Stacjonarny rachunek zaburzeń

Wykłady 17-18

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

W mechanice kwantowej podobnie jak w fizyce klasycznej niewiele problemów da się rozwiązać ściśle.
Na ogół konieczne jest stosowanie metod przybliżonych.

W mechanice kwantowej podobnie jak w fizyce klasycznej niewiele problemów da się rozwiązać ściśle.

Na ogół konieczne jest stosowanie metod przybliżonych.

Nie umniejsza to znaczenia ścisłych rozwiązań,

Metody przybliżone dla stanów związanych

W mechanice kwantowej podobnie jak w fizyce klasycznej niewiele problemów da się rozwiązać ściśle.
Na ogół konieczne jest stosowanie metod przybliżonych.
Nie umniejsza to znaczenia ścisłych rozwiązań, a wręcz je potęguje, gdyż ścisłe rozwiązania stanowią często punkt wyjścia dla rachunków przybliżonych.

W mechanice kwantowej podobnie jak w fizyce klasycznej niewiele problemów da się rozwiązać ściśle.
Na ogół konieczne jest stosowanie metod przybliżonych.
Nie umniejsza to znaczenia ścisłych rozwiązań, a wręcz je potęguje, gdyż ścisłe rozwiązania stanowią często punkt wyjścia dla rachunków przybliżonych.

Stacjonarny rachunek zaburzeń

Stacjonarny rachunek zaburzeń - rachunek zaburzeń bez czasu - polega na znajdowaniu zmian dyskretnych poziomów energii i funkcji własnych układu poddanego działaniu niewielkiego zaburzenia.

Zakładamy, że Hamiltonian w bezczasowym równaniu Schrödingera da się przedstawić w postaci

$$H = H_0 + H',$$

Stacjonarny rachunek zaburzeń - rachunek zaburzeń bez czasu - polega na znajdowaniu zmian dyskretnych poziomów energii i funkcji własnych układu poddanego działaniu niewielkiego zaburzenia.

Zakładamy, że Hamiltonian w bezczasowym równaniu Schrödingera da się przedstawić w postaci

$$H = H_0 + H',$$

gdzie H_0 jest na tyle prosty, że potrafimy dla niego rozwiązać bezczasowe równanie Schrödingera w sposób ścisły, Stacjonarny rachunek zaburzeń - rachunek zaburzeń bez czasu - polega na znajdowaniu zmian dyskretnych poziomów energii i funkcji własnych układu poddanego działaniu niewielkiego zaburzenia.

Zakładamy, że Hamiltonian w bezczasowym równaniu Schrödingera da się przedstawić w postaci

$$H = H_0 + H',$$

gdzie H_0 jest na tyle prosty, że potrafimy dla niego rozwiązać bezczasowe równanie Schrödingera w sposób ścisły, a H' jest na tyle mały, że można go traktować jako zaburzenie hamiltonianu H_0.

Stacjonarny rachunek zaburzeń

Stacjonarny rachunek zaburzeń - rachunek zaburzeń bez czasu - polega na znajdowaniu zmian dyskretnych poziomów energii i funkcji własnych układu poddanego działaniu niewielkiego zaburzenia.
Zakładamy, że Hamiltonian w bezczasowym równaniu Schrödingera da się przedstawić w postaci

$$H = H_0 + H',$$

gdzie H_0 jest na tyle prosty, że potrafimy dla niego rozwiązać bezczasowe równanie Schrödingera w sposób ścisły, a H' jest na tyle mały, że można go traktować jako zaburzenie hamiltonianu H_0.

Oznaczmy wartości własne i wektory własne pełnego hamiltonianu H przez W i $|\psi\rangle$, a hamiltonianu H_0 przez E_k i $|k\rangle$. Wówczas

$$H\,|\psi\rangle = W\,|\psi\rangle\,, \qquad H_0\,|k\rangle = E_k\,|k\rangle\,.$$

Oznaczmy wartości własne i wektory własne pełnego hamiltonianu H przez W i $|\psi\rangle$, a hamiltonianu H_0 przez E_k i $|k\rangle$. Wówczas

$$H\,|\psi\rangle = W\,|\psi\rangle\,, \qquad H_0\,|k\rangle = E_k\,|k\rangle\,.$$

Załóżmy, że wartości własne E_k nie są zdegenerowane

Oznaczmy wartości własne i wektory własne pełnego hamiltonianu H przez W i $|\psi\rangle$, a hamiltonianu H_0 przez E_k i $|k\rangle$. Wówczas

$$H\,|\psi\rangle = W\,|\psi\rangle\,, \qquad H_0\,|k\rangle = E_k\,|k\rangle\,.$$

Załóżmy, że wartości własne E_k nie są zdegenerowane i zastąpmy

$$H' \to \lambda H',$$

gdzie λ jest parametrem rzeczywistym, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Oznaczmy wartości własne i wektory własne pełnego hamiltonianu H przez W i $|\psi\rangle$, a hamiltonianu H_0 przez E_k i $|k\rangle$. Wówczas

$$H\,|\psi\rangle = W\,|\psi\rangle\,, \qquad H_0\,|k\rangle = E_k\,|k\rangle\,.$$

Załóżmy, że wartości własne E_k nie są zdegenerowane i zastąpmy

$$H' \to \lambda H',$$

gdzie λ jest parametrem rzeczywistym, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.
Zakładamy również, że W i $|\psi\rangle$ są analitycznymi funkcjami parametru λ,

Oznaczmy wartości własne i wektory własne pełnego hamiltonianu H przez W i $|\psi\rangle$, a hamiltonianu H_0 przez E_k i $|k\rangle$. Wówczas

$$H\,|\psi\rangle = W\,|\psi\rangle\,, \qquad H_0\,|k\rangle = E_k\,|k\rangle\,.$$

Załóżmy, że wartości własne E_k nie są zdegenerowane i zastąpmy

$$H' \to \lambda H',$$

gdzie λ jest parametrem rzeczywistym, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.
Zakładamy również, że W i $|\psi\rangle$ są analitycznymi funkcjami parametru λ, tzn., że możemy je rozwinąc w szereg potęgowy

$$|\psi\rangle \quad = \quad |\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + \lambda^3\,|\psi_3\rangle + ...,$$

Oznaczmy wartości własne i wektory własne pełnego hamiltonianu H przez W i $|\psi\rangle$, a hamiltonianu H_0 przez E_k i $|k\rangle$. Wówczas

$$H\,|\psi\rangle = W\,|\psi\rangle\,, \qquad H_0\,|k\rangle = E_k\,|k\rangle\,.$$

Załóżmy, że wartości własne E_k nie są zdegenerowane i zastąpmy

$$H' \to \lambda H',$$

gdzie λ jest parametrem rzeczywistym, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.
Zakładamy również, że W i $|\psi\rangle$ są analitycznymi funkcjami parametru λ, tzn., że możemy je rozwinąc w szereg potęgowy

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + \lambda^3\,|\psi_3\rangle + \ldots, \\ W & \end{aligned}$$

Oznaczmy wartości własne i wektory własne pełnego hamiltonianu H przez W i $|\psi\rangle$, a hamiltonianu H_0 przez E_k i $|k\rangle$. Wówczas

$$H\,|\psi\rangle = W\,|\psi\rangle\,, \qquad H_0\,|k\rangle = E_k\,|k\rangle\,.$$

Załóżmy, że wartości własne E_k nie są zdegenerowane i zastąpmy

$$H' \to \lambda H',$$

gdzie λ jest parametrem rzeczywistym, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.
Zakładamy również, że W i $|\psi\rangle$ są analitycznymi funkcjami parametru λ, tzn., że możemy je rozwinąc w szereg potęgowy

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + \lambda^3\,|\psi_3\rangle + \ldots, \\ W &= \end{aligned}$$

Oznaczmy wartości własne i wektory własne pełnego hamiltonianu H przez W i $|\psi\rangle$, a hamiltonianu H_0 przez E_k i $|k\rangle$. Wówczas

$$H\,|\psi\rangle = W\,|\psi\rangle\,, \qquad H_0\,|k\rangle = E_k\,|k\rangle\,.$$

Załóżmy, że wartości własne E_k nie są zdegenerowane i zastąpmy

$$H' \to \lambda H',$$

gdzie λ jest parametrem rzeczywistym, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.
Zakładamy również, że W i $|\psi\rangle$ są analitycznymi funkcjami parametru λ, tzn., że możemy je rozwinąc w szereg potęgowy

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + \lambda^3\,|\psi_3\rangle + ..., \\ W &= W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \lambda^3 W_3 + ... \end{aligned}$$

Oznaczmy wartości własne i wektory własne pełnego hamiltonianu H przez W i $|\psi\rangle$, a hamiltonianu H_0 przez E_k i $|k\rangle$. Wówczas

$$H\,|\psi\rangle = W\,|\psi\rangle\,, \qquad H_0\,|k\rangle = E_k\,|k\rangle\,.$$

Załóżmy, że wartości własne E_k nie są zdegenerowane i zastąpmy

$$H' \to \lambda H',$$

gdzie λ jest parametrem rzeczywistym, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.
Zakładamy również, że W i $|\psi\rangle$ są analitycznymi funkcjami parametru λ, tzn., że możemy je rozwinąc w szereg potęgowy

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + \lambda^3\,|\psi_3\rangle + ..., \\ W &= W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \lambda^3 W_3 + ... \end{aligned}$$

Wstawmy te rozwinięcia do bezczasowego równania Schrödingera, $H\left|\psi\right\rangle = W\left|\psi\right\rangle$

$$\left(H_0 + \lambda H'\right)\left(\left|\psi_0\right\rangle + \lambda\left|\psi_1\right\rangle + \lambda^2\left|\psi_2\right\rangle + \ldots\right) =$$

Wstawmy te rozwinięcia do bezczasowego równania Schrödingera, $H\,|\psi\rangle = W\,|\psi\rangle$

$$(H_0 + \lambda H')\left(|\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + \ldots\right) =$$

$$\left(W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots\right)$$

Wstawmy te rozwinięcia do bezczasowego równania Schrödingera, $H\,|\psi\rangle = W\,|\psi\rangle$

$$
\begin{aligned}
&(H_0 + \lambda H') \left(|\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + \ldots \right) = \\
&\left(W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots \right) \left(|\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + \ldots \right),
\end{aligned}
$$

Wstawmy te rozwinięcia do bezczasowego równania Schrödingera, $H|\psi\rangle = W|\psi\rangle$

$$(H_0 + \lambda H')\left(|\psi_0\rangle + \lambda|\psi_1\rangle + \lambda^2|\psi_2\rangle + ...\right) =$$
$$\left(W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + ...\right)\left(|\psi_0\rangle + \lambda|\psi_1\rangle + \lambda^2|\psi_2\rangle + ...\right),$$

skorzystajmy z definicji mnożenia operatora przez liczbę, z liniowości operatora H' i wykonajmy mnożenie, porządkując wynik wg potęg λ

Wstawmy te rozwinięcia do bezczasowego równania Schrödingera, $H\,|\psi\rangle = W\,|\psi\rangle$

$$(H_0 + \lambda H')\left(|\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + \ldots\right) =$$
$$\left(W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots\right)\left(|\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + \ldots\right),$$

skorzystajmy z definicji mnożenia operatora przez liczbę, z liniowości operatora H' i wykonajmy mnożenie, porządkując wynik wg potęg λ

$$H_0\,|\psi_0\rangle$$

Wstawmy te rozwinięcia do bezczasowego równania Schrödingera, $H\,|\psi\rangle = W\,|\psi\rangle$

$$(H_0 + \lambda H')\left(|\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + \ldots\right) =$$
$$\left(W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots\right)\left(|\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + \ldots\right),$$

skorzystajmy z definicji mnożenia operatora przez liczbę, z liniowości operatora H' i wykonajmy mnożenie, porządkując wynik wg potęg λ

$$H_0\,|\psi_0\rangle + \lambda\left(H_0\,|\psi_1\rangle + H'\,|\psi_0\rangle\right)$$

Wstawmy te rozwinięcia do bezczasowego równania Schrödingera, $H\left|\psi\right\rangle = W\left|\psi\right\rangle$

$$\left(H_0+\lambda H'\right)\Big(\left|\psi_0\right\rangle+\lambda\left|\psi_1\right\rangle+\lambda^2\left|\psi_2\right\rangle+\ldots\Big)=$$
$$\Big(W_0+\lambda W_1+\lambda^2 W_2+\ldots\Big)\Big(\left|\psi_0\right\rangle+\lambda\left|\psi_1\right\rangle+\lambda^2\left|\psi_2\right\rangle+\ldots\Big),$$

skorzystajmy z definicji mnożenia operatora przez liczbę, z liniowości operatora H' i wykonajmy mnożenie, porządkując wynik wg potęg λ

$$H_0\left|\psi_0\right\rangle+\lambda\left(H_0\left|\psi_1\right\rangle+H'\left|\psi_0\right\rangle\right)+\lambda^2\left(H_0\left|\psi_2\right\rangle+H'\left|\psi_1\right\rangle\right)+\ldots$$

Stacjonarny rachunek zaburzeń

Wstawmy te rozwinięcia do bezczasowego równania Schrödingera, $H\,|\psi\rangle = W\,|\psi\rangle$

$$\left(H_0 + \lambda H'\right)\Big(|\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + \ldots\Big) =$$
$$\Big(W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots\Big)\,\Big(|\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + \ldots\Big),$$

skorzystajmy z definicji mnożenia operatora przez liczbę, z liniowości operatora H' i wykonajmy mnożenie, porządkując wynik wg potęg λ

$$H_0\,|\psi_0\rangle + \lambda\left(H_0\,|\psi_1\rangle + H'\,|\psi_0\rangle\right) + \lambda^2\left(H_0\,|\psi_2\rangle + H'\,|\psi_1\rangle\right) + \ldots$$

$$=$$

Stacjonarny rachunek zaburzeń

Wstawmy te rozwinięcia do bezczasowego równania Schrödingera, $H|\psi\rangle = W|\psi\rangle$

$$(H_0 + \lambda H')\left(|\psi_0\rangle + \lambda|\psi_1\rangle + \lambda^2|\psi_2\rangle + \ldots\right) =$$
$$\left(W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots\right)\left(|\psi_0\rangle + \lambda|\psi_1\rangle + \lambda^2|\psi_2\rangle + \ldots\right),$$

skorzystajmy z definicji mnożenia operatora przez liczbę, z liniowości operatora H' i wykonajmy mnożenie, porządkując wynik wg potęg λ

$$\begin{aligned} & H_0|\psi_0\rangle + \lambda\left(H_0|\psi_1\rangle + H'|\psi_0\rangle\right) + \lambda^2\left(H_0|\psi_2\rangle + H'|\psi_1\rangle\right) + \ldots \\ = \; & W_0|\psi_0\rangle \end{aligned}$$

Wstawmy te rozwinięcia do bezczasowego równania Schrödingera, $H\,|\psi\rangle = W\,|\psi\rangle$

$$\left(H_0 + \lambda H'\right)\left(|\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + ...\right) =$$
$$\left(W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + ...\right)\left(|\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + ...\right),$$

skorzystajmy z definicji mnożenia operatora przez liczbę, z liniowości operatora H' i wykonajmy mnożenie, porządkując wynik wg potęg λ

$$\begin{aligned} & H_0\,|\psi_0\rangle + \lambda\left(H_0\,|\psi_1\rangle + H'\,|\psi_0\rangle\right) + \lambda^2\left(H_0\,|\psi_2\rangle + H'\,|\psi_1\rangle\right) + ... \\ = \quad & W_0\,|\psi_0\rangle + \lambda\left(W_0\,|\psi_1\rangle + W_1\,|\psi_0\rangle\right) \end{aligned}$$

Stacjonarny rachunek zaburzeń

Wstawmy te rozwinięcia do bezczasowego równania Schrödingera, $H\,|\psi\rangle = W\,|\psi\rangle$

$$
\begin{gathered}
(H_0 + \lambda H')\left(|\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + \ldots\right) = \\
\left(W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots\right)\left(|\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + \ldots\right),
\end{gathered}
$$

skorzystajmy z definicji mnożenia operatora przez liczbę, z liniowości operatora H' i wykonajmy mnożenie, porządkując wynik wg potęg λ

$$
\begin{aligned}
& H_0\,|\psi_0\rangle + \lambda\left(H_0\,|\psi_1\rangle + H'\,|\psi_0\rangle\right) + \lambda^2\left(H_0\,|\psi_2\rangle + H'\,|\psi_1\rangle\right) + \ldots \\
= \quad & W_0\,|\psi_0\rangle + \lambda\left(W_0\,|\psi_1\rangle + W_1\,|\psi_0\rangle\right) + \lambda^2\left(W_0\,|\psi_2\rangle + W_1\,|\psi_1\rangle\right.
\end{aligned}
$$

Wstawmy te rozwinięcia do bezczasowego równania Schrödingera, $H\,|\psi\rangle = W\,|\psi\rangle$

$$(H_0 + \lambda H')\left(|\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + \ldots\right) =$$
$$\left(W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots\right)\left(|\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + \ldots\right),$$

skorzystajmy z definicji mnożenia operatora przez liczbę, z liniowości operatora H' i wykonajmy mnożenie, porządkując wynik wg potęg λ

$$\begin{aligned} & H_0\,|\psi_0\rangle + \lambda\left(H_0\,|\psi_1\rangle + H'\,|\psi_0\rangle\right) + \lambda^2\left(H_0\,|\psi_2\rangle + H'\,|\psi_1\rangle\right) + \ldots \\ = \; & W_0\,|\psi_0\rangle + \lambda\left(W_0\,|\psi_1\rangle + W_1\,|\psi_0\rangle\right) + \lambda^2\left(W_0\,|\psi_2\rangle + W_1\,|\psi_1\rangle \right. \\ & \left. + W_2\,|\psi_0\rangle\right) + \ldots \end{aligned}$$

Wstawmy te rozwinięcia do bezczasowego równania Schrödingera, $H\,|\psi\rangle = W\,|\psi\rangle$

$$\begin{aligned}&(H_0 + \lambda H')\left(|\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + ...\right) = \\ &\left(W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + ...\right)\left(|\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + ...\right),\end{aligned}$$

skorzystajmy z definicji mnożenia operatora przez liczbę, z liniowości operatora H' i wykonajmy mnożenie, porządkując wynik wg potęg λ

$$\begin{aligned}& H_0\,|\psi_0\rangle + \lambda\left(H_0\,|\psi_1\rangle + H'\,|\psi_0\rangle\right) + \lambda^2\left(H_0\,|\psi_2\rangle + H'\,|\psi_1\rangle\right) + ... \\ = \;& W_0\,|\psi_0\rangle + \lambda\left(W_0\,|\psi_1\rangle + W_1\,|\psi_0\rangle\right) + \lambda^2\left(W_0\,|\psi_2\rangle + W_1\,|\psi_1\rangle \right. \\ & \left. + W_2\,|\psi_0\rangle\right) + ...\end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach λ w równaniu

$$\begin{aligned} & H_0 |\psi_0\rangle + \lambda \left(H_0 |\psi_1\rangle + H' |\psi_0\rangle \right) + \lambda^2 \left(H_0 |\psi_2\rangle + H' |\psi_1\rangle \right) + \ldots \\ = \quad & W_0 |\psi_0\rangle + \lambda \left(W_0 |\psi_1\rangle + W_1 |\psi_0\rangle \right) + \lambda^2 \left(W_0 |\psi_2\rangle + W_1 |\psi_1\rangle \right. \\ & \left. + W_2 |\psi_0\rangle \right) + \ldots \end{aligned}$$

dostaniemy

$$(H_0 - W_0) |\psi_0\rangle$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach λ w równaniu

$$
\begin{aligned}
& H_0 \left|\psi_0\right\rangle + \lambda \left(H_0 \left|\psi_1\right\rangle + H' \left|\psi_0\right\rangle\right) + \lambda^2 \left(H_0 \left|\psi_2\right\rangle + H' \left|\psi_1\right\rangle\right) + \ldots \\
= \; & W_0 \left|\psi_0\right\rangle + \lambda \left(W_0 \left|\psi_1\right\rangle + W_1 \left|\psi_0\right\rangle\right) + \lambda^2 \left(W_0 \left|\psi_2\right\rangle + W_1 \left|\psi_1\right\rangle \right. \\
& \left. + W_2 \left|\psi_0\right\rangle\right) + \ldots
\end{aligned}
$$

dostaniemy

$$
\left(H_0 - W_0\right) \left|\psi_0\right\rangle =
$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach λ w równaniu

$$\begin{aligned} & H_0 |\psi_0\rangle + \lambda \left(H_0 |\psi_1\rangle + H' |\psi_0\rangle\right) + \lambda^2 \left(H_0 |\psi_2\rangle + H' |\psi_1\rangle\right) + \ldots \\ = \; & W_0 |\psi_0\rangle + \lambda \left(W_0 |\psi_1\rangle + W_1 |\psi_0\rangle\right) + \lambda^2 \left(W_0 |\psi_2\rangle + W_1 |\psi_1\rangle \right. \\ & \left. + W_2 |\psi_0\rangle\right) + \ldots \end{aligned}$$

dostaniemy

$$(H_0 - W_0) |\psi_0\rangle = 0,$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach λ w równaniu

$$\begin{aligned} & H_0 |\psi_0\rangle + \lambda \left(H_0 |\psi_1\rangle + H' |\psi_0\rangle\right) + \lambda^2 \left(H_0 |\psi_2\rangle + H' |\psi_1\rangle\right) + \ldots \\ = \quad & W_0 |\psi_0\rangle + \lambda \left(W_0 |\psi_1\rangle + W_1 |\psi_0\rangle\right) + \lambda^2 \left(W_0 |\psi_2\rangle + W_1 |\psi_1\rangle \right. \\ & \left. + W_2 |\psi_0\rangle\right) + \ldots \end{aligned}$$

dostaniemy

$$\begin{aligned} (H_0 - W_0) |\psi_0\rangle &= 0, \\ (H_0 - W_0) |\psi_1\rangle & \end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach λ w równaniu

$$\begin{aligned} & H_0 \left|\psi_0\right\rangle + \lambda\left(H_0 \left|\psi_1\right\rangle + H' \left|\psi_0\right\rangle\right) + \lambda^2\left(H_0 \left|\psi_2\right\rangle + H' \left|\psi_1\right\rangle\right) + \ldots \\ = \; & W_0 \left|\psi_0\right\rangle + \lambda\left(W_0 \left|\psi_1\right\rangle + W_1 \left|\psi_0\right\rangle\right) + \lambda^2\left(W_0 \left|\psi_2\right\rangle + W_1 \left|\psi_1\right\rangle \right. \\ & \left. + W_2 \left|\psi_0\right\rangle\right) + \ldots \end{aligned}$$

