \gamma^\nu, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy ze związku antykomutacyjnego

$$\gamma^0 \gamma^i + \gamma^i \gamma^0 = 0$$

Spinory Diraca

Sprawdźmy czy jest spełniony warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = 0$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) = \eta_P \gamma^0 \gamma^0 \eta_P^* \gamma^0 = |\eta_P|^2 \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0 = (\Lambda^{-1})^0{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = i = 1, 2, 3$ mamy

$$\begin{aligned} S(\Lambda)\gamma^i S^{-1}(\Lambda) &= \eta_P \gamma^0 \gamma^i \eta_P^* \gamma^0 = |\eta_P|^2 \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = -\gamma^i (\gamma^0)^2 = -\gamma^i \\ &= (\Lambda^{-1})^i{}_\nu \gamma^\nu, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy ze związku antykomutacyjnego

$$\gamma^0 \gamma^i + \gamma^i \gamma^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^0 \gamma^i = -\gamma^i \gamma^0.$$

Dowód współzmienniczości równania Diraca przy odbiciu czasowym jest nieco bardziej subtelny, dlatego w tym miejscu go pominiemy. Można go znaleźć np. w podręczniku Bjorkena i Drella.

Spinory Diraca

Sprawdźmy czy jest spełniony warunek

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = 0$ mamy

$$S(\Lambda)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) = \eta_P \gamma^0 \gamma^0 \eta_P^* \gamma^0 = |\eta_P|^2 \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0 = (\Lambda^{-1})^0{}_\nu \gamma^\nu.$$

Dla $\mu = i = 1, 2, 3$ mamy

$$\begin{aligned} S(\Lambda)\gamma^i S^{-1}(\Lambda) &= \eta_P \gamma^0 \gamma^i \eta_P^* \gamma^0 = |\eta_P|^2 \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = -\gamma^i (\gamma^0)^2 = -\gamma^i \\ &= (\Lambda^{-1})^i{}_\nu \gamma^\nu, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy ze związku antykomutacyjnego

$$\gamma^0 \gamma^i + \gamma^i \gamma^0 = 0 \Rightarrow \gamma^0 \gamma^i = -\gamma^i \gamma^0.$$

Dowód współmienniczości równania Diraca przy odbiciu czasowym jest nieco bardziej subtelny, dlatego w tym miejscu go pominiemy. Można go znaleźć np. w podręczniku Bjorkena i Drella.

Przeanalizujmy bliżej prawo transformacyjne dla spinorów Diraca przy przekształceniach skończonych. Rozpiszmy podwójną sumę w wykładniku, pamiętając, że $\omega_{\beta\alpha} = -\omega_{\alpha\beta}$ i $\sigma_{\beta\alpha} = -\sigma_{\alpha\beta}$

$$\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} = \sigma_{0i}\omega^{0i} + \sigma_{i0}\omega^{i0} + \sum_{i<j} \sigma_{ij}\omega^{ij} + \sum_{i>j} \sigma_{ij}\omega^{ij}.$$

W drugiej sumie po prawej stronie dokonajmy zamiany $i \leftrightarrow j$ i skorzystajmy z antysymetrii, wtedy otrzymamy

$$\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} = 2\sigma_{0i}\omega^{0i} + 2\sum_{i<j} \sigma_{ij}\omega^{ij}.$$

Przeanalizujmy bliżej prawo transformacyjne dla spinorów Diraca przy przekształceniach skończonych. Rozpiszmy podwójną sumę w wykładniku, pamiętając, że $\omega_{\beta\alpha} = -\omega_{\alpha\beta}$ i $\sigma_{\beta\alpha} = -\sigma_{\alpha\beta}$

$$\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} = \sigma_{0i}\omega^{0i} + \sigma_{i0}\omega^{i0} + \sum_{i<j}\sigma_{ij}\omega^{ij} + \sum_{i>j}\sigma_{ij}\omega^{ij}.$$

W drugiej sumie po prawej stronie dokonajmy zamiany $i \leftrightarrow j$ i skorzystajmy z antysymetrii, wtedy otrzymamy

$$\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} = 2\sigma_{0i}\omega^{0i} + 2\sum_{i<j}\sigma_{ij}\omega^{ij}.$$

Spinory Diraca

Skorzystajmy z reprezentacji Weyla macierzy γ^μ :

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = -\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

w której

$$\sigma_{0i} = \frac{i}{2}[\gamma_0, \gamma_i] = i \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{ij} = \frac{i}{2}[\gamma_i, \gamma_j] = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} [\sigma_i, \sigma_j] & 0 \\ 0 & [\sigma_i, \sigma_j] \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} = 2i\omega^{0i} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix} + 2\omega^{ij}\varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}.$$

Oznaczmy $\omega^{0i} \equiv \varphi_i$ i $\omega^{ij}\varepsilon_{ijk} \equiv -\theta_k$, wtedy

$$\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} = 2i \begin{pmatrix} \vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix} + 2i \begin{pmatrix} i\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & i\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Spinory Diraca

Skorzystajmy z reprezentacji Weyla macierzy γ^μ :

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = -\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

w której

$$\sigma_{0i} = \frac{i}{2}[\gamma_0, \gamma_i] = i \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{ij} = \frac{i}{2}[\gamma_i, \gamma_j] = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} [\sigma_i, \sigma_j] & 0 \\ 0 & [\sigma_i, \sigma_j] \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} = 2i\omega^{0i} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix} + 2\omega^{ij}\varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}.$$

Oznaczmy $\omega^{0i} \equiv \varphi_i$ i $\omega^{ij}\varepsilon_{ijk} \equiv -\theta_k$, wtedy

$$\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} = 2i \begin{pmatrix} \vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix} + 2i \begin{pmatrix} i\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & i\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Spinory Diraca

W takim razie

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}} = \exp \left\{ \begin{pmatrix} \vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} & 0 \\ 0 & -\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dlatego naturalne jest założenie, że **spinor Diraca** ma postać

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix},$$

a prawo transformacyjne przybiera postać następującą

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = \begin{pmatrix} e^{\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix},$$

Spinory Diraca

W takim razie

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}} = \exp \left\{ \begin{pmatrix} \vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} & 0 \\ 0 & -\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dlatego naturalne jest założenie, że **spinor Diraca** ma postać

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix},$$

a prawo transformacyjne przybiera postać następującą

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = \begin{pmatrix} e^{\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix},$$

Spinory Pauliego

gdzie dwuskładnikowe spinory Pauliego $\xi(x)$ i $\eta(x)$ przy obrotach o dowolny kąt $\vec{\theta}$ i pchnięciach lorentzowskich opisywanych 3 parametrami $\vec{\varphi}$, przy czym $\tanh\varphi = \beta = \frac{v}{c}$, transformują się następująco

$$\begin{aligned}\xi(x) &\rightarrow \xi'(x') = e^{\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \xi(x) \\ \eta(x) &\rightarrow \eta'(x') = e^{-\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \eta(x).\end{aligned}$$

Mówimy przy tym, że reprezentacja grupy Lorentza dla spinu $\frac{1}{2}$, a dokładnie jej grupy nakrywającej $SL(2, \mathbb{C})$, jest redukowalna do sumy jej dwóch nierównoważnych reprezentacji $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$. Dlatego spinor Diraca często nazywany jest bispinorem.

