Równanie Diraca

Wykład 24

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

Równanie Schrödingera

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\vec{\nabla}^2\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)$$

otrzymaliśmy dokonując podstawień

$$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$$

Równanie Schrödingera

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\vec{\nabla}^2\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)$$

otrzymaliśmy dokonując podstawień

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$$

w nierelatywistycznym wzorze na całkowitą energię cząstki

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r},t).$$

Równanie Schrödingera

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\vec{\nabla}^2\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)$$

otrzymaliśmy dokonując podstawień

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$$

w nierelatywistycznym wzorze na całkowitą energię cząstki

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r},t).$$

Równanie Schrödingera opisuje ruch nierelatywistycznej cząstki bezspinowej o masie m w polu siły $\vec{F}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}V(\vec{r},t)$.

Równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\, \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t)$$

otrzymaliśmy dokonując podstawień

$$E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to -i\hbar \vec{\nabla}$$

w nierelatywistycznym wzorze na całkowitą energię cząstki

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}, t).$$

Równanie Schrödingera opisuje ruch nierelatywistycznej cząstki bezspinowej o masie m w polu siły $\vec{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}, t)$.

Równanie Schrödingera

Dla cząstki swobodnej energia kinetyczna wyraża się nierelatywistycznym wzorem

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

i równanie Schrödingera przyjmuje postać

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\vec{\nabla}^2 \psi.$$

Równanie Schrödingera

Dla cząstki swobodnej energia kinetyczna wyraża się nierelatywistycznym wzorem

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

i równanie Schrödingera przyjmuje postać

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\vec{\nabla}^2\psi.$$

Kwadrat modułu funkcji falowej $|\psi(\vec{r},t)|^2$ interpretujemy jako gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w elemencie objętości $\mathrm{d}^3r = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ wokół punktu $\vec{r}$ w chwili t.

Dla cząstki swobodnej energia kinetyczna wyraża się nierelatywistycznym wzorem

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

i równanie Schrödingera przyjmuje postać

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\, \vec{\nabla}^2 \psi.$$

Kwadrat modułu funkcji falowej $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ interpretujemy jako gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w elemencie objętości $\mathrm{d}^3 r = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ wokół punktu $\vec{r}$ w chwili t.

Prąd prawdopodobieństwa

Dla nierelatywistycznej cząstki bezspinowej zdefiniowaliśmy wektor prądu prawdopodobieństwa

$$\vec{S}(\vec{r},t) = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\psi^*\vec{\nabla}\psi - \left(\vec{\nabla}\psi^*\right)\psi\right],$$

który wraz z gęstością prawdopodobieństwa $|\psi(\vec{r},t)|^2$ spełnia następujące równanie ciągłości

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(\vec{r},t)|^2 + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}(\vec{r},t) = 0.$$

Patrz wykład 2.

Prąd prawdopodobieństwa

Dla nierelatywistycznej cząstki bezspinowej zdefiniowaliśmy wektor prądu prawdopodobieństwa

$$\vec{S}(\vec{r},t) = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\psi^*\vec{\nabla}\psi - \left(\vec{\nabla}\psi^*\right)\psi\right],$$

który wraz z gęstością prawdopodobieństwa $|\psi(\vec{r},t)|^2$ spełnia następujące równanie ciągłości

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(\vec{r},t)|^2 + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}(\vec{r},t) = 0.$$

Patrz wykład 2.

Relatywistyczne równanie falowe

Najprostszym sposobem otrzymania relatywistycznego równania falowego wydaje się być podstawienie

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$$

do relatywistycznego związku pomiędzy pędem i energią cząstki o masie m

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4,$$

gdzie c jest prędkością światła w próżni.

Najprostszym sposobem otrzymania relatywistycznego równania falowego wydaje się być podstawienie

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$$

do relatywistycznego związku pomiędzy pędem i energią cząstki o masie m

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4,$$

gdzie c jest prędkością światła w próżni.

Przypomnijmy, że związek ten jest relatywistycznie niezmienniczy, co wynika z faktu, że można go łatwo otrzymać obliczając kwadrat czterowektora energii-pędu

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right).$$

Kwadrat czterowektora jest iloczynem skalarnym czterowektora przez siebie w czasoprzestrzeni Minkowskiego, a iloczyn skalarny jest z definicji niezmiennikiem transformacji Lorentza.

Relatywistyczne równanie falowe

Przypomnijmy, że związek ten jest relatywistycznie niezmienniczy, co wynika z faktu, że można go łatwo otrzymać obliczając kwadrat czterowektora energii-pędu

$$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right).$$

Kwadrat czterowektora jest iloczynem skalarnym czterowektora przez siebie w czasoprzestrzeni Minkowskiego, a iloczyn skalarny jest z definicji niezmiennikiem transformacji Lorentza.

Obliczmy

$$p^2 = p \cdot p =$$

Relatywistyczne równanie falowe

Przypomnijmy, że związek ten jest relatywistycznie niezmienniczy, co wynika z faktu, że można go łatwo otrzymać obliczając kwadrat czterowektora energii-pędu

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right).$$

Kwadrat czterowektora jest iloczynem skalarnym czterowektora przez siebie w czasoprzestrzeni Minkowskiego, a iloczyn skalarny jest z definicji niezmiennikiem transformacji Lorentza.
Obliczmy

$$p^2 = p \cdot p = p_\mu p^\mu =$$

Relatywistyczne równanie falowe

Przypomnijmy, że związek ten jest relatywistycznie niezmienniczy, co wynika z faktu, że można go łatwo otrzymać obliczając kwadrat czterowektora energii-pędu

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right).$$

Kwadrat czterowektora jest iloczynem skalarnym czterowektora przez siebie w czasoprzestrzeni Minkowskiego, a iloczyn skalarny jest z definicji niezmiennikiem transformacji Lorentza.
Obliczmy

$$p^2 = p \cdot p = p_\mu p^\mu = \; {p^0}^2 - \vec{p}^{\,2} =$$

Relatywistyczne równanie falowe

Przypomnijmy, że związek ten jest relatywistycznie niezmienniczy, co wynika z faktu, że można go łatwo otrzymać obliczając kwadrat czterowektora energii-pędu

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right).$$

Kwadrat czterowektora jest iloczynem skalarnym czterowektora przez siebie w czasoprzestrzeni Minkowskiego, a iloczyn skalarny jest z definicji niezmiennikiem transformacji Lorentza.
Obliczmy

$$p^2 = p \cdot p = p_\mu p^\mu = \; {p^0}^2 - \vec{p}^{\,2} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2}.$$

Przypomnijmy, że związek ten jest relatywistycznie niezmienniczy, co wynika z faktu, że można go łatwo otrzymać obliczając kwadrat czterowektora energii-pędu

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right).$$

Kwadrat czterowektora jest iloczynem skalarnym czterowektora przez siebie w czasoprzestrzeni Minkowskiego, a iloczyn skalarny jest z definicji niezmiennikiem transformacji Lorentza.
Obliczmy

$$p^2 = p \cdot p = p_\mu p^\mu = \; p^{0\,2} - \vec{p}^{\,2} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2.$$

Przypomnijmy, że

$$E = \gamma m c^2, \qquad \vec{p} = \gamma m \vec{v},$$

gdzie czynnik Lorentza γ dany jest wzorem

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}.$$

Dlatego

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 =$$

Przypomnijmy, że

$$E = \gamma m c^2, \qquad \vec{p} = \gamma m \vec{v},$$

gdzie czynnik Lorentza γ dany jest wzorem

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}.$$

Dlatego

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \gamma^2 \left(m^2 c^2 - m^2 \vec{v}^2 \right) =$$

Przypomnijmy, że

$$E = \gamma m c^2, \qquad \vec{p} = \gamma m \vec{v},$$

gdzie czynnik Lorentza γ dany jest wzorem

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}.$$

Dlatego

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \gamma^2 \left(m^2 c^2 - m^2 \vec{v}^2 \right) = m^2 c^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} \right) =$$

Relatywistyczne równanie falowe

Przypomnijmy, że

$$E = \gamma m c^2, \qquad \vec{p} = \gamma m \vec{v},$$

gdzie czynnik Lorentza γ dany jest wzorem

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}.$$

Dlatego

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \gamma^2 \left(m^2 c^2 - m^2 \vec{v}^2 \right) = m^2 c^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} \right) = m^2 c^2.$$

Relatywistyczne równanie falowe

Przypomnijmy, że

$$E = \gamma m c^2, \qquad \vec{p} = \gamma m \vec{v},$$

gdzie czynnik Lorentza γ dany jest wzorem

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}.$$

Dlatego

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \gamma^2 \left(m^2 c^2 - m^2 \vec{v}^2 \right) = m^2 c^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} \right) = m^2 c^2.$$

Relatywistyczne równanie falowe

Otrzymaliśmy równanie

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2,$$

które po obustronnym pomnożeniu przez c^2 dałoby wyjściowy związek $E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$.

Podstawiając

$$E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to -i\hbar \vec{\nabla}$$

Relatywistyczne równanie falowe

Otrzymaliśmy równanie

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2,$$

które po obustronnym pomnożeniu przez c^2 dałoby wyjściowy związek $E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$.
Podstawiając

$$E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to -i\hbar \vec{\nabla}$$

otrzymamy równanie falowe

$$\left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} + \hbar^2 \vec{\nabla}^2 \right] \varphi(t, \vec{x}) = m^2 c^2 \varphi(t, \vec{x}).$$

Otrzymaliśmy równanie

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2,$$

które po obustronnym pomnożeniu przez c^2 dałoby wyjściowy związek $E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$.
Podstawiając

$$E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to -i\hbar \vec{\nabla}$$

otrzymamy równanie falowe

$$\left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} + \hbar^2 \vec{\nabla}^2 \right] \varphi(t, \vec{x}) = m^2 c^2 \varphi(t, \vec{x}).$$

Relatywistyczne równanie falowe

Dzieląc obie strony równania

$$\left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} + \hbar^2 \vec{\nabla}^2\right] \varphi(t, \vec{x}) = m^2 c^2 \varphi(t, \vec{x})$$

przez $-\hbar^2$ po uprzednim przeniesieniu $m^2 c^2 \varphi(t, \vec{x})$ na lewą stronę otrzymamy

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} - \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right] \varphi(t, \vec{x}) = 0.$$

Dzieląc obie strony równania

$$\left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} + \hbar^2 \vec{\nabla}^2\right] \varphi(t, \vec{x}) = m^2 c^2 \varphi(t, \vec{x})$$

przez $-\hbar^2$ po uprzednim przeniesieniu $m^2 c^2 \varphi(t, \vec{x})$ na lewą stronę otrzymamy

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} - \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right] \varphi(t, \vec{x}) = 0.$$

Wprowadźmy czterowektor położenia $x \equiv x^\mu = (x^0, \vec{x}) = (ct, \vec{x})$, wówczas

$$\frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} - \vec{\nabla}^2 =$$

Dzieląc obie strony równania

$$\left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} + \hbar^2 \vec{\nabla}^2\right] \varphi(t,\vec{x}) = m^2c^2\varphi(t,\vec{x})$$

przez $-\hbar^2$ po uprzednim przeniesieniu $m^2c^2\varphi(t,\vec{x})$ na lewą stronę otrzymamy

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} - \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right] \varphi(t,\vec{x}) = 0.$$

Wprowadźmy czterowektor położenia $x \equiv x^\mu = (x^0,\vec{x}) = (ct,\vec{x})$, wówczas

$$\frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} - \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial {x^0}^2} - \frac{\partial^2}{\partial {x^1}^2} - \frac{\partial^2}{\partial {x^2}^2} - \frac{\partial^2}{\partial {x^3}^2}$$

Dzieląc obie strony równania

$$\left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} + \hbar^2 \vec{\nabla}^2\right] \varphi(t,\vec{x}) = m^2 c^2 \varphi(t,\vec{x})$$

przez $-\hbar^2$ po uprzednim przeniesieniu $m^2 c^2 \varphi(t,\vec{x})$ na lewą stronę otrzymamy

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} - \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right] \varphi(t,\vec{x}) = 0.$$

Wprowadźmy czterowektor położenia $x \equiv x^\mu = (x^0, \vec{x}) = (ct, \vec{x})$, wówczas

$$\frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} - \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial\, {x^0}^2} - \frac{\partial^2}{\partial\, {x^1}^2} - \frac{\partial^2}{\partial\, {x^2}^2} - \frac{\partial^2}{\partial\, {x^3}^2} \equiv \Box,$$

Dzieląc obie strony równania

$$\left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} + \hbar^2 \vec{\nabla}^2\right] \varphi(t,\vec{x}) = m^2 c^2 \varphi(t,\vec{x})$$

przez $-\hbar^2$ po uprzednim przeniesieniu $m^2 c^2 \varphi(t,\vec{x})$ na lewą stronę otrzymamy

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} - \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right] \varphi(t,\vec{x}) = 0.$$

Wprowadźmy czterowektor położenia $x \equiv x^\mu = (x^0, \vec{x}) = (ct, \vec{x})$, wówczas

$$\frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} - \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial\, {x^0}^2} - \frac{\partial^2}{\partial\, {x^1}^2} - \frac{\partial^2}{\partial\, {x^2}^2} - \frac{\partial^2}{\partial\, {x^3}^2} \equiv \Box,$$

Relatywistyczne równanie falowe

gdzie wprowadziliśmy symbol $\Box$ dla oznaczenia operatora d'Alemberta.

Ponadto oznaczmy $\mu^2 \equiv \frac{m^2c^2}{\hbar^2}$, wówczas równanie

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} - \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\varphi(t,\vec{x}) = 0$$

przybiera prostą postać

gdzie wprowadziliśmy symbol $\Box$ dla oznaczenia operatora d'Alemberta.
Ponadto oznaczmy $\mu^2 \equiv \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}$, wówczas równanie

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} - \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \varphi(t, \vec{x}) = 0$$

przybiera prostą postać

$$\left(\Box + \mu^2 \right) \varphi(x) = 0.$$

gdzie wprowadziliśmy symbol $\Box$ dla oznaczenia operatora d'Alemberta.

Ponadto oznaczmy $\mu^2 \equiv \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}$, wówczas równanie

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} - \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right] \varphi(t, \vec{x}) = 0$$

przybiera prostą postać

$$\left(\Box + \mu^2\right) \varphi(x) = 0.$$

Jest to równanie falowe Kleina-Gordona.

gdzie wprowadziliśmy symbol $\Box$ dla oznaczenia operatora d'Alemberta.
Ponadto oznaczmy $\mu^2 \equiv \frac{m^2c^2}{\hbar^2}$, wówczas równanie

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} - \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\varphi(t,\vec{x}) = 0$$

przybiera prostą postać

$$\left(\Box + \mu^2\right)\varphi(x) = 0.$$

Jest to równanie falowe Kleina-Gordona.

Równanie Kleina-Gordona

Mimo, że równanie Kleina-Gordona jest relatywistycznie niezmiennicze, to ma ono pewne wady, które dyskwalifikują je jako równanie mogące posłużyć do kwantowomechanicznego opisu relatywistycznej cząstki, takiej jak np. elektron.
Wady te przedyskutujemy poniżej.

Mimo, że równanie Kleina-Gordona jest relatywistycznie niezmiennicze, to ma ono pewne wady, które dyskwalifikują je jako równanie mogące posłużyć do kwantowomechanicznego opisu relatywistycznej cząstki, takiej jak np. elektron.

Wady te przedyskutujemy poniżej.