dostaniemy

$$\begin{aligned} (H_0 - W_0)\left|\psi_0\right\rangle &= 0, \\ (H_0 - W_0)\left|\psi_1\right\rangle &= \end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach λ w równaniu

$$
\begin{aligned}
& H_0 \left|\psi_0\right\rangle + \lambda\left(H_0 \left|\psi_1\right\rangle + H' \left|\psi_0\right\rangle\right) + \lambda^2\left(H_0 \left|\psi_2\right\rangle + H' \left|\psi_1\right\rangle\right) + \ldots \\
= \;& W_0 \left|\psi_0\right\rangle + \lambda\left(W_0 \left|\psi_1\right\rangle + W_1 \left|\psi_0\right\rangle\right) + \lambda^2\left(W_0 \left|\psi_2\right\rangle + W_1 \left|\psi_1\right\rangle \right. \\
& \left. + W_2 \left|\psi_0\right\rangle\right) + \ldots
\end{aligned}
$$

dostaniemy

$$
\begin{aligned}
\left(H_0 - W_0\right)\left|\psi_0\right\rangle &= 0, \\
\left(H_0 - W_0\right)\left|\psi_1\right\rangle &= \left(W_1 - H'\right)\left|\psi_0\right\rangle,
\end{aligned}
$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach λ w równaniu

$$\begin{aligned} & H_0 |\psi_0\rangle + \lambda \left(H_0 |\psi_1\rangle + H' |\psi_0\rangle \right) + \lambda^2 \left(H_0 |\psi_2\rangle + H' |\psi_1\rangle \right) + \dots \\ = \; & W_0 |\psi_0\rangle + \lambda \left(W_0 |\psi_1\rangle + W_1 |\psi_0\rangle \right) + \lambda^2 \left(W_0 |\psi_2\rangle + W_1 |\psi_1\rangle \right. \\ & \left. + W_2 |\psi_0\rangle \right) + \dots \end{aligned}$$

dostaniemy

$$\begin{aligned} (H_0 - W_0) |\psi_0\rangle &= 0, \\ (H_0 - W_0) |\psi_1\rangle &= (W_1 - H') |\psi_0\rangle, \\ (H_0 - W_0) |\psi_2\rangle & \end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach λ w równaniu

$$\begin{aligned} & H_0 |\psi_0\rangle + \lambda \left(H_0 |\psi_1\rangle + H' |\psi_0\rangle\right) + \lambda^2 \left(H_0 |\psi_2\rangle + H' |\psi_1\rangle\right) + \ldots \\ = \ & W_0 |\psi_0\rangle + \lambda \left(W_0 |\psi_1\rangle + W_1 |\psi_0\rangle\right) + \lambda^2 \left(W_0 |\psi_2\rangle + W_1 |\psi_1\rangle \right. \\ & \left. + W_2 |\psi_0\rangle\right) + \ldots \end{aligned}$$

dostaniemy

$$\begin{aligned} (H_0 - W_0) |\psi_0\rangle &= 0, \\ (H_0 - W_0) |\psi_1\rangle &= (W_1 - H') |\psi_0\rangle, \\ (H_0 - W_0) |\psi_2\rangle &= \end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach λ w równaniu

$$\begin{aligned} & H_0 \left|\psi_0\right\rangle + \lambda \left(H_0 \left|\psi_1\right\rangle + H' \left|\psi_0\right\rangle\right) + \lambda^2 \left(H_0 \left|\psi_2\right\rangle + H' \left|\psi_1\right\rangle\right) + \ldots \\ = \; & W_0 \left|\psi_0\right\rangle + \lambda \left(W_0 \left|\psi_1\right\rangle + W_1 \left|\psi_0\right\rangle\right) + \lambda^2 \left(W_0 \left|\psi_2\right\rangle + W_1 \left|\psi_1\right\rangle \right. \\ & \left. + W_2 \left|\psi_0\right\rangle\right) + \ldots \end{aligned}$$

dostaniemy

$$\begin{aligned} (H_0 - W_0) \left|\psi_0\right\rangle &= 0, \\ (H_0 - W_0) \left|\psi_1\right\rangle &= (W_1 - H') \left|\psi_0\right\rangle, \\ (H_0 - W_0) \left|\psi_2\right\rangle &= (W_1 - H') \left|\psi_1\right\rangle + W_2 \left|\psi_0\right\rangle, \end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach λ w równaniu

$$\begin{aligned} & H_0 \left|\psi_0\right\rangle + \lambda \left(H_0 \left|\psi_1\right\rangle + H' \left|\psi_0\right\rangle\right) + \lambda^2 \left(H_0 \left|\psi_2\right\rangle + H' \left|\psi_1\right\rangle\right) + \dots \\ = \; & W_0 \left|\psi_0\right\rangle + \lambda \left(W_0 \left|\psi_1\right\rangle + W_1 \left|\psi_0\right\rangle\right) + \lambda^2 \left(W_0 \left|\psi_2\right\rangle + W_1 \left|\psi_1\right\rangle \right. \\ & \left. + W_2 \left|\psi_0\right\rangle\right) + \dots \end{aligned}$$

dostaniemy

$$\begin{aligned} (H_0 - W_0) \left|\psi_0\right\rangle &= 0, \\ (H_0 - W_0) \left|\psi_1\right\rangle &= (W_1 - H') \left|\psi_0\right\rangle, \\ (H_0 - W_0) \left|\psi_2\right\rangle &= (W_1 - H') \left|\psi_1\right\rangle + W_2 \left|\psi_0\right\rangle, \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach λ w równaniu

$$\begin{aligned} & H_0 \left|\psi_0\right\rangle + \lambda \left(H_0 \left|\psi_1\right\rangle + H' \left|\psi_0\right\rangle\right) + \lambda^2 \left(H_0 \left|\psi_2\right\rangle + H' \left|\psi_1\right\rangle\right) + \ldots \\ = \; & W_0 \left|\psi_0\right\rangle + \lambda \left(W_0 \left|\psi_1\right\rangle + W_1 \left|\psi_0\right\rangle\right) + \lambda^2 \left(W_0 \left|\psi_2\right\rangle + W_1 \left|\psi_1\right\rangle \right. \\ & \left. + W_2 \left|\psi_0\right\rangle\right) + \ldots \end{aligned}$$

dostaniemy

$$\begin{aligned} (H_0 - W_0) \left|\psi_0\right\rangle &= 0, \\ (H_0 - W_0) \left|\psi_1\right\rangle &= (W_1 - H') \left|\psi_0\right\rangle, \\ (H_0 - W_0) \left|\psi_2\right\rangle &= (W_1 - H') \left|\psi_1\right\rangle + W_2 \left|\psi_0\right\rangle, \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy układ równań

$$\begin{aligned}(H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle &= 0\\ (H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle\\ (H_0 - W_0)\,|\psi_2\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,|\psi_0\rangle, \quad \text{itd.}\end{aligned}$$

Pierwsze równanie oznacza

$$H_0\,|\psi_0\rangle = W_0\,|\psi_0\rangle$$

Otrzymaliśmy układ równań

$$\begin{aligned}(H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle &= 0\\ (H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle\\ (H_0 - W_0)\,|\psi_2\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,|\psi_0\rangle, \quad \text{itd.}\end{aligned}$$

Pierwsze równanie oznacza

$$H_0\,|\psi_0\rangle = W_0\,|\psi_0\rangle \quad \Leftrightarrow \quad H_0\,|m\rangle = E_m\,|m\rangle\,,$$

Otrzymaliśmy układ równań

$$\begin{aligned} (H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle &= 0 \\ (H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle \\ (H_0 - W_0)\,|\psi_2\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,|\psi_0\rangle, \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

Pierwsze równanie oznacza

$$H_0\,|\psi_0\rangle = W_0\,|\psi_0\rangle \quad \Leftrightarrow \quad H_0\,|m\rangle = E_m\,|m\rangle\,,$$

gdzie przyjęliśmy $W_0 = E_m$ i $|\psi_0\rangle = |m\rangle$.

Otrzymaliśmy układ równań

$$\begin{aligned}(H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle &= 0 \\ (H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle \\ (H_0 - W_0)\,|\psi_2\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,|\psi_0\rangle, \quad \text{itd.}\end{aligned}$$

Pierwsze równanie oznacza

$$H_0\,|\psi_0\rangle = W_0\,|\psi_0\rangle \quad \Leftrightarrow \quad H_0\,|m\rangle = E_m\,|m\rangle\,,$$

gdzie przyjęliśmy $W_0 = E_m$ i $|\psi_0\rangle = |m\rangle$.
Zakładamy, że wartość własna E_m jest niezdegenerowana, a stan $|m\rangle$ jest dyskretny, gdyż reprezentuje stan związany.

Otrzymaliśmy układ równań

$$
\begin{aligned}
(H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle &= 0 \\
(H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle \\
(H_0 - W_0)\,|\psi_2\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,|\psi_0\rangle, \quad \text{itd.}
\end{aligned}
$$

Pierwsze równanie oznacza

$$
H_0\,|\psi_0\rangle = W_0\,|\psi_0\rangle \quad \Leftrightarrow \quad H_0\,|m\rangle = E_m\,|m\rangle\,,
$$

gdzie przyjęliśmy $W_0 = E_m$ i $|\psi_0\rangle = |m\rangle$.
Zakładamy, że wartość własna E_m jest niezdegenerowana, a stan $|m\rangle$ jest dyskretny, gdyż reprezentuje stan związany.

Zauważmy, że w naszym układzie

$$
\begin{aligned}
(H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle &= 0 \\
(H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle \\
(H_0 - W_0)\,|\psi_2\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,|\psi_0\rangle, \quad \text{itd.}
\end{aligned}
$$

wyższe wyrazy rozwinięcia $|\psi\rangle$ w szereg perturbacyjny, występujące po lewej stronie, wyrażają się przez niższe wyrazy rozwinięcia, występujące po stronie prawej.

Czyli wyliczenie $|\psi_0\rangle$ z pierwszego równania

Zauważmy, że w naszym układzie

$$\begin{aligned} (H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle &= 0 \\ (H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle \\ (H_0 - W_0)\,|\psi_2\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,|\psi_0\rangle, \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

wyższe wyrazy rozwinięcia $|\psi\rangle$ w szereg perturbacyjny, występujące po lewej stronie, wyrażają się przez niższe wyrazy rozwinięcia, występujące po stronie prawej.
Czyli wyliczenie $|\psi_0\rangle$ z pierwszego równania pozwala wyliczyć $|\psi_1\rangle$ z drugiego równania,

Zauważmy, że w naszym układzie

$$\begin{aligned} (H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle &= 0 \\ (H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle \\ (H_0 - W_0)\,|\psi_2\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,|\psi_0\rangle, \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

wyższe wyrazy rozwinięcia $|\psi\rangle$ w szereg perturbacyjny, występujące po lewej stronie, wyrażają się przez niższe wyrazy rozwinięcia, występujące po stronie prawej.
Czyli wyliczenie $|\psi_0\rangle$ z pierwszego równania pozwala wyliczyć $|\psi_1\rangle$ z drugiego równania, a następnie $|\psi_2\rangle$ z trzeciego równania, itd.

Zauważmy, że w naszym układzie

$$\begin{aligned}(H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle &= 0 \\ (H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle \\ (H_0 - W_0)\,|\psi_2\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,|\psi_0\rangle, \quad \text{itd.}\end{aligned}$$

wyższe wyrazy rozwinięcia $|\psi\rangle$ w szereg perturbacyjny, występujące po lewej stronie, wyrażają się przez niższe wyrazy rozwinięcia, występujące po stronie prawej.
Czyli wyliczenie $|\psi_0\rangle$ z pierwszego równania pozwala wyliczyć $|\psi_1\rangle$ z drugiego równania, a następnie $|\psi_2\rangle$ z trzeciego równania, itd.

Przekształćmy wektory stanu $|\psi_i\rangle$, $i = 1, 2, ...$, następująco

$$|\psi_i\rangle \;\rightarrow\; |\psi_i'\rangle = |\psi_i\rangle + \alpha_i\,|\psi_0\rangle\,.$$

Dzięki pierwszemu równaniu, $(H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle = 0$, drugie równanie naszego układu pozostanie niezmienione.

Przekształćmy wektory stanu $|\psi_i\rangle$, $i = 1, 2, ...,$ następująco

$$|\psi_i\rangle \;\rightarrow\; |\psi_i'\rangle = |\psi_i\rangle + \alpha_i\,|\psi_0\rangle\,.$$

Dzięki pierwszemu równaniu, $(H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle = 0$, drugie równanie naszego układu pozostanie niezmienione. Rzeczywiście

$$(H_0 - W_0)\,|\psi_1'\rangle$$

Przekształćmy wektory stanu $|\psi_i\rangle$, $i = 1, 2, ...$, następująco

$$|\psi_i\rangle \;\rightarrow\; |\psi_i'\rangle = |\psi_i\rangle + \alpha_i \,|\psi_0\rangle \,.$$

Dzięki pierwszemu równaniu, $(H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle = 0$, drugie równanie naszego układu pozostanie niezmienione. Rzeczywiście

$$(H_0 - W_0)\,|\psi_1'\rangle \quad =$$

Przekształćmy wektory stanu $|\psi_i\rangle$, $i = 1, 2, ...$, następująco

$$|\psi_i\rangle \;\longrightarrow\; |\psi_i'\rangle = |\psi_i\rangle + \alpha_i\,|\psi_0\rangle\,.$$

Dzięki pierwszemu równaniu, $(H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle = 0$, drugie równanie naszego układu pozostanie niezmienione. Rzeczywiście

$$(H_0 - W_0)\,|\psi_1'\rangle \quad = \quad (H_0 - W_0)\,(|\psi_1\rangle + \alpha_1\,|\psi_0\rangle)$$

Przekształćmy wektory stanu $|\psi_i\rangle$, $i = 1, 2, ...$, następująco

$$|\psi_i\rangle \;\rightarrow\; |\psi_i'\rangle = |\psi_i\rangle + \alpha_i\,|\psi_0\rangle\,.$$

Dzięki pierwszemu równaniu, $(H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle = 0$, drugie równanie naszego układu pozostanie niezmienione. Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(H_0 - W_0)\,|\psi_1'\rangle &= (H_0 - W_0)\,(|\psi_1\rangle + \alpha_1\,|\psi_0\rangle) \\ &= \end{aligned}$$

Przekształćmy wektory stanu $|\psi_i\rangle$, $i = 1, 2, ...$, następująco

$$|\psi_i\rangle \;\rightarrow\; |\psi_i'\rangle = |\psi_i\rangle + \alpha_i\,|\psi_0\rangle\,.$$

Dzięki pierwszemu równaniu, $(H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle = 0$, drugie równanie naszego układu pozostanie niezmienione. Rzeczywiście

$$\begin{aligned} (H_0 - W_0)\,|\psi_1'\rangle &= (H_0 - W_0)\,(|\psi_1\rangle + \alpha_1\,|\psi_0\rangle) \\ &= (H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle \end{aligned}$$

Przekształćmy wektory stanu $|\psi_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots$, następująco

$$|\psi_i\rangle \;\rightarrow\; |\psi_i'\rangle = |\psi_i\rangle + \alpha_i\,|\psi_0\rangle\,.$$

Dzięki pierwszemu równaniu, $(H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle = 0$, drugie równanie naszego układu pozostanie niezmienione. Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(H_0 - W_0)\,|\psi_1'\rangle &= (H_0 - W_0)\,(|\psi_1\rangle + \alpha_1\,|\psi_0\rangle)\\ &= (H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle = (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle\,.\end{aligned}$$

Przekształćmy wektory stanu $|\psi_i\rangle$, $i = 1, 2, ...$, następująco

$$|\psi_i\rangle \;\rightarrow\; |\psi'_i\rangle = |\psi_i\rangle + \alpha_i\, |\psi_0\rangle\,.$$

Dzięki pierwszemu równaniu, $(H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle = 0$, drugie równanie naszego układu pozostanie niezmienione. Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(H_0 - W_0)\,|\psi'_1\rangle &= (H_0 - W_0)\,(|\psi_1\rangle + \alpha_1\,|\psi_0\rangle)\\ &= (H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle = (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle\,.\end{aligned}$$

Czyli $|\psi'_1\rangle$ wyraża się przez $|\psi_0\rangle$ dokładnie tak samo jak $|\psi_1\rangle$.

Stacjonarny rachunek zaburzeń

Przekształćmy wektory stanu $|\psi_i\rangle$, $i = 1, 2, ...$, następująco

$$|\psi_i\rangle \;\rightarrow\; |\psi_i'\rangle = |\psi_i\rangle + \alpha_i\,|\psi_0\rangle\,.$$

Dzięki pierwszemu równaniu, $(H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle = 0$, drugie równanie naszego układu pozostanie niezmienione. Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(H_0 - W_0)\,|\psi_1'\rangle &= (H_0 - W_0)\,(|\psi_1\rangle + \alpha_1\,|\psi_0\rangle)\\ &= (H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle = (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle\,.\end{aligned}$$

Czyli $|\psi_1'\rangle$ wyraża się przez $|\psi_0\rangle$ dokładnie tak samo jak $|\psi_1\rangle$.
Stałą α_1 w równaniu

$$|\psi_1\rangle \;\rightarrow\; |\psi_1'\rangle = |\psi_1\rangle + \alpha_1\,|\psi_0\rangle\,.$$

możemy tak dobrać, żeby

$$\langle\psi_0|\psi_1\rangle = 0.$$

Przekształćmy wektory stanu $|\psi_i\rangle$, $i = 1, 2, ...$, następująco

$$|\psi_i\rangle \;\rightarrow\; |\psi_i'\rangle = |\psi_i\rangle + \alpha_i\, |\psi_0\rangle\,.$$

Dzięki pierwszemu równaniu, $(H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle = 0$, drugie równanie naszego układu pozostanie niezmienione. Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(H_0 - W_0)\,|\psi_1'\rangle &= (H_0 - W_0)\,(|\psi_1\rangle + \alpha_1\,|\psi_0\rangle) \\ &= (H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle = (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle\,.\end{aligned}$$

Czyli $|\psi_1'\rangle$ wyraża się przez $|\psi_0\rangle$ dokładnie tak samo jak $|\psi_1\rangle$. Stałą α_1 w równaniu

$$|\psi_1\rangle \;\rightarrow\; |\psi_1'\rangle = |\psi_1\rangle + \alpha_1\,|\psi_0\rangle\,.$$

możemy tak dobrać, żeby

$$\langle\psi_0|\psi_1\rangle = 0.$$

Tak samo możemy pokazać, że trzecie równanie będzie miało taką samą postać po dokonaniu przekształcenia

$$|\psi_2\rangle \;\rightarrow\; |\psi_2'\rangle = |\psi_2\rangle + \alpha_2\,|\psi_0\rangle\,.$$

To pozwala wybrać stałą α_2 tak, aby

$$\langle\psi_0|\psi_2\rangle = 0.$$

Tak samo możemy pokazać, że trzecie równanie będzie miało taką samą postać po dokonaniu przekształcenia

$$|\psi_2\rangle \;\to\; |\psi_2'\rangle = |\psi_2\rangle + \alpha_2\,|\psi_0\rangle\,.$$

To pozwala wybrać stałą α_2 tak, aby

$$\langle\psi_0|\psi_2\rangle = 0.$$

Kontynuując tę procedurę dostaniemy

$$\langle\psi_0|\psi_i\rangle = 0, \qquad i = 1, 2, ...$$

Tak samo możemy pokazać, że trzecie równanie będzie miało taką samą postać po dokonaniu przekształcenia

$$|\psi_2\rangle \;\rightarrow\; |\psi_2'\rangle = |\psi_2\rangle + \alpha_2 \, |\psi_0\rangle \,.$$

To pozwala wybrać stałą α_2 tak, aby

$$\langle\psi_0|\psi_2\rangle = 0.$$

Kontynuując tę procedurę dostaniemy

$$\langle\psi_0|\psi_i\rangle = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Stacjonarny rachunek zaburzeń

Pomnóżmy kolejno wszystkie równania naszego układu przez $\langle\psi_0|$

$\Rightarrow$ Lewa strona tak przekształconego $(i+1)$-ego równania ma postać

$$\langle\psi_0|\,(H_0 - W_0)\,|\psi_i\rangle$$

Pomnóżmy kolejno wszystkie równania naszego układu przez $\langle\psi_0|$
$\Rightarrow$ Lewa strona tak przekształconego $(i+1)$-ego równania ma postać

$$\langle\psi_0|\,(H_0 - W_0)\,|\psi_i\rangle \quad =$$

Pomnóżmy kolejno wszystkie równania naszego układu przez $\langle\psi_0|$
$\Rightarrow$ Lewa strona tak przekształconego $(i+1)$-ego równania ma postać

$$\langle\psi_0|\,(H_0 - W_0)\,|\psi_i\rangle \quad = \quad \left[\langle\psi_0\,|\,(H_0 - W_0)^\dagger\right]|\psi_i\rangle$$

Pomnóżmy kolejno wszystkie równania naszego układu przez $\langle\psi_0|$
$\Rightarrow$ Lewa strona tak przekształconego $(i+1)$-ego równania ma postać

$$\langle\psi_0|\,(H_0 - W_0)\,|\psi_i\rangle \quad = \quad \left[\langle\psi_0\,|\,(H_0 - W_0)^\dagger\right]\,|\psi_i\rangle$$
$$=$$

Pomnóżmy kolejno wszystkie równania naszego układu przez $\langle\psi_0|$
$\Rightarrow$ Lewa strona tak przekształconego $(i+1)$-ego równania ma postać

$$\begin{aligned}\langle\psi_0|\,(H_0 - W_0)\,|\psi_i\rangle &= \left[\langle\psi_0\,|\,(H_0 - W_0)^\dagger\right]|\psi_i\rangle \\ &= \left[\langle\psi_0|\,(H_0 - W_0)\right]|\psi_i\rangle\end{aligned}$$

Pomnóżmy kolejno wszystkie równania naszego układu przez $\langle\psi_0|$
$\Rightarrow$ Lewa strona tak przekształconego $(i+1)$-ego równania ma postać

$$\begin{aligned}\langle\psi_0|\,(H_0 - W_0)\,|\psi_i\rangle &= \left[\langle\psi_0\,|\,(H_0 - W_0)^\dagger\right]\,|\psi_i\rangle \\ &= \left[\langle\psi_0|\,(H_0 - W_0)\right]\,|\psi_i\rangle = 0,\end{aligned}$$

Pomnóżmy kolejno wszystkie równania naszego układu przez $\langle\psi_0|$

$\Rightarrow$ Lewa strona tak przekształconego $(i+1)$-ego równania ma postać

$$\begin{aligned} \langle\psi_0|\,(H_0 - W_0)\,|\psi_i\rangle &= \left[\langle\psi_0\,|\,(H_0 - W_0)^\dagger\right]|\psi_i\rangle \\ &= [\langle\psi_0|\,(H_0 - W_0)]\,|\psi_i\rangle = 0, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy własność

$$\langle\psi_0|A|\psi\rangle = \left(\langle\psi_0|\,A^\dagger\right)|\psi\rangle\,,$$

Pomnóżmy kolejno wszystkie równania naszego układu przez $\langle\psi_0|$
$\Rightarrow$ Lewa strona tak przekształconego $(i+1)$-ego równania ma postać

$$\begin{aligned}\langle\psi_0|\,(H_0-W_0)\,|\psi_i\rangle &= \left[\langle\psi_0\,|\,(H_0-W_0)^\dagger\right]|\psi_i\rangle \\ &= \left[\langle\psi_0|\,(H_0-W_0)\right]|\psi_i\rangle = 0,\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy własność

$$\langle\psi_0|A|\psi\rangle = \left(\langle\psi_0|\,A^\dagger\right)|\psi\rangle\,,$$

hermitowskość operatora H_0 ($\Rightarrow$ wartość własna W_0 musi być rzeczywista)

Pomnóżmy kolejno wszystkie równania naszego układu przez $\langle\psi_0|$
$\Rightarrow$ Lewa strona tak przekształconego $(i+1)$-ego równania ma postać

$$\begin{aligned}\langle\psi_0|\,(H_0-W_0)\,|\psi_i\rangle &= \left[\langle\psi_0\,|\,(H_0-W_0)^\dagger\right]|\psi_i\rangle \\ &= [\langle\psi_0|\,(H_0-W_0)]\,|\psi_i\rangle = 0,\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy własność

$$\langle\psi_0|A|\psi\rangle = \left(\langle\psi_0|\,A^\dagger\right)|\psi\rangle\,,$$

hermitowskość operatora H_0 ($\Rightarrow$ wartość własna W_0 musi być rzeczywista) i pierwsze równanie naszego układu.