Spinory Pauliego

gdzie dwuskładnikowe spinory Pauliego $\xi(x)$ i $\eta(x)$ przy obrotach o dowolny kąt $\vec{\theta}$ i pchnięciach lorentzowskich opisywanych 3 parametrami $\vec{\varphi}$, przy czym $\tanh\varphi = \beta = \frac{v}{c}$, transformują się następująco

$$\begin{aligned}\xi(x) &\rightarrow \xi'(x') = e^{\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \xi(x) \\ \eta(x) &\rightarrow \eta'(x') = e^{-\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \eta(x).\end{aligned}$$

Mówimy przy tym, że reprezentacja grupy Lorentza dla spinu $\frac{1}{2}$, a dokładnie jej grupy nakrywającej $SL(2, \mathbb{C})$, jest redukowalna do sumy jej dwóch nierównoważnych reprezentacji $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$. Dlatego spinor Diraca często nazywany jest **bispinorem**. Więcej na ten temat powiemy na kolejnym wykładzie pt. *Spinory*.

Spinory Pauliego

gdzie dwuskładnikowe spinory Pauliego $\xi(x)$ i $\eta(x)$ przy obrotach o dowolny kąt $\vec{\theta}$ i pchnięciach lorentzowskich opisywanych 3 parametrami $\vec{\varphi}$, przy czym $\tanh\varphi = \beta = \frac{v}{c}$, transformują się następująco

$$\begin{aligned}\xi(x) &\rightarrow \xi'(x') = e^{\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \xi(x) \\ \eta(x) &\rightarrow \eta'(x') = e^{-\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \eta(x).\end{aligned}$$

Mówimy przy tym, że reprezentacja grupy Lorentza dla spinu $\frac{1}{2}$, a dokładnie jej grupy nakrywającej $SL(2, \mathbb{C})$, jest redukowalna do sumy jej dwóch nierównoważnych reprezentacji $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$. Dlatego spinor Diraca często nazywany jest **bispinorem**. Więcej na ten temat powiemy na kolejnym wykładzie pt. *Spinory*.

Spinory Pauliego ξ i η identyfikujemy odpowiednio ze spinorami **prawym** i **lewym**, o których będzie mowa w dalszej części kursu,

$$\xi \rightarrow \tilde{\varphi}_R, \quad \eta \rightarrow \tilde{\varphi}_L.$$

Spinory Pauliego

gdzie dwuskładnikowe spinory Pauliego $\xi(x)$ i $\eta(x)$ przy obrotach o dowolny kąt $\vec{\theta}$ i pchnięciach lorentzowskich opisywanych 3 parametrami $\vec{\varphi}$, przy czym $\tanh\varphi = \beta = \frac{v}{c}$, transformują się następująco

$$\begin{aligned}\xi(x) &\rightarrow \xi'(x') = e^{\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \xi(x) \\ \eta(x) &\rightarrow \eta'(x') = e^{-\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \eta(x).\end{aligned}$$

Mówimy przy tym, że reprezentacja grupy Lorentza dla spinu $\frac{1}{2}$, a dokładnie jej grupy nakrywającej $SL(2, \mathbb{C})$, jest redukowalna do sumy jej dwóch nierównoważnych reprezentacji $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$.

Dlatego spinor Diraca często nazywany jest **bispinorem**. Więcej na ten temat powiemy na kolejnym wykładzie pt. *Spinory*.

Spinory Pauliego ξ i η identyfikujemy odpowiednio ze spinorami **prawym** i **lewym**, o których będzie mowa w dalszej części kursu,

$$\xi \rightarrow \tilde{\varphi}_R, \quad \eta \rightarrow \tilde{\varphi}_L.$$

Spinory Pauliego

Zadanie. Pokazać, że przy czystym pchnięciu lorentzowskim, dla którego $\vec{\theta} = 0$, spinor $\varphi_R(x)$ transformuje się następująco

$$\tilde{\varphi}_R(x) \rightarrow e^{\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \tilde{\varphi}_R(x) = \left[\text{ch} \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \vec{\sigma} \cdot \hat{k} \text{sh} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] \tilde{\varphi}_R(x),$$

gdzie $\hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ jest wektorem jednostkowym w kierunku pchnięcia.

Założmy, że spinor Pauliego dla cząstki o pędzie $\vec{k}$ możemy zapisać w formie

$$\tilde{\varphi}_R(x) \sim \varphi_R(\vec{k}) e^{-ik \cdot x}.$$

Iloczyn skalarny czterowektorów $k \cdot x = k_\mu x^\mu$ jest niezmiennikiem lorentzowskim, więc spinory prawe w przestrzeni pędów $\varphi_R(\vec{k})$ transformują się dokładnie tak samo jak $\tilde{\varphi}_R(x)$.

Spinory Pauliego

Zadanie. Pokazać, że przy czystym pchnięciu lorentzowskim, dla którego $\vec{\theta} = 0$, spinor $\varphi_R(x)$ transformuje się następująco

$$\tilde{\varphi}_R(x) \rightarrow e^{\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \tilde{\varphi}_R(x) = \left[\text{ch} \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \vec{\sigma} \cdot \hat{k} \text{sh} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] \tilde{\varphi}_R(x),$$

gdzie $\hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ jest wektorem jednostkowym w kierunku pchnięcia.

Założmy, że spinor Pauliego dla cząstki o pędzie $\vec{k}$ możemy zapisać w formie

$$\tilde{\varphi}_R(x) \sim \varphi_R(\vec{k}) e^{-ik \cdot x}.$$

Iloczyn skalarny czterowektorów $k \cdot x = k_\mu x^\mu$ jest niezmiennikiem lorentzowskim, więc spinory prawe w przestrzeni pędów $\varphi_R(\vec{k})$ transformują się dokładnie tak samo jak $\tilde{\varphi}_R(x)$.

Utożsamimy wyjściowy spinor z cząstką w układzie spoczynkowym i oznaczmy $\varphi_R(0)$, a spinor po pchnięciu utożsamimy z cząstką o pędzie $\vec{k}$ i oznaczmy $\varphi_R(\vec{k})$.

Spinory Pauliego

Zadanie. Pokazać, że przy czystym pchnięciu lorentzowskim, dla którego $\vec{\theta} = 0$, spinor $\varphi_R(x)$ transformuje się następująco

$$\tilde{\varphi}_R(x) \rightarrow e^{\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \tilde{\varphi}_R(x) = \left[\text{ch} \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \vec{\sigma} \cdot \hat{k} \text{sh} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] \tilde{\varphi}_R(x),$$

gdzie $\hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ jest wektorem jednostkowym w kierunku pchnięcia.