Jeżeli funkcja falowa w równaniu Kleina-Gordona jest zespolona, to możemy zdefiniować czteroprąd prawdopodobieństwa

$$j^\mu(x) \equiv i\left[\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) - \partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \equiv (\rho(x), \vec{j}(x)),$$

Mimo, że równanie Kleina-Gordona jest relatywistycznie niezmiennicze, to ma ono pewne wady, które dyskwalifikują je jako równanie mogące posłużyć do kwantowomechanicznego opisu relatywistycznej cząstki, takiej jak np. elektron.
Wady te przedyskutujemy poniżej.
Jeżeli funkcja falowa w równaniu Kleina-Gordona jest zespolona, to możemy zdefiniować czteroprąd prawdopodobieństwa

$$j^\mu(x) \equiv i\left[\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) - \partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \equiv (\rho(x), \vec{j}(x)),$$

gdzie wykorzystaliśmy skrótowy zapis operatora różniczkowania

Równanie Kleina-Gordona

Mimo, że równanie Kleina-Gordona jest relatywistycznie niezmiennicze, to ma ono pewne wady, które dyskwalifikują je jako równanie mogące posłużyć do kwantowomechanicznego opisu relatywistycznej cząstki, takiej jak np. elektron.
Wady te przedyskutujemy poniżej.
Jeżeli funkcja falowa w równaniu Kleina-Gordona jest zespolona, to możemy zdefiniować czteroprąd prawdopodobieństwa

$$j^\mu(x) \equiv i\left[\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) - \partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \equiv (\rho(x), \vec{j}(x)),$$

gdzie wykorzystaliśmy skrótowy zapis operatora różniczkowania

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}.$$

Mimo, że równanie Kleina-Gordona jest relatywistycznie niezmiennicze, to ma ono pewne wady, które dyskwalifikują je jako równanie mogące posłużyć do kwantowomechanicznego opisu relatywistycznej cząstki, takiej jak np. elektron.
Wady te przedyskutujemy poniżej.
Jeżeli funkcja falowa w równaniu Kleina-Gordona jest zespolona, to możemy zdefiniować czteroprąd prawdopodobieństwa

$$j^\mu(x) \equiv i\left[\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) - \partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \equiv (\rho(x), \vec{j}(x)),$$

gdzie wykorzystaliśmy skrótowy zapis operatora różniczkowania

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}.$$

Zadanie. Pokazać, że pierwszy operator jest czterowektorem kowariantnym, a drugi czterowektorem kontrawariantnym.

Prąd $j^\mu(x)$ spełnia równanie ciągłości

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0.$$

Zadanie. Pokazać, że pierwszy operator jest czterowektorem kowariantnym, a drugi czterowektorem kontrawariantnym.
Prąd $j^{\mu}(x)$ spełnia równanie ciągłości

$$\partial_{\mu} j^{\mu}(x) = 0.$$

Aby się o tym przekonać znajdźmy najpierw równanie dla $\varphi^{*}(x)$.

Zadanie. Pokazać, że pierwszy operator jest czterowektorem kowariantnym, a drugi czterowektorem kontrawariantnym.
Prąd $j^{\mu}(x)$ spełnia równanie ciągłości

$$\partial_{\mu} j^{\mu}(x) = 0.$$

Aby się o tym przekonać znajdźmy najpierw równanie dla $\varphi^*(x)$.
W tym celu sprzęgnijmy obustronnie równanie Kleina-Gordona

$$\left(\Box + \mu^2\right) \varphi^*(x) = 0.$$

Równanie Kleina-Gordona

Zadanie. Pokazać, że pierwszy operator jest czterowektorem kowariantnym, a drugi czterowektorem kontrawariantnym.
Prąd $j^\mu(x)$ spełnia równanie ciągłości

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0.$$

Aby się o tym przekonać znajdźmy najpierw równanie dla $\varphi^*(x)$.
W tym celu sprzęgnijmy obustronnie równanie Kleina-Gordona

$$\left(\Box + \mu^2\right) \varphi^*(x) = 0.$$

Skorzystaliśmy tu z faktu, że zarówno operator d'Alemberta $\Box$ jak i parametr μ^2 są rzeczywiste.

Równanie Kleina-Gordona

Zadanie. Pokazać, że pierwszy operator jest czterowektorem kowariantnym, a drugi czterowektorem kontrawariantnym.
Prąd $j^\mu(x)$ spełnia równanie ciągłości

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0.$$

Aby się o tym przekonać znajdźmy najpierw równanie dla $\varphi^*(x)$.
W tym celu sprzęgnijmy obustronnie równanie Kleina-Gordona

$$\left(\Box + \mu^2\right) \varphi^*(x) = 0.$$

Skorzystaliśmy tu z faktu, że zarówno operator d'Alemberta $\Box$ jak i parametr μ^2 są rzeczywiste.

Równanie Kleina-Gordona

Podziałajmy operatorem ∂_μ na prąd $j^\mu(x)$

$$\partial_\mu j^\mu(x) = i\partial_\mu \left[\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) - \partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right]$$

Podziałajmy operatorem ∂_μ na prąd $j^\mu(x)$

$$\partial_\mu j^\mu(x) = i\partial_\mu \left[\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) - \partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right]$$
$$=$$

Podziałajmy operatorem ∂_μ na prąd $j^\mu(x)$

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu j^\mu(x) &= i\partial_\mu \left[\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) - \partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\partial_\mu\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) + \varphi^*(x)\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x)\right.
\end{aligned}
$$

Podziałajmy operatorem ∂_μ na prąd $j^\mu(x)$

$$\begin{aligned}\partial_\mu j^\mu(x) &= i\partial_\mu \left[\varphi^*(x)\partial^\mu \varphi(x) - \partial^\mu \left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\ &= i\left[\partial_\mu \varphi^*(x)\partial^\mu \varphi(x) + \varphi^*(x)\partial_\mu \partial^\mu \varphi(x)\right. \\ &\qquad \left. - \partial_\mu \partial^\mu \left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x) - \partial^\mu \varphi^*(x)\partial_\mu \varphi(x)\right]\end{aligned}$$

Równanie Kleina-Gordona

Podziałajmy operatorem ∂_μ na prąd $j^\mu(x)$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu j^\mu(x) &= i\partial_\mu \left[\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) - \partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\partial_\mu\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) + \varphi^*(x)\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x)\right. \\
&\qquad \left. -\partial_\mu\partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x) - \partial^\mu\varphi^*(x)\partial_\mu\varphi(x)\right] \\
&=
\end{aligned}$$

Równanie Kleina-Gordona

Podziałajmy operatorem ∂_μ na prąd $j^\mu(x)$

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu(x) &= i\partial_\mu \left[\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) - \partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\ &= i\left[\partial_\mu\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) + \varphi^*(x)\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x)\right. \\ &\qquad \left.-\partial_\mu\partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x) - \partial^\mu\varphi^*(x)\partial_\mu\varphi(x)\right] \\ &= i\left[\varphi^*(x)\Box\varphi(x) - \Box\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \end{aligned}$$

Podziałajmy operatorem ∂_μ na prąd $j^\mu(x)$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu j^\mu(x) &= i\partial_\mu \left[\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) - \partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\partial_\mu\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) + \varphi^*(x)\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x)\right. \\
&\qquad \left. -\partial_\mu\partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x) - \partial^\mu\varphi^*(x)\partial_\mu\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\varphi^*(x)\Box\varphi(x) - \Box\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&=
\end{aligned}$$

Równanie Kleina-Gordona

Podziałajmy operatorem ∂_μ na prąd $j^\mu(x)$

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu j^\mu(x) &= i\partial_\mu \left[\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) - \partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\partial_\mu\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) + \varphi^*(x)\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x)\right. \\
&\qquad \left. -\partial_\mu\partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x) - \partial^\mu\varphi^*(x)\partial_\mu\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\varphi^*(x)\Box\varphi(x) - \Box\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\varphi^*(x)(-\mu^2)\varphi(x) + \mu^2\varphi^*(x)\varphi(x)\right]
\end{aligned}
$$

Równanie Kleina-Gordona

Podziałajmy operatorem ∂_μ na prąd $j^\mu(x)$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu j^\mu(x) &= i\partial_\mu \left[\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) - \partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\partial_\mu\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) + \varphi^*(x)\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x)\right. \\
&\qquad \left. -\partial_\mu\partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x) - \partial^\mu\varphi^*(x)\partial_\mu\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\varphi^*(x)\Box\varphi(x) - \Box\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\varphi^*(x)(-\mu^2)\varphi(x) + \mu^2\varphi^*(x)\varphi(x)\right] = 0,
\end{aligned}$$

Równanie Kleina-Gordona

Podziałajmy operatorem ∂_μ na prąd $j^\mu(x)$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu j^\mu(x) &= i\partial_\mu \left[\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) - \partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\partial_\mu\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) + \varphi^*(x)\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x)\right. \\
&\qquad \left. -\partial_\mu\partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x) - \partial^\mu\varphi^*(x)\partial_\mu\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\varphi^*(x)\Box\varphi(x) - \Box\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\varphi^*(x)(-\mu^2)\varphi(x) + \mu^2\varphi^*(x)\varphi(x)\right] = 0,
\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równań

$$\left(\Box + \mu^2\right)\varphi(x) = 0$$

Równanie Kleina-Gordona

Podziałajmy operatorem ∂_μ na prąd $j^\mu(x)$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu j^\mu(x) &= i\partial_\mu \left[\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) - \partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\partial_\mu\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) + \varphi^*(x)\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x)\right. \\
&\qquad \left. -\partial_\mu\partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x) - \partial^\mu\varphi^*(x)\partial_\mu\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\varphi^*(x)\Box\varphi(x) - \Box\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\varphi^*(x)(-\mu^2)\varphi(x) + \mu^2\varphi^*(x)\varphi(x)\right] = 0,
\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równań

$$\left(\Box + \mu^2\right)\varphi(x) = 0 \qquad \Rightarrow$$

Równanie Kleina-Gordona

Podziałajmy operatorem ∂_μ na prąd $j^\mu(x)$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu j^\mu(x) &= i\partial_\mu \left[\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) - \partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\partial_\mu\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) + \varphi^*(x)\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x)\right. \\
&\qquad \left. -\partial_\mu\partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x) - \partial^\mu\varphi^*(x)\partial_\mu\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\varphi^*(x)\Box\varphi(x) - \Box\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\varphi^*(x)(-\mu^2)\varphi(x) + \mu^2\varphi^*(x)\varphi(x)\right] = 0,
\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równań

$$\left(\Box + \mu^2\right)\varphi(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Box\varphi(x) = -\mu^2\varphi(x),$$

Równanie Kleina-Gordona

Podziałajmy operatorem ∂_μ na prąd $j^\mu(x)$

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu j^\mu(x) &= i\partial_\mu \left[\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) - \partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\partial_\mu\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) + \varphi^*(x)\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x)\right. \\
&\qquad \left. -\partial_\mu\partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x) - \partial^\mu\varphi^*(x)\partial_\mu\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\varphi^*(x)\Box\varphi(x) - \Box\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\varphi^*(x)(-\mu^2)\varphi(x) + \mu^2\varphi^*(x)\varphi(x)\right] = 0,
\end{aligned}
$$

gdzie skorzystaliśmy z równań

$$
\left(\Box + \mu^2\right)\varphi(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Box\varphi(x) = -\mu^2\varphi(x),
$$

$$
\left(\Box + \mu^2\right)\varphi^*(x) = 0
$$

Równanie Kleina-Gordona

Podziałajmy operatorem ∂_μ na prąd $j^\mu(x)$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu j^\mu(x) &= i\partial_\mu \left[\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) - \partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\partial_\mu\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) + \varphi^*(x)\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x)\right. \\
&\qquad \left.-\partial_\mu\partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x) - \partial^\mu\varphi^*(x)\partial_\mu\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\varphi^*(x)\Box\varphi(x) - \Box\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\varphi^*(x)(-\mu^2)\varphi(x) + \mu^2\varphi^*(x)\varphi(x)\right] = 0,
\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równań

$$\left(\Box + \mu^2\right)\varphi(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Box\varphi(x) = -\mu^2\varphi(x),$$

$$\left(\Box + \mu^2\right)\varphi^*(x) = 0 \qquad \Rightarrow$$

Podziałajmy operatorem ∂_μ na prąd $j^\mu(x)$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu j^\mu(x) &= i\partial_\mu \left[\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) - \partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\partial_\mu\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) + \varphi^*(x)\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x)\right. \\
&\qquad \left. -\partial_\mu\partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x) - \partial^\mu\varphi^*(x)\partial_\mu\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\varphi^*(x)\Box\varphi(x) - \Box\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\varphi^*(x)(-\mu^2)\varphi(x) + \mu^2\varphi^*(x)\varphi(x)\right] = 0,
\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równań

$$\left(\Box + \mu^2\right)\varphi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Box\varphi(x) = -\mu^2\varphi(x),$$
$$\left(\Box + \mu^2\right)\varphi^*(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Box\varphi^*(x) = -\mu^2\varphi^*(x).$$

Równanie Kleina-Gordona

Podziałajmy operatorem ∂_μ na prąd $j^\mu(x)$

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu j^\mu(x) &= i\partial_\mu \left[\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) - \partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\partial_\mu\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) + \varphi^*(x)\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x)\right. \\
&\qquad \left. -\partial_\mu\partial^\mu\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x) - \partial^\mu\varphi^*(x)\partial_\mu\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\varphi^*(x)\Box\varphi(x) - \Box\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right] \\
&= i\left[\varphi^*(x)(-\mu^2)\varphi(x) + \mu^2\varphi^*(x)\varphi(x)\right] = 0,
\end{aligned}
$$

gdzie skorzystaliśmy z równań

$$
\begin{aligned}
\left(\Box + \mu^2\right)\varphi(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \Box\varphi(x) = -\mu^2\varphi(x), \\
\left(\Box + \mu^2\right)\varphi^*(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \Box\varphi^*(x) = -\mu^2\varphi^*(x).
\end{aligned}
$$

Zerową składową $j^0(x) = \rho(x)$ prądu $j^\mu(x)$ chcielibyśmy zinterpretować, jako gęstość prawdopodbieństwa znalezienia cząstki w elemencie objętości d^3x w czasie t.
Niestety,

$$\rho(x) = i\left[\varphi^*(x)\partial^0\varphi(x) - \partial^0\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right]$$

nie jest wielkością dodatnio określoną, co w praktyce wyklucza probabilistyczną interpretację funkcji falowej $\varphi(x)$.

Równanie Kleina-Gordona

Zerową składową $j^0(x) = \rho(x)$ prądu $j^\mu(x)$ chcielibyśmy zinterpretować, jako gęstość prawdopodbieństwa znalezienia cząstki w elemencie objętości d^3x w czasie t.
Niestety,

$$\rho(x) = i\left[\varphi^*(x)\partial^0\varphi(x) - \partial^0\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right]$$

nie jest wielkością dodatnio określoną, co w praktyce wyklucza probabilistyczną interpretację funkcji falowej $\varphi(x)$.
Ponadto, jeśli funkcja falowa $\varphi(x)$ w równaniu Kleina-Gordona jest rzeczywista, to prąd $j^\mu(x)$ jest tożsamościowo równy 0.

Zerową składową $j^0(x) = \rho(x)$ prądu $j^\mu(x)$ chcielibyśmy zinterpretować, jako gęstość prawdopodbieństwa znalezienia cząstki w elemencie objętości d^3x w czasie t.
Niestety,

$$\rho(x) = i\left[\varphi^*(x)\partial^0\varphi(x) - \partial^0\left(\varphi^*(x)\right)\varphi(x)\right]$$

nie jest wielkością dodatnio określoną, co w praktyce wyklucza probabilistyczną interpretację funkcji falowej $\varphi(x)$.
Ponadto, jeśli funkcja falowa $\varphi(x)$ w równaniu Kleina-Gordona jest rzeczywista, to prąd $j^\mu(x)$ jest tożsamościowo równy 0.