Pomnóżmy kolejno wszystkie równania naszego układu przez $\langle\psi_0|$ $\Rightarrow$ Lewa strona tak przekształconego $(i+1)$-ego równania ma postać

$$\begin{aligned} \langle\psi_0|\,(H_0 - W_0)\,|\psi_i\rangle &= \left[\langle\psi_0\,|\,(H_0 - W_0)^\dagger\right]\,|\psi_i\rangle \\ &= \left[\langle\psi_0|\,(H_0 - W_0)\right]\,|\psi_i\rangle = 0, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy własność

$$\langle\psi_0|A|\psi\rangle = \left(\langle\psi_0|\,A^\dagger\right)|\psi\rangle\,,$$

hermitowskość operatora H_0 ($\Rightarrow$ wartość własna W_0 musi być rzeczywista) i pierwsze równanie naszego układu.

Po tym przekształceniu układ równań

$$\begin{aligned}
(H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle &= 0 \\
(H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle \\
(H_0 - W_0)\,|\psi_2\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,|\psi_0\rangle, \quad \text{itd.}
\end{aligned}$$

przyjmuje postać

$$\langle\psi_0\,|\,(W_1 - H')\,|\psi_0\rangle = 0$$

Po tym przekształceniu układ równań

$$
\begin{aligned}
(H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle &= 0 \\
(H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle \\
(H_0 - W_0)\,|\psi_2\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,|\psi_0\rangle, \quad \text{itd.}
\end{aligned}
$$

przyjmuje postać

$$
\begin{aligned}
\langle\psi_0\,|\,(W_1 - H')\,|\psi_0\rangle &= 0 \\
\langle\psi_0\,|\,(W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,\langle\psi_0\,|\psi_0\rangle &
\end{aligned}
$$

Po tym przekształceniu układ równań

$$\begin{aligned}(H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle &= 0\\ (H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle\\ (H_0 - W_0)\,|\psi_2\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,|\psi_0\rangle, \quad \text{itd.}\end{aligned}$$

przyjmuje postać

$$\begin{aligned}\langle\psi_0\,|\,(W_1 - H')\,|\psi_0\rangle &= 0\\ \langle\psi_0\,|\,(W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,\langle\psi_0\,|\psi_0\rangle &=\end{aligned}$$

Po tym przekształceniu układ równań

$$\begin{aligned}
(H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle &= 0\\
(H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle\\
(H_0 - W_0)\,|\psi_2\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,|\psi_0\rangle, \quad \text{itd.}
\end{aligned}$$

przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
\langle\psi_0\,|\,(W_1 - H')\,|\psi_0\rangle &= 0\\
\langle\psi_0\,|\,(W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,\langle\psi_0\,|\psi_0\rangle &= 0, \quad \text{itd.}
\end{aligned}$$

Po tym przekształceniu układ równań

$$\begin{aligned}
(H_0 - W_0)\,|\psi_0\rangle &= 0 \\
(H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle \\
(H_0 - W_0)\,|\psi_2\rangle &= (W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,|\psi_0\rangle, \quad \text{itd.}
\end{aligned}$$

przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
\langle\psi_0\,|\,(W_1 - H')\,|\psi_0\rangle &= 0 \\
\langle\psi_0\,|\,(W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,\langle\psi_0\,|\psi_0\rangle &= 0, \quad \text{itd.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle\psi_0 \,|\, (W_1 - H') \,|\psi_0\rangle &= 0 \\ \langle\psi_0 \,|\, (W_1 - H') \,|\psi_1\rangle + W_2 \,\langle\psi_0 \,|\psi_0\rangle &= 0, \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

Przekształćmy najpierw pierwsze równanie

$$W_1 \langle\psi_0|\psi_0\rangle = \langle\psi_0 \,|H' \,|\psi_0\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle\psi_0 \,|\, (W_1 - H') \,|\psi_0\rangle &= 0 \\ \langle\psi_0 \,|\, (W_1 - H') \,|\psi_1\rangle + W_2 \,\langle\psi_0 \,|\psi_0\rangle &= 0, \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

Przekształćmy najpierw pierwsze równanie

$$W_1 \langle\psi_0|\psi_0\rangle = \langle\psi_0 \,|H' \,|\psi_0\rangle \quad \Rightarrow \quad W_1 = \frac{\langle\psi_0 \,|H' \,|\psi_0\rangle}{\langle\psi_0|\psi_0\rangle},$$

$$\begin{aligned} \langle\psi_0 \,|\, (W_1 - H') \,|\psi_0\rangle &= 0 \\ \langle\psi_0 \,|\, (W_1 - H') \,|\psi_1\rangle + W_2 \,\langle\psi_0 \,|\psi_0\rangle &= 0, \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

Przekształćmy najpierw pierwsze równanie

$$W_1 \,\langle\psi_0|\psi_0\rangle = \langle\psi_0 \,|H' \,|\psi_0\rangle \quad \Rightarrow \quad W_1 = \frac{\langle\psi_0 \,|H' \,|\psi_0\rangle}{\langle\psi_0|\psi_0\rangle},$$

a następnie drugie równanie

$$W_2 \,\langle\psi_0 \,|\psi_0\rangle = \langle\psi_0 \,|H' \,|\psi_1\rangle - W_1 \underbrace{\langle\psi_0|\psi_1\rangle}_{0}$$

$$
\begin{aligned}
\langle \psi_0 \,|\, (W_1 - H') \,|\psi_0\rangle &= 0 \\
\langle \psi_0 \,|\, (W_1 - H') \,|\psi_1\rangle + W_2 \,\langle \psi_0 \,|\psi_0\rangle &= 0, \quad \text{itd.}
\end{aligned}
$$

Przekształćmy najpierw pierwsze równanie

$$
W_1 \,\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 \,| H' \,| \psi_0 \rangle \quad \Rightarrow \quad W_1 = \frac{\langle \psi_0 \,| H' \,| \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle},
$$

a następnie drugie równanie

$$
W_2 \,\langle \psi_0 \,| \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 \,| H' \,| \psi_1 \rangle - W_1 \underbrace{\langle \psi_0 | \psi_1 \rangle}_{0} \quad \Rightarrow \quad W_2 = \frac{\langle \psi_0 \,| H' \,| \psi_1 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle}.
$$

$$\begin{aligned} \langle\psi_0 \,|\, (W_1 - H') \,|\psi_0\rangle &= 0 \\ \langle\psi_0 \,|\, (W_1 - H') \,|\psi_1\rangle + W_2 \,\langle\psi_0 \,|\psi_0\rangle &= 0, \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

Przekształćmy najpierw pierwsze równanie

$$W_1 \,\langle\psi_0|\psi_0\rangle = \langle\psi_0 \,|H' \,|\psi_0\rangle \quad \Rightarrow \quad W_1 = \frac{\langle\psi_0 \,|H' \,|\psi_0\rangle}{\langle\psi_0|\psi_0\rangle},$$

a następnie drugie równanie

$$W_2 \,\langle\psi_0 \,|\psi_0\rangle = \langle\psi_0 \,|H' \,|\psi_1\rangle - W_1 \underbrace{\langle\psi_0|\psi_1\rangle}_{0} \quad \Rightarrow \quad W_2 = \frac{\langle\psi_0 \,|H' \,|\psi_1\rangle}{\langle\psi_0|\psi_0\rangle}.$$

Uogólniając, otrzymujemy dla $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$W_i = \frac{\langle \psi_0 \left| H' \right| \psi_{i-1} \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} = \frac{\langle m \left| H' \right| \psi_{i-1} \rangle}{\langle m | m \rangle}$$

Uogólniając, otrzymujemy dla $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$W_i = \frac{\langle \psi_0 \left| H' \right| \psi_{i-1} \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} = \frac{\langle m \left| H' \right| \psi_{i-1} \rangle}{\langle m | m \rangle} = \langle m \left| H' \right| \psi_{i-1} \rangle \,,$$

Uogólniając, otrzymujemy dla $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$W_i = \frac{\langle \psi_0 | H' | \psi_{i-1} \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} = \frac{\langle m | H' | \psi_{i-1} \rangle}{\langle m | m \rangle} = \langle m | H' | \psi_{i-1} \rangle ,$$

gdzie wstawiliśmy $|\psi_0\rangle = |m\rangle$ i wykorzystaliśmy warunek normalizacyjny $\langle m|m \rangle = 1$.

Uogólniając, otrzymujemy dla $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$W_i = \frac{\langle \psi_0 | H' | \psi_{i-1} \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} = \frac{\langle m | H' | \psi_{i-1} \rangle}{\langle m | m \rangle} = \langle m | H' | \psi_{i-1} \rangle ,$$

gdzie wstawiliśmy $|\psi_0\rangle = |m\rangle$ i wykorzystaliśmy warunek normalizacyjny $\langle m|m\rangle = 1$.

W pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń

$$W_1 = \frac{\langle \psi_0 | H' | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle}$$

Uogólniając, otrzymujemy dla $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$W_i = \frac{\langle \psi_0 \left| H' \right| \psi_{i-1} \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} = \frac{\langle m \left| H' \right| \psi_{i-1} \rangle}{\langle m | m \rangle} = \langle m \left| H' \right| \psi_{i-1} \rangle \,,$$

gdzie wstawiliśmy $|\psi_0\rangle = |m\rangle$ i wykorzystaliśmy warunek normalizacyjny $\langle m | m \rangle = 1$.
W pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń

$$W_1 = \frac{\langle \psi_0 \left| H' \right| \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} = \langle m \left| H' \right| m \rangle \,,$$

Uogólniając, otrzymujemy dla $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$W_i = \frac{\langle \psi_0 | H' | \psi_{i-1} \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} = \frac{\langle m | H' | \psi_{i-1} \rangle}{\langle m | m \rangle} = \langle m | H' | \psi_{i-1} \rangle ,$$

gdzie wstawiliśmy $|\psi_0\rangle = |m\rangle$ i wykorzystaliśmy warunek normalizacyjny $\langle m|m\rangle = 1$.
W pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń

$$W_1 = \frac{\langle \psi_0 | H' | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} = \langle m | H' | m \rangle ,$$

co jest wartością oczekiwaną hamiltonianu H' w niezaburzonym stanie $|m\rangle$.

Uogólniając, otrzymujemy dla $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$W_i = \frac{\langle \psi_0 | H' | \psi_{i-1} \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} = \frac{\langle m | H' | \psi_{i-1} \rangle}{\langle m | m \rangle} = \langle m | H' | \psi_{i-1} \rangle \,,$$

gdzie wstawiliśmy $|\psi_0\rangle = |m\rangle$ i wykorzystaliśmy warunek normalizacyjny $\langle m|m\rangle = 1$.

W pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń

$$W_1 = \frac{\langle \psi_0 | H' | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} = \langle m | H' | m \rangle \,,$$

co jest wartością oczekiwaną hamiltonianu H' w niezaburzonym stanie $|m\rangle$.

Aby znaleźć $|\psi_1\rangle$ dokonajmy rozwinięcia na niezaburzone stany $|k\rangle$. Przypomnijmy, że poprzednio wybraliśmy $|\psi_0\rangle = |m\rangle$.

$$|\psi_1\rangle = \sum_k a_k^{(1)} |k\rangle .$$

Aby znaleźć $|\psi_1\rangle$ dokonajmy rozwinięcia na niezaburzone stany $|k\rangle$. Przypomnijmy, że poprzednio wybraliśmy $|\psi_0\rangle = |m\rangle$.

$$|\psi_1\rangle = \sum_k a_k^{(1)} \, |k\rangle \, .$$

Gdyby stany $|k\rangle \neq |m\rangle$ odpowiadały wartościom E_k należącym do ciągłego zakresu widma, to w powyższym wzorze sumę należałoby zastąpić całką.

Aby znaleźć $|\psi_1\rangle$ dokonajmy rozwinięcia na niezaburzone stany $|k\rangle$. Przypomnijmy, że poprzednio wybraliśmy $|\psi_0\rangle = |m\rangle$.

$$|\psi_1\rangle = \sum_k a_k^{(1)} |k\rangle .$$

Gdyby stany $|k\rangle \neq |m\rangle$ odpowiadały wartościom E_k należącym do ciągłego zakresu widma, to w powyższym wzorze sumę należałoby zastąpić całką.

Ponieważ $\langle\psi_0|\psi_1\rangle = \langle m|\psi_1\rangle = 0$, to

Aby znaleźć $|\psi_1\rangle$ dokonajmy rozwinięcia na niezaburzone stany $|k\rangle$. Przypomnijmy, że poprzednio wybraliśmy $|\psi_0\rangle = |m\rangle$.

$$|\psi_1\rangle = \sum_k a_k^{(1)} \, |k\rangle \, .$$

Gdyby stany $|k\rangle \neq |m\rangle$ odpowiadały wartościom E_k należącym do ciągłego zakresu widma, to w powyższym wzorze sumę należałoby zastąpić całką.
Ponieważ $\langle\psi_0|\psi_1\rangle = \langle m|\psi_1\rangle = 0$, to

$$\langle m|\psi_1\rangle =$$

Aby znaleźć $|\psi_1\rangle$ dokonajmy rozwinięcia na niezaburzone stany $|k\rangle$. Przypomnijmy, że poprzednio wybraliśmy $|\psi_0\rangle = |m\rangle$.

$$|\psi_1\rangle = \sum_k a_k^{(1)} \, |k\rangle \, .$$

Gdyby stany $|k\rangle \neq |m\rangle$ odpowiadały wartościom E_k należącym do ciągłego zakresu widma, to w powyższym wzorze sumę należałoby zastąpić całką.

Ponieważ $\langle\psi_0|\psi_1\rangle = \langle m|\psi_1\rangle = 0$, to

$$\langle m|\psi_1\rangle = \sum_k a_k^{(1)} \, \langle m|k\rangle =$$

Aby znaleźć $|\psi_1\rangle$ dokonajmy rozwinięcia na niezaburzone stany $|k\rangle$. Przypomnijmy, że poprzednio wybraliśmy $|\psi_0\rangle = |m\rangle$.

$$|\psi_1\rangle = \sum_k a_k^{(1)} \, |k\rangle \, .$$

Gdyby stany $|k\rangle \neq |m\rangle$ odpowiadały wartościom E_k należącym do ciągłego zakresu widma, to w powyższym wzorze sumę należałoby zastąpić całką.
Ponieważ $\langle\psi_0|\psi_1\rangle = \langle m|\psi_1\rangle = 0$, to

$$\langle m|\psi_1\rangle = \sum_k a_k^{(1)} \, \langle m|k\rangle = \sum_k a_k^{(1)} \delta_{mk} =$$

Aby znaleźć $|\psi_1\rangle$ dokonajmy rozwinięcia na niezaburzone stany $|k\rangle$. Przypomnijmy, że poprzednio wybraliśmy $|\psi_0\rangle = |m\rangle$.

$$|\psi_1\rangle = \sum_k a_k^{(1)} \, |k\rangle \, .$$

Gdyby stany $|k\rangle \neq |m\rangle$ odpowiadały wartościom E_k należącym do ciągłego zakresu widma, to w powyższym wzorze sumę należałoby zastąpić całką.
Ponieważ $\langle\psi_0|\psi_1\rangle = \langle m|\psi_1\rangle = 0$, to

$$\langle m|\psi_1\rangle = \sum_k a_k^{(1)} \, \langle m|k\rangle = \sum_k a_k^{(1)} \delta_{mk} = a_m^{(1)} =$$

Aby znaleźć $|\psi_1\rangle$ dokonajmy rozwinięcia na niezaburzone stany $|k\rangle$. Przypomnijmy, że poprzednio wybraliśmy $|\psi_0\rangle = |m\rangle$.

$$|\psi_1\rangle = \sum_k a_k^{(1)} |k\rangle .$$

Gdyby stany $|k\rangle \neq |m\rangle$ odpowiadały wartościom E_k należącym do ciągłego zakresu widma, to w powyższym wzorze sumę należałoby zastąpić całką.
Ponieważ $\langle\psi_0|\psi_1\rangle = \langle m|\psi_1\rangle = 0$, to

$$\langle m|\psi_1\rangle = \sum_k a_k^{(1)} \langle m|k\rangle = \sum_k a_k^{(1)} \delta_{mk} = a_m^{(1)} = 0.$$

Aby znaleźć $|\psi_1\rangle$ dokonajmy rozwinięcia na niezaburzone stany $|k\rangle$. Przypomnijmy, że poprzednio wybraliśmy $|\psi_0\rangle = |m\rangle$.

$$|\psi_1\rangle = \sum_k a_k^{(1)} \, |k\rangle \, .$$

Gdyby stany $|k\rangle \neq |m\rangle$ odpowiadały wartościom E_k należącym do ciągłego zakresu widma, to w powyższym wzorze sumę należałoby zastąpić całką.
Ponieważ $\langle\psi_0|\psi_1\rangle = \langle m|\psi_1\rangle = 0$, to

$$\langle m|\psi_1\rangle = \sum_k a_k^{(1)} \, \langle m|k\rangle = \sum_k a_k^{(1)} \delta_{mk} = a_m^{(1)} = 0.$$

Podstawmy wyrażenie

$$|\psi_1\rangle = \sum_k a_k^{(1)} |k\rangle$$

do drugiego równania naszego układu

$$(H_0 - E_m) |\psi_1\rangle \;\; = \;\; (W_1 - H') |m\rangle ,$$

w którym dokonaliśmy już podstawienia $W_0 = E_m$ i $|\psi_0\rangle = |m\rangle$.
Wówczas otrzymamy

Podstawmy wyrażenie

$$|\psi_1\rangle = \sum_k a_k^{(1)} |k\rangle$$

do drugiego równania naszego układu

$$(H_0 - E_m) |\psi_1\rangle \;\; = \;\; (W_1 - H') |m\rangle ,$$

w którym dokonaliśmy już podstawienia $W_0 = E_m$ i $|\psi_0\rangle = |m\rangle$. Wówczas otrzymamy

$$\sum_k a_k^{(1)} (H_0 - E_m) |k\rangle =$$

Podstawmy wyrażenie

$$|\psi_1\rangle = \sum_k a_k^{(1)} \, |k\rangle$$

do drugiego równania naszego układu

$$(H_0 - E_m)\,|\psi_1\rangle \;\; = \;\; (W_1 - H')\,|m\rangle\,,$$

w którym dokonaliśmy już podstawienia $W_0 = E_m$ i $|\psi_0\rangle = |m\rangle$. Wówczas otrzymamy

$$\sum_k a_k^{(1)}\,(H_0 - E_m)\,|k\rangle = (W_1 - H')\,|m\rangle\,,$$

Podstawmy wyrażenie

$$|\psi_1\rangle = \sum_k a_k^{(1)} \, |k\rangle$$

do drugiego równania naszego układu

$$(H_0 - E_m)\, |\psi_1\rangle \;\; = \;\; (W_1 - H')\, |m\rangle\, ,$$

w którym dokonaliśmy już podstawienia $W_0 = E_m$ i $|\psi_0\rangle = |m\rangle$.
Wówczas otrzymamy

$$\sum_k a_k^{(1)}\, (H_0 - E_m)\, |k\rangle = \left(W_1 - H'\right)\, |m\rangle\, , \quad \text{ale}$$

Podstawmy wyrażenie

$$|\psi_1\rangle = \sum_k a_k^{(1)} \, |k\rangle$$

do drugiego równania naszego układu

$$(H_0 - E_m) \, |\psi_1\rangle \;\; = \;\; (W_1 - H') \, |m\rangle \, ,$$

w którym dokonaliśmy już podstawienia $W_0 = E_m$ i $|\psi_0\rangle = |m\rangle$. Wówczas otrzymamy

$$\sum_k a_k^{(1)} \, (H_0 - E_m) \, |k\rangle = \, (W_1 - H') \, |m\rangle \, , \;\; \text{ale}$$

$$H_0 \, |k\rangle = E_k \, |k\rangle$$

Podstawmy wyrażenie

$$|\psi_1\rangle = \sum_k a_k^{(1)} \, |k\rangle$$

do drugiego równania naszego układu

$$(H_0 - E_m)\,|\psi_1\rangle \;\; = \;\; (W_1 - H')\,|m\rangle\,,$$

w którym dokonaliśmy już podstawienia $W_0 = E_m$ i $|\psi_0\rangle = |m\rangle$.
Wówczas otrzymamy

$$\sum_k a_k^{(1)}\,(H_0 - E_m)\,|k\rangle = \,(W_1 - H')\,|m\rangle\,, \;\; \text{ale}$$

$$H_0\,|k\rangle = E_k\,|k\rangle \quad \Rightarrow \quad \sum_k a_k^{(1)}\,(E_k - E_m)\,|k\rangle = (W_1 - H')\,|m\rangle\,.$$

Podstawmy wyrażenie

$$|\psi_1\rangle = \sum_k a_k^{(1)} \, |k\rangle$$

do drugiego równania naszego układu

$$(H_0 - E_m)\,|\psi_1\rangle \;\; = \;\; (W_1 - H')\,|m\rangle\,,$$

w którym dokonaliśmy już podstawienia $W_0 = E_m$ i $|\psi_0\rangle = |m\rangle$. Wówczas otrzymamy

$$\sum_k a_k^{(1)}\,(H_0 - E_m)\,|k\rangle = \,(W_1 - H')\,|m\rangle\,, \;\; \text{ale}$$

$$H_0\,|k\rangle = E_k\,|k\rangle \quad \Rightarrow \quad \sum_k a_k^{(1)}\,(E_k - E_m)\,|k\rangle = (W_1 - H')\,|m\rangle\,.$$