Założmy, że spinor Pauliego dla cząstki o pędzie $\vec{k}$ możemy zapisać w formie

$$\tilde{\varphi}_R(x) \sim \varphi_R(\vec{k}) e^{-ik \cdot x}.$$

Iloczyn skalarny czterowektorów $k \cdot x = k_\mu x^\mu$ jest niezmiennikiem lorentzowskim, więc spinory prawe w przestrzeni pędów $\varphi_R(\vec{k})$ transformują się dokładnie tak samo jak $\tilde{\varphi}_R(x)$.

Utożsamimy wyjściowy spinor z cząstką w układzie spoczynkowym i oznaczmy $\varphi_R(0)$, a spinor po pchnięciu utożsamimy z cząstką o pędzie $\vec{k}$ i oznaczmy $\varphi_R(\vec{k})$.

Tożsamości dla funkcji hiperbolicznych

Z definicji funkcji hiperbolicznych

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

otrzymujemy następującą tożsamość

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$$

oraz

$$\operatorname{th}^2(x) = \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{\operatorname{ch}^2(x) - 1}{\operatorname{ch}^2(x)} \Rightarrow \operatorname{ch}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2(x)}},$$

$$\operatorname{th}^2(x) = \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{1 + \operatorname{sh}^2(x)} \Rightarrow \operatorname{sh}(x) = \frac{\operatorname{th}(x)}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2(x)}}.$$

Tożsamości dla funkcji hiperbolicznych

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(2x) &= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x).\end{aligned}$$

Skąd możemy wyprowadzić następujące związki

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(x) &= \operatorname{ch}\left(2\frac{x}{2}\right) = \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2 \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 2 \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1,\end{aligned}$$

a zatem

$$\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(x) + 1}{2}}, \quad \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{2}}.$$

Tożsamości dla funkcji hiperbolicznych

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(2x) &= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x).\end{aligned}$$

Skąd możemy wyprowadzić następujące związki

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(x) &= \operatorname{ch}\left(2\frac{x}{2}\right) = \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2 \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 2 \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1,\end{aligned}$$

a zatem

$$\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(x) + 1}{2}}, \quad \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{2}}.$$

Spinory Pauliego

Prawo transformacyjne dla prawego spinora Pauliego w przestrzeni pędowej ma postać

$$\varphi_R(\vec{k}) = \left[\text{ch} \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \vec{\sigma} \cdot \hat{k} \text{sh} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] \varphi_R(0),$$

gdzie

$$\text{th}(\varphi) = \beta = \frac{v}{c} \Rightarrow \text{ch}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2(\varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma,$$

ale dla $c = 1$ zachodzi $E = \gamma m \Rightarrow \gamma = \frac{E}{m}$, więc

$$\text{ch} \left(\frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{\frac{\text{ch}(\varphi) + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} = \sqrt{\frac{E + m}{2m}},$$

$$\text{sh} \left(\frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{\frac{\text{ch}(\varphi) - 1}{2}} = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}} = \sqrt{\frac{E - m}{2m}}.$$

Spinory Pauliego

Prawo transformacyjne dla prawego spinora Pauliego w przestrzeni pędowej ma postać

$$\varphi_R(\vec{k}) = \left[\text{ch} \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \vec{\sigma} \cdot \hat{k} \text{sh} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] \varphi_R(0),$$

gdzie

$$\text{th}(\varphi) = \beta = \frac{v}{c} \Rightarrow \text{ch}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2(\varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma,$$

ale dla $c = 1$ zachodzi $E = \gamma m \Rightarrow \gamma = \frac{E}{m}$, więc

$$\text{ch} \left(\frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{\frac{\text{ch}(\varphi) + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} = \sqrt{\frac{E + m}{2m}},$$

$$\text{sh} \left(\frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{\frac{\text{ch}(\varphi) - 1}{2}} = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}} = \sqrt{\frac{E - m}{2m}}.$$

Spinory Pauliego

Zauważmy jeszcze, że

$$|\vec{k}| = \sqrt{E^2 - m^2} = \sqrt{(E + m)(E - m)}.$$

Dlatego prawo transformacyjne dla prawego spinora Pauliego możemy zapisać następująco

$$\begin{aligned}\varphi_R(\vec{k}) &= \left[\sqrt{\frac{E + m}{2m}} + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\sqrt{(E + m)(E - m)}} \sqrt{\frac{E - m}{2m}} \right] \varphi_R(0) \\ &= \frac{E + m + \vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\sqrt{2m(E + m)}} \varphi_R(0).\end{aligned}$$

Zadanie. Postępując analogicznie pokazać, że prawo transformacyjne dla lewego spinora Pauliego ma postać

$$\varphi_L(\vec{k}) = \frac{E + m - \vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\sqrt{2m(E + m)}} \varphi_L(0).$$

Spinory Pauliego

Zauważmy jeszcze, że

$$|\vec{k}| = \sqrt{E^2 - m^2} = \sqrt{(E + m)(E - m)}.$$

Dlatego prawo transformacyjne dla prawego spinora Pauliego możemy zapisać następująco

$$\begin{aligned}\varphi_R(\vec{k}) &= \left[\sqrt{\frac{E + m}{2m}} + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\sqrt{(E + m)(E - m)}} \sqrt{\frac{E - m}{2m}} \right] \varphi_R(0) \\ &= \frac{E + m + \vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\sqrt{2m(E + m)}} \varphi_R(0).\end{aligned}$$

Zadanie. Postępując analogicznie pokazać, że prawo transformacyjne dla lewego spinora Pauliego ma postać

$$\varphi_L(\vec{k}) = \frac{E + m - \vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\sqrt{2m(E + m)}} \varphi_L(0).$$

Zauważmy, że dla cząstki spoczywającej nie można określić, czy rzut jej spinu na kierunek pędu jest *lewy, tzn. $-\frac{1}{2}$* , czy *prawy, tzn. $\frac{1}{2}$* , dlatego można przyjąć, że $\varphi_L(0) = \varphi_R(0)$.

Uwaga. W dalszym ciągu będziemy normować spinory nieco inaczej, bez $\sqrt{2m}$ w mianowniku.

Zauważmy, że dla cząstki spoczywającej nie można określić, czy rzut jej spinu na kierunek pędu jest *lewy, tzn. $-\frac{1}{2}$* , czy *prawy, tzn. $\frac{1}{2}$* , dlatego można przyjąć, że $\varphi_L(0) = \varphi_R(0)$.

Uwaga. W dalszym ciągu będziemy normować spinory nieco inaczej, bez $\sqrt{2m}$ w mianowniku.

Jak transformuje się barowany spinor Diraca?

Dla spinora $\psi(x)$ zachodzi

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Jak transformuje się barowany spinor Diraca?

Dla spinora $\psi(x)$ zachodzi

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Dokonajmy sprzężenia diracowskiego

$$\bar{\psi}'(x')$$

Jak transformuje się barowany spinor Diraca?

Dla spinora $\psi(x)$ zachodzi

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Dokonajmy sprzężenia diracowskiego

$$\bar{\psi}'(x') =$$

Jak transformuje się barowany spinor Diraca?