Przyjęcie interpretacji, że $|\varphi(x)|^2$ jest gęstością prawdopodbieństwa znalezienia cząstki w elemencie objętości d^3x w czasie t prowadziłoby do niezachowania w czasie całki normalizacyjnej

$$\int |\varphi(t,\vec{x})|^2 \, \mathrm{d}^3x = 1.$$

Kolejnym problemem jest występowanie drugiej pochodnej czasowej w równaniu Kleina-Gordona, gdyż chcielibyśmy, żeby relatywistyczne równanie kwantowe miało postać analogiczną do równania Schrödingera

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = H\psi(x).$$

Przyjęcie interpretacji, że $|\varphi(x)|^2$ jest gęstością prawdopodbieństwa znalezienia cząstki w elemencie objętości d^3x w czasie t prowadziłoby do niezachowania w czasie całki normalizacyjnej

$$\int |\varphi(t, \vec{x})|^2 \, \mathrm{d}^3x = 1.$$

Kolejnym problemem jest występowanie drugiej pochodnej czasowej w równaniu Kleina-Gordona, gdyż chcielibyśmy, żeby relatywistyczne równanie kwantowe miało postać analogiczną do równania Schrödingera

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = H\psi(x).$$

Równanie Kleina-Gordona

Gdybyśmy spierwiastkowali wzór $E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$, to otrzymalibyśmy relatywistyczny wzór na energię cząstki

$$E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

Chcemy aby energia cząstki była dodatnia, więc wybieramy dodatni pierwiastek.

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

Równanie Kleina-Gordona

Gdybyśmy spierwiastkowali wzór $E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$, to otrzymalibyśmy relatywistyczny wzór na energię cząstki

$$E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

Chcemy aby energia cząstki była dodatnia, więc wybieramy dodatni pierwiastek.

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

Dokonując w tym wzorze podstawień

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$$

otrzymalibyśmy po prawej stronie równania operator całkowy.

Równanie Kleina-Gordona

Gdybyśmy spierwiastkowali wzór $E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$, to otrzymalibyśmy relatywistyczny wzór na energię cząstki

$$E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

Chcemy aby energia cząstki była dodatnia, więc wybieramy dodatni pierwiastek.

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

Dokonując w tym wzorze podstawień

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$$

otrzymalibyśmy po prawej stronie równania operator całkowy.

Aby się o tym przekonać dokonajmy transformaty Fouriera funkcji falowej

$$\psi(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \mathrm{d}^3 k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\psi}(t,\vec{k}).$$

Wtedy

$$-i\hbar\vec{\nabla}\psi(t,\vec{x}) \quad =$$

Równanie Kleina-Gordona

Aby się o tym przekonać dokonajmy transformaty Fouriera funkcji falowej

$$\psi(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \mathrm{d}^3 k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\psi}(t, \vec{k}).$$

Wtedy

$$-i\hbar\vec{\nabla}\psi(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \mathrm{d}^3 k (-i\hbar\vec{\nabla}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\psi}(t, \vec{k})$$

Aby się o tym przekonać dokonajmy transformaty Fouriera funkcji falowej

$$\psi(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \mathrm{d}^3 k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\psi}(t,\vec{k}).$$

Wtedy

$$-i\hbar\vec{\nabla}\psi(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \mathrm{d}^3 k (-i\hbar\vec{\nabla}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\psi}(t,\vec{k})$$

$$=$$

Równanie Kleina-Gordona

Aby się o tym przekonać dokonajmy transformaty Fouriera funkcji falowej

$$\psi(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \mathrm{d}^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\psi}(t,\vec{k}).$$

Wtedy

$$\begin{aligned} -i\hbar\vec{\nabla}\psi(t,\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \mathrm{d}^3k (-i\hbar\vec{\nabla}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\psi}(t,\vec{k}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \mathrm{d}^3k\, \hbar\vec{k}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\psi}(t,\vec{k}). \end{aligned}$$

Aby się o tym przekonać dokonajmy transformaty Fouriera funkcji falowej

$$\psi(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \mathrm{d}^3 k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\tilde{\psi}(t,\vec{k}).$$

Wtedy

$$\begin{aligned} -i\hbar\vec{\nabla}\psi(t,\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \mathrm{d}^3 k(-i\hbar\vec{\nabla})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\tilde{\psi}(t,\vec{k}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \mathrm{d}^3 k\ \hbar\vec{k}\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\tilde{\psi}(t,\vec{k}). \end{aligned}$$

Zadanie. Pokazać, że

$$\vec{\nabla}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = i\vec{k}\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}.$$

Równanie Kleina-Gordona

Aby się o tym przekonać dokonajmy transformaty Fouriera funkcji falowej

$$\psi(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \mathrm{d}^3 k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\psi}(t,\vec{k}).$$

Wtedy

$$\begin{aligned} -i\hbar\vec{\nabla}\psi(t,\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \mathrm{d}^3 k (-i\hbar\vec{\nabla}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\psi}(t,\vec{k}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \mathrm{d}^3 k \; \hbar\vec{k} \; e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\psi}(t,\vec{k}). \end{aligned}$$

Zadanie. Pokazać, że

$$\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = i\vec{k} \; e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}.$$

Równanie Kleina-Gordona

Obliczmy teraz

$$\sqrt{-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4}\,\psi(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \mathrm{d}^3 k \sqrt{\hbar^2 c^2 \vec{k}^2 + m^2 c^4}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, \tilde{\psi}(t,\vec{k}).$$

Obliczmy teraz

$$\sqrt{-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4}\psi(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \mathrm{d}^3k \sqrt{\hbar^2 c^2 \vec{k}^2 + m^2 c^4} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\tilde{\psi}(t,\vec{k}).$$

Aby po prawej stronie wystąpiła funkcja falowa $\psi(t,\vec{x})$ musimy wykonać odwrotną transformatę Fouriera

$$\sqrt{-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4}\psi(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3x' \int \mathrm{d}^3k \sqrt{\hbar^2 c^2 \vec{k}^2 + m^2 c^4} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\psi(t,\vec{x}').$$

Równanie Kleina-Gordona

Obliczmy teraz

$$\sqrt{-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4}\,\psi(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \mathrm{d}^3k \sqrt{\hbar^2 c^2 \vec{k}^2 + m^2 c^4}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\tilde{\psi}(t,\vec{k}).$$

Aby po prawej stronie wystąpiła funkcja falowa $\psi(t,\vec{x})$ musimy wykonać odwrotną transformatę Fouriera

$$\sqrt{-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4}\,\psi(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3x' \int \mathrm{d}^3k \sqrt{\hbar^2 c^2 \vec{k}^2 + m^2 c^4}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\psi(t,\vec{x}').$$

Widzimy, że operator po lewej stronie równania jest operatorem całkowym.

Obliczmy teraz

$$\sqrt{-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4}\,\psi(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \mathrm{d}^3k \sqrt{\hbar^2 c^2 \vec{k}^2 + m^2 c^4}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\,\tilde{\psi}(t,\vec{k}).$$

Aby po prawej stronie wystąpiła funkcja falowa $\psi(t,\vec{x})$ musimy wykonać odwrotną transformatę Fouriera

$$\begin{aligned}\sqrt{-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4}\,\psi(t,\vec{x}) \;&=\; \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3x' \int \mathrm{d}^3k \\ &\quad \sqrt{\hbar^2 c^2 \vec{k}^2 + m^2 c^4}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\,\psi(t,\vec{x}').\end{aligned}$$

Widzimy, że operator po lewej stronie równania jest operatorem całkowym. Nie jest on również operatorem liniowym.

Obliczmy teraz

$$\sqrt{-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4}\,\psi(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \mathrm{d}^3 k \sqrt{\hbar^2 c^2 \vec{k}^2 + m^2 c^4}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\psi}(t,\vec{k}).$$

Aby po prawej stronie wystąpiła funkcja falowa $\psi(t,\vec{x})$ musimy wykonać odwrotną transformatę Fouriera

$$\begin{aligned}\sqrt{-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4}\,\psi(t,\vec{x}) \quad = \quad & \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3 x' \int \mathrm{d}^3 k \\ & \sqrt{\hbar^2 c^2 \vec{k}^2 + m^2 c^4}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \psi(t,\vec{x}').\end{aligned}$$

Widzimy, że operator po lewej stronie równania jest operatorem całkowym. Nie jest on również operatorem liniowym.

Równanie Diraca

Załóżmy, że hamiltonian w relatywistycznym równaniu

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = H\psi(x)$$

wyraża się wzorem

$$H = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m$$

i zażądajmy aby

$$H^2 = \vec{p}^2 + m^2.$$

Równanie Diraca

Załóżmy, że hamiltonian w relatywistycznym równaniu

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = H\psi(x)$$

wyraża się wzorem

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$$

i zażądajmy aby

$$H^2 = \vec{p}^2 + m^2.$$

Przyjęliśmy tu tzw. naturalny układ jednostek, w którym

$$\hbar = 1 \qquad \mathrm{i} \qquad c = 1.$$

Załóżmy, że hamiltonian w relatywistycznym równaniu

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = H\psi(x)$$

wyraża się wzorem

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$$

i zażądajmy aby

$$H^2 = \vec{p}^2 + m^2.$$

Przyjęliśmy tu tzw. naturalny układ jednostek, w którym

$$\hbar = 1 \qquad \text{i} \qquad c = 1.$$

Równanie Diraca

Obliczmy

$$\begin{aligned} H^2 &= (\alpha_i p_i + \beta m)(\alpha_j p_j + \beta m) \\ &= \end{aligned}$$

Obliczmy

$$
\begin{aligned}
H^2 &= (\alpha_i p_i + \beta m)(\alpha_j p_j + \beta m) \\
&= \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \alpha_i p_i \beta m + \beta m \alpha_j p_j + \beta^2 m^2
\end{aligned}
$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} H^2 &= (\alpha_i p_i + \beta m)(\alpha_j p_j + \beta m) \\ &= \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \alpha_i p_i \beta m + \beta m \alpha_j p_j + \beta^2 m^2 \\ &= \end{aligned}$$

Obliczmy

$$
\begin{aligned}
H^2 &= (\alpha_i p_i + \beta m)(\alpha_j p_j + \beta m) \\
&= \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \alpha_i p_i \beta m + \beta m \alpha_j p_j + \beta^2 m^2 \\
&= \frac{1}{2}\alpha_i \alpha_j p_i p_j + \frac{1}{2}\alpha_j \alpha_i p_j p_i + \alpha_i \beta m p_i + \beta \alpha_i m p_i + \beta^2 m^2
\end{aligned}
$$

Obliczmy

$$
\begin{aligned}
H^2 &= (\alpha_i p_i + \beta m)(\alpha_j p_j + \beta m) \\
&= \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \alpha_i p_i \beta m + \beta m \alpha_j p_j + \beta^2 m^2 \\
&= \frac{1}{2}\alpha_i \alpha_j p_i p_j + \frac{1}{2}\alpha_j \alpha_i p_j p_i + \alpha_i \beta m p_i + \beta \alpha_i m p_i + \beta^2 m^2 \\
&=
\end{aligned}
$$

Równanie Diraca

Obliczmy

$$\begin{aligned} H^2 &= (\alpha_i p_i + \beta m)(\alpha_j p_j + \beta m) \\ &= \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \alpha_i p_i \beta m + \beta m \alpha_j p_j + \beta^2 m^2 \\ &= \frac{1}{2}\alpha_i \alpha_j p_i p_j + \frac{1}{2}\alpha_j \alpha_i p_j p_i + \alpha_i \beta m p_i + \beta \alpha_i m p_i + \beta^2 m^2 \\ &= \frac{1}{2}(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j + (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) m p_i + \beta^2 m^2 . \end{aligned}$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} H^2 &= (\alpha_i p_i + \beta m)(\alpha_j p_j + \beta m) \\ &= \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \alpha_i p_i \beta m + \beta m \alpha_j p_j + \beta^2 m^2 \\ &= \frac{1}{2}\alpha_i \alpha_j p_i p_j + \frac{1}{2}\alpha_j \alpha_i p_j p_i + \alpha_i \beta m p_i + \beta \alpha_i m p_i + \beta^2 m^2 \\ &= \frac{1}{2}(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j + (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) m p_i + \beta^2 m^2. \end{aligned}$$

Dokonaliśmy tu symetryzacji współczynnika przy $p_i p_j$, aby uniknąć ewentualnych kasowań pomiędzy współczynnikami przy $p_i p_j$ i $p_j p_i$.

Obliczmy

$$
\begin{aligned}
H^2 &= (\alpha_i p_i + \beta m)(\alpha_j p_j + \beta m) \\
&= \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \alpha_i p_i \beta m + \beta m \alpha_j p_j + \beta^2 m^2 \\
&= \frac{1}{2}\alpha_i \alpha_j p_i p_j + \frac{1}{2}\alpha_j \alpha_i p_j p_i + \alpha_i \beta m p_i + \beta \alpha_i m p_i + \beta^2 m^2 \\
&= \frac{1}{2}(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j + (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) m p_i + \beta^2 m^2 .
\end{aligned}
$$

Dokonaliśmy tu symetryzacji współczynnika przy $p_i p_j$, aby uniknąć ewentualnych kasowań pomiędzy współczynnikami przy $p_i p_j$ i $p_j p_i$.

Z drugiej strony chcemy, aby

$$H^2 = p_i p_i + m^2 = \delta_{ij} p_i p_j + m^2,$$

Z drugiej strony chcemy, aby

$$H^2 = p_i p_i + m^2 = \delta_{ij} p_i p_j + m^2,$$

gdzie współczynnik przy $p_i p_j$ jest już symetryczny.

Z drugiej strony chcemy, aby

$$H^2 = p_i p_i + m^2 = \delta_{ij} p_i p_j + m^2,$$

gdzie współczynnik przy $p_i p_j$ jest już symetryczny.
Porównajmy oba wzory na H^2.

$$\frac{1}{2}(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j + (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) m p_i + \beta^2 m^2 = \delta_{ij} p_i p_j + m^2.$$

Z drugiej strony chcemy, aby

$$H^2 = p_i p_i + m^2 = \delta_{ij} p_i p_j + m^2,$$

gdzie współczynnik przy $p_i p_j$ jest już symetryczny.
Porównajmy oba wzory na H^2.

$$\frac{1}{2}(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i)p_i p_j + (\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)m p_i + \beta^2 m^2 = \delta_{ij} p_i p_j + m^2.$$

Widzimy, że muszą zachodzić następujące związki

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Z drugiej strony chcemy, aby

$$H^2 = p_i p_i + m^2 = \delta_{ij} p_i p_j + m^2,$$

gdzie współczynnik przy $p_i p_j$ jest już symetryczny.
Porównajmy oba wzory na H^2.

$$\frac{1}{2}(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j + (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) m p_i + \beta^2 m^2 = \delta_{ij} p_i p_j + m^2.$$

Widzimy, że muszą zachodzić następujące związki

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Jest oczywiste, że α_i, $i = 1, 2, 3$, i β muszą być macierzami, przy czym $\mathbb{I}$ musi być macierzą jednostkową.

Z drugiej strony chcemy, aby

$$H^2 = p_i p_i + m^2 = \delta_{ij} p_i p_j + m^2,$$

gdzie współczynnik przy $p_i p_j$ jest już symetryczny.
Porównajmy oba wzory na H^2.

$$\frac{1}{2}(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j + (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) m p_i + \beta^2 m^2 = \delta_{ij} p_i p_j + m^2.$$

Widzimy, że muszą zachodzić następujące związki

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} \mathbb{I}, \qquad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Jest oczywiste, że α_i, $i = 1, 2, 3$, i β muszą być macierzami, przy czym $\mathbb{I}$ musi być macierzą jednostkową.