Pomnóżmy obie strony równania

$$\sum_k a_k^{(1)} \left(E_k - E_m\right) |k\rangle = \left(W_1 - H'\right) |m\rangle \, .$$

przez $\langle n|$, wówczas otrzymamy

Pomnóżmy obie strony równania

$$\sum_k a_k^{(1)} (E_k - E_m) |k\rangle = (W_1 - H') |m\rangle .$$

przez $\langle n|$, wówczas otrzymamy

$$\sum_k a_k^{(1)} (E_k - E_m) \underbrace{\langle n|k\rangle}_{\delta_{nk}}$$

Pomnóżmy obie strony równania

$$\sum_k a_k^{(1)} (E_k - E_m) |k\rangle = (W_1 - H') |m\rangle .$$

przez $\langle n|$, wówczas otrzymamy

$$\sum_k a_k^{(1)} (E_k - E_m) \underbrace{\langle n|k\rangle}_{\delta_{nk}} \quad =$$

Pomnóżmy obie strony równania

$$\sum_k a_k^{(1)} \left(E_k - E_m\right) |k\rangle = \left(W_1 - H'\right) |m\rangle \, .$$

przez $\langle n|$, wówczas otrzymamy

$$\sum_k a_k^{(1)} \left(E_k - E_m\right) \underbrace{\langle n|k\rangle}_{\delta_{nk}} \quad = \quad \langle n| \left(W_1 - H'\right) |m\rangle$$

Pomnóżmy obie strony równania

$$\sum_k a_k^{(1)} (E_k - E_m) |k\rangle = (W_1 - H') |m\rangle .$$

przez $\langle n|$, wówczas otrzymamy

$$\sum_k a_k^{(1)} (E_k - E_m) \underbrace{\langle n|k\rangle}_{\delta_{nk}} = \langle n| (W_1 - H') |m\rangle$$

$$\Rightarrow \quad a_n^{(1)} (E_n - E_m)$$

Pomnóżmy obie strony równania

$$\sum_k a_k^{(1)} (E_k - E_m) |k\rangle = (W_1 - H') |m\rangle .$$

przez $\langle n|$, wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned}\sum_k a_k^{(1)} (E_k - E_m) \underbrace{\langle n|k\rangle}_{\delta_{nk}} &= \langle n| (W_1 - H') |m\rangle \\ \Rightarrow \quad a_n^{(1)} (E_n - E_m) &= \end{aligned}$$

Pomnóżmy obie strony równania

$$\sum_k a_k^{(1)} \left(E_k - E_m\right) |k\rangle = \left(W_1 - H'\right) |m\rangle \, .$$

przez $\langle n|$, wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \sum_k a_k^{(1)} \left(E_k - E_m\right) \underbrace{\langle n|k\rangle}_{\delta_{nk}} &= \langle n| \left(W_1 - H'\right) |m\rangle \\ \Rightarrow \quad a_n^{(1)} \left(E_n - E_m\right) &= W_1 \underbrace{\langle n|m\rangle}_{\delta_{nm}} - \langle n|H'|m\rangle \, . \end{aligned}$$

Pomnóżmy obie strony równania

$$\sum_k a_k^{(1)} (E_k - E_m) \, |k\rangle = (W_1 - H') \, |m\rangle \, .$$

przez $\langle n|$, wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \sum_k a_k^{(1)} (E_k - E_m) \underbrace{\langle n|k\rangle}_{\delta_{nk}} &= \langle n| \, (W_1 - H') \, |m\rangle \\ \Rightarrow \quad a_n^{(1)} (E_n - E_m) &= W_1 \underbrace{\langle n|m\rangle}_{\delta_{nm}} - \langle n|H'|m\rangle \, . \end{aligned}$$

Skąd dla $n \neq m$ otrzymamy

$$a_n^{(1)} = - \frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_n - E_m}$$

Pomnóżmy obie strony równania

$$\sum_k a_k^{(1)} (E_k - E_m) |k\rangle = (W_1 - H') |m\rangle .$$

przez $\langle n|$, wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \sum_k a_k^{(1)} (E_k - E_m) \underbrace{\langle n|k\rangle}_{\delta_{nk}} &= \langle n| (W_1 - H') |m\rangle \\ \Rightarrow \quad a_n^{(1)} (E_n - E_m) &= W_1 \underbrace{\langle n|m\rangle}_{\delta_{nm}} - \langle n|H'|m\rangle . \end{aligned}$$

Skąd dla $n \neq m$ otrzymamy

$$a_n^{(1)} = -\frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_n - E_m} = \frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_m - E_n}.$$

Pomnóżmy obie strony równania

$$\sum_k a_k^{(1)} (E_k - E_m) |k\rangle = (W_1 - H') |m\rangle .$$

przez $\langle n|$, wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \sum_k a_k^{(1)} (E_k - E_m) \underbrace{\langle n|k\rangle}_{\delta_{nk}} &= \langle n| (W_1 - H') |m\rangle \\ \Rightarrow \quad a_n^{(1)} (E_n - E_m) &= W_1 \underbrace{\langle n|m\rangle}_{\delta_{nm}} - \langle n|H'|m\rangle . \end{aligned}$$

Skąd dla $n \neq m$ otrzymamy

$$a_n^{(1)} = -\frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_n - E_m} = \frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_m - E_n}.$$

Wcześniej pokazaliśmy, że $a_m^{(1)} = 0$. W ten sposób znaleźliśmy zarówno przyczynek pierwszego rzędu do wartości własnej i stanu własnego pełnego hamiltonianu $H = H_0 + H'$.

Wcześniej pokazaliśmy, że $a_m^{(1)} = 0$. W ten sposób znaleźliśmy zarówno przyczynek pierwszego rzędu do wartości własnej i stanu własnego pełnego hamiltonianu $H = H_0 + H'$.

$$W_1 = \langle m \,| H' \,| m \rangle \,,$$

Stacjonarny rachunek zaburzeń

Wcześniej pokazaliśmy, że $a_m^{(1)} = 0$. W ten sposób znaleźliśmy zarówno przyczynek pierwszego rzędu do wartości własnej i stanu własnego pełnego hamiltonianu $H = H_0 + H'$.

$$W_1 = \langle m | H' | m \rangle , \qquad |\psi_1\rangle = \sum_{k \neq m} \frac{\langle k | H' | m \rangle}{E_m - E_k} |k\rangle .$$

Wcześniej pokazaliśmy, że $a_m^{(1)} = 0$. W ten sposób znaleźliśmy zarówno przyczynek pierwszego rzędu do wartości własnej i stanu własnego pełnego hamiltonianu $H = H_0 + H'$.

$$W_1 = \langle m \left| H' \right| m \rangle \,, \qquad |\psi_1\rangle = \sum_{k \neq m} \frac{\langle k | H' | m \rangle}{E_m - E_k} \, |k\rangle \,.$$

W drugim rzędzie rachunku zaburzeń mamy

$$W_i = \langle m \left| H' \right| \psi_{i-1} \rangle \Big|_{i=2}$$

Wcześniej pokazaliśmy, że $a_m^{(1)} = 0$. W ten sposób znaleźliśmy zarówno przyczynek pierwszego rzędu do wartości własnej i stanu własnego pełnego hamiltonianu $H = H_0 + H'$.

$$W_1 = \langle m \,| H' \,| m \rangle \,, \qquad |\psi_1\rangle = \sum_{k \neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} \, |k\rangle \,.$$

W drugim rzędzie rachunku zaburzeń mamy

$$W_i = \langle m \,| H' \,| \psi_{i-1} \rangle \big|_{i=2} \quad \Rightarrow \quad W_2 = \langle m \,| H' \,| \psi_1 \rangle \,,$$

Wcześniej pokazaliśmy, że $a_m^{(1)} = 0$. W ten sposób znaleźliśmy zarówno przyczynek pierwszego rzędu do wartości własnej i stanu własnego pełnego hamiltonianu $H = H_0 + H'$.

$$W_1 = \langle m | H' | m \rangle , \qquad |\psi_1\rangle = \sum_{k \neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} |k\rangle .$$

W drugim rzędzie rachunku zaburzeń mamy

$$W_i = \langle m | H' | \psi_{i-1} \rangle \big|_{i=2} \quad \Rightarrow \quad W_2 = \langle m | H' | \psi_1 \rangle ,$$

a wstawiając $|\psi_1\rangle$ ze wzoru wyżej otrzymamy

$W_2 =$

Wcześniej pokazaliśmy, że $a_m^{(1)} = 0$. W ten sposób znaleźliśmy zarówno przyczynek pierwszego rzędu do wartości własnej i stanu własnego pełnego hamiltonianu $H = H_0 + H'$.

$$W_1 = \langle m | H' | m \rangle , \qquad |\psi_1\rangle = \sum_{k \neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} |k\rangle .$$

W drugim rzędzie rachunku zaburzeń mamy

$$W_i = \langle m | H' | \psi_{i-1} \rangle \big|_{i=2} \quad \Rightarrow \quad W_2 = \langle m | H' | \psi_1 \rangle ,$$

a wstawiając $|\psi_1\rangle$ ze wzoru wyżej otrzymamy

$$W_2 = \langle m | H' \left(\sum_{k \neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} |k\rangle \right) =$$

Wcześniej pokazaliśmy, że $a_m^{(1)} = 0$. W ten sposób znaleźliśmy zarówno przyczynek pierwszego rzędu do wartości własnej i stanu własnego pełnego hamiltonianu $H = H_0 + H'$.

$$W_1 = \langle m | H' | m \rangle , \qquad |\psi_1\rangle = \sum_{k \neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} |k\rangle .$$

W drugim rzędzie rachunku zaburzeń mamy

$$W_i = \langle m | H' | \psi_{i-1} \rangle \big|_{i=2} \quad \Rightarrow \quad W_2 = \langle m | H' | \psi_1 \rangle ,$$

a wstawiając $|\psi_1\rangle$ ze wzoru wyżej otrzymamy

$$W_2 = \langle m | H' \left(\sum_{k \neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} |k\rangle \right) = \sum_{k \neq m} \frac{\langle m|H'|k\rangle \langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} .$$

Wcześniej pokazaliśmy, że $a_m^{(1)} = 0$. W ten sposób znaleźliśmy zarówno przyczynek pierwszego rzędu do wartości własnej i stanu własnego pełnego hamiltonianu $H = H_0 + H'$.

$$W_1 = \langle m | H' | m \rangle , \qquad |\psi_1\rangle = \sum_{k \neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} |k\rangle .$$

W drugim rzędzie rachunku zaburzeń mamy

$$W_i = \langle m | H' | \psi_{i-1} \rangle \Big|_{i=2} \quad \Rightarrow \quad W_2 = \langle m | H' | \psi_1 \rangle ,$$

a wstawiając $|\psi_1\rangle$ ze wzoru wyżej otrzymamy

$$W_2 = \langle m | H' \left(\sum_{k \neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} |k\rangle \right) = \sum_{k \neq m} \frac{\langle m|H'|k\rangle \langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} .$$

Przekształcając dalej ten wzór dostaniemy

$$W_2 = \sum_{k \neq m} \frac{\langle m|H'|k\rangle \langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} = \sum_{k \neq m} \frac{\langle m|H'|k\rangle \langle m|H'|k\rangle^*}{E_m - E_k}$$

Przekształcając dalej ten wzór dostaniemy

$$W_2 = \sum_{k\neq m} \frac{\langle m|H'|k\rangle \langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} = \sum_{k\neq m} \frac{\langle m|H'|k\rangle \langle m|H'|k\rangle^*}{E_m - E_k}$$

$$=$$

Przekształcając dalej ten wzór dostaniemy

$$W_2 = \sum_{k \neq m} \frac{\langle m|H'|k\rangle \langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} = \sum_{k \neq m} \frac{\langle m|H'|k\rangle \langle m|H'|k\rangle^*}{E_m - E_k}$$

$$= \sum_{k \neq m} \frac{|\langle m|H'|k\rangle|^2}{E_m - E_k}.$$

Stacjonarny rachunek zaburzeń

Przekształcając dalej ten wzór dostaniemy

$$
\begin{aligned}
W_2 &= \sum_{k \neq m} \frac{\langle m|H'|k\rangle \langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} = \sum_{k \neq m} \frac{\langle m|H'|k\rangle \langle m|H'|k\rangle^*}{E_m - E_k} \\
&= \sum_{k \neq m} \frac{|\langle m|H'|k\rangle|^2}{E_m - E_k}.
\end{aligned}
$$

Przyczynek $|\psi_2\rangle$ do stanu $|\psi\rangle$ znów obliczymy dokonując rozwinięcia na niezaburzone stany $|k\rangle$.

Przekształcając dalej ten wzór dostaniemy

$$W_2 = \sum_{k\neq m} \frac{\langle m|H'|k\rangle \langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} = \sum_{k\neq m} \frac{\langle m|H'|k\rangle \langle m|H'|k\rangle^*}{E_m - E_k}$$

$$= \sum_{k\neq m} \frac{|\langle m|H'|k\rangle|^2}{E_m - E_k}.$$

Przyczynek $|\psi_2\rangle$ do stanu $|\psi\rangle$ znów obliczymy dokonując rozwinięcia na niezaburzone stany $|k\rangle$.

$$|\psi_2\rangle = \sum_k a_k^{(2)} |k\rangle .$$

Przekształcając dalej ten wzór dostaniemy

$$
\begin{aligned}
W_2 &= \sum_{k \neq m} \frac{\langle m|H'|k\rangle \langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} = \sum_{k \neq m} \frac{\langle m|H'|k\rangle \langle m|H'|k\rangle^*}{E_m - E_k} \\
&= \sum_{k \neq m} \frac{|\langle m|H'|k\rangle|^2}{E_m - E_k}.
\end{aligned}
$$

Przyczynek $|\psi_2\rangle$ do stanu $|\psi\rangle$ znów obliczymy dokonując rozwinięcia na niezaburzone stany $|k\rangle$.

$$
|\psi_2\rangle = \sum_k a_k^{(2)} |k\rangle .
$$

Tak jak poprzednio, ponieważ $\langle \psi_0 | \psi_2 \rangle = \langle m | \psi_2 \rangle = 0$, to

$$\langle m | \psi_2 \rangle = \sum_k a_k^{(2)} \langle m | k \rangle$$

Tak jak poprzednio, ponieważ $\langle\psi_0|\psi_2\rangle = \langle m|\psi_2\rangle = 0$, to

$$\langle m|\psi_2\rangle = \sum_k a_k^{(2)} \langle m|k\rangle = \sum_k a_k^{(2)} \delta_{mk}$$

Tak jak poprzednio, ponieważ $\langle\psi_0|\psi_2\rangle = \langle m|\psi_2\rangle = 0$, to

$$\langle m|\psi_2\rangle = \sum_k a_k^{(2)} \langle m|k\rangle = \sum_k a_k^{(2)} \delta_{mk} = a_m^{(2)} = 0.$$

Tak jak poprzednio, ponieważ $\langle\psi_0|\psi_2\rangle = \langle m|\psi_2\rangle = 0$, to

$$\langle m|\psi_2\rangle = \sum_k a_k^{(2)} \langle m|k\rangle = \sum_k a_k^{(2)} \delta_{mk} = a_m^{(2)} = 0.$$

Wstawmy rozwinęcia $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$ do trzeciego równania naszego układu

Tak jak poprzednio, ponieważ $\langle\psi_0|\psi_2\rangle = \langle m|\psi_2\rangle = 0$, to

$$\langle m|\psi_2\rangle = \sum_k a_k^{(2)} \langle m|k\rangle = \sum_k a_k^{(2)} \delta_{mk} = a_m^{(2)} = 0.$$

Wstawmy rozwinęcia $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$ do trzeciego równania naszego układu

$$(H_0 - W_0)\,|\psi_2\rangle = (W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,|\psi_0\rangle\,.$$

Tak jak poprzednio, ponieważ $\langle\psi_0|\psi_2\rangle = \langle m|\psi_2\rangle = 0$, to

$$\langle m|\psi_2\rangle = \sum_k a_k^{(2)} \langle m|k\rangle = \sum_k a_k^{(2)} \delta_{mk} = a_m^{(2)} = 0.$$

Wstawmy rozwinęcia $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$ do trzeciego równania naszego układu

$$(H_0 - W_0)|\psi_2\rangle = (W_1 - H')|\psi_1\rangle + W_2|\psi_0\rangle.$$

Wtedy otrzymamy

$$\sum_k (H_0 - E_m)\, a_k^{(2)} |k\rangle$$

Tak jak poprzednio, ponieważ $\langle\psi_0|\psi_2\rangle = \langle m|\psi_2\rangle = 0$, to

$$\langle m|\psi_2\rangle = \sum_k a_k^{(2)} \langle m|k\rangle = \sum_k a_k^{(2)} \delta_{mk} = a_m^{(2)} = 0.$$

Wstawmy rozwinęcia $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$ do trzeciego równania naszego układu

$$(H_0 - W_0)|\psi_2\rangle = (W_1 - H')|\psi_1\rangle + W_2|\psi_0\rangle .$$

Wtedy otrzymamy

$$\sum_k (H_0 - E_m)\, a_k^{(2)} |k\rangle \quad =$$

Tak jak poprzednio, ponieważ $\langle\psi_0|\psi_2\rangle = \langle m|\psi_2\rangle = 0$, to

$$\langle m|\psi_2\rangle = \sum_k a_k^{(2)} \langle m|k\rangle = \sum_k a_k^{(2)} \delta_{mk} = a_m^{(2)} = 0.$$

Wstawmy rozwinęcia $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$ do trzeciego równania naszego układu

$$(H_0 - W_0)\,|\psi_2\rangle = (W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,|\psi_0\rangle\,.$$

Wtedy otrzymamy

$$\sum_k (H_0 - E_m)\, a_k^{(2)}\,|k\rangle \quad = \quad \sum_k (W_1 - H')\, a_k^{(1)}\,|k\rangle + W_2\,|m\rangle\,,$$

Tak jak poprzednio, ponieważ $\langle\psi_0|\psi_2\rangle = \langle m|\psi_2\rangle = 0$, to

$$\langle m|\psi_2\rangle = \sum_k a_k^{(2)} \langle m|k\rangle = \sum_k a_k^{(2)}\delta_{mk} = a_m^{(2)} = 0.$$

Wstawmy rozwinęcia $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$ do trzeciego równania naszego układu

$$(H_0 - W_0)\,|\psi_2\rangle = (W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,|\psi_0\rangle\,.$$

Wtedy otrzymamy

$$\sum_k (H_0 - E_m)\,a_k^{(2)}\,|k\rangle = \sum_k (W_1 - H')\,a_k^{(1)}\,|k\rangle + W_2\,|m\rangle\,,$$

$$\sum_k (E_k - E_m)\,a_k^{(2)}\,|k\rangle$$

Tak jak poprzednio, ponieważ $\langle\psi_0|\psi_2\rangle = \langle m|\psi_2\rangle = 0$, to

$$\langle m|\psi_2\rangle = \sum_k a_k^{(2)} \langle m|k\rangle = \sum_k a_k^{(2)} \delta_{mk} = a_m^{(2)} = 0.$$

Wstawmy rozwinęcia $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$ do trzeciego równania naszego układu

$$(H_0 - W_0)|\psi_2\rangle = (W_1 - H')|\psi_1\rangle + W_2|\psi_0\rangle .$$

Wtedy otrzymamy

$$\begin{aligned}\sum_k (H_0 - E_m) a_k^{(2)} |k\rangle &= \sum_k (W_1 - H') a_k^{(1)} |k\rangle + W_2 |m\rangle ,\\ \sum_k (E_k - E_m) a_k^{(2)} |k\rangle &= \end{aligned}$$

Tak jak poprzednio, ponieważ $\langle\psi_0|\psi_2\rangle = \langle m|\psi_2\rangle = 0$, to

$$\langle m|\psi_2\rangle = \sum_k a_k^{(2)} \langle m|k\rangle = \sum_k a_k^{(2)} \delta_{mk} = a_m^{(2)} = 0.$$

Wstawmy rozwinęcia $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$ do trzeciego równania naszego układu

$$(H_0 - W_0)\,|\psi_2\rangle = (W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,|\psi_0\rangle\,.$$

Wtedy otrzymamy

$$\begin{aligned}\sum_k (H_0 - E_m)\, a_k^{(2)}\,|k\rangle &= \sum_k (W_1 - H')\, a_k^{(1)}\,|k\rangle + W_2\,|m\rangle\,,\\ \sum_k (E_k - E_m)\, a_k^{(2)}\,|k\rangle &= \sum_k (W_1 - H')\, a_k^{(1)}\,|k\rangle + W_2\,|m\rangle\,.\end{aligned}$$

Tak jak poprzednio, ponieważ $\langle\psi_0|\psi_2\rangle = \langle m|\psi_2\rangle = 0$, to

$$\langle m|\psi_2\rangle = \sum_k a_k^{(2)} \langle m|k\rangle = \sum_k a_k^{(2)} \delta_{mk} = a_m^{(2)} = 0.$$

Wstawmy rozwinęcia $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$ do trzeciego równania naszego układu

$$(H_0 - W_0)\,|\psi_2\rangle = (W_1 - H')\,|\psi_1\rangle + W_2\,|\psi_0\rangle\,.$$

Wtedy otrzymamy

$$\begin{aligned}\sum_k (H_0 - E_m)\,a_k^{(2)}\,|k\rangle &= \sum_k (W_1 - H')\,a_k^{(1)}\,|k\rangle + W_2\,|m\rangle\,,\\ \sum_k (E_k - E_m)\,a_k^{(2)}\,|k\rangle &= \sum_k (W_1 - H')\,a_k^{(1)}\,|k\rangle + W_2\,|m\rangle\,.\end{aligned}$$

Pomnóżmy równanie

$$\sum_k (E_k - E_m)\, a_k^{(2)} \,|k\rangle = \sum_k (W_1 - H')\, a_k^{(1)} \,|k\rangle + W_2 \,|m\rangle$$

obustronnie przez $\langle n\,|$, wówczas dostaniemy

$$\sum_k (E_k - E_m)\, a_k^{(2)} \langle n|k\rangle =$$

$$W_1 \sum_k a_k^{(1)} \langle n|k\rangle - \sum_k a_k^{(1)} \langle n|H'|k\rangle + W_2 \langle n|m\rangle\,,$$