Dla spinora $\psi(x)$ zachodzi

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Dokonajmy sprzężenia diracowskiego

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'(x')^\dagger \gamma^0$$

Jak transformuje się barowany spinor Diraca?

Dla spinora $\psi(x)$ zachodzi

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Dokonajmy sprzężenia diracowskiego

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'(x')^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger(x) S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$$

Jak transformuje się barowany spinor Diraca?

Dla spinora $\psi(x)$ zachodzi

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Dokonajmy sprzężenia diracowskiego

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'(x')^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger(x) S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \psi^\dagger(x) \gamma^0 \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$$

Jak transformuje się barowany spinor Diraca?

Dla spinora $\psi(x)$ zachodzi

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Dokonajmy sprzężenia diracowskiego

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x') &= \psi'(x')^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger(x) S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \psi^\dagger(x) \gamma^0 \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 \\ &= \end{aligned}$$

Jak transformuje się barowany spinor Diraca?

Dla spinora $\psi(x)$ zachodzi

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Dokonajmy sprzężenia diracowskiego

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x') &= \psi'(x')^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger(x) S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \psi^\dagger(x) \gamma^0 \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 \\ &= \bar{\psi}(x) \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0.\end{aligned}$$

Jak transformuje się barowany spinor Diraca?

Dla spinora $\psi(x)$ zachodzi

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$$

Dokonajmy sprzężenia diracowskiego

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x') &= \psi'(x')^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger(x) S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \psi^\dagger(x) \gamma^0 \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 \\ &= \bar{\psi}(x) \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0.\end{aligned}$$

Spinory Diraca

Obliczmy iloczyn macierzy $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$.

Dla ciągłej transformacji Lorentza mamy

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 \left(e^{-\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} \right)^\dagger \gamma^0 =$$

Spinory Diraca

Obliczmy iloczyn macierzy $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$.

Dla ciągłej transformacji Lorentza mamy

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 \left(e^{-\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} \right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 e^{\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \omega^{\alpha\beta}} \gamma^0 =$$

Spinory Diraca

Obliczmy iloczyn macierzy $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$.

Dla ciągłej transformacji Lorentza mamy

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 \left(e^{-\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} \right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 e^{\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \omega^{\alpha\beta}} \gamma^0 = e^{\frac{i}{4} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 \omega^{\alpha\beta}}.$$

Spinory Diraca

Obliczmy iloczyn macierzy $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$.

Dla ciągłej transformacji Lorentza mamy

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 \left(e^{-\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} \right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 e^{\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \omega^{\alpha\beta}} \gamma^0 = e^{\frac{i}{4} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 \omega^{\alpha\beta}}.$$

Obliczmy wyrażenie w wykładniku

$$\gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0$$

Spinory Diraca

Obliczmy iloczyn macierzy $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$.

Dla ciągłej transformacji Lorentza mamy

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 \left(e^{-\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} \right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 e^{\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \omega^{\alpha\beta}} \gamma^0 = e^{\frac{i}{4} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 \omega^{\alpha\beta}}.$$

Obliczmy wyrażenie w wykładniku

$$\gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 =$$

Spinory Diraca

Obliczmy iloczyn macierzy $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$.

Dla ciągłej transformacji Lorentza mamy

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 \left(e^{-\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} \right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 e^{\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \omega^{\alpha\beta}} \gamma^0 = e^{\frac{i}{4} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 \omega^{\alpha\beta}}.$$

Obliczmy wyrażenie w wykładniku

$$\gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \left(\frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \right)^\dagger \gamma^0 =$$

Spinory Diraca

Obliczmy iloczyn macierzy $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$.

Dla ciągłej transformacji Lorentza mamy

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 \left(e^{-\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} \right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 e^{\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \omega^{\alpha\beta}} \gamma^0 = e^{\frac{i}{4} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 \omega^{\alpha\beta}}.$$

Obliczmy wyrażenie w wykładniku

$$\gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \left(\frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \right)^\dagger \gamma^0 = -\frac{i}{2} \gamma^0 (\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha)^\dagger \gamma^0$$

Spinory Diraca

Obliczmy iloczyn macierzy $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$.

Dla ciągłej transformacji Lorentza mamy

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 \left(e^{-\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} \right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 e^{\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \omega^{\alpha\beta}} \gamma^0 = e^{\frac{i}{4} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 \omega^{\alpha\beta}}.$$

Obliczmy wyrażenie w wykładniku

$$\begin{aligned} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 &= \gamma^0 \left(\frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \right)^\dagger \gamma^0 = -\frac{i}{2} \gamma^0 (\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha)^\dagger \gamma^0 \\ &= \end{aligned}$$

Spinory Diraca

Obliczmy iloczyn macierzy $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$.

Dla ciągłej transformacji Lorentza mamy

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 \left(e^{-\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} \right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 e^{\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \omega^{\alpha\beta}} \gamma^0 = e^{\frac{i}{4} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 \omega^{\alpha\beta}}.$$

Obliczmy wyrażenie w wykładniku

$$\begin{aligned} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 &= \gamma^0 \left(\frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \right)^\dagger \gamma^0 = -\frac{i}{2} \gamma^0 (\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha)^\dagger \gamma^0 \\ &= -\frac{i}{2} \gamma^0 (\gamma_\beta^\dagger \gamma_\alpha^\dagger - \gamma_\alpha^\dagger \gamma_\beta^\dagger) \gamma^0. \end{aligned}$$

Spinory Diraca

Obliczmy iloczyn macierzy $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$.

Dla ciągłej transformacji Lorentza mamy

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 \left(e^{-\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} \right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 e^{\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \omega^{\alpha\beta}} \gamma^0 = e^{\frac{i}{4} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 \omega^{\alpha\beta}}.$$

Obliczmy wyrażenie w wykładniku

$$\begin{aligned} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 &= \gamma^0 \left(\frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \right)^\dagger \gamma^0 = -\frac{i}{2} \gamma^0 (\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha)^\dagger \gamma^0 \\ &= -\frac{i}{2} \gamma^0 (\gamma_\beta^\dagger \gamma_\alpha^\dagger - \gamma_\alpha^\dagger \gamma_\beta^\dagger) \gamma^0. \end{aligned}$$

ale $\gamma_\mu^\dagger = \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0$,

Spinory Diraca

Obliczmy iloczyn macierzy $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$.