Równanie Diraca

Aby hamiltonian $H = \alpha_i p_i + \beta m$ był hermitowski, macierze α_i i β muszą być hermitowskie

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3, \qquad \beta^\dagger = \beta,$$

a więc są macierzami kwadratowymi.

Aby hamiltonian $H = \alpha_i p_i + \beta m$ był hermitowski, macierze α_i i β muszą być hermitowskie

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3, \qquad \beta^\dagger = \beta,$$

a więc są macierzami kwadratowymi.
Jaki jest wymiar tych macierzy?

Aby hamiltonian $H = \alpha_i p_i + \beta m$ był hermitowski, macierze α_i i β muszą być hermitowskie

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3, \qquad \beta^\dagger = \beta,$$

a więc są macierzami kwadratowymi.
Jaki jest wymiar tych macierzy?
Załóżmy, że $i \neq j$, wtedy

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I} = 0$$

Aby hamiltonian $H = \alpha_i p_i + \beta m$ był hermitowski, macierze α_i i β muszą być hermitowskie

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3, \qquad \beta^\dagger = \beta,$$

a więc są macierzami kwadratowymi.
Jaki jest wymiar tych macierzy?
Załóżmy, że $i \neq j$, wtedy

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i \alpha_j = -\alpha_j \alpha_i.$$

Aby hamiltonian $H = \alpha_i p_i + \beta m$ był hermitowski, macierze α_i i β muszą być hermitowskie

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3, \qquad \beta^\dagger = \beta,$$

a więc są macierzami kwadratowymi.
Jaki jest wymiar tych macierzy?
Załóżmy, że $i \neq j$, wtedy

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i \alpha_j = -\alpha_j \alpha_i.$$

Obliczmy wyznacznik

$$\det(\alpha_i \alpha_j) = \det(-\alpha_j \alpha_i)$$

Aby hamiltonian $H = \alpha_i p_i + \beta m$ był hermitowski, macierze α_i i β muszą być hermitowskie

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3, \qquad \beta^\dagger = \beta,$$

a więc są macierzami kwadratowymi.
Jaki jest wymiar tych macierzy?
Załóżmy, że $i \neq j$, wtedy

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i \alpha_j = -\alpha_j \alpha_i .$$

Obliczmy wyznacznik

$$\det(\alpha_i \alpha_j) = \det(-\alpha_j \alpha_i) = (-1)^d \det(\alpha_i \alpha_j),$$

Równanie Diraca

Aby hamiltonian $H = \alpha_i p_i + \beta m$ był hermitowski, macierze α_i i β muszą być hermitowskie

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3, \qquad \beta^\dagger = \beta,$$

a więc są macierzami kwadratowymi.
Jaki jest wymiar tych macierzy?
Załóżmy, że $i \neq j$, wtedy

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i \alpha_j = -\alpha_j \alpha_i.$$

Obliczmy wyznacznik

$$\det(\alpha_i \alpha_j) = \det(-\alpha_j \alpha_i) = (-1)^d \det(\alpha_i \alpha_j),$$

gdzie $d \times d$ jest wymiarem macierzy α_i.

Aby hamiltonian $H = \alpha_i p_i + \beta m$ był hermitowski, macierze α_i i β muszą być hermitowskie

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3, \qquad \beta^\dagger = \beta,$$

a więc są macierzami kwadratowymi.
Jaki jest wymiar tych macierzy?
Załóżmy, że $i \neq j$, wtedy

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i \alpha_j = -\alpha_j \alpha_i.$$

Obliczmy wyznacznik

$$\det(\alpha_i \alpha_j) = \det(-\alpha_j \alpha_i) = (-1)^d \det(\alpha_i \alpha_j),$$

gdzie $d \times d$ jest wymiarem macierzy α_i.

Widzimy, że dla macierzy α_i d musi być liczbą parzystą. To samo dotyczy macierzy β.

Widzimy, że dla macierzy α_i d musi być liczbą parzystą. To samo dotyczy macierzy β.

Najmniejszą nietrywialną wartością jest $d = 2$.

Widzimy, że dla macierzy α_i d musi być liczbą parzystą. To samo dotyczy macierzy β.

Najmniejszą nietrywialną wartością jest $d = 2$.

Macierzami hermitowskimi 2×2 spełniającymi związki analogiczne do

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Widzimy, że dla macierzy α_i d musi być liczbą parzystą. To samo dotyczy macierzy β.
Najmniejszą nietrywialną wartością jest $d = 2$.
Macierzami hermitowskimi 2×2 spełniającymi związki analogiczne do

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

są macierze Pauliego

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Widzimy, że dla macierzy α_i d musi być liczbą parzystą. To samo dotyczy macierzy β.
Najmniejszą nietrywialną wartością jest $d = 2$.
Macierzami hermitowskimi 2×2 spełniającymi związki analogiczne do

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

są macierze Pauliego

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dla których $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, 3.$

Widzimy, że dla macierzy α_i d musi być liczbą parzystą. To samo dotyczy macierzy β.
Najmniejszą nietrywialną wartością jest $d = 2$.
Macierzami hermitowskimi 2×2 spełniającymi związki analogiczne do

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

są macierze Pauliego

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dla których $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, 3.$

Niestety, brakuje czwartej macierzy.

W takim razie wybierzmy $d = 4$.

Niestety, brakuje czwartej macierzy.

W takim razie wybierzmy $d = 4$.

Zanim podamy jawną postać macierzy α_i i β, spełniających żądane związki, zdefiniujmy nowe macierze γ^μ, $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\gamma^0 \equiv \beta, \qquad \gamma^i \equiv \beta\alpha_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Niestety, brakuje czwartej macierzy.
W takim razie wybierzmy $d = 4$.
Zanim podamy jawną postać macierzy α_i i β, spełniających żądane związki, zdefiniujmy nowe macierze γ^μ, $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\gamma^0 \equiv \beta, \qquad \gamma^i \equiv \beta\alpha_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Pomnóżmy równanie ($\hbar = c = 1$)

$$i\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = (\alpha_i p_i + \beta m)\psi(x)$$

lewostronnie przez β i wstawmy $p_i = -i\partial_i$, wtedy dostaniemy

Niestety, brakuje czwartej macierzy.

W takim razie wybierzmy $d = 4$.

Zanim podamy jawną postać macierzy α_i i β, spełniających żądane związki, zdefiniujmy nowe macierze γ^μ, $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\gamma^0 \equiv \beta, \qquad \gamma^i \equiv \beta\alpha_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Pomnóżmy równanie ($\hbar = c = 1$)

$$i\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = (\alpha_i p_i + \beta m)\psi(x)$$

lewostronnie przez β i wstawmy $p_i = -i\partial_i$, wtedy dostaniemy

$$i\beta\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = \left(\beta\alpha_i(-i\partial_i) + \beta^2 m\right)\psi(x).$$

Niestety, brakuje czwartej macierzy.
W takim razie wybierzmy $d = 4$.
Zanim podamy jawną postać macierzy α_i i β, spełniających żądane związki, zdefiniujmy nowe macierze $\gamma^\mu, \quad i = 0, 1, 2, 3$:

$$\gamma^0 \equiv \beta, \qquad \gamma^i \equiv \beta\alpha_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Pomnóżmy równanie ($\hbar = c = 1$)

$$i\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = (\alpha_i p_i + \beta m)\psi(x)$$

lewostronnie przez β i wstawmy $p_i = -i\partial_i$, wtedy dostaniemy

$$i\beta\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = \left(\beta\alpha_i(-i\partial_i) + \beta^2 m\right)\psi(x).$$

$$i\beta\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = \Big(\beta\alpha_i(-i\partial_i) + \beta^2 m\Big)\,\psi(x).$$

Skorzystajmy z warunku $\beta^2 = \mathbb{I}$, wstawmy definicje macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$, i przenieśmy wszystko na lewą stronę równania

$$i\beta\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = \left(\beta\alpha_i(-i\partial_i) + \beta^2 m\right)\psi(x).$$

Skorzystajmy z warunku $\beta^2 = \mathbb{I}$, wstawmy definicje macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$, i przenieśmy wszystko na lewą stronę równania

$$\left(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m\right)\psi(x) = 0.$$

Równanie Diraca

$$i\beta\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = \Big(\beta\alpha_i(-i\partial_i) + \beta^2 m\Big)\,\psi(x).$$

Skorzystajmy z warunku $\beta^2 = \mathbb{I}$, wstawmy definicje macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$, i przenieśmy wszystko na lewą stronę równania

$$\Big(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m\Big)\,\psi(x) = 0.$$

Łącząc pierwszy i drugi wyraz w nawiasie dostaniemy równanie Diraca w formie

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0.$$

Równanie Diraca

$$i\beta\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = \Big(\beta\alpha_i(-i\partial_i) + \beta^2 m\Big)\,\psi(x).$$

Skorzystajmy z warunku $\beta^2 = \mathbb{I}$, wstawmy definicje macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$, i przenieśmy wszystko na lewą stronę równania

$$\Big(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m\Big)\,\psi(x) = 0.$$

Łącząc pierwszy i drugi wyraz w nawiasie dostaniemy równanie Diraca w formie

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0.$$

Równanie Diraca

Zdefiniujmy symbol $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$. Przy jego użyciu równanie Diraca przybiera prostą postać

$$(i\not{\partial} - m)\,\psi(x) = 0.$$

Równanie Diraca

Zdefiniujmy symbol $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$. Przy jego użyciu równanie Diraca przybiera prostą postać

$$(i\not{\partial} - m)\,\psi(x) = 0.$$

Musimy jeszcze znaleźć macierze γ^μ spełniające wymagane własności.

Równanie Diraca

Zdefiniujmy symbol $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu$. Przy jego użyciu równanie Diraca przybiera prostą postać

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi(x) = 0.$$

Musimy jeszcze znaleźć macierze γ^μ spełniające wymagane własności.

Sprawdźmy najpierw zachowanie macierzy γ^μ przy sprzężeniu hermitowskim.

Równanie Diraca

Zdefiniujmy symbol $\not\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$. Przy jego użyciu równanie Diraca przybiera prostą postać

$$(i\not\partial - m)\,\psi(x) = 0.$$

Musimy jeszcze znaleźć macierze γ^μ spełniające wymagane własności.
Sprawdźmy najpierw zachowanie macierzy γ^μ przy sprzężeniu hermitowskim.

$${\gamma^0}^\dagger = \beta^\dagger$$

Zdefiniujmy symbol $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu$. Przy jego użyciu równanie Diraca przybiera prostą postać

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi(x) = 0.$$

Musimy jeszcze znaleźć macierze γ^μ spełniające wymagane własności.
Sprawdźmy najpierw zachowanie macierzy γ^μ przy sprzężeniu hermitowskim.

$\gamma^{0\,\dagger} = \beta^\dagger = \beta$

Zdefiniujmy symbol $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu$. Przy jego użyciu równanie Diraca przybiera prostą postać

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi(x) = 0.$$

Musimy jeszcze znaleźć macierze γ^μ spełniające wymagane własności.
Sprawdźmy najpierw zachowanie macierzy γ^μ przy sprzężeniu hermitowskim.

$\gamma^{0\,\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0,$

Zdefiniujmy symbol $\not\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$. Przy jego użyciu równanie Diraca przybiera prostą postać

$$(i\not\partial - m)\,\psi(x) = 0.$$

Musimy jeszcze znaleźć macierze γ^μ spełniające wymagane własności.
Sprawdźmy najpierw zachowanie macierzy γ^μ przy sprzężeniu hermitowskim.

$$\gamma^{0\,\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0, \qquad \gamma^{i\,\dagger} = (\beta\alpha_i)^\dagger$$

Zdefiniujmy symbol $\not\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$. Przy jego użyciu równanie Diraca przybiera prostą postać

$$(i\not\partial - m)\,\psi(x) = 0.$$

Musimy jeszcze znaleźć macierze γ^μ spełniające wymagane własności.
Sprawdźmy najpierw zachowanie macierzy γ^μ przy sprzężeniu hermitowskim.

$$\gamma^{0\,\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0, \qquad \gamma^{i\,\dagger} = (\beta\alpha_i)^\dagger = \alpha_i^\dagger \beta^\dagger$$

Zdefiniujmy symbol $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu$. Przy jego użyciu równanie Diraca przybiera prostą postać

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi(x) = 0.$$

Musimy jeszcze znaleźć macierze γ^μ spełniające wymagane własności.
Sprawdźmy najpierw zachowanie macierzy γ^μ przy sprzężeniu hermitowskim.

$$\gamma^{0\,\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0, \qquad \gamma^{i\,\dagger} = (\beta\alpha_i)^\dagger = \alpha_i^\dagger\beta^\dagger = \alpha_i\beta$$

Równanie Diraca

Zdefiniujmy symbol $\not\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$. Przy jego użyciu równanie Diraca przybiera prostą postać

$$(i\not\partial - m)\,\psi(x) = 0.$$

Musimy jeszcze znaleźć macierze γ^μ spełniające wymagane własności.
Sprawdźmy najpierw zachowanie macierzy γ^μ przy sprzężeniu hermitowskim.

$$\gamma^{0\,\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0, \qquad \gamma^{i\,\dagger} = (\beta\alpha_i)^\dagger = \alpha_i^\dagger \beta^\dagger = \alpha_i \beta = -\beta\alpha_i$$

Równanie Diraca

Zdefiniujmy symbol $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$. Przy jego użyciu równanie Diraca przybiera prostą postać

$$(i\not{\partial} - m)\,\psi(x) = 0.$$

Musimy jeszcze znaleźć macierze γ^μ spełniające wymagane własności.
Sprawdźmy najpierw zachowanie macierzy γ^μ przy sprzężeniu hermitowskim.

$$\gamma^{0\,\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0, \qquad \gamma^{i\,\dagger} = (\beta\alpha_i)^\dagger = \alpha_i^\dagger \beta^\dagger = \alpha_i \beta = -\beta\alpha_i = -\gamma^i.$$

Równanie Diraca

Zdefiniujmy symbol $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$. Przy jego użyciu równanie Diraca przybiera prostą postać

$$(i\not{\partial} - m)\,\psi(x) = 0.$$

Musimy jeszcze znaleźć macierze γ^μ spełniające wymagane własności.
Sprawdźmy najpierw zachowanie macierzy γ^μ przy sprzężeniu hermitowskim.

$$\gamma^{0\,\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0, \qquad \gamma^{i\,\dagger} = (\beta\alpha_i)^\dagger = \alpha_i^\dagger\beta^\dagger = \alpha_i\beta = -\beta\alpha_i = -\gamma^i.$$

Zbadajmy własności komutacyjne macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Pamiętamy, że

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Z pierwszego równania wynika, że $\alpha_i^2 = \mathbb{I}$.