Pomnóżmy równanie

$$\sum_k (E_k - E_m)\, a_k^{(2)}\, |k\rangle = \sum_k (W_1 - H')\, a_k^{(1)}\, |k\rangle + W_2\, |m\rangle$$

obustronnie przez $\langle n\,|$, wówczas dostaniemy

$$\sum_k (E_k - E_m)\, a_k^{(2)}\, \langle n|k\rangle = W_1 \sum_k a_k^{(1)}\, \langle n|k\rangle - \sum_k a_k^{(1)}\, \langle n|H'|k\rangle + W_2\, \langle n|m\rangle\,,$$

a wstawiając $\langle n|k\rangle = \delta_{nk}$ otrzymamy

Pomnóżmy równanie

$$\sum_k (E_k - E_m)\, a_k^{(2)}\, |k\rangle = \sum_k (W_1 - H')\, a_k^{(1)}\, |k\rangle + W_2\, |m\rangle$$

obustronnie przez $\langle n\,|$, wówczas dostaniemy

$$\sum_k (E_k - E_m)\, a_k^{(2)}\, \langle n|k\rangle =$$

$$W_1 \sum_k a_k^{(1)}\, \langle n|k\rangle - \sum_k a_k^{(1)}\, \langle n|H'|k\rangle + W_2\, \langle n|m\rangle\,,$$

a wstawiając $\langle n|k\rangle = \delta_{nk}$ otrzymamy

$$(E_n - E_m)\, a_n^{(2)} =$$

Pomnóżmy równanie

$$\sum_k \left(E_k - E_m\right) a_k^{(2)} \left|k\right\rangle = \sum_k \left(W_1 - H'\right) a_k^{(1)} \left|k\right\rangle + W_2 \left|m\right\rangle$$

obustronnie przez $\langle n \,|$, wówczas dostaniemy

$$\sum_k \left(E_k - E_m\right) a_k^{(2)} \left\langle n|k\right\rangle = \\ W_1 \sum_k a_k^{(1)} \left\langle n|k\right\rangle - \sum_k a_k^{(1)} \left\langle n|H'|k\right\rangle + W_2 \left\langle n|m\right\rangle ,$$

a wstawiając $\langle n|k\rangle = \delta_{nk}$ otrzymamy

$$\left(E_n - E_m\right) a_n^{(2)} = W_1 a_n^{(1)}$$

Pomnóżmy równanie

$$\sum_k (E_k - E_m)\, a_k^{(2)}\, |k\rangle = \sum_k (W_1 - H')\, a_k^{(1)}\, |k\rangle + W_2\, |m\rangle$$

obustronnie przez $\langle n\,|$, wówczas dostaniemy

$$\sum_k (E_k - E_m)\, a_k^{(2)}\, \langle n|k\rangle =$$

$$W_1 \sum_k a_k^{(1)}\, \langle n|k\rangle - \sum_k a_k^{(1)}\, \langle n|H'|k\rangle + W_2\, \langle n|m\rangle\,,$$

a wstawiając $\langle n|k\rangle = \delta_{nk}$ otrzymamy

$$(E_n - E_m)\, a_n^{(2)} = W_1 a_n^{(1)} - \sum_k a_k^{(1)}\, \langle n|H'|k\rangle$$

Pomnóżmy równanie

$$\sum_k (E_k - E_m)\, a_k^{(2)}\, |k\rangle = \sum_k (W_1 - H')\, a_k^{(1)}\, |k\rangle + W_2\, |m\rangle$$

obustronnie przez $\langle n\,|$, wówczas dostaniemy

$$\sum_k (E_k - E_m)\, a_k^{(2)}\, \langle n|k\rangle =$$

$$W_1 \sum_k a_k^{(1)}\, \langle n|k\rangle - \sum_k a_k^{(1)}\, \langle n|H'|k\rangle + W_2\, \langle n|m\rangle\,,$$

a wstawiając $\langle n|k\rangle = \delta_{nk}$ otrzymamy

$$(E_n - E_m)\, a_n^{(2)} = W_1 a_n^{(1)} - \sum_k a_k^{(1)}\, \langle n|H'|k\rangle + W_2 \delta_{nm}.$$

Pomnóżmy równanie

$$\sum_k \left(E_k - E_m\right) a_k^{(2)} \left|k\right\rangle = \sum_k \left(W_1 - H'\right) a_k^{(1)} \left|k\right\rangle + W_2 \left|m\right\rangle$$

obustronnie przez $\langle n\,|$, wówczas dostaniemy

$$\sum_k \left(E_k - E_m\right) a_k^{(2)} \langle n|k\rangle =$$

$$W_1 \sum_k a_k^{(1)} \langle n|k\rangle - \sum_k a_k^{(1)} \langle n|H'|k\rangle + W_2 \langle n|m\rangle \,,$$

a wstawiając $\langle n|k\rangle = \delta_{nk}$ otrzymamy

$$\left(E_n - E_m\right) a_n^{(2)} = W_1 a_n^{(1)} - \sum_k a_k^{(1)} \langle n|H'|k\rangle + W_2 \delta_{nm}.$$

Równanie

$$(E_n - E_m)\, a_n^{(2)} = W_1 a_n^{(1)} - \sum_k a_k^{(1)} \langle n|H'|k\rangle + W_2 \delta_{nm}.$$

dla $n \neq m$ daje

$$a_n^{(2)} = \frac{1}{E_n - E_m} \left\{ W_1 a_n^{(1)} - \sum_{k \neq m} a_k^{(1)} \langle n|H'|k\rangle \right\},$$

Równanie

$$(E_n - E_m)\, a_n^{(2)} = W_1 a_n^{(1)} - \sum_k a_k^{(1)} \langle n|H'|k\rangle + W_2 \delta_{nm}.$$

dla $n \neq m$ daje

$$a_n^{(2)} = \frac{1}{E_n - E_m} \left\{ W_1 a_n^{(1)} - \sum_{k \neq m} a_k^{(1)} \langle n|H'|k\rangle \right\},$$

gdzie w sumowaniu przyjęliśmy $k \neq m$, gdyż i tak $a_m^{(1)} = 0$.

Równanie

$$\left(E_n - E_m\right) a_n^{(2)} = W_1 a_n^{(1)} - \sum_k a_k^{(1)} \langle n|H'|k\rangle + W_2 \delta_{nm}.$$

dla $n \neq m$ daje

$$a_n^{(2)} = \frac{1}{E_n - E_m} \left\{ W_1 a_n^{(1)} - \sum_{k \neq m} a_k^{(1)} \langle n|H'|k\rangle \right\},$$

gdzie w sumowaniu przyjęliśmy $k \neq m$, gdyż i tak $a_m^{(1)} = 0$. Po wstawieniu

$$W_1 = \langle m | H' | m\rangle ,$$

Równanie

$$(E_n - E_m)\, a_n^{(2)} = W_1 a_n^{(1)} - \sum_k a_k^{(1)} \langle n|H'|k\rangle + W_2 \delta_{nm}.$$

dla $n \neq m$ daje

$$a_n^{(2)} = \frac{1}{E_n - E_m} \left\{ W_1 a_n^{(1)} - \sum_{k \neq m} a_k^{(1)} \langle n|H'|k\rangle \right\},$$

gdzie w sumowaniu przyjęliśmy $k \neq m$, gdyż i tak $a_m^{(1)} = 0$. Po wstawieniu

$$W_1 = \langle m\, |H'\, |m\rangle\,, \qquad a_k^{(1)} = \frac{\langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k}, \quad k \neq m$$

Równanie

$$(E_n - E_m)\, a_n^{(2)} = W_1 a_n^{(1)} - \sum_k a_k^{(1)} \langle n|H'|k\rangle + W_2 \delta_{nm}.$$

dla $n \neq m$ daje

$$a_n^{(2)} = \frac{1}{E_n - E_m} \left\{ W_1 a_n^{(1)} - \sum_{k \neq m} a_k^{(1)} \langle n|H'|k\rangle \right\},$$

gdzie w sumowaniu przyjęliśmy $k \neq m$, gdyż i tak $a_m^{(1)} = 0$. Po wstawieniu

$$W_1 = \langle m\, |H'\, |m\rangle\,, \qquad a_k^{(1)} = \frac{\langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k}, \quad k \neq m$$

otrzymamy

$$a_n^{(2)} = \sum_{k \neq m} \frac{\langle n|H'|k\rangle \langle k|H'|m\rangle}{(E_m - E_n)(E_m - E_k)} - \frac{\langle n|H'|m\rangle \langle m|H'|m\rangle}{(E_m - E_n)^2}.$$

Wyrażenie na energię i stany własne pełnego hamiltonianu H z dokładnością do drugiego rzędu rachunku zaburzeń otrzymamy urywając szeregi

$$\begin{aligned} W &= W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \lambda^3 W_3 + \ldots \\ |\psi\rangle &= |\psi_0\rangle + \lambda |\psi_1\rangle + \lambda^2 |\psi_2\rangle + \lambda^3 |\psi_3\rangle + \ldots \end{aligned}$$

na drugim wyrazie i wstawiając $\lambda = 1$

otrzymamy

$$a_n^{(2)} = \sum_{k \neq m} \frac{\langle n|H'|k\rangle \langle k|H'|m\rangle}{(E_m - E_n)(E_m - E_k)} - \frac{\langle n|H'|m\rangle \langle m\,|H'\,|m\rangle}{(E_m - E_n)^2}.$$

Wyrażenie na energię i stany własne pełnego hamiltonianu H z dokładnością do drugiego rzędu rachunku zaburzeń otrzymamy urywając szeregi

$$\begin{aligned} W &= W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \lambda^3 W_3 + \ldots \\ |\psi\rangle &= |\psi_0\rangle + \lambda\, |\psi_1\rangle + \lambda^2\, |\psi_2\rangle + \lambda^3\, |\psi_3\rangle + \ldots \end{aligned}$$

na drugim wyrazie i wstawiając $\lambda = 1$

$$W \approx W_0 + W_1 + W_2,$$

otrzymamy

$$a_n^{(2)} = \sum_{k \neq m} \frac{\langle n|H'|k\rangle \langle k|H'|m\rangle}{(E_m - E_n)(E_m - E_k)} - \frac{\langle n|H'|m\rangle \langle m\,|H'\,|m\rangle}{(E_m - E_n)^2}.$$

Wyrażenie na energię i stany własne pełnego hamiltonianu H z dokładnością do drugiego rzędu rachunku zaburzeń otrzymamy urywając szeregi

$$\begin{aligned} W &= W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \lambda^3 W_3 + \ldots \\ |\psi\rangle &= |\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + \lambda^3\,|\psi_3\rangle + \ldots \end{aligned}$$

na drugim wyrazie i wstawiając $\lambda = 1$

$$W \approx W_0 + W_1 + W_2, \qquad |\psi\rangle \approx |\psi_0\rangle + |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle.$$

otrzymamy

$$a_n^{(2)} = \sum_{k \neq m} \frac{\langle n|H'|k\rangle \langle k|H'|m\rangle}{(E_m - E_n)(E_m - E_k)} - \frac{\langle n|H'|m\rangle \langle m|H'|m\rangle}{(E_m - E_n)^2}.$$

Wyrażenie na energię i stany własne pełnego hamiltonianu H z dokładnością do drugiego rzędu rachunku zaburzeń otrzymamy urywając szeregi

$$\begin{aligned} W &= W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \lambda^3 W_3 + \ldots \\ |\psi\rangle &= |\psi_0\rangle + \lambda |\psi_1\rangle + \lambda^2 |\psi_2\rangle + \lambda^3 |\psi_3\rangle + \ldots \end{aligned}$$

na drugim wyrazie i wstawiając $\lambda = 1$

$$W \approx W_0 + W_1 + W_2, \qquad |\psi\rangle \approx |\psi_0\rangle + |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle .$$

Sprawdźmy warunek normalizacyjny dla stanu $|\psi\rangle$ z dokładnością do wyrazów $\sim \lambda^2$, a więc wyrazów drugiego rzędu w H'.

$\langle\psi|\psi\rangle$

Sprawdźmy warunek normalizacyjny dla stanu $|\psi\rangle$ z dokładnością do wyrazów $\sim \lambda^2$, a więc wyrazów drugiego rzędu w H'.

$\langle\psi|\psi\rangle \quad \approx$

Sprawdźmy warunek normalizacyjny dla stanu $|\psi\rangle$ z dokładnością do wyrazów $\sim \lambda^2$, a więc wyrazów drugiego rzędu w H'.

$$\langle\psi|\psi\rangle \quad \approx \quad \Big(\langle\psi_0\,| + \lambda\,\langle\psi_1\,| + \lambda^2\,\langle\psi_2\,|\Big)\Big(|\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle\Big)$$

Sprawdźmy warunek normalizacyjny dla stanu $|\psi\rangle$ z dokładnością do wyrazów $\sim \lambda^2$, a więc wyrazów drugiego rzędu w H'.

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi\rangle &\approx \Big(\langle\psi_0\,| + \lambda\,\langle\psi_1\,| + \lambda^2\,\langle\psi_2\,|\Big)\Big(|\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle\Big) \\ &\approx \end{aligned}$$

Sprawdźmy warunek normalizacyjny dla stanu $|\psi\rangle$ z dokładnością do wyrazów $\sim \lambda^2$, a więc wyrazów drugiego rzędu w H'.

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle &\approx \Big(\langle\psi_0| + \lambda\langle\psi_1| + \lambda^2\langle\psi_2|\Big)\Big(|\psi_0\rangle + \lambda|\psi_1\rangle + \lambda^2|\psi_2\rangle\Big)\\ &\approx \langle\psi_0|\psi_0\rangle + \lambda^2\langle\psi_1|\psi_1\rangle\,,\end{aligned}$$

Sprawdźmy warunek normalizacyjny dla stanu $|\psi\rangle$ z dokładnością do wyrazów $\sim \lambda^2$, a więc wyrazów drugiego rzędu w H'.

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi\rangle &\approx \Big(\langle\psi_0\,| + \lambda\,\langle\psi_1\,| + \lambda^2\,\langle\psi_2\,|\Big)\Big(|\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle\Big) \\ &\approx \langle\psi_0|\psi_0\rangle + \lambda^2\,\langle\psi_1|\psi_1\rangle\,, \end{aligned}$$

gdzie pominęliśmy wyrazy wyższego rzędu w λ oraz skorzystaliśmy z warunków ortogonalności $\langle\psi_0|\psi_1\rangle = \langle\psi_0|\psi_2\rangle = 0$.

Sprawdźmy warunek normalizacyjny dla stanu $|\psi\rangle$ z dokładnością do wyrazów $\sim \lambda^2$, a więc wyrazów drugiego rzędu w H'.

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle &\approx \Big(\langle\psi_0| + \lambda\langle\psi_1| + \lambda^2\langle\psi_2|\Big)\Big(|\psi_0\rangle + \lambda|\psi_1\rangle + \lambda^2|\psi_2\rangle\Big)\\ &\approx \langle\psi_0|\psi_0\rangle + \lambda^2\langle\psi_1|\psi_1\rangle\,,\end{aligned}$$

gdzie pominęliśmy wyrazy wyższego rzędu w λ oraz skorzystaliśmy z warunków ortogonalności $\langle\psi_0|\psi_1\rangle = \langle\psi_0|\psi_2\rangle = 0$.
Wstawiając $\lambda = 1$ oraz wykorzystując warunek normalizacyjny $\langle\psi_0|\psi_0\rangle = 1$ otrzymamy

Sprawdźmy warunek normalizacyjny dla stanu $|\psi\rangle$ z dokładnością do wyrazów $\sim \lambda^2$, a więc wyrazów drugiego rzędu w H'.

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle &\approx \left(\langle\psi_0| + \lambda\langle\psi_1| + \lambda^2\langle\psi_2|\right)\left(|\psi_0\rangle + \lambda|\psi_1\rangle + \lambda^2|\psi_2\rangle\right)\\ &\approx \langle\psi_0|\psi_0\rangle + \lambda^2\langle\psi_1|\psi_1\rangle\,,\end{aligned}$$

gdzie pominęliśmy wyrazy wyższego rzędu w λ oraz skorzystaliśmy z warunków ortogonalności $\langle\psi_0|\psi_1\rangle = \langle\psi_0|\psi_2\rangle = 0$.
Wstawiając $\lambda = 1$ oraz wykorzystując warunek normalizacyjny $\langle\psi_0|\psi_0\rangle = 1$ otrzymamy

$$\langle\psi|\psi\rangle \approx 1 + \langle\psi_1|\psi_1\rangle\,.$$

Sprawdźmy warunek normalizacyjny dla stanu $|\psi\rangle$ z dokładnością do wyrazów $\sim \lambda^2$, a więc wyrazów drugiego rzędu w H'.

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi\rangle &\approx \Big(\langle\psi_0| + \lambda\langle\psi_1| + \lambda^2\langle\psi_2|\Big)\Big(|\psi_0\rangle + \lambda|\psi_1\rangle + \lambda^2|\psi_2\rangle\Big) \\ &\approx \langle\psi_0|\psi_0\rangle + \lambda^2\langle\psi_1|\psi_1\rangle\,, \end{aligned}$$

gdzie pominęliśmy wyrazy wyższego rzędu w λ oraz skorzystaliśmy z warunków ortogonalności $\langle\psi_0|\psi_1\rangle = \langle\psi_0|\psi_2\rangle = 0$.
Wstawiając $\lambda = 1$ oraz wykorzystując warunek normalizacyjny $\langle\psi_0|\psi_0\rangle = 1$ otrzymamy

$$\langle\psi|\psi\rangle \approx 1 + \langle\psi_1|\psi_1\rangle\,.$$

Skorzystajmy teraz z wyrażenia na $|\psi_1\rangle$

$$|\psi_1\rangle = \sum_{k \neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} |k\rangle$$

Skorzystajmy teraz z wyrażenia na $|\psi_1\rangle$

$$|\psi_1\rangle = \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} |k\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\psi_1| = \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*}{E_m - E_k} \langle k| \, ,$$

Skorzystajmy teraz z wyrażenia na $|\psi_1\rangle$

$$|\psi_1\rangle = \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} |k\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\psi_1| = \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*}{E_m - E_k} \langle k| \,,$$

a zatem

$$\langle\psi|\psi\rangle \quad \approx \quad 1 + \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*}{E_m - E_k} \langle k| \sum_{n\neq m} \frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_m - E_n} |n\rangle$$

Skorzystajmy teraz z wyrażenia na $|\psi_1\rangle$

$$|\psi_1\rangle = \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} |k\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\psi_1| = \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*}{E_m - E_k} \langle k| \;,$$

a zatem

$$\langle\psi|\psi\rangle \quad \approx \quad 1 + \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*}{E_m - E_k} \langle k| \sum_{n\neq m} \frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_m - E_n} |n\rangle$$

$$=$$

Skorzystajmy teraz z wyrażenia na $|\psi_1\rangle$

$$|\psi_1\rangle = \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} |k\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\psi_1| = \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*}{E_m - E_k} \langle k| \,,$$

a zatem

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi\rangle \quad &\approx \quad 1 + \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*}{E_m - E_k} \langle k| \sum_{n\neq m} \frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_m - E_n} |n\rangle \\ &= \quad 1 + \sum_{k\neq m} \sum_{n\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*}{E_m - E_k} \cdot \frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_m - E_n} \underbrace{\langle k|n\rangle}_{\delta_{kn}} \end{aligned}$$

Skorzystajmy teraz z wyrażenia na $|\psi_1\rangle$

$$|\psi_1\rangle = \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k}\,|k\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\psi_1| = \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*}{E_m - E_k}\,\langle k|\,,$$

a zatem

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\psi\rangle &\approx 1 + \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*}{E_m - E_k}\,\langle k| \sum_{n\neq m} \frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_m - E_n}\,|n\rangle \\
&= 1 + \sum_{k\neq m}\sum_{n\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*}{E_m - E_k} \cdot \frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_m - E_n}\,\underbrace{\langle k|n\rangle}_{\delta_{kn}} \\
&=
\end{aligned}$$

Skorzystajmy teraz z wyrażenia na $|\psi_1\rangle$

$$|\psi_1\rangle = \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k} |k\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\psi_1| = \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*}{E_m - E_k} \langle k| \,,$$

a zatem

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\psi\rangle &\approx 1 + \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*}{E_m - E_k} \langle k| \sum_{n\neq m} \frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_m - E_n} |n\rangle \\
&= 1 + \sum_{k\neq m} \sum_{n\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*}{E_m - E_k} \cdot \frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_m - E_n} \underbrace{\langle k|n\rangle}_{\delta_{kn}} \\
&= 1 + \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^* \langle k|H'|m\rangle}{(E_m - E_k)^2}
\end{aligned}$$

Skorzystajmy teraz z wyrażenia na $|\psi_1\rangle$

$$|\psi_1\rangle = \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k}\,|k\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\psi_1| = \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*}{E_m - E_k}\,\langle k|\,,$$

a zatem

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\psi\rangle &\approx 1 + \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*}{E_m - E_k}\,\langle k| \sum_{n\neq m} \frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_m - E_n}\,|n\rangle \\
&= 1 + \sum_{k\neq m}\sum_{n\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*}{E_m - E_k} \cdot \frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_m - E_n}\,\underbrace{\langle k|n\rangle}_{\delta_{kn}} \\
&= 1 + \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*\,\langle k|H'|m\rangle}{(E_m - E_k)^2} = 1 + \sum_{k\neq m} \frac{|\langle k|H'|m\rangle|^2}{(E_m - E_k)^2}.
\end{aligned}$$

Skorzystajmy teraz z wyrażenia na $|\psi_1\rangle$

$$|\psi_1\rangle = \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle}{E_m - E_k}\, |k\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\psi_1| = \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*}{E_m - E_k}\, \langle k|\,,$$

a zatem

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi\rangle &\approx 1 + \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*}{E_m - E_k}\, \langle k| \sum_{n\neq m} \frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_m - E_n}\, |n\rangle \\ &= 1 + \sum_{k\neq m}\sum_{n\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*}{E_m - E_k} \cdot \frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_m - E_n}\, \underbrace{\langle k|n\rangle}_{\delta_{kn}} \\ &= 1 + \sum_{k\neq m} \frac{\langle k|H'|m\rangle^*\, \langle k|H'|m\rangle}{(E_m - E_k)^2} = 1 + \sum_{k\neq m} \frac{|\langle k|H'|m\rangle|^2}{(E_m - E_k)^2}. \end{aligned}$$

Widzimy, że warunek normalizacyjny jest naruszony przez wyrazy drugiego rzędu w H'.

Jest to skutek pewnej dowolności w wyborze warunków ortogonalności

$$\langle\psi_0|\psi_i\rangle = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Widzimy, że warunek normalizacyjny jest naruszony przez wyrazy drugiego rzędu w H'.
Jest to skutek pewnej dowolności w wyborze warunków ortogonalności

$$\langle \psi_0 | \psi_i \rangle = 0, \qquad i = 1, 2, ...$$

Przeanalizujmy poprawność naszego przybliżenia na przykładzie jednowymiarowego oscylatora harmonicznego.