Dla ciągłej transformacji Lorentza mamy

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 \left(e^{-\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} \right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 e^{\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \omega^{\alpha\beta}} \gamma^0 = e^{\frac{i}{4} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 \omega^{\alpha\beta}}.$$

Obliczmy wyrażenie w wykładniku

$$\begin{aligned} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 &= \gamma^0 \left(\frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \right)^\dagger \gamma^0 = -\frac{i}{2} \gamma^0 (\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha)^\dagger \gamma^0 \\ &= -\frac{i}{2} \gamma^0 (\gamma_\beta^\dagger \gamma_\alpha^\dagger - \gamma_\alpha^\dagger \gamma_\beta^\dagger) \gamma^0. \end{aligned}$$

ale $\gamma_\mu^\dagger = \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0$, więc

$$\gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 = -\frac{i}{2} \gamma^0 (\gamma^0 \gamma_\beta \gamma^0 \gamma^0 \gamma_\alpha \gamma^0 - \gamma^0 \gamma_\alpha \gamma^0 \gamma^0 \gamma_\beta \gamma^0) \gamma^0$$

Spinory Diraca

Obliczmy iloczyn macierzy $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$.

Dla ciągłej transformacji Lorentza mamy

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 \left(e^{-\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} \right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 e^{\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \omega^{\alpha\beta}} \gamma^0 = e^{\frac{i}{4} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 \omega^{\alpha\beta}}.$$

Obliczmy wyrażenie w wykładniku

$$\begin{aligned} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 &= \gamma^0 \left(\frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \right)^\dagger \gamma^0 = -\frac{i}{2} \gamma^0 (\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha)^\dagger \gamma^0 \\ &= -\frac{i}{2} \gamma^0 (\gamma_\beta^\dagger \gamma_\alpha^\dagger - \gamma_\alpha^\dagger \gamma_\beta^\dagger) \gamma^0. \end{aligned}$$

ale $\gamma_\mu^\dagger = \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0$, więc

$$\begin{aligned} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 &= -\frac{i}{2} \gamma^0 (\gamma^0 \gamma_\beta \gamma^0 \gamma^0 \gamma_\alpha \gamma^0 - \gamma^0 \gamma_\alpha \gamma^0 \gamma^0 \gamma_\beta \gamma^0) \gamma^0 \\ &= \frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \end{aligned}$$

Spinory Diraca

Obliczmy iloczyn macierzy $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$.

Dla ciągłej transformacji Lorentza mamy

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 \left(e^{-\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} \right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 e^{\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \omega^{\alpha\beta}} \gamma^0 = e^{\frac{i}{4} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 \omega^{\alpha\beta}}.$$

Obliczmy wyrażenie w wykładniku

$$\begin{aligned} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 &= \gamma^0 \left(\frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \right)^\dagger \gamma^0 = -\frac{i}{2} \gamma^0 (\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha)^\dagger \gamma^0 \\ &= -\frac{i}{2} \gamma^0 (\gamma_\beta^\dagger \gamma_\alpha^\dagger - \gamma_\alpha^\dagger \gamma_\beta^\dagger) \gamma^0. \end{aligned}$$

ale $\gamma_\mu^\dagger = \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0$, więc

$$\begin{aligned} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 &= -\frac{i}{2} \gamma^0 (\gamma^0 \gamma_\beta \gamma^0 \gamma^0 \gamma_\alpha \gamma^0 - \gamma^0 \gamma_\alpha \gamma^0 \gamma^0 \gamma_\beta \gamma^0) \gamma^0 \\ &= \frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] = \sigma_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Spinory Diraca

Obliczmy iloczyn macierzy $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$.

Dla ciągłej transformacji Lorentza mamy

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 \left(e^{-\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} \right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 e^{\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \omega^{\alpha\beta}} \gamma^0 = e^{\frac{i}{4} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 \omega^{\alpha\beta}}.$$

Obliczmy wyrażenie w wykładniku

$$\begin{aligned} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 &= \gamma^0 \left(\frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \right)^\dagger \gamma^0 = -\frac{i}{2} \gamma^0 (\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha)^\dagger \gamma^0 \\ &= -\frac{i}{2} \gamma^0 (\gamma_\beta^\dagger \gamma_\alpha^\dagger - \gamma_\alpha^\dagger \gamma_\beta^\dagger) \gamma^0. \end{aligned}$$

ale $\gamma_\mu^\dagger = \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0$, więc

$$\begin{aligned} \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 &= -\frac{i}{2} \gamma^0 (\gamma^0 \gamma_\beta \gamma^0 \gamma^0 \gamma_\alpha \gamma^0 - \gamma^0 \gamma_\alpha \gamma^0 \gamma^0 \gamma_\beta \gamma^0) \gamma^0 \\ &= \frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] = \sigma_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

W takim razie dla ciągłej transformacji Lorentza zachodzi

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = e^{+\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} = S^{-1}(\Lambda).$$

Obliczmy teraz $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$ dla odbicia przestrzennego,

W takim razie dla ciągłej transformacji Lorentza zachodzi

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = e^{+\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} = S^{-1}(\Lambda).$$

Obliczmy teraz $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$ dla odbicia przestrzennego, dla którego

$$S(\Lambda) = \eta_P \gamma^0, \quad \text{gdzie} \quad |\eta_P|^2 = 1.$$

W takim razie dla ciągłej transformacji Lorentza zachodzi

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = e^{+\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} = S^{-1}(\Lambda).$$

Obliczmy teraz $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$ dla odbicia przestrzennego, dla którego

$$S(\Lambda) = \eta_P \gamma^0, \quad \text{gdzie} \quad |\eta_P|^2 = 1.$$

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 =$$

W takim razie dla ciągłej transformacji Lorentza zachodzi

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = e^{+\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} = S^{-1}(\Lambda).$$

Obliczmy teraz $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$ dla odbicia przestrzennego, dla którego

$$S(\Lambda) = \eta_P \gamma^0, \quad \text{gdzie} \quad |\eta_P|^2 = 1.$$

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 \left(\eta_P \gamma^0 \right)^\dagger \gamma^0 =$$

W takim razie dla ciągłej transformacji Lorentza zachodzi

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = e^{+\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} = S^{-1}(\Lambda).$$

Obliczmy teraz $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$ dla odbicia przestrzennego, dla którego

$$S(\Lambda) = \eta_P \gamma^0, \quad \text{gdzie} \quad |\eta_P|^2 = 1.$$

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 \left(\eta_P \gamma^0 \right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \eta_P^* \gamma^0 \gamma^0 =$$

W takim razie dla ciągłej transformacji Lorentza zachodzi

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = e^{+\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} = S^{-1}(\Lambda).$$

Obliczmy teraz $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$ dla odbicia przestrzennego, dla którego

$$S(\Lambda) = \eta_P \gamma^0, \quad \text{gdzie} \quad |\eta_P|^2 = 1.$$

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 \left(\eta_P \gamma^0 \right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \eta_P^* \gamma^0 \gamma^0 = \eta_P^* \gamma^0 =$$

W takim razie dla ciągłej transformacji Lorentza zachodzi

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = e^{+\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} = S^{-1}(\Lambda).$$

Obliczmy teraz $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$ dla odbicia przestrzennego, dla którego

$$S(\Lambda) = \eta_P \gamma^0, \quad \text{gdzie} \quad |\eta_P|^2 = 1.$$

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 \left(\eta_P \gamma^0 \right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \eta_P^* \gamma^0 \gamma^0 = \eta_P^* \gamma^0 = S^{-1}(\Lambda).$$