Zbadajmy własności komutacyjne macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Pamiętamy, że

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Z pierwszego równania wynika, że $\alpha_i^2 = \mathbb{I}$. Przestawmy macierze w iloczynie

$\gamma^0\gamma^i$

Zbadajmy własności komutacyjne macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Pamiętamy, że

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Z pierwszego równania wynika, że $\alpha_i^2 = \mathbb{I}$. Przestawmy macierze w iloczynie

$$\gamma^0\gamma^i = \beta\beta\alpha_i$$

Zbadajmy własności komutacyjne macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Pamiętamy, że

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Z pierwszego równania wynika, że $\alpha_i^2 = \mathbb{I}$. Przestawmy macierze w iloczynie

$$\gamma^0\gamma^i = \beta\beta\alpha_i = \beta(-\alpha_i\beta)$$

Zbadajmy własności komutacyjne macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Pamiętamy, że

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Z pierwszego równania wynika, że $\alpha_i^2 = \mathbb{I}$. Przestawmy macierze w iloczynie

$$\gamma^0\gamma^i = \beta\beta\alpha_i = \beta(-\alpha_i\beta) = -\beta\alpha_i\beta$$

Zbadajmy własności komutacyjne macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Pamiętamy, że

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Z pierwszego równania wynika, że $\alpha_i^2 = \mathbb{I}$. Przestawmy macierze w iloczynie

$$\gamma^0\gamma^i = \beta\beta\alpha_i = \beta(-\alpha_i\beta) = -\beta\alpha_i\beta = -\gamma^i\gamma^0$$

Równanie Diraca

Zbadajmy własności komutacyjne macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Pamiętamy, że

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Z pierwszego równania wynika, że $\alpha_i^2 = \mathbb{I}$. Przestawmy macierze w iloczynie

$$\gamma^0\gamma^i = \beta\beta\alpha_i = \beta(-\alpha_i\beta) = -\beta\alpha_i\beta = -\gamma^i\gamma^0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = 0.$$

Zbadajmy własności komutacyjne macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Pamiętamy, że

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Z pierwszego równania wynika, że $\alpha_i^2 = \mathbb{I}$. Przestawmy macierze w iloczynie

$$\gamma^0\gamma^i = \beta\beta\alpha_i = \beta(-\alpha_i\beta) = -\beta\alpha_i\beta = -\gamma^i\gamma^0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = 0.$$

$$\gamma^i\gamma^j$$

Równanie Diraca

Zbadajmy własności komutacyjne macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Pamiętamy, że

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Z pierwszego równania wynika, że $\alpha_i^2 = \mathbb{I}$. Przestawmy macierze w iloczynie

$$\begin{aligned} \gamma^0\gamma^i &= \beta\beta\alpha_i = \beta(-\alpha_i\beta) = -\beta\alpha_i\beta = -\gamma^i\gamma^0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = 0. \\ \gamma^i\gamma^j &= \beta\alpha_i\beta\alpha_j \end{aligned}$$

Zbadajmy własności komutacyjne macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Pamiętamy, że

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Z pierwszego równania wynika, że $\alpha_i^2 = \mathbb{I}$. Przestawmy macierze w iloczynie

$$\begin{aligned} \gamma^0\gamma^i &= \beta\beta\alpha_i = \beta(-\alpha_i\beta) = -\beta\alpha_i\beta = -\gamma^i\gamma^0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = 0. \\ \gamma^i\gamma^j &= \beta\alpha_i\beta\alpha_j = \beta\alpha_i(-\alpha_j\beta) \end{aligned}$$

Zbadajmy własności komutacyjne macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Pamiętamy, że

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Z pierwszego równania wynika, że $\alpha_i^2 = \mathbb{I}$. Przestawmy macierze w iloczynie

$$\begin{aligned} \gamma^0\gamma^i &= \beta\beta\alpha_i = \beta(-\alpha_i\beta) = -\beta\alpha_i\beta = -\gamma^i\gamma^0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = 0. \\ \gamma^i\gamma^j &= \beta\alpha_i\beta\alpha_j = \beta\alpha_i(-\alpha_j\beta) = -\beta\alpha_i\alpha_j\beta \end{aligned}$$

Zbadajmy własności komutacyjne macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Pamiętamy, że

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Z pierwszego równania wynika, że $\alpha_i^2 = \mathbb{I}$. Przestawmy macierze w iloczynie

$$\begin{aligned} \gamma^0\gamma^i &= \beta\beta\alpha_i = \beta(-\alpha_i\beta) = -\beta\alpha_i\beta = -\gamma^i\gamma^0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = 0. \\ \gamma^i\gamma^j &= \beta\alpha_i\beta\alpha_j = \beta\alpha_i(-\alpha_j\beta) = -\beta\alpha_i\alpha_j\beta = -\beta(-\alpha_j\alpha_i + 2\delta_{ij})\beta \end{aligned}$$

Zbadajmy własności komutacyjne macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Pamiętamy, że

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Z pierwszego równania wynika, że $\alpha_i^2 = \mathbb{I}$. Przestawmy macierze w iloczynie

$$\begin{aligned}
\gamma^0\gamma^i &= \beta\beta\alpha_i = \beta(-\alpha_i\beta) = -\beta\alpha_i\beta = -\gamma^i\gamma^0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = 0. \\
\gamma^i\gamma^j &= \beta\alpha_i\beta\alpha_j = \beta\alpha_i(-\alpha_j\beta) = -\beta\alpha_i\alpha_j\beta = -\beta(-\alpha_j\alpha_i + 2\delta_{ij})\beta \\
&= \beta\alpha_j\alpha_i\beta - 2\delta_{ij}\beta^2
\end{aligned}$$

Zbadajmy własności komutacyjne macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Pamiętamy, że

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Z pierwszego równania wynika, że $\alpha_i^2 = \mathbb{I}$. Przestawmy macierze w iloczynie

$$\begin{aligned}
\gamma^0\gamma^i &= \beta\beta\alpha_i = \beta(-\alpha_i\beta) = -\beta\alpha_i\beta = -\gamma^i\gamma^0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = 0. \\
\gamma^i\gamma^j &= \beta\alpha_i\beta\alpha_j = \beta\alpha_i(-\alpha_j\beta) = -\beta\alpha_i\alpha_j\beta = -\beta(-\alpha_j\alpha_i + 2\delta_{ij})\beta \\
&= \beta\alpha_j\alpha_i\beta - 2\delta_{ij}\beta^2 = -\beta\alpha_j\beta\alpha_i - 2\delta_{ij}\mathbb{I}
\end{aligned}$$

Zbadajmy własności komutacyjne macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Pamiętamy, że

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Z pierwszego równania wynika, że $\alpha_i^2 = \mathbb{I}$. Przestawmy macierze w iloczynie

$$\begin{aligned}
\gamma^0\gamma^i &= \beta\beta\alpha_i = \beta(-\alpha_i\beta) = -\beta\alpha_i\beta = -\gamma^i\gamma^0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = 0. \\
\gamma^i\gamma^j &= \beta\alpha_i\beta\alpha_j = \beta\alpha_i(-\alpha_j\beta) = -\beta\alpha_i\alpha_j\beta = -\beta(-\alpha_j\alpha_i + 2\delta_{ij})\beta \\
&= \beta\alpha_j\alpha_i\beta - 2\delta_{ij}\beta^2 = -\beta\alpha_j\beta\alpha_i - 2\delta_{ij}\mathbb{I} = -\gamma^j\gamma^i - 2\delta_{ij}\mathbb{I}
\end{aligned}$$

Zbadajmy własności komutacyjne macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Pamiętamy, że

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Z pierwszego równania wynika, że $\alpha_i^2 = \mathbb{I}$. Przestawmy macierze w iloczynie

$$\begin{aligned}
\gamma^0\gamma^i &= \beta\beta\alpha_i = \beta(-\alpha_i\beta) = -\beta\alpha_i\beta = -\gamma^i\gamma^0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = 0. \\
\gamma^i\gamma^j &= \beta\alpha_i\beta\alpha_j = \beta\alpha_i(-\alpha_j\beta) = -\beta\alpha_i\alpha_j\beta = -\beta(-\alpha_j\alpha_i + 2\delta_{ij})\beta \\
&= \beta\alpha_j\alpha_i\beta - 2\delta_{ij}\beta^2 = -\beta\alpha_j\beta\alpha_i - 2\delta_{ij}\mathbb{I} = -\gamma^j\gamma^i - 2\delta_{ij}\mathbb{I} \\
&\Rightarrow \quad \gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = -2\delta_{ij}\mathbb{I}.
\end{aligned}$$

Zbadajmy własności komutacyjne macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Pamiętamy, że

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Z pierwszego równania wynika, że $\alpha_i^2 = \mathbb{I}$. Przestawmy macierze w iloczynie

$$\begin{aligned}
\gamma^0\gamma^i &= \beta\beta\alpha_i = \beta(-\alpha_i\beta) = -\beta\alpha_i\beta = -\gamma^i\gamma^0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = 0. \\
\gamma^i\gamma^j &= \beta\alpha_i\beta\alpha_j = \beta\alpha_i(-\alpha_j\beta) = -\beta\alpha_i\alpha_j\beta = -\beta(-\alpha_j\alpha_i + 2\delta_{ij})\beta \\
&= \beta\alpha_j\alpha_i\beta - 2\delta_{ij}\beta^2 = -\beta\alpha_j\beta\alpha_i - 2\delta_{ij}\mathbb{I} = -\gamma^j\gamma^i - 2\delta_{ij}\mathbb{I} \\
&\Rightarrow \quad \gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = -2\delta_{ij}\mathbb{I}.
\end{aligned}$$

Zauważmy również, że

$$\gamma^{0\,2} = \beta^2 = \mathbb{I}, \qquad \gamma^{i\,2} = \beta\alpha_i\beta\alpha_i = -\beta^2\alpha_i^2 = -\mathbb{I}.$$

Równanie Diraca

Zbadajmy własności komutacyjne macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Pamiętamy, że

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Z pierwszego równania wynika, że $\alpha_i^2 = \mathbb{I}$. Przestawmy macierze w iloczynie

$$\begin{aligned}
\gamma^0\gamma^i &= \beta\beta\alpha_i = \beta(-\alpha_i\beta) = -\beta\alpha_i\beta = -\gamma^i\gamma^0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = 0. \\
\gamma^i\gamma^j &= \beta\alpha_i\beta\alpha_j = \beta\alpha_i(-\alpha_j\beta) = -\beta\alpha_i\alpha_j\beta = -\beta(-\alpha_j\alpha_i + 2\delta_{ij})\beta \\
&= \beta\alpha_j\alpha_i\beta - 2\delta_{ij}\beta^2 = -\beta\alpha_j\beta\alpha_i - 2\delta_{ij}\mathbb{I} = -\gamma^j\gamma^i - 2\delta_{ij}\mathbb{I} \\
&\Rightarrow \quad \gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = -2\delta_{ij}\mathbb{I}.
\end{aligned}$$

Zauważmy również, że

$$\gamma^{0\,2} = \beta^2 = \mathbb{I}, \qquad \gamma^{i\,2} = \beta\alpha_i\beta\alpha_i = -\beta^2\alpha_i^2 = -\mathbb{I}.$$

Podsumowując, $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}$, gdzie $g^{\mu\nu}$ jest tensorem metrycznym, a $\mathbb{I}$ jest macierzą jednostkową 4×4.

Zbadajmy własności komutacyjne macierzy γ^μ: $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Pamiętamy, że

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \qquad \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Z pierwszego równania wynika, że $\alpha_i^2 = \mathbb{I}$. Przestawmy macierze w iloczynie

$$\begin{aligned}
\gamma^0\gamma^i &= \beta\beta\alpha_i = \beta(-\alpha_i\beta) = -\beta\alpha_i\beta = -\gamma^i\gamma^0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = 0. \\
\gamma^i\gamma^j &= \beta\alpha_i\beta\alpha_j = \beta\alpha_i(-\alpha_j\beta) = -\beta\alpha_i\alpha_j\beta = -\beta(-\alpha_j\alpha_i + 2\delta_{ij})\beta \\
&= \beta\alpha_j\alpha_i\beta - 2\delta_{ij}\beta^2 = -\beta\alpha_j\beta\alpha_i - 2\delta_{ij}\mathbb{I} = -\gamma^j\gamma^i - 2\delta_{ij}\mathbb{I} \\
&\Rightarrow \quad \gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = -2\delta_{ij}\mathbb{I}.
\end{aligned}$$

Zauważmy również, że

$$\gamma^{0\,2} = \beta^2 = \mathbb{I}, \qquad \gamma^{i\,2} = \beta\alpha_i\beta\alpha_i = -\beta^2\alpha_i^2 = -\mathbb{I}.$$

Podsumowując, $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}$, gdzie $g^{\mu\nu}$ jest tensorem metrycznym, a $\mathbb{I}$ jest macierzą jednostkową 4×4.

Przypomnijmy, że tensor metryczny ma postać

$$g_{\mu\,\nu} = g^{\mu\,\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Równania

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

Przypomnijmy, że tensor metryczny ma postać

$$g_{\mu\,\nu} = g^{\mu\,\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Równania

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

wraz z własnościami hermitowskości ${\gamma^0}^\dagger = \gamma^0, \quad {\gamma^i}^\dagger = -\gamma^i$

Przypomnijmy, że tensor metryczny ma postać

$$g_{\mu\,\nu} = g^{\mu\,\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Równania

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3,$$

wraz z własnościami hermitowskości $\gamma^{0\,\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\,\dagger} = -\gamma^i$ możemy potraktować jako definicję macierzy Diraca γ^μ, $\mu = 0,1,2,3.$

Przypomnijmy, że tensor metryczny ma postać

$$g_{\mu\,\nu} = g^{\mu\,\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Równania

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

wraz z własnościami hermitowskości $\gamma^{0\,\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\,\dagger} = -\gamma^i$ możemy potraktować jako definicję macierzy Diraca γ^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3.$

Macierze Diraca

Macierze Diraca można wybrać następująco

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$ są macierzami Pauliego, a I i 0 są, odpowiednio, macierzą jednostkową i zerową 2×2.
Ten wybór macierzy γ^μ nazywa się reprezentacją Diraca.

Macierze Diraca można wybrać następująco

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$ są macierzami Pauliego, a I i 0 są, odpowiednio, macierzą jednostkową i zerową 2×2.

Ten wybór macierzy γ^μ nazywa się reprezentacją Diraca.

Z postaci macierzy γ^μ od razu widać, że $\gamma^{0\,\dagger} = \gamma^0$ i $\gamma^{i\,\dagger} = -\gamma^i$.

Macierze Diraca

Macierze Diraca można wybrać następująco

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$ są macierzami Pauliego, a I i 0 są, odpowiednio, macierzą jednostkową i zerową 2×2.
Ten wybór macierzy γ^μ nazywa się reprezentacją Diraca.
Z postaci macierzy γ^μ od razu widać, że $\gamma^{0\,\dagger} = \gamma^0$ i $\gamma^{i\,\dagger} = -\gamma^i$.
Zadanie. Pokazać, że macierze γ^μ w reprezentacji Diraca spełniają związki komutacyjne

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Macierze Diraca można wybrać następująco

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$ są macierzami Pauliego, a I i 0 są, odpowiednio, macierzą jednostkową i zerową 2×2.
Ten wybór macierzy γ^μ nazywa się reprezentacją Diraca.
Z postaci macierzy γ^μ od razu widać, że $\gamma^{0\,\dagger} = \gamma^0$ i $\gamma^{i\,\dagger} = -\gamma^i$.
Zadanie. Pokazać, że macierze γ^μ w reprezentacji Diraca spełniają związki komutacyjne

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Pokazaliśmy w ten sposób, że równanie Diraca ma sens matematyczny.

Macierze Diraca

Macierze Diraca można wybrać następująco

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$ są macierzami Pauliego, a I i 0 są, odpowiednio, macierzą jednostkową i zerową 2×2.
Ten wybór macierzy γ^μ nazywa się reprezentacją Diraca.
Z postaci macierzy γ^μ od razu widać, że $\gamma^{0\,\dagger} = \gamma^0$ i $\gamma^{i\,\dagger} = -\gamma^i$.
Zadanie. Pokazać, że macierze γ^μ w reprezentacji Diraca spełniają związki komutacyjne

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Pokazaliśmy w ten sposób, że równanie Diraca ma sens matematyczny.