Przypomnijmy, że jednowymiarowy oscylator harmoniczny o masie μ opisywany jest hamiltonianem

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}Kx^2$$

Przeanalizujmy poprawność naszego przybliżenia na przykładzie jednowymiarowego oscylatora harmonicznego.
Przypomnijmy, że jednowymiarowy oscylator harmoniczny o masie μ opisywany jest hamiltonianem

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega_0^2 x^2,$$

Przeanalizujmy poprawność naszego przybliżenia na przykładzie jednowymiarowego oscylatora harmonicznego.
Przypomnijmy, że jednowymiarowy oscylator harmoniczny o masie μ opisywany jest hamiltonianem

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega_0^2 x^2, \quad \text{gdzie} \quad \omega_0 = \left(\frac{K}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}},$$

Przeanalizujmy poprawność naszego przybliżenia na przykładzie jednowymiarowego oscylatora harmonicznego.
Przypomnijmy, że jednowymiarowy oscylator harmoniczny o masie μ opisywany jest hamiltonianem

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega_0^2 x^2, \quad \text{gdzie} \quad \omega_0 = \left(\frac{K}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}},$$

gdzie operatory x i p spełniają warunki kwantyzacji

$$[x, p] = i\hbar, \qquad [x, x] = [p, p] = 0.$$

Stacjonarny rachunek zaburzeń

Przeanalizujmy poprawność naszego przybliżenia na przykładzie jednowymiarowego oscylatora harmonicznego.
Przypomnijmy, że jednowymiarowy oscylator harmoniczny o masie μ opisywany jest hamiltonianem

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega_0^2 x^2, \quad \text{gdzie} \quad \omega_0 = \left(\frac{K}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}},$$

gdzie operatory x i p spełniają warunki kwantyzacji

$$[x, p] = i\hbar, \qquad [x, x] = [p, p] = 0.$$

Hamiltonian ten spełnia równanie własne

$$H_0 |n\rangle = E_n |n\rangle .$$

Przeanalizujmy poprawność naszego przybliżenia na przykładzie jednowymiarowego oscylatora harmonicznego.
Przypomnijmy, że jednowymiarowy oscylator harmoniczny o masie μ opisywany jest hamiltonianem

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega_0^2 x^2, \quad \text{gdzie} \quad \omega_0 = \left(\frac{K}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}},$$

gdzie operatory x i p spełniają warunki kwantyzacji

$$[x, p] = i\hbar, \qquad [x, x] = [p, p] = 0.$$

Hamiltonian ten spełnia równanie własne

$$H_0 \left|n\right\rangle = E_n \left|n\right\rangle.$$

Energia E_n stanu $|n\rangle$ oscylatora harmonicznego dana jest wzorem

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0, \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

Załóżmy, że oscylator ten jest zaburzony hamiltonianem $H' = \frac{1}{2}bx^2$.

Energia E_n stanu $|n\rangle$ oscylatora harmonicznego dana jest wzorem

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0, \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

Załóżmy, że oscylator ten jest zaburzony hamiltonianem
$H' = \frac{1}{2}bx^2$.
Pełny hamiltonian ma postać

$$H = H_0 + H'$$

Energia E_n stanu $|n\rangle$ oscylatora harmonicznego dana jest wzorem

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0, \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

Załóżmy, że oscylator ten jest zaburzony hamiltonianem $H' = \frac{1}{2}bx^2$.
Pełny hamiltonian ma postać

$$H = H_0 + H' = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}bx^2$$

Energia E_n stanu $|n\rangle$ oscylatora harmonicznego dana jest wzorem

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0, \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

Załóżmy, że oscylator ten jest zaburzony hamiltonianem $H' = \frac{1}{2}bx^2$.

Pełny hamiltonian ma postać

$$H = H_0 + H' = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}bx^2 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}(K+b)\,x^2$$

Energia E_n stanu $|n\rangle$ oscylatora harmonicznego dana jest wzorem

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0, \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

Załóżmy, że oscylator ten jest zaburzony hamiltonianem
$H' = \frac{1}{2}bx^2$.
Pełny hamiltonian ma postać

$$H = H_0 + H' = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}bx^2 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}(K+b)\,x^2$$

$$=$$

Energia E_n stanu $|n\rangle$ oscylatora harmonicznego dana jest wzorem

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0, \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

Załóżmy, że oscylator ten jest zaburzony hamiltonianem
$H' = \frac{1}{2}bx^2$.
Pełny hamiltonian ma postać

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H' = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}bx^2 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}(K+b)\,x^2 \\ &= \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2, \end{aligned}$$

Energia E_n stanu $|n\rangle$ oscylatora harmonicznego dana jest wzorem

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

Załóżmy, że oscylator ten jest zaburzony hamiltonianem
$H' = \frac{1}{2}bx^2$.
Pełny hamiltonian ma postać

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H' = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}bx^2 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}(K+b)\,x^2 \\ &= \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2, \quad \text{gdzie} \quad \omega = \left(\frac{K+b}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Energia E_n stanu $|n\rangle$ oscylatora harmonicznego dana jest wzorem

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0, \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

Załóżmy, że oscylator ten jest zaburzony hamiltonianem
$H' = \frac{1}{2}bx^2$.
Pełny hamiltonian ma postać

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H' = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}bx^2 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}(K+b)\,x^2 \\ &= \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2, \quad \text{gdzie} \quad \omega = \left(\frac{K+b}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Widzimy, że postać zaburzonego hamiltonianu H jest taka sama, jak postać hamiltonianu H_0.
Dlatego wszystkie rozważania, które przeprowadziliśmy rozwiązując problem oscylatora można by powtórzyć i otrzymalibyśmy następujący ścisły wzór na energię E_n' n-tego zaburzonego poziomu oscylatora harmonicznego

Widzimy, że postać zaburzonego hamiltonianu H jest taka sama, jak postać hamiltonianu H_0.
Dlatego wszystkie rozważania, które przeprowadziliśmy rozwiązując problem oscylatora można by powtórzyć i otrzymalibyśmy następujący ścisły wzór na energię E_n' n-tego zaburzonego poziomu oscylatora harmonicznego

$$E_n' = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

Widzimy, że postać zaburzonego hamiltonianu H jest taka sama, jak postać hamiltonianu H_0.
Dlatego wszystkie rozważania, które przeprowadziliśmy rozwiązując problem oscylatora można by powtórzyć i otrzymalibyśmy następujący ścisły wzór na energię E_n' n-tego zaburzonego poziomu oscylatora harmonicznego

$$E_n' = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad \text{gdzie} \quad \omega = \left(\frac{K+b}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Widzimy, że postać zaburzonego hamiltonianu H jest taka sama, jak postać hamiltonianu H_0.
Dlatego wszystkie rozważania, które przeprowadziliśmy rozwiązując problem oscylatora można by powtórzyć i otrzymalibyśmy następujący ścisły wzór na energię E_n' n-tego zaburzonego poziomu oscylatora harmonicznego

$$E_n' = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad \text{gdzie} \quad \omega = \left(\frac{K+b}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Załóżmy, że $b \ll K$ i przekształćmy wyrażenie na ω

Widzimy, że postać zaburzonego hamiltonianu H jest taka sama, jak postać hamiltonianu H_0.
Dlatego wszystkie rozważania, które przeprowadziliśmy rozwiązując problem oscylatora można by powtórzyć i otrzymalibyśmy następujący ścisły wzór na energię E_n' n-tego zaburzonego poziomu oscylatora harmonicznego

$$E_n' = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad \text{gdzie} \quad \omega = \left(\frac{K+b}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Załóżmy, że $b \ll K$ i przekształćmy wyrażenie na ω

$$\omega =$$

Widzimy, że postać zaburzonego hamiltonianu H jest taka sama, jak postać hamiltonianu H_0.
Dlatego wszystkie rozważania, które przeprowadziliśmy rozwiązując problem oscylatora można by powtórzyć i otrzymalibyśmy następujący ścisły wzór na energię E'_n n-tego zaburzonego poziomu oscylatora harmonicznego

$$E'_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad \text{gdzie} \quad \omega = \left(\frac{K+b}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Załóżmy, że $b \ll K$ i przekształćmy wyrażenie na ω

$$\omega = \left(\frac{K+b}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

Widzimy, że postać zaburzonego hamiltonianu H jest taka sama, jak postać hamiltonianu H_0.
Dlatego wszystkie rozważania, które przeprowadziliśmy rozwiązując problem oscylatora można by powtórzyć i otrzymalibyśmy następujący ścisły wzór na energię E_n' n-tego zaburzonego poziomu oscylatora harmonicznego

$$E_n' = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad \text{gdzie} \quad \omega = \left(\frac{K+b}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Załóżmy, że $b \ll K$ i przekształćmy wyrażenie na ω

$$\omega = \left(\frac{K+b}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{K}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{b}{K}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

Widzimy, że postać zaburzonego hamiltonianu H jest taka sama, jak postać hamiltonianu H_0.
Dlatego wszystkie rozważania, które przeprowadziliśmy rozwiązując problem oscylatora można by powtórzyć i otrzymalibyśmy następujący ścisły wzór na energię E'_n n-tego zaburzonego poziomu oscylatora harmonicznego

$$E'_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad \text{gdzie} \quad \omega = \left(\frac{K+b}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Załóżmy, że $b \ll K$ i przekształćmy wyrażenie na ω

$$\omega = \left(\frac{K+b}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{K}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{b}{K}\right)^{\frac{1}{2}} = \omega_0 \left(1 + \frac{b}{K}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Widzimy, że postać zaburzonego hamiltonianu H jest taka sama, jak postać hamiltonianu H_0.
Dlatego wszystkie rozważania, które przeprowadziliśmy rozwiązując problem oscylatora można by powtórzyć i otrzymalibyśmy następujący ścisły wzór na energię E'_n n-tego zaburzonego poziomu oscylatora harmonicznego

$$E'_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad \text{gdzie} \quad \omega = \left(\frac{K+b}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Załóżmy, że $b \ll K$ i przekształćmy wyrażenie na ω

$$\omega = \left(\frac{K+b}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{K}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{b}{K}\right)^{\frac{1}{2}} = \omega_0\left(1+\frac{b}{K}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Skorzystajmy z rowinięcia

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = (1+x)^{\frac{1}{2}}\Big|_{x=0}$$

Skorzystajmy z rowinięcia

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} \quad = \quad (1+x)^{\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} + \frac{1}{1!}\,\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} x$$

Skorzystajmy z rowinięcia

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = (1+x)^{\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} + \frac{1}{1!}\,\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=0}\,x$$

$$+$$

Skorzystajmy z rowinięcia

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = (1+x)^{\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} + \frac{1}{1!}\,\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} x$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{3}{2}}\Big|_{x=0} x^2 + \ldots$$

Skorzystajmy z rowinięcia

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{2}} &= (1+x)^{\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} + \frac{1}{1!}\,\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} x \\
&+ \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{3}{2}}\Big|_{x=0} x^2 + \ldots \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2,
\end{aligned}
$$

Skorzystajmy z rowinięcia

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = (1+x)^{\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} + \frac{1}{1!}\,\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} x + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{3}{2}}\Big|_{x=0} x^2 + \ldots \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2,$$

dla $x = \frac{b}{K}$,

Skorzystajmy z rowinięcia

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = (1+x)^{\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} + \frac{1}{1!}\,\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} x$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{3}{2}}\Big|_{x=0} x^2 + \ldots \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2,$$

dla $x = \frac{b}{K}$, a zatem

$$\omega =$$

Skorzystajmy z rowinięcia

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{2}} &= (1+x)^{\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} + \frac{1}{1!}\,\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} x \\
&+ \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{3}{2}}\Big|_{x=0} x^2 + \ldots \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2,
\end{aligned}
$$

dla $x = \frac{b}{K}$, a zatem

$$
\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{b}{K}\right)^{\frac{1}{2}}
$$

Skorzystajmy z rowinięcia

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = (1+x)^{\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} + \frac{1}{1!}\,\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} x$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{3}{2}}\Big|_{x=0} x^2 + \ldots \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2,$$

dla $x = \frac{b}{K}$, a zatem

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{b}{K}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{b}{2K} - \frac{b^2}{8K^2}\right).$$

Skorzystajmy z rowinięcia

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = (1+x)^{\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} + \frac{1}{1!}\,\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} x + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{3}{2}}\Big|_{x=0} x^2 + \ldots \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2,$$

dla $x = \frac{b}{K}$, a zatem

$$\omega = \omega_0\left(1+\frac{b}{K}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \omega_0\left(1+\frac{b}{2K}-\frac{b^2}{8K^2}\right).$$

$\Rightarrow$ energia n-tego zaburzonego poziomu oscylatora

$$W = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

Skorzystajmy z rowinięcia

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = (1+x)^{\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} + \frac{1}{1!}\,\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=0}\,x$$
$$+\ \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{3}{2}}\Big|_{x=0}\,x^2 + \ldots \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2,$$

dla $x = \frac{b}{K}$, a zatem

$$\omega = \omega_0\left(1+\frac{b}{K}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \omega_0\left(1+\frac{b}{2K}-\frac{b^2}{8K^2}\right).$$

$\Rightarrow$ energia n-tego zaburzonego poziomu oscylatora

$$W = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \approx \left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0\left(1+\frac{b}{2K}-\frac{b^2}{8K^2}\right).$$

Skorzystajmy z rowinięcia

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{2}} &= (1+x)^{\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} + \frac{1}{1!}\,\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} x \\
&+ \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{3}{2}}\Big|_{x=0} x^2 + \ldots \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2,
\end{aligned}
$$

dla $x = \frac{b}{K}$, a zatem

$$
\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{b}{K}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{b}{2K} - \frac{b^2}{8K^2}\right).
$$

$\Rightarrow$ energia n-tego zaburzonego poziomu oscylatora

$$
W = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_0 \left(1 + \frac{b}{2K} - \frac{b^2}{8K^2}\right).
$$

Znajdźmy teraz poziomy energii zaburzonego oscylatora stosując stacjonarny rachunek zaburzeń.

Z dokładnością do drugiego rzędu w $H' = \frac{1}{2} b x^2$

$$W \approx W_0 + W_1 + W_2$$

Znajdźmy teraz poziomy energii zaburzonego oscylatora stosując stacjonarny rachunek zaburzeń.
Z dokładnością do drugiego rzędu w $H' = \frac{1}{2}bx^2$

$$W \approx W_0 + W_1 + W_2$$

$$=$$

Znajdźmy teraz poziomy energii zaburzonego oscylatora stosując stacjonarny rachunek zaburzeń.
Z dokładnością do drugiego rzędu w $H' = \frac{1}{2}bx^2$

$$W \approx W_0 + W_1 + W_2$$
$$= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$$

Znajdźmy teraz poziomy energii zaburzonego oscylatora stosując stacjonarny rachunek zaburzeń.
Z dokładnością do drugiego rzędu w $H' = \frac{1}{2}bx^2$

$$W \approx W_0 + W_1 + W_2$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \langle n \,|\frac{1}{2}bx^2\,|n\rangle$$

Znajdźmy teraz poziomy energii zaburzonego oscylatora stosując stacjonarny rachunek zaburzeń.

Z dokładnością do drugiego rzędu w $H' = \frac{1}{2}bx^2$

$$\begin{aligned} W &\approx W_0 + W_1 + W_2 \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \langle n\,|\frac{1}{2}bx^2\,|n\rangle + \sum_{k\neq n} \frac{\left|\left\langle n|\frac{1}{2}bx^2|k\right\rangle\right|^2}{E_n - E_k} \end{aligned}$$

Znajdźmy teraz poziomy energii zaburzonego oscylatora stosując stacjonarny rachunek zaburzeń.
Z dokładnością do drugiego rzędu w $H' = \frac{1}{2}bx^2$

$$
\begin{aligned}
W &\approx W_0 + W_1 + W_2 \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \langle n \,|\frac{1}{2}bx^2\, |n\rangle + \sum_{k \neq n} \frac{\left|\left\langle n|\frac{1}{2}bx^2|k\right\rangle\right|^2}{E_n - E_k} \\
&=
\end{aligned}
$$

Znajdźmy teraz poziomy energii zaburzonego oscylatora stosując stacjonarny rachunek zaburzeń.
Z dokładnością do drugiego rzędu w $H' = \frac{1}{2}bx^2$

$$\begin{aligned} W &\approx W_0 + W_1 + W_2 \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \langle n\,|\frac{1}{2}bx^2\,|n\rangle + \sum_{k\neq n}\frac{\left|\left\langle n|\frac{1}{2}bx^2|k\right\rangle\right|^2}{E_n - E_k} \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 \end{aligned}$$

Znajdźmy teraz poziomy energii zaburzonego oscylatora stosując stacjonarny rachunek zaburzeń.
Z dokładnością do drugiego rzędu w $H' = \frac{1}{2}bx^2$

$$\begin{aligned} W &\approx W_0 + W_1 + W_2 \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \langle n \,|\frac{1}{2}bx^2\,| n\rangle + \sum_{k\neq n}\frac{\left|\left\langle n|\frac{1}{2}bx^2|k\right\rangle\right|^2}{E_n - E_k} \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \frac{1}{2}b\,\langle n\,|x^2\,|n\rangle \end{aligned}$$

Znajdźmy teraz poziomy energii zaburzonego oscylatora stosując stacjonarny rachunek zaburzeń.
Z dokładnością do drugiego rzędu w $H' = \frac{1}{2}bx^2$

$$
\begin{aligned}
W &\approx W_0 + W_1 + W_2 \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \langle n \,| \frac{1}{2}bx^2 \,| n \rangle + \sum_{k \neq n} \frac{\left|\left\langle n | \frac{1}{2}bx^2 | k \right\rangle\right|^2}{E_n - E_k} \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \frac{1}{2}b\,\langle n \,| x^2 \,| n \rangle + \frac{1}{4}b^2 \sum_{k \neq n} \frac{\left|\langle n | x^2 | k \rangle\right|^2}{E_n - E_k}.
\end{aligned}
$$

Znajdźmy teraz poziomy energii zaburzonego oscylatora stosując stacjonarny rachunek zaburzeń.

Z dokładnością do drugiego rzędu w $H' = \frac{1}{2}bx^2$

$$\begin{aligned} W &\approx W_0 + W_1 + W_2 \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \langle n\,|\frac{1}{2}bx^2\,|n\rangle + \sum_{k\neq n}\frac{\left|\left\langle n|\frac{1}{2}bx^2|k\right\rangle\right|^2}{E_n - E_k} \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \frac{1}{2}b\,\langle n\,|x^2\,|n\rangle + \frac{1}{4}b^2\sum_{k\neq n}\frac{\left|\left\langle n|x^2|k\right\rangle\right|^2}{E_n - E_k}. \end{aligned}$$

Musimy policzyć element macierzowy

$$\left\langle n|x^2|k\right\rangle$$

Znajdźmy teraz poziomy energii zaburzonego oscylatora stosując stacjonarny rachunek zaburzeń.
Z dokładnością do drugiego rzędu w $H' = \frac{1}{2}bx^2$

$$\begin{aligned} W &\approx W_0 + W_1 + W_2 \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \langle n | \frac{1}{2}bx^2 | n \rangle + \sum_{k\neq n} \frac{\left|\left\langle n | \frac{1}{2}bx^2 | k \right\rangle\right|^2}{E_n - E_k} \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \frac{1}{2}b \langle n | x^2 | n \rangle + \frac{1}{4}b^2 \sum_{k\neq n} \frac{\left|\langle n | x^2 | k \rangle\right|^2}{E_n - E_k}. \end{aligned}$$

Musimy policzyć element macierzowy

$$\left\langle n | x^2 | k \right\rangle = \sum_m \langle n | x | m \rangle \langle m | x | k \rangle .$$

Znajdźmy teraz poziomy energii zaburzonego oscylatora stosując stacjonarny rachunek zaburzeń.
Z dokładnością do drugiego rzędu w $H' = \frac{1}{2}bx^2$

$$\begin{aligned} W &\approx W_0 + W_1 + W_2 \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \langle n\, |\frac{1}{2}bx^2\, |n\rangle + \sum_{k\neq n} \frac{\left|\left\langle n|\frac{1}{2}bx^2|k\right\rangle\right|^2}{E_n - E_k} \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \frac{1}{2}b\,\langle n\, |x^2\, |n\rangle + \frac{1}{4}b^2 \sum_{k\neq n} \frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n - E_k}. \end{aligned}$$

Musimy policzyć element macierzowy

$$\left\langle n|x^2|k\right\rangle = \sum_m \langle n|x|m\rangle \langle m|x|k\rangle \,.$$

Przypomnijmy definicję operatorów a i $a^\dagger$

$$a = \frac{i}{\sqrt{2\mu\hbar\omega_0}}\left(p - i\mu\omega_0 x\right), \quad a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2\mu\hbar\omega_0}}\left(p + i\mu\omega_0 x\right)$$

i ich macierze w reprezentacji energetycznej

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}, \qquad a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}.$$

Przypomnijmy definicję operatorów a i $a^\dagger$

$$a = \frac{i}{\sqrt{2\mu\hbar\omega_0}}\left(p - i\mu\omega_0 x\right), \quad a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2\mu\hbar\omega_0}}\left(p + i\mu\omega_0 x\right)$$

i ich macierze w reprezentacji energetycznej

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \qquad a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Stąd operator x, który wyraża się wzorem

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega_0}} \left(a^\dagger + a\right),$$

ma w reprezentacji energetycznej postać

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega_0}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix}.$$

Stąd operator x, który wyraża się wzorem

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega_0}}\left(a^\dagger + a\right),$$

ma w reprezentacji energetycznej postać

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega_0}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}.$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}$$

$$=$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\Bigg($$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\left(\begin{matrix} 1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right.$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ & \\ & \\ & \end{matrix} \right.
\end{aligned}
$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\left(\begin{matrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ & & \\ & & \end{matrix} \right.$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\left(\begin{matrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \right.$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\left(\begin{matrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ & & & & \\ & & & & \end{matrix} \right.$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \right.$$

Stacjonarny rachunek zaburzeń

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & & \\ & & & & \\ & & & & \end{matrix} \right.
\end{aligned}
$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\left(\begin{matrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{2 \cdot 3} & \\ & & & & \\ & & & & \end{matrix}\right.$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{2\cdot 3} & \cdots \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \right.$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\left(\begin{matrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{2\cdot 3} & \cdots \\ \sqrt{2} & & & & \end{matrix} \right.$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{2\cdot 3} & \cdots \\ \sqrt{2} & 0 & & & \\ & & & & \end{array}\right.$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\left(\begin{matrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{2\cdot 3} & \cdots \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & & \\ & & & & \end{matrix}\right.$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\left(\begin{matrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{2\cdot 3} & \cdots \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & \\ & & & & \end{matrix}\right.$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\left(\begin{matrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{2\cdot 3} & \cdots \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & \cdots \\ & & & & \end{matrix} \right.$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{2\cdot 3} & \cdots \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & \cdots \\ 0 & & & & \end{array}\right.$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{2\cdot 3} & \cdots \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2\cdot 3} & & & \end{array} \right.$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\left(\begin{matrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{2\cdot 3} & \cdots \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2\cdot 3} & 0 & & \end{matrix}\right.$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{2\cdot 3} & \cdots \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2\cdot 3} & 0 & 7 & \end{array} \right.$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\left(\begin{matrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{2\cdot 3} & \cdots \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2\cdot 3} & 0 & 7 & \cdots \end{matrix}\right.
\end{aligned}
$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{2\cdot 3} & \cdots \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2\cdot 3} & 0 & 7 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{2\cdot 3} & \cdots \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2\cdot 3} & 0 & 7 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix}$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{2\cdot 3} & \cdots \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2\cdot 3} & 0 & 7 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}.$$