W takim razie dla ciągłej transformacji Lorentza zachodzi

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = e^{+\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} = S^{-1}(\Lambda).$$

Obliczmy teraz $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$ dla odbicia przestrzennego, dla którego

$$S(\Lambda) = \eta_P \gamma^0, \quad \text{gdzie} \quad |\eta_P|^2 = 1.$$

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 \left(\eta_P \gamma^0 \right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \eta_P^* \gamma^0 \gamma^0 = \eta_P^* \gamma^0 = S^{-1}(\Lambda).$$

Podsumowując

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 =$$

W takim razie dla ciągłej transformacji Lorentza zachodzi

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = e^{+\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} = S^{-1}(\Lambda).$$

Obliczmy teraz $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$ dla odbicia przestrzennego, dla którego

$$S(\Lambda) = \eta_P \gamma^0, \quad \text{gdzie} \quad |\eta_P|^2 = 1.$$

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 \left(\eta_P \gamma^0 \right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \eta_P^* \gamma^0 \gamma^0 = \eta_P^* \gamma^0 = S^{-1}(\Lambda).$$

Podsumowując

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \bar{\psi}(x) S^{-1}(\Lambda).$$

W takim razie dla ciągłej transformacji Lorentza zachodzi

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = e^{+\frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} = S^{-1}(\Lambda).$$

Obliczmy teraz $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$ dla odbicia przestrzennego, dla którego

$$S(\Lambda) = \eta_P \gamma^0, \quad \text{gdzie} \quad |\eta_P|^2 = 1.$$

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 \left(\eta_P \gamma^0 \right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \eta_P^* \gamma^0 \gamma^0 = \eta_P^* \gamma^0 = S^{-1}(\Lambda).$$

Podsumowując

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \bar{\psi}(x) S^{-1}(\Lambda).$$

Zadanie. Pokazać, że ostatnia równość dowodzi współmienniczości sprzężonego równania Diraca

$$i\partial_\mu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu + m\bar{\psi}(x) = 0,$$

które często zapisuje się w formie

$$\bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu\partial_\mu + m) = 0,$$

przy założeniu, że operator różniczkowy ∂_μ działa na lewo.

Macierze γ^μ określone związkami komutacyjnymi

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

i relacjami hermitowskością $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0$ rozpinają tzw. **algebrę Clifforda**.

Zdefiniujemy macierz γ_5 :

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

Macierze Diraca

Macierze γ^μ określone związkami komutacyjnymi

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

i relacjami hermitowskością $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0$ rozpinają tzw. **algebrę Clifforda**.

Zdefiniujemy macierz γ_5 :

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

Zadanie. Pokazać, że

$$\gamma_5^2 = \mathbb{I}, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad \{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0.$$

Macierze γ^μ określone związkami komutacyjnymi

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

i relacjami hermitowskością $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0$ rozpinają tzw. **algebrę Clifforda**.

Zdefiniujemy macierz γ_5 :

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

Zadanie. Pokazać, że

$$\gamma_5^2 = \mathbb{I}, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad \{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0.$$

Zadanie. Znaleźć postać macierzy γ_5 w reprezentacji Diraca i w reprezentacji Weyla.

Macierze γ^μ określone związkami komutacyjnymi

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

i relacjami hermitowskością $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0$ rozpinają tzw. **algebrę Clifforda**.

Zdefiniujemy macierz γ_5 :

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

Zadanie. Pokazać, że

$$\gamma_5^2 = \mathbb{I}, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad \{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0.$$

Zadanie. Znaleźć postać macierzy γ_5 w reprezentacji Diraca i w reprezentacji Weyla.

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a , gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$\Gamma^S = \mathbb{I}$$

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a , gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$\Gamma^S = \mathbb{I} \quad (1 \text{ macierz})$$

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a , gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$\begin{aligned}\Gamma^S &= \mathbb{I} && (1 \text{ macierz}) \\ \Gamma_\mu^V &= \gamma_\mu\end{aligned}$$

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a , gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$\begin{aligned}\Gamma^S &= \mathbb{I} && (1 \text{ macierz}) \\ \Gamma_\mu^V &= \gamma_\mu && (4 \text{ macierze})\end{aligned}$$

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a , gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$\begin{aligned}\Gamma^S &= \mathbb{I} && (1 \text{ macierz}) \\ \Gamma_\mu^V &= \gamma_\mu && (4 \text{ macierze}) \\ \Gamma_{\mu\nu}^T &= \sigma_{\mu\nu}\end{aligned}$$

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a , gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$\begin{aligned}\Gamma^S &= \mathbb{I} && (1 \text{ macierz}) \\ \Gamma_\mu^V &= \gamma_\mu && (4 \text{ macierze}) \\ \Gamma_{\mu\nu}^T &= \sigma_{\mu\nu} && (6 \text{ macierzy})\end{aligned}$$

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a , gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$\begin{aligned}\Gamma^S &= \mathbb{I} && (1 \text{ macierz}) \\ \Gamma_\mu^V &= \gamma_\mu && (4 \text{ macierze}) \\ \Gamma_{\mu\nu}^T &= \sigma_{\mu\nu} && (6 \text{ macierzy}) \\ \Gamma_\mu^A &= \gamma_5 \gamma_\mu\end{aligned}$$

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a , gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$\begin{aligned}\Gamma^S &= \mathbb{I} && (1 \text{ macierz}) \\ \Gamma_\mu^V &= \gamma_\mu && (4 \text{ macierze}) \\ \Gamma_{\mu\nu}^T &= \sigma_{\mu\nu} && (6 \text{ macierzy}) \\ \Gamma_\mu^A &= \gamma_5 \gamma_\mu && (4 \text{ macierze})\end{aligned}$$

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a , gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$\begin{aligned}\Gamma^S &= \mathbb{I} && (1 \text{ macierz}) \\ \Gamma_\mu^V &= \gamma_\mu && (4 \text{ macierze}) \\ \Gamma_{\mu\nu}^T &= \sigma_{\mu\nu} && (6 \text{ macierzy}) \\ \Gamma_\mu^A &= \gamma_5 \gamma_\mu && (4 \text{ macierze}) \\ \Gamma_\mu^P &= \gamma_5\end{aligned}$$

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a , gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$\begin{aligned}\Gamma^S &= \mathbb{I} && (1 \text{ macierz}) \\ \Gamma_\mu^V &= \gamma_\mu && (4 \text{ macierze}) \\ \Gamma_{\mu\nu}^T &= \sigma_{\mu\nu} && (6 \text{ macierzy}) \\ \Gamma_\mu^A &= \gamma_5 \gamma_\mu && (4 \text{ macierze}) \\ \Gamma_\mu^P &= \gamma_5 && (1 \text{ macierz})\end{aligned}$$