Macierze Diraca

Dysponując jedną reprezentacją macierzy Diraca możemy otrzymać dowolną inną reprezentację tych macierzy poprzez transformację unitarną.

$$\gamma^\mu \ \rightarrow \ \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U, \quad \text{gdzie} \quad UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}.$$

Rzeczywiście obliczmy

$$\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\}$$

Dysponując jedną reprezentacją macierzy Diraca możemy otrzymać dowolną inną reprezentację tych macierzy poprzez transformację unitarną.

$$\gamma^\mu \;\to\; \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U, \quad \text{gdzie} \quad UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}.$$

Rzeczywiście obliczmy

$$\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} \quad =$$

Macierze Diraca

Dysponując jedną reprezentacją macierzy Diraca możemy otrzymać dowolną inną reprezentację tych macierzy poprzez transformację unitarną.

$$\gamma^\mu \;\to\; \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U, \quad \text{gdzie} \quad UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}.$$

Rzeczywiście obliczmy

$$\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} \;=\; \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu \tilde{\gamma}^\mu$$

Dysponując jedną reprezentacją macierzy Diraca możemy otrzymać dowolną inną reprezentację tych macierzy poprzez transformację unitarną.

$$\gamma^\mu \;\to\; \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U, \quad \text{gdzie} \quad U U^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}.$$

Rzeczywiście obliczmy

$$\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} \;=\; \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U U^\dagger \gamma^\nu U + U^\dagger \gamma^\nu U U^\dagger \gamma^\mu U =$$

Macierze Diraca

Dysponując jedną reprezentacją macierzy Diraca możemy otrzymać dowolną inną reprezentację tych macierzy poprzez transformację unitarną.

$$\gamma^\mu \;\to\; \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U, \quad \text{gdzie} \quad UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}.$$

Rzeczywiście obliczmy

$$\begin{aligned}\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} &= \tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu\tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger\gamma^\mu UU^\dagger\gamma^\nu U + U^\dagger\gamma^\nu UU^\dagger\gamma^\mu U = \\ &= \end{aligned}$$

Dysponując jedną reprezentacją macierzy Diraca możemy otrzymać dowolną inną reprezentację tych macierzy poprzez transformację unitarną.

$$\gamma^\mu \;\rightarrow\; \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U, \quad \text{gdzie} \quad UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}.$$

Rzeczywiście obliczmy

$$\begin{aligned} \{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} &= \tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu\tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger\gamma^\mu UU^\dagger\gamma^\nu U + U^\dagger\gamma^\nu UU^\dagger\gamma^\mu U = \\ &= U^\dagger\gamma^\mu\gamma^\nu U + U^\dagger\gamma^\nu\gamma^\mu U \end{aligned}$$

Macierze Diraca

Dysponując jedną reprezentacją macierzy Diraca możemy otrzymać dowolną inną reprezentację tych macierzy poprzez transformację unitarną.

$$\gamma^\mu \;\to\; \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U, \quad \text{gdzie} \quad UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}.$$

Rzeczywiście obliczmy

$$\begin{aligned} \{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} &= \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U U^\dagger \gamma^\nu U + U^\dagger \gamma^\nu U U^\dagger \gamma^\mu U = \\ &= U^\dagger \gamma^\mu \gamma^\nu U + U^\dagger \gamma^\nu \gamma^\mu U = U^\dagger \left(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu\right) U \end{aligned}$$

Macierze Diraca

Dysponując jedną reprezentacją macierzy Diraca możemy otrzymać dowolną inną reprezentację tych macierzy poprzez transformację unitarną.

$$\gamma^{\mu} \;\to\; \tilde{\gamma}^{\mu} = U^{\dagger}\gamma^{\mu}U, \quad \text{gdzie} \quad UU^{\dagger} = U^{\dagger}U = \mathbb{I}.$$

Rzeczywiście obliczmy

$$\begin{aligned}
\{\tilde{\gamma}^{\mu}, \tilde{\gamma}^{\nu}\} &= \tilde{\gamma}^{\mu}\tilde{\gamma}^{\nu} + \tilde{\gamma}^{\nu}\tilde{\gamma}^{\mu} = U^{\dagger}\gamma^{\mu}UU^{\dagger}\gamma^{\nu}U + U^{\dagger}\gamma^{\nu}UU^{\dagger}\gamma^{\mu}U = \\
&= U^{\dagger}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}U + U^{\dagger}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}U = U^{\dagger}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)U \\
&=
\end{aligned}$$

Dysponując jedną reprezentacją macierzy Diraca możemy otrzymać dowolną inną reprezentację tych macierzy poprzez transformację unitarną.

$$\gamma^\mu \;\to\; \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U, \quad \text{gdzie} \quad UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}.$$

Rzeczywiście obliczmy

$$\begin{aligned}
\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} &= \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U U^\dagger \gamma^\nu U + U^\dagger \gamma^\nu U U^\dagger \gamma^\mu U = \\
&= U^\dagger \gamma^\mu \gamma^\nu U + U^\dagger \gamma^\nu \gamma^\mu U = U^\dagger \left(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu\right) U \\
&= U^\dagger 2 g^{\mu\nu} \mathbb{I} U =
\end{aligned}$$

Macierze Diraca

Dysponując jedną reprezentacją macierzy Diraca możemy otrzymać dowolną inną reprezentację tych macierzy poprzez transformację unitarną.

$$\gamma^\mu \;\to\; \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U, \quad \text{gdzie} \quad UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}.$$

Rzeczywiście obliczmy

$$\begin{aligned}
\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} &= \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U U^\dagger \gamma^\nu U + U^\dagger \gamma^\nu U U^\dagger \gamma^\mu U = \\
&= U^\dagger \gamma^\mu \gamma^\nu U + U^\dagger \gamma^\nu \gamma^\mu U = U^\dagger \left(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu\right) U \\
&= U^\dagger 2 g^{\mu\nu} \mathbb{I} U = 2 g^{\mu\nu} U^\dagger U
\end{aligned}$$

Dysponując jedną reprezentacją macierzy Diraca możemy otrzymać dowolną inną reprezentację tych macierzy poprzez transformację unitarną.

$$\gamma^\mu \;\rightarrow\; \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U, \quad \text{gdzie} \quad UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}.$$

Rzeczywiście obliczmy

$$\begin{aligned}
\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} &= \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U U^\dagger \gamma^\nu U + U^\dagger \gamma^\nu U U^\dagger \gamma^\mu U = \\
&= U^\dagger \gamma^\mu \gamma^\nu U + U^\dagger \gamma^\nu \gamma^\mu U = U^\dagger \left(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu\right) U \\
&= U^\dagger 2 g^{\mu\nu} \mathbb{I} U = 2 g^{\mu\nu} U^\dagger U = 2 g^{\mu\nu} \mathbb{I}.
\end{aligned}$$

Dysponując jedną reprezentacją macierzy Diraca możemy otrzymać dowolną inną reprezentację tych macierzy poprzez transformację unitarną.

$$\gamma^\mu \;\rightarrow\; \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U, \quad \text{gdzie} \quad UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}.$$

Rzeczywiście obliczmy

$$\begin{aligned}
\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} &= \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U U^\dagger \gamma^\nu U + U^\dagger \gamma^\nu U U^\dagger \gamma^\mu U = \\
&= U^\dagger \gamma^\mu \gamma^\nu U + U^\dagger \gamma^\nu \gamma^\mu U = U^\dagger \left(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu\right) U \\
&= U^\dagger 2 g^{\mu\nu} \mathbb{I} U = 2 g^{\mu\nu} U^\dagger U = 2 g^{\mu\nu} \mathbb{I}.
\end{aligned}$$

Obliczmy jeszcze

$$\tilde{\gamma}^{0\,\dagger}$$

Macierze Diraca

Dysponując jedną reprezentacją macierzy Diraca możemy otrzymać dowolną inną reprezentację tych macierzy poprzez transformację unitarną.

$$\gamma^\mu \;\rightarrow\; \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U, \quad \text{gdzie} \quad UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}.$$

Rzeczywiście obliczmy

$$\begin{aligned} \{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} &= \tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu\tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger\gamma^\mu UU^\dagger\gamma^\nu U + U^\dagger\gamma^\nu UU^\dagger\gamma^\mu U = \\ &= U^\dagger\gamma^\mu\gamma^\nu U + U^\dagger\gamma^\nu\gamma^\mu U = U^\dagger\left(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\right) U \\ &= U^\dagger 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}U = 2g^{\mu\nu}U^\dagger U = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}. \end{aligned}$$

Obliczmy jeszcze

$$\tilde{\gamma}^{0\,\dagger} = \left(U^\dagger\gamma^0 U\right)^\dagger$$

Macierze Diraca

Dysponując jedną reprezentacją macierzy Diraca możemy otrzymać dowolną inną reprezentację tych macierzy poprzez transformację unitarną.

$$\gamma^\mu \;\to\; \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U, \quad \text{gdzie} \quad UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}.$$

Rzeczywiście obliczmy

$$\begin{aligned}
\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} &= \tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu\tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger\gamma^\mu UU^\dagger\gamma^\nu U + U^\dagger\gamma^\nu UU^\dagger\gamma^\mu U = \\
&= U^\dagger\gamma^\mu\gamma^\nu U + U^\dagger\gamma^\nu\gamma^\mu U = U^\dagger\left(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\right) U \\
&= U^\dagger 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}U = 2g^{\mu\nu}U^\dagger U = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}.
\end{aligned}$$

Obliczmy jeszcze

$$\tilde{\gamma}^{0\,\dagger} = \left(U^\dagger\gamma^0 U\right)^\dagger = U^\dagger\,\gamma^{0\,\dagger}\,U^{\dagger\,\dagger}$$

Dysponując jedną reprezentacją macierzy Diraca możemy otrzymać dowolną inną reprezentację tych macierzy poprzez transformację unitarną.

$$\gamma^\mu \;\to\; \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U, \quad \text{gdzie} \quad UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}.$$

Rzeczywiście obliczmy

$$\begin{aligned}
\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} &= \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U U^\dagger \gamma^\nu U + U^\dagger \gamma^\nu U U^\dagger \gamma^\mu U = \\
&= U^\dagger \gamma^\mu \gamma^\nu U + U^\dagger \gamma^\nu \gamma^\mu U = U^\dagger \left(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu\right) U \\
&= U^\dagger 2 g^{\mu\nu} \mathbb{I} U = 2 g^{\mu\nu} U^\dagger U = 2 g^{\mu\nu} \mathbb{I}.
\end{aligned}$$

Obliczmy jeszcze

$$\tilde{\gamma}^{0\,\dagger} = \left(U^\dagger \gamma^0 U\right)^\dagger = U^\dagger \, \gamma^{0\,\dagger} \, U^{\dagger\,\dagger} = U^\dagger \gamma^0 U$$

Dysponując jedną reprezentacją macierzy Diraca możemy otrzymać dowolną inną reprezentację tych macierzy poprzez transformację unitarną.

$$\gamma^\mu \;\rightarrow\; \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U, \quad \text{gdzie} \quad UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}.$$

Rzeczywiście obliczmy

$$\begin{aligned}
\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} &= \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U U^\dagger \gamma^\nu U + U^\dagger \gamma^\nu U U^\dagger \gamma^\mu U = \\
&= U^\dagger \gamma^\mu \gamma^\nu U + U^\dagger \gamma^\nu \gamma^\mu U = U^\dagger \left(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu\right) U \\
&= U^\dagger 2 g^{\mu\nu} \mathbb{I} U = 2 g^{\mu\nu} U^\dagger U = 2 g^{\mu\nu} \mathbb{I}.
\end{aligned}$$

Obliczmy jeszcze

$$\tilde{\gamma}^{0\,\dagger} = \left(U^\dagger \gamma^0 U\right)^\dagger = U^\dagger \, \gamma^{0\,\dagger} \, U^{\dagger\,\dagger} = U^\dagger \gamma^0 U = \tilde{\gamma}^0.$$

Macierze Diraca

Dysponując jedną reprezentacją macierzy Diraca możemy otrzymać dowolną inną reprezentację tych macierzy poprzez transformację unitarną.

$$\gamma^\mu \;\to\; \tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U, \quad \text{gdzie} \quad UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}.$$

Rzeczywiście obliczmy

$$\begin{aligned} \{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} &= \tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu\tilde{\gamma}^\mu = U^\dagger\gamma^\mu UU^\dagger\gamma^\nu U + U^\dagger\gamma^\nu UU^\dagger\gamma^\mu U = \\ &= U^\dagger\gamma^\mu\gamma^\nu U + U^\dagger\gamma^\nu\gamma^\mu U = U^\dagger\left(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\right)U \\ &= U^\dagger 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}U = 2g^{\mu\nu}U^\dagger U = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}. \end{aligned}$$

Obliczmy jeszcze

$$\tilde{\gamma}^{0\,\dagger} = \left(U^\dagger\gamma^0 U\right)^\dagger = U^\dagger\,\gamma^{0\,\dagger}\,U^{\dagger\,\dagger} = U^\dagger\gamma^0 U = \tilde{\gamma}^0.$$

Macierze Diraca

Podobnie

$$\tilde{\gamma}^{i\,\dagger} = \left(U^\dagger \gamma^i U\right)^\dagger$$

Macierze Diraca

Podobnie

$$\tilde{\gamma}^{i\,\dagger} = \left(U^\dagger \gamma^i U\right)^\dagger = U^\dagger\, \gamma^{i\,\dagger}\, U^{\dagger\,\dagger}$$

Macierze Diraca

Podobnie

$$\tilde{\gamma}^{i\,\dagger} = \left(U^\dagger \gamma^i U\right)^\dagger = U^\dagger\, \gamma^{i\,\dagger}\, U^{\dagger\,\dagger} = -U^\dagger \gamma^i U$$

Podobnie

$$\tilde{\gamma}^{i\,\dagger} = \left(U^\dagger \gamma^i U\right)^\dagger = U^\dagger \, \gamma^{i\,\dagger} \, U^{\dagger\,\dagger} = -U^\dagger \gamma^i U = -\tilde{\gamma}^i.$$

Macierze Diraca

Podobnie

$$\tilde{\gamma}^{i\,\dagger} = \left(U^\dagger \gamma^i U\right)^\dagger = U^\dagger\, \gamma^{i\,\dagger}\, U^{\dagger\,\dagger} = -U^\dagger \gamma^i U = -\tilde{\gamma}^i.$$

Widzimy, że macierze $\tilde{\gamma}^\mu$ spełniają takie same związki komutacyjne i relacje hermitowskości, co wyjściowe macierze γ^μ.

Podobnie

$$\tilde{\gamma}^{i\,\dagger} = \left(U^\dagger \gamma^i U\right)^\dagger = U^\dagger\, \gamma^{i\,\dagger}\, U^{\dagger\,\dagger} = -U^\dagger \gamma^i U = -\tilde{\gamma}^i.$$

Widzimy, że macierze $\tilde{\gamma}^\mu$ spełniają takie same związki komutacyjne i relacje hermitowskości, co wyjściowe macierze γ^μ.

Zauważmy, że gdyby zdefiniować nowe macierze γ^μ przez transformację podobieństwa

$$\gamma^\mu \;\rightarrow\; \tilde{\gamma}^\mu = S^{-1}\gamma^\mu S,$$

to byłyby spełnione związki antykomutacyjne $\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}$, ale nie byłyby spełnione własności hermitowskości: $\tilde{\gamma}^{0\,\dagger} = \tilde{\gamma}^0$ i $\tilde{\gamma}^{i\,\dagger} = -\tilde{\gamma}^i$.