Znajdźmy macierz operatora x^2

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{2\cdot 3} & \cdots \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2\cdot 3} & 0 & 7 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{2\cdot 3} & \cdots \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2\cdot 3} & 0 & 7 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}$$

Widzimy, że jedyne nieznikające elementy macierzowe operatora x^2 w reprezentacji energetycznej mają postać

$$\begin{aligned} \left\langle n-2|x^2|n \right\rangle &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n-1)n} \\ \left\langle n|x^2|n \right\rangle &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}(2n+1) \\ \left\langle n+2|x^2|n \right\rangle &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

$$x^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{2\cdot 3} & \cdots \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2\cdot 3} & 0 & 7 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}$$

Widzimy, że jedyne nieznikające elementy macierzowe operatora x^2 w reprezentacji energetycznej mają postać

$$\begin{aligned} \left\langle n-2|x^2|n\right\rangle &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n-1)n} \\ \left\langle n|x^2|n\right\rangle &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\,(2n+1) \\ \left\langle n+2|x^2|n\right\rangle &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Wróćmy do wzoru

$$W \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \frac{1}{2} b \left\langle n \left| x^2 \right| n \right\rangle + \frac{1}{4} b^2 \sum_{k \neq n} \frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n - E_k}$$

i wykorzystajmy fakt, że jedyne nieznikające elementy macierzowe operatora x^2 w reprezentacji energetycznej mają postać

$$\begin{aligned} \left\langle n-2|x^2|n \right\rangle &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n-1)n} \\ \left\langle n|x^2|n \right\rangle &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}(2n+1) \\ \left\langle n+2|x^2|n \right\rangle &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Rozważmy sumę w ostatnim wyrazie po prawej stronie

$$\sum_{k\neq n} \frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n - E_k} = \frac{\left|\langle n|x^2|n-2\rangle\right|^2}{E_n - E_{n-2}}$$

Rozważmy sumę w ostatnim wyrazie po prawej stronie

$$\sum_{k\neq n} \frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n - E_k} = \frac{\left|\langle n|x^2|n-2\rangle\right|^2}{E_n - E_{n-2}} + \frac{\left|\langle n|x^2|n+2\rangle\right|^2}{E_n - E_{n+2}},$$

Rozważmy sumę w ostatnim wyrazie po prawej stronie

$$\sum_{k \neq n} \frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n - E_k} = \frac{\left|\langle n|x^2|n-2\rangle\right|^2}{E_n - E_{n-2}} + \frac{\left|\langle n|x^2|n+2\rangle\right|^2}{E_n - E_{n+2}},$$

ale

$$E_n - E_{n-2}$$

Rozważmy sumę w ostatnim wyrazie po prawej stronie

$$\sum_{k\neq n} \frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n - E_k} = \frac{\left|\langle n|x^2|n-2\rangle\right|^2}{E_n - E_{n-2}} + \frac{\left|\langle n|x^2|n+2\rangle\right|^2}{E_n - E_{n+2}},$$

ale

$$E_n - E_{n-2} =$$

Rozważmy sumę w ostatnim wyrazie po prawej stronie

$$\sum_{k\neq n} \frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n - E_k} = \frac{\left|\langle n|x^2|n-2\rangle\right|^2}{E_n - E_{n-2}} + \frac{\left|\langle n|x^2|n+2\rangle\right|^2}{E_n - E_{n+2}},$$

ale

$$E_n - E_{n-2} \quad = \quad \left(n + \frac{1}{2} - n + 2 - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$$

Rozważmy sumę w ostatnim wyrazie po prawej stronie

$$\sum_{k\neq n} \frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n - E_k} = \frac{\left|\langle n|x^2|n-2\rangle\right|^2}{E_n - E_{n-2}} + \frac{\left|\langle n|x^2|n+2\rangle\right|^2}{E_n - E_{n+2}},$$

ale

$$E_n - E_{n-2} \quad = \quad \left(n + \frac{1}{2} - n + 2 - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 = 2\hbar\omega_0$$

Rozważmy sumę w ostatnim wyrazie po prawej stronie

$$\sum_{k\neq n} \frac{|\langle n|x^2|k\rangle|^2}{E_n - E_k} = \frac{|\langle n|x^2|n-2\rangle|^2}{E_n - E_{n-2}} + \frac{|\langle n|x^2|n+2\rangle|^2}{E_n - E_{n+2}},$$

ale

$$E_n - E_{n-2} = \left(n + \frac{1}{2} - n + 2 - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 = 2\hbar\omega_0$$

$$E_n - E_{n+2}$$

Rozważmy sumę w ostatnim wyrazie po prawej stronie

$$\sum_{k\neq n} \frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n - E_k} = \frac{\left|\langle n|x^2|n-2\rangle\right|^2}{E_n - E_{n-2}} + \frac{\left|\langle n|x^2|n+2\rangle\right|^2}{E_n - E_{n+2}},$$

ale

$$E_n - E_{n-2} = \left(n + \frac{1}{2} - n + 2 - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 = 2\hbar\omega_0$$

$$E_n - E_{n+2} =$$

Rozważmy sumę w ostatnim wyrazie po prawej stronie

$$\sum_{k\neq n}\frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n-E_k}=\frac{\left|\langle n|x^2|n-2\rangle\right|^2}{E_n-E_{n-2}}+\frac{\left|\langle n|x^2|n+2\rangle\right|^2}{E_n-E_{n+2}},$$

ale

$$\begin{aligned} E_n-E_{n-2} &= \left(n+\frac{1}{2}-n+2-\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0=2\hbar\omega_0 \\ E_n-E_{n+2} &= \left(n+\frac{1}{2}-n-2-\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 \end{aligned}$$

Rozważmy sumę w ostatnim wyrazie po prawej stronie

$$\sum_{k\neq n} \frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n - E_k} = \frac{\left|\langle n|x^2|n-2\rangle\right|^2}{E_n - E_{n-2}} + \frac{\left|\langle n|x^2|n+2\rangle\right|^2}{E_n - E_{n+2}},$$

ale

$$\begin{aligned} E_n - E_{n-2} &= \left(n + \frac{1}{2} - n + 2 - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 = 2\hbar\omega_0 \\ E_n - E_{n+2} &= \left(n + \frac{1}{2} - n - 2 - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 = -2\hbar\omega_0 \end{aligned}$$

Rozważmy sumę w ostatnim wyrazie po prawej stronie

$$\sum_{k\neq n} \frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n - E_k} = \frac{\left|\langle n|x^2|n-2\rangle\right|^2}{E_n - E_{n-2}} + \frac{\left|\langle n|x^2|n+2\rangle\right|^2}{E_n - E_{n+2}},$$

ale

$$\begin{aligned} E_n - E_{n-2} &= \left(n + \frac{1}{2} - n + 2 - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 = 2\hbar\omega_0 \\ E_n - E_{n+2} &= \left(n + \frac{1}{2} - n - 2 - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 = -2\hbar\omega_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k\neq n} \frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n - E_k} =$$

Rozważmy sumę w ostatnim wyrazie po prawej stronie

$$\sum_{k\neq n}\frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n-E_k}=\frac{\left|\langle n|x^2|n-2\rangle\right|^2}{E_n-E_{n-2}}+\frac{\left|\langle n|x^2|n+2\rangle\right|^2}{E_n-E_{n+2}},$$

ale

$$\begin{aligned} E_n-E_{n-2} &= \left(n+\frac{1}{2}-n+2-\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 = 2\hbar\omega_0 \\ E_n-E_{n+2} &= \left(n+\frac{1}{2}-n-2-\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 = -2\hbar\omega_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k\neq n}\frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n-E_k}=\frac{1}{2\hbar\omega_0}\left(\left|\left\langle n|x^2|n-2\right\rangle\right|^2-\left|\left\langle n|x^2|n+2\right\rangle\right|^2\right).$$

Rozważmy sumę w ostatnim wyrazie po prawej stronie

$$\sum_{k\neq n} \frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n - E_k} = \frac{\left|\langle n|x^2|n-2\rangle\right|^2}{E_n - E_{n-2}} + \frac{\left|\langle n|x^2|n+2\rangle\right|^2}{E_n - E_{n+2}},$$

ale

$$\begin{aligned} E_n - E_{n-2} &= \left(n + \frac{1}{2} - n + 2 - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 = 2\hbar\omega_0 \\ E_n - E_{n+2} &= \left(n + \frac{1}{2} - n - 2 - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 = -2\hbar\omega_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k\neq n} \frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n - E_k} = \frac{1}{2\hbar\omega_0}\left(\left|\left\langle n|x^2|n-2\right\rangle\right|^2 - \left|\left\langle n|x^2|n+2\right\rangle\right|^2\right).$$

Biorąc pod uwagę równania

$$\left\langle n-2|x^2|n\right\rangle = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n-1)n}$$
$$\left\langle n+2|x^2|n\right\rangle = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n+1)(n+2)}$$

Biorąc pod uwagę równania

$$\begin{aligned}\left\langle n-2|x^2|n\right\rangle &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n-1)n}\\ \left\langle n+2|x^2|n\right\rangle &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

otrzymamy

$$\sum_{k\neq n}\frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n-E_k}=$$

Biorąc pod uwagę równania

$$\begin{aligned}\left\langle n-2|x^2|n\right\rangle &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n-1)n} \\ \left\langle n+2|x^2|n\right\rangle &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

otrzymamy

$$\sum_{k\neq n}\frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n-E_k}=\frac{1}{2\hbar\omega_0}\left(\left|\left\langle n|x^2|n-2\right\rangle\right|^2-\left|\left\langle n|x^2|n+2\right\rangle\right|^2\right)$$

Biorąc pod uwagę równania

$$\begin{aligned}\left\langle n-2|x^2|n\right\rangle &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n-1)n}\\ \left\langle n+2|x^2|n\right\rangle &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

otrzymamy

$$\sum_{k\neq n}\frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n-E_k} = \frac{1}{2\hbar\omega_0}\left(\left|\left\langle n|x^2|n-2\right\rangle\right|^2 - \left|\left\langle n|x^2|n+2\right\rangle\right|^2\right)$$

$$=$$

Biorąc pod uwagę równania

$$\left\langle n-2|x^2|n\right\rangle = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n-1)n}$$
$$\left\langle n+2|x^2|n\right\rangle = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n+1)(n+2)}$$

otrzymamy

$$\sum_{k\neq n}\frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n-E_k} = \frac{1}{2\hbar\omega_0}\left(\left|\left\langle n|x^2|n-2\right\rangle\right|^2 - \left|\left\langle n|x^2|n+2\right\rangle\right|^2\right)$$
$$= \frac{1}{2\hbar\omega_0}\left(\frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\right)^2\left((n-1)n-(n+1)(n+2)\right)$$

Biorąc pod uwagę równania

$$\left\langle n-2|x^2|n\right\rangle = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n-1)n}$$
$$\left\langle n+2|x^2|n\right\rangle = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n+1)(n+2)}$$

otrzymamy

$$\sum_{k\neq n}\frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n-E_k} = \frac{1}{2\hbar\omega_0}\left(\left|\left\langle n|x^2|n-2\right\rangle\right|^2-\left|\left\langle n|x^2|n+2\right\rangle\right|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2\hbar\omega_0}\left(\frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\right)^2\Big((n-1)n-(n+1)(n+2)\Big)$$

$$=$$

Biorąc pod uwagę równania

$$\begin{aligned}\left\langle n-2|x^2|n\right\rangle &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n-1)n} \\ \left\langle n+2|x^2|n\right\rangle &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

otrzymamy

$$\sum_{k\neq n}\frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n-E_k} = \frac{1}{2\hbar\omega_0}\left(\left|\left\langle n|x^2|n-2\right\rangle\right|^2 - \left|\left\langle n|x^2|n+2\right\rangle\right|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2\hbar\omega_0}\left(\frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\right)^2\Big((n-1)n-(n+1)(n+2)\Big)$$

$$= \frac{\hbar}{8\mu^2\omega_0^3}(-4n-2)$$

Biorąc pod uwagę równania

$$\begin{aligned}\left\langle n-2|x^2|n\right\rangle &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n-1)n}\\ \left\langle n+2|x^2|n\right\rangle &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

otrzymamy

$$\sum_{k\neq n}\frac{|\langle n|x^2|k\rangle|^2}{E_n-E_k} = \frac{1}{2\hbar\omega_0}\left(\left|\left\langle n|x^2|n-2\right\rangle\right|^2-\left|\left\langle n|x^2|n+2\right\rangle\right|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2\hbar\omega_0}\left(\frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\right)^2\Big((n-1)n-(n+1)(n+2)\Big)$$

$$= \frac{\hbar}{8\mu^2\omega_0^3}(-4n-2) = -\frac{\hbar}{4\mu^2\omega_0^3}(2n+1)\,.$$

Biorąc pod uwagę równania

$$\begin{aligned}\left\langle n-2|x^2|n\right\rangle &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n-1)n}\\ \left\langle n+2|x^2|n\right\rangle &= \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\sqrt{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

otrzymamy

$$\sum_{k\neq n}\frac{|\langle n|x^2|k\rangle|^2}{E_n-E_k} = \frac{1}{2\hbar\omega_0}\left(\left|\left\langle n|x^2|n-2\right\rangle\right|^2 - \left|\left\langle n|x^2|n+2\right\rangle\right|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2\hbar\omega_0}\left(\frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\right)^2\Big((n-1)n-(n+1)(n+2)\Big)$$

$$= \frac{\hbar}{8\mu^2\omega_0^3}(-4n-2) = -\frac{\hbar}{4\mu^2\omega_0^3}(2n+1).$$

Wstawmy wyniki

$$\sum_{k\neq n} \frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n - E_k} = -\frac{\hbar}{4\mu^2\omega_0^3}(2n+1)\,, \quad \left\langle n|x^2|n\right\rangle = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}(2n+1)$$

do wzoru

$$W \approx \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \frac{1}{2}b\left\langle n\left|x^2\right|n\right\rangle + \frac{1}{4}b^2\sum_{k\neq n}\frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n - E_k}$$

Wstawmy wyniki

$$\sum_{k\neq n} \frac{\left|\left\langle n|x^2|k\right\rangle\right|^2}{E_n - E_k} = -\frac{\hbar}{4\mu^2\omega_0^3}\left(2n+1\right), \quad \left\langle n|x^2|n\right\rangle = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\left(2n+1\right)$$

do wzoru

$$W \quad \approx \quad \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \frac{1}{2}b\left\langle n\left|x^2\right|n\right\rangle + \frac{1}{4}b^2\sum_{k\neq n}\frac{\left|\left\langle n|x^2|k\right\rangle\right|^2}{E_n - E_k}$$

$$=$$

Wstawmy wyniki

$$\sum_{k\neq n}\frac{\left|\left\langle n|x^2|k\right\rangle\right|^2}{E_n-E_k}=-\frac{\hbar}{4\mu^2\omega_0^3}\left(2n+1\right), \quad \left\langle n|x^2|n\right\rangle=\frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\left(2n+1\right)$$

do wzoru

$$\begin{aligned} W &\approx \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0+\frac{1}{2}b\left\langle n\left|x^2\right|n\right\rangle+\frac{1}{4}b^2\sum_{k\neq n}\frac{\left|\left\langle n|x^2|k\right\rangle\right|^2}{E_n-E_k} \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0+\frac{1}{2}b\cdot\frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\left(2n+1\right)-\frac{1}{4}b^2\frac{\hbar}{4\mu^2\omega_0^3}\left(2n+1\right) \end{aligned}$$

Wstawmy wyniki

$$\sum_{k\neq n} \frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n - E_k} = -\frac{\hbar}{4\mu^2\omega_0^3}(2n+1), \quad \left\langle n|x^2|n\right\rangle = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}(2n+1)$$

do wzoru

$$\begin{aligned} W &\approx \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \frac{1}{2}b\left\langle n\left|x^2\right|n\right\rangle + \frac{1}{4}b^2\sum_{k\neq n}\frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n - E_k} \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \frac{1}{2}b\cdot\frac{\hbar}{2\mu\omega_0}(2n+1) - \frac{1}{4}b^2\frac{\hbar}{4\mu^2\omega_0^3}(2n+1) \\ &= \end{aligned}$$

Wstawmy wyniki

$$\sum_{k\neq n}\frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n-E_k}=-\frac{\hbar}{4\mu^2\omega_0^3}\,(2n+1)\,,\quad \left\langle n|x^2|n\right\rangle=\frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\,(2n+1)$$

do wzoru

$$\begin{aligned} W &\approx \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0+\frac{1}{2}b\left\langle n\left|x^2\right|n\right\rangle+\frac{1}{4}b^2\sum_{k\neq n}\frac{\left|\langle n|x^2|k\rangle\right|^2}{E_n-E_k} \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0+\frac{1}{2}b\cdot\frac{\hbar}{2\mu\omega_0}\,(2n+1)-\frac{1}{4}b^2\frac{\hbar}{4\mu^2\omega_0^3}\,(2n+1) \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0\left(1+\frac{b}{2\mu\omega_0^2}-\frac{b^2}{8\mu^2\omega_0^4}\right). \end{aligned}$$

Wstawmy wyniki

$$\sum_{k\neq n} \frac{\left|\left\langle n|x^2|k\right\rangle\right|^2}{E_n - E_k} = -\frac{\hbar}{4\mu^2\omega_0^3}(2n+1), \quad \left\langle n|x^2|n\right\rangle = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}(2n+1)$$

do wzoru

$$\begin{aligned} W &\approx \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \frac{1}{2}b\left\langle n\left|x^2\right|n\right\rangle + \frac{1}{4}b^2\sum_{k\neq n}\frac{\left|\left\langle n|x^2|k\right\rangle\right|^2}{E_n - E_k} \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \frac{1}{2}b\cdot\frac{\hbar}{2\mu\omega_0}(2n+1) - \frac{1}{4}b^2\frac{\hbar}{4\mu^2\omega_0^3}(2n+1) \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0\left(1+\frac{b}{2\mu\omega_0^2} - \frac{b^2}{8\mu^2\omega_0^4}\right). \end{aligned}$$

Uwzględniając, że $\omega_0^2 = \frac{K}{\mu}$ otrzymamy

$$W \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0\left(1 + \frac{b}{2\mu\omega_0^2} - \frac{b^2}{8\mu^2\omega_0^4}\right)$$

$$=$$

Uwzględniając, że $\omega_0^2 = \frac{K}{\mu}$ otrzymamy

$$\begin{aligned} W &\approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0\left(1 + \frac{b}{2\mu\omega_0^2} - \frac{b^2}{8\mu^2\omega_0^4}\right) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0\left(1 + \frac{b}{2K} - \frac{b^2}{8K^2}\right), \end{aligned}$$

Uwzględniając, że $\omega_0^2 = \frac{K}{\mu}$ otrzymamy

$$
\begin{aligned}
W &\approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_0 \left(1 + \frac{b}{2\mu\omega_0^2} - \frac{b^2}{8\mu^2\omega_0^4}\right) \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_0 \left(1 + \frac{b}{2K} - \frac{b^2}{8K^2}\right),
\end{aligned}
$$

co dokładnie zgadza się z rozwinięciem ścisłego wzoru na energię zaburzonego oscylatora harmonicznego.

Uwzględniając, że $\omega_0^2 = \frac{K}{\mu}$ otrzymamy

$$
\begin{aligned}
W &\approx \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0\left(1+\frac{b}{2\mu\omega_0^2}-\frac{b^2}{8\mu^2\omega_0^4}\right) \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0\left(1+\frac{b}{2K}-\frac{b^2}{8K^2}\right),
\end{aligned}
$$

co dokładnie zgadza się z rozwinięciem ścisłego wzoru na energię zaburzonego oscylatora harmonicznego.

Degeneracja stanu niezaburzonego

Dotychczas zakładaliśmy, że wybrany przez nas stan własny $|\psi_0\rangle = |m\rangle$ niezaburzonego hamiltonianu H_0 jest niezdegenerowany.

Załóżmy, że istnieją dwa liniowo niezależne stany $|m\rangle$ i $|n\rangle$ o tej samej energii niezaburzonej $W_0 = E_m = E_n$.

Degeneracja stanu niezaburzonego

Dotychczas zakładaliśmy, że wybrany przez nas stan własny $|\psi_0\rangle = |m\rangle$ niezaburzonego hamiltonianu H_0 jest niezdegenerowany.

Załóżmy, że istnieją dwa liniowo niezależne stany $|m\rangle$ i $|n\rangle$ o tej samej energii niezaburzonej $W_0 = E_m = E_n$.

Wówczas we wzorze

$$a_n^{(1)} = \frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_m - E_n}$$

pojawia się problem, bo $E_m - E_n = 0$.

Degeneracja stanu niezaburzonego

Dotychczas zakładaliśmy, że wybrany przez nas stan własny $|\psi_0\rangle = |m\rangle$ niezaburzonego hamiltonianu H_0 jest niezdegenerowany.

Załóżmy, że istnieją dwa liniowo niezależne stany $|m\rangle$ i $|n\rangle$ o tej samej energii niezaburzonej $W_0 = E_m = E_n$.

Wówczas we wzorze

$$a_n^{(1)} = \frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_m - E_n}$$

pojawia się problem, bo $E_m - E_n = 0$.

Stan niezaburzony $|\psi_0\rangle$ o energii $W_0 = E_m = E_n$ może być dowolną kombinacją liniową stanów $|m\rangle$ i $|n\rangle$:

$$|\psi_0\rangle = c_m\,|m\rangle + c_n\,|n\rangle\,.$$

Kombinację tę powinniśmy wybrać w taki sposób, aby zaburzony stan $|\psi\rangle$, który z założenia jest analityczną funkcją parametru λ i może być rozwinięty w szereg

$$|\psi\rangle \;=\; |\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + \lambda^3\,|\psi_3\rangle + \ldots,$$

dążył do $|\psi_0\rangle$ przy $\lambda \to 0$, tzn. w punkcie $\lambda = 0$ nie może być nieciągłości.

Degeneracja stanu niezaburzonego

Stan niezaburzony $|\psi_0\rangle$ o energii $W_0 = E_m = E_n$ może być dowolną kombinacją liniową stanów $|m\rangle$ i $|n\rangle$:

$$|\psi_0\rangle = c_m\,|m\rangle + c_n\,|n\rangle\,.$$

Kombinację tę powinniśmy wybrać w taki sposób, aby zaburzony stan $|\psi\rangle$, który z założenia jest analityczną funkcją parametru λ i może być rozwinięty w szereg

$$|\psi\rangle \;=\; |\psi_0\rangle + \lambda\,|\psi_1\rangle + \lambda^2\,|\psi_2\rangle + \lambda^3\,|\psi_3\rangle + \ldots,$$

dążył do $|\psi_0\rangle$ przy $\lambda \to 0$, tzn. w punkcie $\lambda = 0$ nie może być nieciągłości.

Rozważmy ponownie drugie równanie naszego układu

$$(H_0 - W_0) |\psi_1\rangle = (W_1 - H') |\psi_0\rangle .$$

Wstawmy $|\psi_0\rangle = c_m |m\rangle + c_n |n\rangle$ i pomnóżmy to równanie obustronie najpierw przez $\langle m|$, a następnie przez $\langle n|$

$$\begin{aligned} \langle m| (H_0 - W_0) |\psi_1\rangle &= \langle m| (W_1 - H') (c_m |m\rangle + c_n |n\rangle) , \\ \langle n| (H_0 - W_0) |\psi_1\rangle &= \langle n| (W_1 - H') (c_m |m\rangle + c_n |n\rangle) . \end{aligned}$$

Rozważmy ponownie drugie równanie naszego układu

$$(H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle = (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle\,.$$

Wstawmy $|\psi_0\rangle = c_m\,|m\rangle + c_n\,|n\rangle$ i pomnóżmy to równanie obustronnie najpierw przez $\langle m|$, a następnie przez $\langle n|$

$$\begin{aligned}\langle m|\,(H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= \langle m|\,(W_1 - H')\,(c_m\,|m\rangle + c_n\,|n\rangle)\,,\\ \langle n|\,(H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= \langle n|\,(W_1 - H')\,(c_m\,|m\rangle + c_n\,|n\rangle)\,.\end{aligned}$$

Lewe strony tych równań są równe 0, gdyż $W_0 = E_m = E_n$

$$\begin{aligned}\langle m|\,(H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= (E_m - W_0)\,\langle m|\psi_1\rangle = 0,\\ \langle n|\,(H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= (E_n - W_0)\,\langle n|\psi_1\rangle = 0.\end{aligned}$$

Degeneracja stanu niezaburzonego

Rozważmy ponownie drugie równanie naszego układu

$$(H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle = (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle\,.$$

Wstawmy $|\psi_0\rangle = c_m\,|m\rangle + c_n\,|n\rangle$ i pomnóżmy to równanie obustronnie najpierw przez $\langle m|$, a następnie przez $\langle n|$

$$\begin{aligned}\langle m|\,(H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= \langle m|\,(W_1 - H')\,(c_m\,|m\rangle + c_n\,|n\rangle)\,,\\ \langle n|\,(H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= \langle n|\,(W_1 - H')\,(c_m\,|m\rangle + c_n\,|n\rangle)\,.\end{aligned}$$

Lewe strony tych równań są równe 0, gdyż $W_0 = E_m = E_n$

$$\begin{aligned}\langle m|\,(H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= (E_m - W_0)\,\langle m|\psi_1\rangle = 0,\\ \langle n|\,(H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle &= (E_n - W_0)\,\langle n|\psi_1\rangle = 0.\end{aligned}$$

Otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} \langle m| \left(W_1 - H'\right)\left(c_m |m\rangle + c_n |n\rangle\right) &= 0, \\ \langle n| \left(W_1 - H'\right)\left(c_m |m\rangle + c_n |n\rangle\right) &= 0, \end{aligned}$$

który po uporządkowaniu i skorzystaniu z warunku ortonormalności dla zdegenerowanych stanów niezaburzonych, $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$, przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \left(\langle m|H'|m\rangle - W_1\right) c_m + \langle m|H'|n\rangle c_n &= 0, \\ \langle n|H'|m\rangle c_m + \left(\langle n|H'|n\rangle - W_1\right) c_n &= 0. \end{aligned}$$

Degeneracja stanu niezaburzonego

Otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} \langle m| \left(W_1 - H'\right)\left(c_m |m\rangle + c_n |n\rangle\right) &= 0, \\ \langle n| \left(W_1 - H'\right)\left(c_m |m\rangle + c_n |n\rangle\right) &= 0, \end{aligned}$$

który po uporządkowaniu i skorzystaniu z warunku ortonormalności dla zdegenerowanych stanów niezaburzonych, $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$, przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \left(\langle m|H'|m\rangle - W_1\right) c_m + \langle m|H'|n\rangle c_n &= 0, \\ \langle n|H'|m\rangle c_m + \left(\langle n|H'|n\rangle - W_1\right) c_n &= 0. \end{aligned}$$

Jest to jednorodny układ równań na współczynniki c_m i c_n, który ma niezerowe rozwiązania tylko gdy znika jego wyznacznik.

Otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned}\langle m|\left(W_1 - H'\right)\left(c_m\,|m\rangle + c_n\,|n\rangle\right) &= 0,\\ \langle n|\left(W_1 - H'\right)\left(c_m\,|m\rangle + c_n\,|n\rangle\right) &= 0,\end{aligned}$$

który po uporządkowaniu i skorzystaniu z warunku ortonormalności dla zdegenerowanych stanów niezaburzonych, $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$, przyjmuje postać

$$\begin{aligned}\left(\langle m|H'|m\rangle - W_1\right) c_m + \langle m|H'|n\rangle\, c_n &= 0,\\ \langle n|H'|m\rangle\, c_m + \left(\langle n|H'|n\rangle - W_1\right) c_n &= 0.\end{aligned}$$

Jest to jednorodny układ równań na współczynniki c_m i c_n, który ma niezerowe rozwiązania tylko gdy znika jego wyznacznik.

Degeneracja stanu niezaburzonego

$$\Big(\langle m|H'|m\rangle - W_1\Big)\Big(\langle n|H'|n\rangle - W_1\Big) - \langle m|H'|n\rangle\,\langle n|H'|m\rangle = 0$$

Przekształćmy to równanie

$$\begin{aligned} W_1^2 \;&-\; \Big(\langle m|H'|m\rangle + \langle n|H'|n\rangle\Big) W_1 \\ &+\; \langle m|H'|m\rangle\,\langle n|H'|n\rangle - \big|\langle n|H'|m\rangle\big|^2 = 0. \end{aligned}$$

Degeneracja stanu niezaburzonego

$$\Big(\langle m|H'|m\rangle - W_1 \Big)\Big(\langle n|H'|n\rangle - W_1 \Big) - \langle m|H'|n\rangle \langle n|H'|m\rangle = 0$$

Przekształćmy to równanie

$$\begin{aligned} W_1^2 \quad &- \quad \Big(\langle m|H'|m\rangle + \langle n|H'|n\rangle \Big) W_1 \\ &+ \quad \langle m|H'|m\rangle \langle n|H'|n\rangle - \big|\langle n|H'|m\rangle\big|^2 = 0. \end{aligned}$$

Obliczmy wyróżnik

$$\begin{aligned} \Delta \quad &= \quad \Big(\langle m|H'|m\rangle + \langle n|H'|n\rangle \Big)^2 \\ &- \quad 4 \Big(\langle m|H'|m\rangle \langle n|H'|n\rangle - \big|\langle n|H'|m\rangle\big|^2 \Big) \\ &= \quad \Big(\langle m|H'|m\rangle - \langle n|H'|n\rangle \Big)^2 + 4 \big|\langle n|H'|m\rangle\big|^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

$$\Big(\langle m|H'|m\rangle - W_1 \Big)\Big(\langle n|H'|n\rangle - W_1 \Big) - \langle m|H'|n\rangle \langle n|H'|m\rangle = 0$$

Przekształćmy to równanie

$$\begin{aligned} W_1^2 \;&-\; \Big(\langle m|H'|m\rangle + \langle n|H'|n\rangle \Big) W_1 \\ &+\; \langle m|H'|m\rangle \langle n|H'|n\rangle - \big|\langle n|H'|m\rangle\big|^2 = 0. \end{aligned}$$

Obliczmy wyróżnik

$$\begin{aligned} \Delta \;&=\; \Big(\langle m|H'|m\rangle + \langle n|H'|n\rangle \Big)^2 \\ &-\; 4\left(\langle m|H'|m\rangle \langle n|H'|n\rangle - \big|\langle n|H'|m\rangle\big|^2 \right) \\ &=\; \Big(\langle m|H'|m\rangle - \langle n|H'|n\rangle \Big)^2 + 4\,\big|\langle n|H'|m\rangle\big|^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Rozwiązania mają postać

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2}\left(\langle m|H'|m\rangle + \langle n|H'|n\rangle\right) \\ &\pm \frac{1}{2}\left[\left(\langle m|H'|m\rangle - \langle n|H'|n\rangle\right)^2 + 4\left|\langle n|H'|m\rangle\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Obie wartości W_1 są rzeczywiste, gdyż diagonalne elementy macierzowe operatora hermitowskiego są rzeczywiste

$$\langle n|H'|n\rangle^* = \langle n\,|H'^{\dagger}|\,n\rangle = \langle n|H'|n\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle n|H'|n\rangle \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązania mają postać

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2}\left(\langle m|H'|m\rangle + \langle n|H'|n\rangle\right) \\ &\pm \frac{1}{2}\left[\left(\langle m|H'|m\rangle - \langle n|H'|n\rangle\right)^2 + 4\left|\langle n|H'|m\rangle\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Obie wartości W_1 są rzeczywiste, gdyż diagonalne elementy macierzowe operatora hermitowskiego są rzeczywiste

$$\langle n|H'|n\rangle^* = \langle n\,|H'^\dagger|\,n\rangle = \langle n|H'|n\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle n|H'|n\rangle \in \mathbb{R}.$$

Jeśli $\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle m|H'|m\rangle = \langle n|H'|n\rangle$ i $\langle n|H'|m\rangle = 0$, to obie wartości W_1 są równe i degeneracja nie została usunięta w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń.

Rozwiązania mają postać

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2}\left(\langle m|H'|m\rangle + \langle n|H'|n\rangle\right) \\ &\pm \frac{1}{2}\left[\left(\langle m|H'|m\rangle - \langle n|H'|n\rangle\right)^2 + 4\left|\langle n|H'|m\rangle\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Obie wartości W_1 są rzeczywiste, gdyż diagonalne elementy macierzowe operatora hermitowskiego są rzeczywiste

$$\langle n|H'|n\rangle^* = \langle n\,|H'^\dagger\,|n\rangle = \langle n|H'|n\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle n|H'|n\rangle \in \mathbb{R}.$$

Jeśli $\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle m|H'|m\rangle = \langle n|H'|n\rangle \;\; \mathrm{i} \;\; \langle n|H'|m\rangle = 0$, to obie wartości W_1 są równe i degeneracja nie została usunięta w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń.

Degeneracja stanu niezaburzonego

Jeśli $\Delta > 0$, to obie wartości W_1 są różne, co oznacza, że degeneracja została usunięta w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń.

Współczynniki c_m i c_n znajdziemy rozwiązując układ równań z każdą z dwóch znalezionych wartości W_1

$$\begin{aligned}
\left(\langle m|H'|m\rangle - W_1\right) c_m + \langle m|H'|n\rangle\, c_n &= 0, \\
\langle n|H'|m\rangle\, c_m + \left(\langle n|H'|n\rangle - W_1\right) c_n &= 0.
\end{aligned}$$

Degeneracja stanu niezaburzonego

Jeśli $\Delta > 0$, to obie wartości W_1 są różne, co oznacza, że degeneracja została usunięta w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń.

Współczynniki c_m i c_n znajdziemy rozwiązując układ równań z każdą z dwóch znalezionych wartości W_1

$$
\begin{aligned}
\left(\langle m|H'|m\rangle - W_1\right) c_m + \langle m|H'|n\rangle\, c_n &= 0, \\
\langle n|H'|m\rangle\, c_m + \left(\langle n|H'|n\rangle - W_1\right) c_n &= 0.
\end{aligned}
$$

Załóżmy, że $\langle m|H'|n\rangle \neq 0$, wtedy z pierwszego równania otrzymamy

$$
c_n = \frac{W_1 - \langle m|H'|m\rangle}{\langle m|H'|n\rangle}\, c_m .
$$

Degeneracja stanu niezaburzonego

Jeśli $\Delta > 0$, to obie wartości W_1 są różne, co oznacza, że degeneracja została usunięta w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń.
Współczynniki c_m i c_n znajdziemy rozwiązując układ równań z każdą z dwóch znalezionych wartości W_1

$$\begin{aligned} \left(\langle m|H'|m\rangle - W_1\right) c_m + \langle m|H'|n\rangle c_n &= 0, \\ \langle n|H'|m\rangle c_m + \left(\langle n|H'|n\rangle - W_1\right) c_n &= 0. \end{aligned}$$

Załóżmy, że $\langle m|H'|n\rangle \neq 0$, wtedy z pierwszego równania otrzymamy

$$c_n = \frac{W_1 - \langle m|H'|m\rangle}{\langle m|H'|n\rangle}\, c_m.$$

Degeneracja stanu niezaburzonego

Zauważmy, że ponieważ z założenia, obie wartości W_1 są różne, to znaleźliśmy dwie kombinacje liniowe zdegenerowanych stanów niezaburzonych

$$|\psi_0\rangle = c_m\, |m\rangle + c_n\, |n\rangle\,,$$

których można użyć jako punkt wyjścia do obliczeń perturbacyjnych.

Degeneracja stanu niezaburzonego

Zauważmy, że ponieważ z założenia, obie wartości W_1 są różne, to znaleźliśmy dwie kombinacje liniowe zdegenerowanych stanów niezaburzonych

$$|\psi_0\rangle = c_m\,|m\rangle + c_n\,|n\rangle\,,$$

których można użyć jako punkt wyjścia do obliczeń perturbacyjnych.

Wróćmy jeszcze raz do drugiego równania naszego układu

$$(H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle = (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle\,.$$

Wstawmy doń $|\psi_0\rangle$, $|\psi_1\rangle = \sum_l a_l^{(1)}\,|l\rangle$ i pomnóżmy je przez $\langle k|$, gdzie $k \neq m, n$

Degeneracja stanu niezaburzonego

Wróćmy jeszcze raz do drugiego równania naszego układu

$$(H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle = (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle\,.$$

Wstawmy doń $|\psi_0\rangle$, $|\psi_1\rangle = \sum_l a_l^{(1)}\,|l\rangle$ i pomnóżmy je przez $\langle k|$, gdzie $k \neq m, n$ wówczas otrzymamy

$$\langle k|\,(H_0 - W_0)\sum_l a_l^{(1)}\,|l\rangle = \langle k|\,(W_1 - H')\,(c_m\,|m\rangle + c_n\,|n\rangle)\,.$$

Degeneracja stanu niezaburzonego

Wróćmy jeszcze raz do drugiego równania naszego układu

$$(H_0 - W_0)\,|\psi_1\rangle = (W_1 - H')\,|\psi_0\rangle\,.$$

Wstawmy doń $|\psi_0\rangle$, $|\psi_1\rangle = \sum_l a_l^{(1)}\,|l\rangle$ i pomnóżmy je przez $\langle k|$, gdzie $k \neq m, n$ wówczas otrzymamy

$$\langle k|\,(H_0 - W_0)\sum_l a_l^{(1)}\,|l\rangle = \langle k|\,(W_1 - H')\,(c_m\,|m\rangle + c_n\,|n\rangle)\,.$$

Przekształćmy równanie

$$\begin{aligned}
\langle k| (H_0 - W_0) \sum_l a_l^{(1)} |l\rangle &= \langle k| (W_1 - H') (c_m |m\rangle + c_n |n\rangle) , \\
\sum_l a_l^{(1)} (E_l - E_m) \underbrace{\langle k|l\rangle}_{\delta_{kl}} &= W_1 \Big(c_m \underbrace{\langle k|m\rangle}_{0} + c_n \underbrace{\langle k|n\rangle}_{0} \Big) \\
&- (c_m \langle k|H'|m\rangle + c_n \langle k|H'|n\rangle) , \\
a_k^{(1)} (E_k - E_m)
\end{aligned}$$

Przekształćmy równanie

$$
\begin{aligned}
\langle k|\,(H_0 - W_0)\sum_l a_l^{(1)}\,|l\rangle &= \langle k|\,(W_1 - H')\,(c_m\,|m\rangle + c_n\,|n\rangle)\,,\\
\sum_l a_l^{(1)}\,(E_l - E_m)\underbrace{\langle k|l\rangle}_{\delta_{kl}} &= W_1\Big(c_m\underbrace{\langle k|m\rangle}_{0} + c_n\underbrace{\langle k|n\rangle}_{0}\Big)\\
&- \left(c_m\,\langle k|H'|m\rangle + c_n\,\langle k|H'|n\rangle\right),\\
a_k^{(1)}\,(E_k - E_m) &=
\end{aligned}
$$

Przekształćmy równanie

$$\begin{aligned}
\langle k|\,(H_0 - W_0)\sum_l a_l^{(1)}\,|l\rangle &= \langle k|\,(W_1 - H')\,(c_m\,|m\rangle + c_n\,|n\rangle)\,,\\
\sum_l a_l^{(1)}\,(E_l - E_m)\underbrace{\langle k|l\rangle}_{\delta_{kl}} &= W_1\Big(c_m\underbrace{\langle k|m\rangle}_{0} + c_n\underbrace{\langle k|n\rangle}_{0}\Big)\\
&- \left(c_m\,\langle k|H'|m\rangle + c_n\,\langle k|H'|n\rangle\right),\\
a_k^{(1)}\,(E_k - E_m) &= -\left(c_m\,\langle k|H'|m\rangle + c_n\,\langle k|H'|n\rangle\right).
\end{aligned}$$

Przekształćmy równanie

$$
\begin{aligned}
\langle k| \, (H_0 - W_0) \sum_l a_l^{(1)} \, |l\rangle &= \langle k| \, (W_1 - H') \, (c_m \, |m\rangle + c_n \, |n\rangle) \, , \\
\sum_l a_l^{(1)} \, (E_l - E_m) \underbrace{\langle k|l\rangle}_{\delta_{kl}} &= W_1 \Big(c_m \underbrace{\langle k|m\rangle}_{0} + c_n \underbrace{\langle k|n\rangle}_{0} \Big) \\
&- \left(c_m \, \langle k|H'|m\rangle + c_n \, \langle k|H'|n\rangle \right) , \\
a_k^{(1)} \, (E_k - E_m) &= - \left(c_m \, \langle k|H'|m\rangle + c_n \, \langle k|H'|n\rangle \right) .
\end{aligned}
$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$
a_k^{(1)} = - \, \frac{c_m \, \langle k|H'|m\rangle + c_n \, \langle k|H'|n\rangle}{E_k - E_m} , \quad k \neq m, n.
$$

Przekształćmy równanie

$$
\begin{aligned}
\langle k|\,(H_0 - W_0)\sum_l a_l^{(1)}\,|l\rangle &= \langle k|\,(W_1 - H')\,(c_m\,|m\rangle + c_n\,|n\rangle)\,,\\
\sum_l a_l^{(1)}\,(E_l - E_m)\underbrace{\langle k|l\rangle}_{\delta_{kl}} &= W_1\Big(c_m\underbrace{\langle k|m\rangle}_{0} + c_n\underbrace{\langle k|n\rangle}_{0}\Big)\\
&- \left(c_m\,\langle k|H'|m\rangle + c_n\,\langle k|H'|n\rangle\right),\\
a_k^{(1)}\,(E_k - E_m) &= -\left(c_m\,\langle k|H'|m\rangle + c_n\,\langle k|H'|n\rangle\right).
\end{aligned}
$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$
a_k^{(1)} = -\frac{c_m\,\langle k|H'|m\rangle + c_n\,\langle k|H'|n\rangle}{E_k - E_m}, \quad k \neq m, n.
$$

Degeneracja stanu niezaburzonego

Aby znaleźć współczynniki rozwinięcia dla $k = m$ i $k = n$ zauważmy, że z warunku $\langle\psi_0|\psi_1\rangle = 0$ otrzymamy

$$\left(c_m^* \langle m| + c_n^* \langle n|\right) \sum_l a_l^{(1)} |l\rangle = \sum_l a_l^{(1)} \left(c_m^* \langle m|l\rangle + c_n^* \langle n|l\rangle\right)$$
$$= \sum_l a_l^{(1)} \left(c_m^* \delta_{ml} + c_n^* \delta_{nl}\right) = a_m^{(1)} c_m^* + a_n^{(1)} c_n^* = 0.$$

Ponieważ takie samo równanie musi być spełnione dla drugiej kombinacji liniowej $|\psi_0\rangle = c_m |m\rangle + c_n |n\rangle$ (znaleźliśmy dwa rozwiązania dla współczynników c_m i c_n), Aby znaleźć współczynniki rozwinięcia dla $k = m$ i $k = n$ zauważmy, że z warunku $\langle \psi_0 | \psi_1 \rangle = 0$ otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\left(c_m^* \langle m| + c_n^* \langle n| \right) \sum_l a_l^{(1)} |l\rangle &= \sum_l a_l^{(1)} \left(c_m^* \langle m|l\rangle + c_n^* \langle n|l\rangle \right) \\
= \quad \sum_l a_l^{(1)} \left(c_m^* \delta_{ml} + c_n^* \delta_{nl} \right) &= a_m^{(1)} c_m^* + a_n^{(1)} c_n^* = 0.
\end{aligned}
$$

Ponieważ takie samo równanie musi być spełnione dla drugiej kombinacji liniowej $|\psi_0\rangle = c_m |m\rangle + c_n |n\rangle$ (znaleźliśmy dwa rozwiązania dla współczynników c_m i c_n), to wnioskujemy, że

$$a_m^{(1)} = a_n^{(1)} = 0.$$

Aby znaleźć współczynniki rozwinięcia dla $k = m$ i $k = n$ zauważmy, że z warunku $\langle\psi_0|\psi_1\rangle = 0$ otrzymamy

$$\left(c_m^* \langle m| + c_n^* \langle n|\right) \sum_l a_l^{(1)} |l\rangle = \sum_l a_l^{(1)} \left(c_m^* \langle m|l\rangle + c_n^* \langle n|l\rangle\right)$$

$$= \sum_l a_l^{(1)} \left(c_m^* \delta_{ml} + c_n^* \delta_{nl}\right) = a_m^{(1)} c_m^* + a_n^{(1)} c_n^* = 0.$$

Ponieważ takie samo równanie musi być spełnione dla drugiej kombinacji liniowej $|\psi_0\rangle = c_m |m\rangle + c_n |n\rangle$ (znaleźliśmy dwa rozwiązania dla współczynników c_m i c_n), to wnioskujemy, że

$$a_m^{(1)} = a_n^{(1)} = 0.$$