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a , gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$\Gamma^S = \mathbb{I} \quad (1 \text{ macierz})$$

$$\Gamma_\mu^V = \gamma_\mu \quad (4 \text{ macierze})$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^T = \sigma_{\mu\nu} \quad (6 \text{ macierzy})$$

$$\Gamma_\mu^A = \gamma_5 \gamma_\mu \quad (4 \text{ macierze})$$

$$\Gamma^P = \gamma_5 \quad (1 \text{ macierz})$$

Razem :

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a , gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$\begin{array}{ll}\Gamma^S = \mathbb{I} & (1 \text{ macierz}) \\ \Gamma_\mu^V = \gamma_\mu & (4 \text{ macierze}) \\ \Gamma_{\mu\nu}^T = \sigma_{\mu\nu} & (6 \text{ macierzy}) \\ \Gamma_\mu^A = \gamma_5 \gamma_\mu & (4 \text{ macierze}) \\ \Gamma_\mu^P = \gamma_5 & (1 \text{ macierz}) \\ \text{Razem :} & 16 \text{ macierzy}\end{array}$$

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a , gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$\begin{aligned}\Gamma^S &= \mathbb{I} && (1 \text{ macierz}) \\ \Gamma_\mu^V &= \gamma_\mu && (4 \text{ macierze}) \\ \Gamma_{\mu\nu}^T &= \sigma_{\mu\nu} && (6 \text{ macierzy}) \\ \Gamma_\mu^A &= \gamma_5 \gamma_\mu && (4 \text{ macierze}) \\ \Gamma_\mu^P &= \gamma_5 && (1 \text{ macierz}) \\ \text{Razem :} &&& 16 \text{ macierzy}\end{aligned}$$

Użycie skrótów S, V, T, A, P stanie się jasne w dalszym ciągu wykładu.

Dowolną macierz 4×4 można przedstawić w bazie 16 macierzy Γ^a , gdzie $a = S, V, T, A, P$, zdefiniowanych następująco

$$\begin{aligned}\Gamma^S &= \mathbb{I} && (1 \text{ macierz}) \\ \Gamma_\mu^V &= \gamma_\mu && (4 \text{ macierze}) \\ \Gamma_{\mu\nu}^T &= \sigma_{\mu\nu} && (6 \text{ macierzy}) \\ \Gamma_\mu^A &= \gamma_5 \gamma_\mu && (4 \text{ macierze}) \\ \Gamma_\mu^P &= \gamma_5 && (1 \text{ macierz}) \\ \text{Razem :} &&& 16 \text{ macierzy}\end{aligned}$$

Użycie skrótów S, V, T, A, P stanie się jasne w dalszym ciągu wykładu.

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a , $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

① $\forall_a (\Gamma^a)^2 = \pm \mathbb{I},$

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a , $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

- 1 $\forall_a (\Gamma^a)^2 = \pm \mathbb{I},$
- 2 $\forall_{a \neq S} \exists_b \{ \Gamma^a, \Gamma^b \} = 0,$

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a , $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

- ❶ $\forall_a (\Gamma^a)^2 = \pm \mathbb{I}$,
- ❷ $\forall_{a \neq S} \exists_b \{ \Gamma^a, \Gamma^b \} = 0$,
- ❸ $\forall_{a \neq S} \text{Tr } \Gamma^a = 0$,

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a , $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

- ❶ $\forall_a (\Gamma^a)^2 = \pm \mathbb{I}$,
- ❷ $\forall_{a \neq S} \exists_b \{ \Gamma^a, \Gamma^b \} = 0$,
- ❸ $\forall_{a \neq S} \text{Tr } \Gamma^a = 0$,
- ❹ $\forall_{a \neq b} \exists_{c \neq S} \Gamma^a \Gamma^b = \alpha \Gamma^c$, gdzie $\alpha = \pm 1, \pm i$,

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a , $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

- ❶ $\forall_a (\Gamma^a)^2 = \pm \mathbb{I}$,
- ❷ $\forall_{a \neq S} \exists_b \{ \Gamma^a, \Gamma^b \} = 0$,
- ❸ $\forall_{a \neq S} \text{Tr } \Gamma^a = 0$,
- ❹ $\forall_{a \neq b} \exists_{c \neq S} \Gamma^a \Gamma^b = \alpha \Gamma^c$, gdzie $\alpha = \pm 1, \pm i$,
- ❺ Macierze Γ^a , $a = S, V, T, A, P$, są liniowo niezależne,

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a , $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

- ❶ $\forall_a (\Gamma^a)^2 = \pm \mathbb{I}$,
- ❷ $\forall_{a \neq S} \exists_b \{ \Gamma^a, \Gamma^b \} = 0$,
- ❸ $\forall_{a \neq S} \text{Tr } \Gamma^a = 0$,
- ❹ $\forall_{a \neq b} \exists_{c \neq S} \Gamma^a \Gamma^b = \alpha \Gamma^c$, gdzie $\alpha = \pm 1, \pm i$,
- ❺ Macierze Γ^a , $a = S, V, T, A, P$, są liniowo niezależne,
- ❻ Zachodzą następujące tożsamości:

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a , $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

- ❶ $\forall_a (\Gamma^a)^2 = \pm \mathbb{I}$,
- ❷ $\forall_{a \neq S} \exists_b \{ \Gamma^a, \Gamma^b \} = 0$,
- ❸ $\forall_{a \neq S} \text{Tr } \Gamma^a = 0$,
- ❹ $\forall_{a \neq b} \exists_{c \neq S} \Gamma^a \Gamma^b = \alpha \Gamma^c$, gdzie $\alpha = \pm 1, \pm i$,
- ❺ Macierze Γ^a , $a = S, V, T, A, P$, są liniowo niezależne,
- ❻ Zachodzą następujące tożsamości: $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbb{I}$,

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a , $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

- ❶ $\forall_a (\Gamma^a)^2 = \pm \mathbb{I}$,
- ❷ $\forall_{a \neq S} \exists_b \{ \Gamma^a, \Gamma^b \} = 0$,
- ❸ $\forall_{a \neq S} \text{Tr } \Gamma^a = 0$,
- ❹ $\forall_{a \neq b} \exists_{c \neq S} \Gamma^a \Gamma^b = \alpha \Gamma^c$, gdzie $\alpha = \pm 1, \pm i$,
- ❺ Macierze Γ^a , $a = S, V, T, A, P$, są liniowo niezależne,
- ❻ Zachodzą następujące tożsamości: $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbb{I}$,
 $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu$,

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a , $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

- ❶ $\forall_a (\Gamma^a)^2 = \pm \mathbb{I}$,
- ❷ $\forall_{a \neq S} \exists_b \{ \Gamma^a, \Gamma^b \} = 0$,
- ❸ $\forall_{a \neq S} \text{Tr } \Gamma^a = 0$,
- ❹ $\forall_{a \neq b} \exists_{c \neq S} \Gamma^a \Gamma^b = \alpha \Gamma^c$, gdzie $\alpha = \pm 1, \pm i$,
- ❺ Macierze Γ^a , $a = S, V, T, A, P$, są liniowo niezależne,
- ❻ Zachodzą następujące tożsamości: $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbb{I}$,
 $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu$, $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho}\mathbb{I}$,

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a , $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

- ❶ $\forall_a (\Gamma^a)^2 = \pm \mathbb{I}$,
- ❷ $\forall_{a \neq S} \exists_b \{ \Gamma^a, \Gamma^b \} = 0$,
- ❸ $\forall_{a \neq S} \text{Tr } \Gamma^a = 0$,
- ❹ $\forall_{a \neq b} \exists_{c \neq S} \Gamma^a \Gamma^b = \alpha \Gamma^c$, gdzie $\alpha = \pm 1, \pm i$,
- ❺ Macierze Γ^a , $a = S, V, T, A, P$, są liniowo niezależne,
- ❻ Zachodzą następujące tożsamości: $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbb{I}$,
 $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu$, $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} \mathbb{I}$,
 $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu$.

Zadanie. Pokazać, że macierze Γ^a , $a = S, V, T, A, P$, spełniają następujące własności.

- ❶ $\forall_a (\Gamma^a)^2 = \pm \mathbb{I}$,
- ❷ $\forall_{a \neq S} \exists_b \{ \Gamma^a, \Gamma^b \} = 0$,
- ❸ $\forall_{a \neq S} \text{Tr } \Gamma^a = 0$,
- ❹ $\forall_{a \neq b} \exists_{c \neq S} \Gamma^a \Gamma^b = \alpha \Gamma^c$, gdzie $\alpha = \pm 1, \pm i$,
- ❺ Macierze Γ^a , $a = S, V, T, A, P$, są liniowo niezależne,
- ❻ Zachodzą następujące tożsamości: $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbb{I}$,
 $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu$, $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} \mathbb{I}$,
 $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu$.

Jak transformuje się forma biliniowa postaci $\bar{\psi}(x)\Gamma^a\psi(x)$ dla $a = S, V, T, A, P$ przy transformacji Lorentza $x \rightarrow \Lambda x$?

$$\bar{\psi}'(x')\Gamma^a\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\Gamma^aS(\Lambda)\psi(x).$$

Jak transformuje się forma biliniowa postaci $\bar{\psi}(x)\Gamma^a\psi(x)$ dla $a = S, V, T, A, P$ przy transformacji Lorentza $x \rightarrow \Lambda x$?

$$\bar{\psi}'(x')\Gamma^a\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\Gamma^aS(\Lambda)\psi(x).$$

Na przykład forma

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') =$$

Jak transformuje się forma biliniowa postaci $\bar{\psi}(x)\Gamma^a\psi(x)$ dla $a = S, V, T, A, P$ przy transformacji Lorentza $x \rightarrow \Lambda x$?

$$\bar{\psi}'(x')\Gamma^a\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\Gamma^aS(\Lambda)\psi(x).$$

Na przykład forma

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) =$$

Jak transformuje się forma biliniowa postaci $\bar{\psi}(x)\Gamma^a\psi(x)$ dla $a = S, V, T, A, P$ przy transformacji Lorentza $x \rightarrow \Lambda x$?

$$\bar{\psi}'(x')\Gamma^a\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\Gamma^aS(\Lambda)\psi(x).$$

Na przykład forma

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$$

Jak transformuje się forma biliniowa postaci $\bar{\psi}(x)\Gamma^a\psi(x)$ dla $a = S, V, T, A, P$ przy transformacji Lorentza $x \rightarrow \Lambda x$?

$$\bar{\psi}'(x')\Gamma^a\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\Gamma^aS(\Lambda)\psi(x).$$

Na przykład forma

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$$

transformuje się jak **wektor**.

Jak transformuje się forma biliniowa postaci $\bar{\psi}(x)\Gamma^a\psi(x)$ dla $a = S, V, T, A, P$ przy transformacji Lorentza $x \rightarrow \Lambda x$?

$$\bar{\psi}'(x')\Gamma^a\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\Gamma^aS(\Lambda)\psi(x).$$

Na przykład forma

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$$

transformuje się jak **wektor**. Dlatego odpowiednią macierz Γ^a oznaczyliśmy symbolem V .

Jak transformuje się forma biliniowa postaci $\bar{\psi}(x)\Gamma^a\psi(x)$ dla $a = S, V, T, A, P$ przy transformacji Lorentza $x \rightarrow \Lambda x$?

$$\bar{\psi}'(x')\Gamma^a\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\Gamma^aS(\Lambda)\psi(x).$$

Na przykład forma

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$$

transformuje się jak **wektor**. Dlatego odpowiednią macierz Γ^a oznaczyliśmy symbolem V .

Zadanie. Udowodnić własności transformacyjne pozostałych form biliniowych

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x), \quad \text{skalar (S),}$$

Zadanie. Udowodnić własności transformacyjne pozostałych form biliniowych

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x')\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)\psi(x), && \text{skalar (S),} \\ \bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') &= \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x),\end{aligned}$$

Zadanie. Udowodnić własności transformacyjne pozostałych form biliniowych

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x')\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)\psi(x), && \text{skalar (S),} \\ \bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') &= \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x), && \text{tensor (T),}\end{aligned}$$

Zadanie. Udowodnić własności transformacyjne pozostałych form biliniowych

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x')\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)\psi(x), && \text{skalar (S),} \\ \bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') &= \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x), && \text{tensor (T),} \\ \bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma^\mu\psi'(x') &= \det\Lambda\Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\nu\psi(x),\end{aligned}$$

Zadanie. Udowodnić własności transformacyjne pozostałych form biliniowych

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x')\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)\psi(x), && \text{skalar (S),} \\ \bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') &= \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x), && \text{tensor (T),} \\ \bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma^\mu\psi'(x') &= \det\Lambda\Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\nu\psi(x), && \text{pseudowektor (A),}\end{aligned}$$

Zadanie. Udowodnić własności transformacyjne pozostałych form biliniowych

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x')\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)\psi(x), && \text{skalar (S),} \\ \bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') &= \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x), && \text{tensor (T),} \\ \bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma^\mu\psi'(x') &= \det\Lambda\Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\nu\psi(x), && \text{pseudowektor (A),} \\ \bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') &= \det\Lambda\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x),\end{aligned}$$

Zadanie. Udowodnić własności transformacyjne pozostałych form biliniowych

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x')\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)\psi(x), && \text{skalar } (S), \\ \bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') &= \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x), && \text{tensor } (T), \\ \bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma^\mu\psi'(x') &= \det\Lambda\Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\nu\psi(x), && \text{pseudowektor } (A), \\ \bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') &= \det\Lambda\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x), && \text{pseudoskalar } (P).\end{aligned}$$

Zadanie. Udowodnić własności transformacyjne pozostałych form biliniowych

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x')\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)\psi(x), && \text{skalar } (S), \\ \bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') &= \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x), && \text{tensor } (T), \\ \bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma^\mu\psi'(x') &= \det\Lambda\Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\nu\psi(x), && \text{pseudowektor } (A), \\ \bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') &= \det\Lambda\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x), && \text{pseudoskalar } (P).\end{aligned}$$