Podobnie

$$\tilde{\gamma}^{i\,\dagger} = \left(U^\dagger \gamma^i U\right)^\dagger = U^\dagger\, \gamma^{i\,\dagger}\, U^{\dagger\,\dagger} = -U^\dagger \gamma^i U = -\tilde{\gamma}^i.$$

Widzimy, że macierze $\tilde{\gamma}^\mu$ spełniają takie same związki komutacyjne i relacje hermitowskości, co wyjściowe macierze γ^μ.
Zauważmy, że gdyby zdefiniować nowe macierze γ^μ przez transformację podobieństwa

$$\gamma^\mu \;\rightarrow\; \tilde{\gamma}^\mu = S^{-1}\gamma^\mu S,$$

to byłyby spełnione związki antykomutacyjne $\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}$, ale nie byłyby spełnione własności hermitowskości: $\tilde{\gamma}^{0\,\dagger} = \tilde{\gamma}^0$ i $\tilde{\gamma}^{i\,\dagger} = -\tilde{\gamma}^i$.

Macierze Diraca

Inną często stosowaną reprezentacją macierzy γ^μ jest reprezentacja Weyla:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$ są macierzami Pauliego, a I i 0 są, odpowiednio, macierzą jednostkową i zerową 2×2.

Zadanie. Znaleźć transformację unitarną łączącą macierze γ^μ w reprezentacji Diraca i reprezentacji Weyla, $\gamma^\mu_W = U^\dagger \gamma^\mu_D U$.

Inną często stosowaną reprezentacją macierzy γ^μ jest reprezentacja Weyla:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$ są macierzami Pauliego, a I i 0 są, odpowiednio, macierzą jednostkową i zerową 2×2.

Zadanie. Znaleźć transformację unitarną łączącą macierze γ^μ w reprezentacji Diraca i reprezentacji Weyla, $\gamma^\mu_W = U^\dagger \gamma^\mu_D U$.

Odpowiedź. Np.

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix}, \qquad \text{gdzie} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierze Diraca

Inną często stosowaną reprezentacją macierzy γ^μ jest reprezentacja Weyla:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie σ_i, $i = 1, 2, 3$ są macierzami Pauliego, a I i 0 są, odpowiednio, macierzą jednostkową i zerową 2×2.

Zadanie. Znaleźć transformację unitarną łączącą macierze γ^μ w reprezentacji Diraca i reprezentacji Weyla, $\gamma^\mu_W = U^\dagger \gamma^\mu_D U$.

Odpowiedź. Np.

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix}, \qquad \text{gdzie} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierze Diraca i równanie Diraca

Zadanie. Pokazać, że

$$\gamma^{\mu\,\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0.$$

Ponieważ macierze γ^μ mają rozmiar 4×4, to funkcja falowa w równaniu Diraca

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi(x) = 0$$

musi mieć cztery składowe

Zadanie. Pokazać, że

$$\gamma^{\mu\,\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0.$$

Ponieważ macierze γ^μ mają rozmiar 4×4, to funkcja falowa w równaniu Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0$$

musi mieć cztery składowe

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}.$$

Macierze Diraca i równanie Diraca

Zadanie. Pokazać, że

$$\gamma^{\mu\,\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0.$$

Ponieważ macierze γ^μ mają rozmiar 4×4, to funkcja falowa w równaniu Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0$$

musi mieć cztery składowe

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}.$$

Pokażemy, że każda ze składowych $\psi_a(x)$, $a = 1, 2, 3, 4$, funkcji falowej $\psi(x)$ spełnia równanie Kleina-Gordona.
W tym celu napiszmy jawnie indeksy macierzowe w równaniu Diraca

$$\left(i\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\mu} - m\delta_{ab}\right)\psi_b(x) = 0, \qquad a = 1, 2, 3, 4.$$

Równanie Diraca

Pokażemy, że każda ze składowych $\psi_a(x)$, $a = 1, 2, 3, 4$, funkcji falowej $\psi(x)$ spełnia równanie Kleina-Gordona.
W tym celu napiszmy jawnie indeksy macierzowe w równaniu Diraca

$$\left(i\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\mu} - m\delta_{ab}\right)\psi_b(x) = 0, \qquad a = 1, 2, 3, 4.$$

Podziałajmy na to równanie z lewej strony operatorem $(i\gamma^{\nu}_{ca}\partial_{\nu} + m\delta_{ca})$, wtedy otrzymamy

Pokażemy, że każda ze składowych $\psi_a(x)$, $a = 1, 2, 3, 4$, funkcji falowej $\psi(x)$ spełnia równanie Kleina-Gordona.
W tym celu napiszmy jawnie indeksy macierzowe w równaniu Diraca

$$\left(i\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\mu} - m\delta_{ab}\right)\psi_b(x) = 0, \qquad a = 1, 2, 3, 4.$$

Podziałajmy na to równanie z lewej strony operatorem $(i\gamma^{\nu}_{ca}\partial_{\nu} + m\delta_{ca})$, wtedy otrzymamy

$$\left(i\gamma^{\nu}_{ca}\partial_{\nu} + m\delta_{ca}\right)\left(i\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\mu} - m\delta_{ab}\right)\psi_b(x) = 0, \qquad c = 1, 2, 3, 4,$$

Równanie Diraca

Pokażemy, że każda ze składowych $\psi_a(x)$, $a = 1, 2, 3, 4$, funkcji falowej $\psi(x)$ spełnia równanie Kleina-Gordona.
W tym celu napiszmy jawnie indeksy macierzowe w równaniu Diraca

$$\left(i\gamma^\mu_{ab}\partial_\mu - m\delta_{ab}\right)\psi_b(x) = 0, \qquad a = 1, 2, 3, 4.$$

Podziałajmy na to równanie z lewej strony operatorem $(i\gamma^\nu_{ca}\partial_\nu + m\delta_{ca})$, wtedy otrzymamy

$$\left(i\gamma^\nu_{ca}\partial_\nu + m\delta_{ca}\right)\left(i\gamma^\mu_{ab}\partial_\mu - m\delta_{ab}\right)\psi_b(x) = 0, \qquad c = 1, 2, 3, 4,$$

a po wymnożeniu dostaniemy

$$\left(-\gamma^\nu_{ca}\gamma^\mu_{ab}\partial_\nu\partial_\mu - im\gamma^\nu_{cb}\partial_\nu + im\gamma^\mu_{cb}\partial_\mu - m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0.$$

Pokażemy, że każda ze składowych $\psi_a(x)$, $a = 1, 2, 3, 4$, funkcji falowej $\psi(x)$ spełnia równanie Kleina-Gordona.
W tym celu napiszmy jawnie indeksy macierzowe w równaniu Diraca

$$\left(i\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\mu} - m\delta_{ab}\right)\psi_b(x) = 0, \qquad a = 1, 2, 3, 4.$$

Podziałajmy na to równanie z lewej strony operatorem $(i\gamma^{\nu}_{ca}\partial_{\nu} + m\delta_{ca})$, wtedy otrzymamy

$$\left(i\gamma^{\nu}_{ca}\partial_{\nu} + m\delta_{ca}\right)\left(i\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\mu} - m\delta_{ab}\right)\psi_b(x) = 0, \qquad c = 1, 2, 3, 4,$$

a po wymnożeniu dostaniemy

$$\left(-\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} - im\gamma^{\nu}_{cb}\partial_{\nu} + im\gamma^{\mu}_{cb}\partial_{\mu} - m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0.$$

Drugi i trzeci wyraz w nawiasie kasują się

$$\left(-\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} - im\gamma^{\nu}_{cb}\partial_{\nu} + im\gamma^{\mu}_{cb}\partial_{\mu} - m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0,$$

więc po przedzieleniu przez (-1) dostaniemy

$$\left(\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} + m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0.$$

Drugi i trzeci wyraz w nawiasie kasują się

$$\left(-\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} - im\gamma^{\nu}_{cb}\partial_{\nu} + im\gamma^{\mu}_{cb}\partial_{\mu} - m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0,$$

więc po przedzieleniu przez (-1) dostaniemy

$$\left(\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} + m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0.$$

Pierwszy wyraz w nawiasie ma postać

$$\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} \quad =$$

Równanie Diraca

Drugi i trzeci wyraz w nawiasie kasują się

$$\left(-\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} - im\gamma^{\nu}_{cb}\partial_{\nu} + im\gamma^{\mu}_{cb}\partial_{\mu} - m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0,$$

więc po przedzieleniu przez (-1) dostaniemy

$$\left(\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} + m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0.$$

Pierwszy wyraz w nawiasie ma postać

$$\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} = \left(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)_{cb}\partial_{\nu}\partial_{\mu}$$

Równanie Diraca

Drugi i trzeci wyraz w nawiasie kasują się

$$\left(-\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_\nu\partial_\mu - im\gamma^{\nu}_{cb}\partial_\nu + im\gamma^{\mu}_{cb}\partial_\mu - m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0,$$

więc po przedzieleniu przez (-1) dostaniemy

$$\left(\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_\nu\partial_\mu + m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0.$$

Pierwszy wyraz w nawiasie ma postać

$$\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_\nu\partial_\mu = (\gamma^\nu\gamma^\mu)_{cb}\,\partial_\nu\partial_\mu = \left(\frac{1}{2}\gamma^\nu\gamma^\mu\right)_{cb}\partial_\nu\partial_\mu + \left(\frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\right)_{cb}\partial_\mu\partial_\nu$$

Drugi i trzeci wyraz w nawiasie kasują się

$$\left(-\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_\nu\partial_\mu - im\gamma^{\nu}_{cb}\partial_\nu + im\gamma^{\mu}_{cb}\partial_\mu - m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0,$$

więc po przedzieleniu przez (-1) dostaniemy

$$\left(\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_\nu\partial_\mu + m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0.$$

Pierwszy wyraz w nawiasie ma postać

$$\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_\nu\partial_\mu \;=\; (\gamma^\nu\gamma^\mu)_{cb}\,\partial_\nu\partial_\mu = \left(\frac{1}{2}\gamma^\nu\gamma^\mu\right)_{cb}\partial_\nu\partial_\mu + \left(\frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\right)_{cb}\partial_\mu\partial_\nu$$

$$=$$

Równanie Diraca

Drugi i trzeci wyraz w nawiasie kasują się

$$\left(-\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} - im\gamma^{\nu}_{cb}\partial_{\nu} + im\gamma^{\mu}_{cb}\partial_{\mu} - m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0,$$

więc po przedzieleniu przez (-1) dostaniemy

$$\left(\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} + m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0.$$

Pierwszy wyraz w nawiasie ma postać

$$\begin{aligned} \gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} &= (\gamma^{\nu}\gamma^{\mu})_{cb}\,\partial_{\nu}\partial_{\mu} = \left(\frac{1}{2}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)_{cb}\partial_{\nu}\partial_{\mu} + \left(\frac{1}{2}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right)_{cb}\partial_{\mu}\partial_{\nu} \\ &= \frac{1}{2}\left(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu} + \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right)_{cb}\partial_{\mu}\partial_{\nu} \end{aligned}$$

Drugi i trzeci wyraz w nawiasie kasują się

$$\left(-\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_\nu\partial_\mu - im\gamma^{\nu}_{cb}\partial_\nu + im\gamma^{\mu}_{cb}\partial_\mu - m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0,$$

więc po przedzieleniu przez (-1) dostaniemy

$$\left(\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_\nu\partial_\mu + m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0.$$

Pierwszy wyraz w nawiasie ma postać

$$\begin{aligned}\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_\nu\partial_\mu &= (\gamma^\nu\gamma^\mu)_{cb}\,\partial_\nu\partial_\mu = \left(\frac{1}{2}\gamma^\nu\gamma^\mu\right)_{cb}\partial_\nu\partial_\mu + \left(\frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\right)_{cb}\partial_\mu\partial_\nu \\ &= \frac{1}{2}\left(\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu\right)_{cb}\partial_\mu\partial_\nu = \frac{1}{2}\left(2g^{\mu\nu}\mathbb{I}\right)_{cb}\partial_\mu\partial_\nu\end{aligned}$$

Drugi i trzeci wyraz w nawiasie kasują się

$$\left(-\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} - im\gamma^{\nu}_{cb}\partial_{\nu} + im\gamma^{\mu}_{cb}\partial_{\mu} - m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0,$$

więc po przedzieleniu przez (-1) dostaniemy

$$\left(\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} + m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0.$$

Pierwszy wyraz w nawiasie ma postać

$$\begin{aligned}
\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} &= \left(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)_{cb}\partial_{\nu}\partial_{\mu} = \left(\frac{1}{2}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)_{cb}\partial_{\nu}\partial_{\mu} + \left(\frac{1}{2}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right)_{cb}\partial_{\mu}\partial_{\nu} \\
&= \frac{1}{2}\left(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu} + \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right)_{cb}\partial_{\mu}\partial_{\nu} = \frac{1}{2}\left(2g^{\mu\nu}\mathbb{I}\right)_{cb}\partial_{\mu}\partial_{\nu} \\
&= g^{\mu\nu}\delta_{cb}\partial_{\mu}\partial_{\nu} =
\end{aligned}$$

Drugi i trzeci wyraz w nawiasie kasują się

$$\left(-\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_\nu\partial_\mu - im\gamma^{\nu}_{cb}\partial_\nu + im\gamma^{\mu}_{cb}\partial_\mu - m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0,$$

więc po przedzieleniu przez (-1) dostaniemy

$$\left(\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_\nu\partial_\mu + m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0.$$

Pierwszy wyraz w nawiasie ma postać

$$\begin{aligned}
\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_\nu\partial_\mu &= (\gamma^\nu\gamma^\mu)_{cb}\,\partial_\nu\partial_\mu = \left(\frac{1}{2}\gamma^\nu\gamma^\mu\right)_{cb}\partial_\nu\partial_\mu + \left(\frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\right)_{cb}\partial_\mu\partial_\nu \\
&= \frac{1}{2}\left(\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu\right)_{cb}\partial_\mu\partial_\nu = \frac{1}{2}\left(2g^{\mu\nu}\mathbb{I}\right)_{cb}\partial_\mu\partial_\nu \\
&= g^{\mu\nu}\delta_{cb}\partial_\mu\partial_\nu = \delta_{cb}\partial_\mu\partial^\mu
\end{aligned}$$

Drugi i trzeci wyraz w nawiasie kasują się

$$\left(-\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} - im\gamma^{\nu}_{cb}\partial_{\nu} + im\gamma^{\mu}_{cb}\partial_{\mu} - m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0,$$

więc po przedzieleniu przez (-1) dostaniemy

$$\left(\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} + m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0.$$

Pierwszy wyraz w nawiasie ma postać

$$\begin{aligned}
\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} &= (\gamma^{\nu}\gamma^{\mu})_{cb}\,\partial_{\nu}\partial_{\mu} = \left(\frac{1}{2}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)_{cb}\partial_{\nu}\partial_{\mu} + \left(\frac{1}{2}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right)_{cb}\partial_{\mu}\partial_{\nu} \\
&= \frac{1}{2}\left(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu} + \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right)_{cb}\partial_{\mu}\partial_{\nu} = \frac{1}{2}\left(2g^{\mu\nu}\mathbb{I}\right)_{cb}\partial_{\mu}\partial_{\nu} \\
&= g^{\mu\nu}\delta_{cb}\partial_{\mu}\partial_{\nu} = \delta_{cb}\partial_{\mu}\partial^{\mu} = \delta_{cb}\Box.
\end{aligned}$$

Drugi i trzeci wyraz w nawiasie kasują się

$$\left(-\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_\nu\partial_\mu - im\gamma^{\nu}_{cb}\partial_\nu + im\gamma^{\mu}_{cb}\partial_\mu - m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0,$$

więc po przedzieleniu przez (-1) dostaniemy

$$\left(\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_\nu\partial_\mu + m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0.$$

Pierwszy wyraz w nawiasie ma postać

$$\begin{aligned}
\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_\nu\partial_\mu &= (\gamma^\nu\gamma^\mu)_{cb}\,\partial_\nu\partial_\mu = \left(\frac{1}{2}\gamma^\nu\gamma^\mu\right)_{cb}\partial_\nu\partial_\mu + \left(\frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\right)_{cb}\partial_\mu\partial_\nu \\
&= \frac{1}{2}\left(\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu\right)_{cb}\partial_\mu\partial_\nu = \frac{1}{2}\left(2g^{\mu\nu}\mathbb{I}\right)_{cb}\partial_\mu\partial_\nu \\
&= g^{\mu\nu}\delta_{cb}\partial_\mu\partial_\nu = \delta_{cb}\partial_\mu\partial^\mu = \delta_{cb}\Box.
\end{aligned}$$

Wstawmy ten wynik do równania

$$\left(\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} + m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0,$$

wówczas dostaniemy

$$\left(\delta_{cb}\Box + m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0,$$

a po wysumowaniu po b otrzymamy

Wstawmy ten wynik do równania

$$\left(\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} + m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0,$$

wówczas dostaniemy

$$\left(\delta_{cb}\Box + m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0,$$

a po wysumowaniu po b otrzymamy

$$\left(\Box + m^2\right)\psi_c(x) = 0, \qquad c = 1, 2, 3, 4.$$

Wstawmy ten wynik do równania

$$\left(\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} + m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0,$$

wówczas dostaniemy

$$\left(\delta_{cb}\Box + m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0,$$

a po wysumowaniu po b otrzymamy

$$\left(\Box + m^2\right)\psi_c(x) = 0, \qquad c = 1, 2, 3, 4.$$

To oznacza, że rozwiązania równania Diraca spełniają związek

$$E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad \Rightarrow \quad E^2 = \vec{p}^2 + m^2$$

Równanie Diraca

Wstawmy ten wynik do równania

$$\left(\gamma^{\nu}_{ca}\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\nu}\partial_{\mu} + m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0,$$

wówczas dostaniemy

$$\left(\delta_{cb}\Box + m^2\delta_{cb}\right)\psi_b(x) = 0,$$

a po wysumowaniu po b otrzymamy

$$\left(\Box + m^2\right)\psi_c(x) = 0, \qquad c = 1, 2, 3, 4.$$

To oznacza, że rozwiązania równania Diraca spełniają związek

$$E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad \Rightarrow \quad E^2 = \vec{p}^2 + m^2$$

a zatem ich energia może być dodatnia lub ujemna

$$E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

Istnienie rozwiązań o ujemnej energii początkowo wzbudzało niepokój, ale później okazało się, że reprezentują one antycząstki o energii $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ propagujące się przeciwnie do kierunku upływu czasu.

a zatem ich energia może być dodatnia lub ujemna

$$E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

Istnienie rozwiązań o ujemnej energii początkowo wzbudzało niepokój, ale później okazało się, że reprezentują one antycząstki o energii $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ propagujące się przeciwnie do kierunku upływu czasu.

Równanie sprzężone do równania Diraca

Sprzęgnijmy hermitowsko równanie Diraca

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\psi(x) = 0,$$

wówczas otrzymamy

$$\psi^{\dagger}(x)\left(-i\,\gamma^{\mu\,\dagger}\,\overleftarrow{\partial}_{\mu} - m\right) = 0,$$

gdzie strzałka nad pochodną oznacza, że działa ona na lewo.

Równanie sprzężone do równania Diraca

Sprzęgnijmy hermitowsko równanie Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0,$$

wówczas otrzymamy

$$\psi^\dagger(x)\left(-i\,\gamma^{\mu\,\dagger}\,\overleftarrow{\partial}_\mu - m\right) = 0,$$

gdzie strzałka nad pochodną oznacza, że działa ona na lewo. Skorzystajmy ze związku $\gamma^{\mu\,\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ i podzielmy obie strony przez (-1)

$$\psi^\dagger(x)\left(i\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\overleftarrow{\partial}_\mu + m\right) = 0.$$

Równanie sprzężone do równania Diraca

Sprzęgnijmy hermitowsko równanie Diraca

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0,$$

wówczas otrzymamy

$$\psi^\dagger(x)\left(-i\,\gamma^{\mu\,\dagger}\overleftarrow{\partial}_\mu - m\right) = 0,$$

gdzie strzałka nad pochodną oznacza, że działa ona na lewo. Skorzystajmy ze związku $\gamma^{\mu\,\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ i podzielmy obie strony przez (-1)

$$\psi^\dagger(x)\left(i\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\overleftarrow{\partial}_\mu + m\right) = 0.$$

Sprzęgnijmy hermitowsko równanie Diraca

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0,$$

wówczas otrzymamy

$$\psi^\dagger(x)\left(-i\,\gamma^{\mu\,\dagger}\,\overleftarrow{\partial}_\mu - m\right) = 0,$$

gdzie strzałka nad pochodną oznacza, że działa ona na lewo. Skorzystajmy ze związku $\gamma^{\mu\,\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ i podzielmy obie strony przez (-1)

$$\psi^\dagger(x)\left(i\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\overleftarrow{\partial}_\mu + m\right) = 0.$$

Równanie sprzężone do równania Diraca

Korzystając z faktu, że ${\gamma^0}^2 = \mathbb{I}$ nasze równanie możemy zapisać następująco

$$\psi^\dagger(x)\left(i\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\overleftarrow{\partial}_\mu + m\gamma^0\gamma^0\right) = 0,$$

a wyłączając odpowiednio γ^0 przed i poza nawias otrzymamy

$$\psi^\dagger(x)\gamma^0\left(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m\right)\gamma^0 = 0.$$

Równanie sprzężone do równania Diraca

Korzystając z faktu, że ${\gamma^0}^2 = \mathbb{I}$ nasze równanie możemy zapisać następująco

$$\psi^\dagger(x)\left(i\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\overleftarrow{\partial}_\mu + m\gamma^0\gamma^0\right) = 0,$$

a wyłączając odpowiednio γ^0 przed i poza nawias otrzymamy

$$\psi^\dagger(x)\gamma^0\left(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m\right)\gamma^0 = 0.$$

Pomnóżmy to równanie z prawej strony przez γ^0 i skorzystajmy ponownie z faktu, że ${\gamma^0}^2 = \mathbb{I}$

$$\psi^\dagger(x)\gamma^0\left(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m\right) = 0.$$

Zdefiniujmy sprzężenie Diraca

Równanie sprzężone do równania Diraca

Korzystając z faktu, że ${\gamma^0}^2 = \mathbb{I}$ nasze równanie możemy zapisać następująco

$$\psi^\dagger(x)\left(i\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\overleftarrow{\partial}_\mu + m\gamma^0\gamma^0\right) = 0,$$

a wyłączając odpowiednio γ^0 przed i poza nawias otrzymamy

$$\psi^\dagger(x)\gamma^0\left(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m\right)\gamma^0 = 0.$$

Pomnóżmy to równanie z prawej strony przez γ^0 i skorzystajmy ponownie z faktu, że ${\gamma^0}^2 = \mathbb{I}$

$$\psi^\dagger(x)\gamma^0\left(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m\right) = 0.$$

Zdefiniujmy sprzężenie Diraca

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0,$$

Korzystając z faktu, że ${\gamma^0}^2 = \mathbb{I}$ nasze równanie możemy zapisać następująco

$$\psi^\dagger(x)\left(i\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\overleftarrow{\partial}_\mu + m\gamma^0\gamma^0\right) = 0,$$

a wyłączając odpowiednio γ^0 przed i poza nawias otrzymamy

$$\psi^\dagger(x)\gamma^0\left(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m\right)\gamma^0 = 0.$$

Pomnóżmy to równanie z prawej strony przez γ^0 i skorzystajmy ponownie z faktu, że ${\gamma^0}^2 = \mathbb{I}$

$$\psi^\dagger(x)\gamma^0\left(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m\right) = 0.$$

Zdefiniujmy sprzężenie Diraca

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0,$$

Równanie sprzężone do równania Diraca

wówczas równanie sprzężone do równania Diraca przybiera postać

$$\bar{\psi}(x)\left(i\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial}_{\mu}+m\right)=0.$$

Aby uniknąć założenia, że pochodna działa na lewo, należałoby napisać to równanie w formie

$$i\partial_{\mu}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}+m\bar{\psi}(x)=0.$$

wówczas równanie sprzężone do równania Diraca przybiera postać

$$\bar{\psi}(x)\left(i\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial}_{\mu}+m\right)=0.$$

Aby uniknąć założenia, że pochodna działa na lewo, należałoby napisać to równanie w formie

$$i\partial_{\mu}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}+m\bar{\psi}(x)=0.$$

Mnożąc to równanie z prawej strony przez $\psi(x)$ dostaniemy

$$i\partial_{\mu}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)+m\bar{\psi}(x)\psi(x)=0,$$

Równanie sprzężone do równania Diraca

wówczas równanie sprzężone do równania Diraca przybiera postać

$$\bar{\psi}(x)\left(i\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial}_{\mu}+m\right)=0.$$

Aby uniknąć założenia, że pochodna działa na lewo, należałoby napisać to równanie w formie

$$i\partial_{\mu}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}+m\bar{\psi}(x)=0.$$

Mnożąc to równanie z prawej strony przez $\psi(x)$ dostaniemy

$$i\partial_{\mu}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)+m\bar{\psi}(x)\psi(x)=0,$$

gdzie pochodna działa tylko na $\bar{\psi}(x)$.

Równanie sprzężone do równania Diraca

wówczas równanie sprzężone do równania Diraca przybiera postać

$$\bar{\psi}(x)\left(i\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial}_{\mu}+m\right)=0.$$

Aby uniknąć założenia, że pochodna działa na lewo, należałoby napisać to równanie w formie

$$i\partial_{\mu}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}+m\bar{\psi}(x)=0.$$

Mnożąc to równanie z prawej strony przez $\psi(x)$ dostaniemy

$$i\partial_{\mu}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)+m\bar{\psi}(x)\psi(x)=0,$$

gdzie pochodna działa tylko na $\bar{\psi}(x)$.

Prąd Diraca

Mnożąc równanie Diraca z lewej strony przez $\bar{\psi}(x)$ dostaniemy

$$\bar{\psi}(x)\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi(x) = i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) = 0.$$

Dodajmy to równanie stronami do równania

$$i\partial_{\mu}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x) + m\bar{\psi}(x)\psi(x) = 0,$$

Prąd Diraca

Mnożąc równanie Diraca z lewej strony przez $\bar{\psi}(x)$ dostaniemy

$$\bar{\psi}(x)\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi(x) = i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) = 0.$$

Dodajmy to równanie stronami do równania

$$i\partial_{\mu}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x) + m\bar{\psi}(x)\psi(x) = 0,$$

wówczas dostaniemy

$$i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) + i\partial_{\mu}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x) + m\bar{\psi}(x)\psi(x) = 0.$$

Mnożąc równanie Diraca z lewej strony przez $\bar{\psi}(x)$ dostaniemy

$$\bar{\psi}(x)\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi(x) = i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) = 0.$$

Dodajmy to równanie stronami do równania

$$i\partial_{\mu}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x) + m\bar{\psi}(x)\psi(x) = 0,$$

wówczas dostaniemy

$$i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) + i\partial_{\mu}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x) + m\bar{\psi}(x)\psi(x) = 0.$$

Po skasowaniu wyrazów z masą otrzymamy

$$i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) + i\partial_{\mu}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x) = 0.$$

Prąd Diraca

Mnożąc równanie Diraca z lewej strony przez $\bar{\psi}(x)$ dostaniemy

$$\bar{\psi}(x)\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi(x) = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) = 0.$$

Dodajmy to równanie stronami do równania

$$i\partial_\mu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) + m\bar{\psi}(x)\psi(x) = 0,$$

wówczas dostaniemy

$$i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) + i\partial_\mu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) + m\bar{\psi}(x)\psi(x) = 0.$$

Po skasowaniu wyrazów z masą otrzymamy

$$i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) + i\partial_\mu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) = 0.$$

Prąd Diraca

Dzieląc obustronnie przez *i* otrzymamy

$$\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) + \partial_\mu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) = 0,$$

a po skorzystaniu z wzoru na pochodną iloczynu dostaniemy

$$\partial_\mu\left(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\right) = \partial_\mu j^\mu(x) = 0,$$

Prąd Diraca

Dieląc obustronnie przez i otrzymamy

$$\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) + \partial_\mu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) = 0,$$

a po skorzystaniu z wzoru na pochodną iloczynu dostaniemy

$$\partial_\mu\left(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\right) = \partial_\mu j^\mu(x) = 0,$$

gdzie zdefiniowaliśmy prąd Diraca

$$j^\mu(x) \equiv \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \equiv \left(\rho(x), \vec{j}(x)\right),$$

Prąd Diraca

Dzieląc obustronnie przez i otrzymamy

$$\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) + \partial_\mu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) = 0,$$

a po skorzystaniu z wzoru na pochodną iloczynu dostaniemy

$$\partial_\mu\left(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\right) = \partial_\mu j^\mu(x) = 0,$$

gdzie zdefiniowaliśmy prąd Diraca

$$j^\mu(x) \equiv \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \equiv \left(\rho(x), \vec{j}(x)\right),$$

który spełnia równanie ciągłości.

Prąd Diraca

Dzieląc obustronnie przez i otrzymamy

$$\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) + \partial_\mu \bar{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x) = 0,$$

a po skorzystaniu z wzoru na pochodną iloczynu dostaniemy

$$\partial_\mu \left(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x)\right) = \partial_\mu j^\mu(x) = 0,$$

gdzie zdefiniowaliśmy prąd Diraca

$$j^\mu(x) \equiv \bar{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x) \equiv \left(\rho(x), \vec{j}(x)\right),$$

który spełnia równanie ciągłości.

Prąd Diraca

Obliczmy zerową składową prądu Diraca

$$\rho \quad = \quad j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi$$

Prąd Diraca

Obliczmy zerową składową prądu Diraca

$$\rho = j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi$$

Prąd Diraca

Obliczmy zerową składową prądu Diraca

$$\rho = j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi$$

Prąd Diraca

Obliczmy zerową składową prądu Diraca

$$\rho = j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi$$

$$=$$

Prąd Diraca

Obliczmy zerową składową prądu Diraca

$$\begin{aligned}
\rho &= j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \\
&= (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Prąd Diraca

Obliczmy zerową składową prądu Diraca

$$
\begin{aligned}
\rho &= j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \\
&= (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 + \psi_4^*\psi_4
\end{aligned}
$$

Prąd Diraca

Obliczmy zerową składową prądu Diraca

$$
\begin{aligned}
\rho &= j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \\
&= (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 + \psi_4^*\psi_4 \\
&=
\end{aligned}
$$

Prąd Diraca

Obliczmy zerową składową prądu Diraca

$$
\begin{aligned}
\rho &= j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \\
&= (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} = \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 + \psi_4^*\psi_4 \\
&= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2
\end{aligned}
$$

Prąd Diraca

Obliczmy zerową składową prądu Diraca

$$\rho = j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi$$

$$= (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} = \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 + \psi_4^*\psi_4$$

$$= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \geqslant 0.$$

Prąd Diraca

Obliczmy zerową składową prądu Diraca

$$
\begin{aligned}
\rho &= j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \\
&= (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 + \psi_4^*\psi_4 \\
&= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Widzimy, że zerowa składowa prądu Diraca może być interpretowana jako gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki.

Prąd Diraca

Obliczmy zerową składową prądu Diraca

$$\begin{aligned}
\rho &= j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \\
&= (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} = \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 + \psi_4^*\psi_4 \\
&= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Widzimy, że zerowa składowa prądu Diraca może być interpretowana jako gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki.